**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**ДВНЗ «Київський електромеханічний коледж»**

# Методичні рекомендації для студентів 1 курсу з самостійного вивчення теми «Вектори та координати»

для спеціальностей
5.05020203 «Монтаж, обслуговування та ремонт автоматизованих систем керування рухом на залізничному транспорті»,
5.05020204 « Обслуговування та ремонт пристроїв електрозв'язку на транспорті»,
5. 05070103 «Електропостачання»,
5. 07010501 «Технічне обслуговування , ремонт та експлуатація тягового рухомого складу».

Викладача Дуднік С.І.

**2013**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ «Київський електромеханічний коледж»

**РОЗГЛЯНУТО ТА УХВАЛЕНО**
циклововю комісією
природничо-математичних
дисциплін
Протокол № 7 від
«09» лютого 2011 р.
Голова циклової комісії
______________(С..І.Дуднік)

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Заступник директора з НР
_________________(О. І. Марченко)

“____”____________20___ р.

# Методичні рекомендації для студентів 1 курсу для самостійного вивчення теми «Вектори та координати»

**Викладача Дуднік С.І.**

**Київ 2013**

## *Зміст*

## *Вступ.*

Векторний метод і метод координат належать в математиці до найзагальніших. Вони дають змогу зводити розв’язування різноманітних задач до обчислень, а також дають можливість мати наочне уявлення про такі найважливіші поняття математики, як числа, функції, рівняння, і про фізичні поняття.

Поняття вектора виникло для математичного описання широкого класу фізичних величин, серед яких вирізняють скалярні і векторні.

Скалярні величини характеризуються числом при обраній одиниці вимірювання. Це, наприклад , площа, маса, робота, температура тощо.

Для таких величин, як швидкість, переміщення, сила, потрібно вказати ще і їх напрям. Величини, які характеризуються невід’ємним числом при даній одиниці вимірювання (модулем) та напрямом, називаються векторними. Векторні величини звичайно зображають напрямленими відрізками.

Залежно від того, де розміщені напрямлені відрізки, розрізняють вектори на площині і вектори у просторі. Більшість визначень і фактів формулюють без урахування того, які ці вектори.

Самостійна робота студента з даною методичною розробкою дозволить систематизувати відомості з шкільного курсу математики про вектори на площині та узагальнити на випадок простору.

## Алгоритм самостійної роботи студентів по темі «Вектори та координати»

1. Вивчити теоретичний матеріал в підручнику О.М. Афанасьєва Математика, К. «Вища школа» 2002, розділ 5 с.206-234.
2. Вивчити основні формули методу координат з даного методичного посібника.
3. Законспектувати основні поняття та формули.
4. Розібрати приклади розв’язаних вправ.
5. Розв’язати свій варіант контрольної роботи за зразком.

## Вектор та його властивості.

У просторі, як і на площині, дається визначення вектора та його основних понять:

1. ***Визначення вектора***.

*Вектор* - це направлений відрізок. Позначається $\overline{a};\vec{b};\overline{AB}$ , де А – початок, В – кінець.


*Модуль вектора(абсолютна величина)* – це довжина відрізка, що задає даний вектор. Позначається : $|\overline{a}|;|\vec{b}|;|\overline{AB}|$.

*Нульовий вектор* – це вектор у якого початок співпадає з кінцем. Позначається на площині точкою. Модуль нульового вектора дорівнює нулю.

$$|\overline{a}| = 0$$

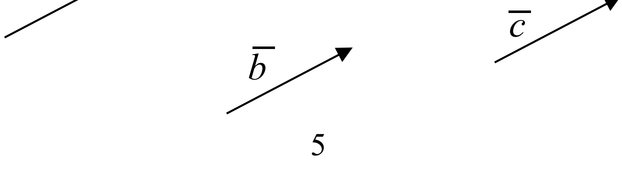
*Одиничний вектор* – це вектор довжина якого дорівнює одиниці.

$$|\vec{b}| = 1 .$$

2. ***Рівність векторів***.

Вектори називаються *рівними,* якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Рівні вектори лежать на одній прямій або на паралельних прямих, довжини їх рівні і співпадають їх напрями.

$$\overline{a} = \vec{b} = \overline{c}$$

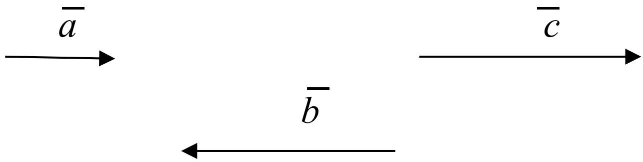


**3. *Колінеарність векторів.***

– Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

– Якщо напрямки векторів співпадають , то вони називаються *спів напрямленими* $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{c}$ , якщо протилежні, - то *протилежно напрямлені* $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ .

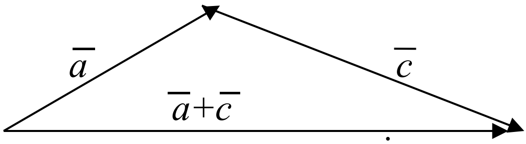
– Нульовий вектор вважають колінеарним довільному вектору.



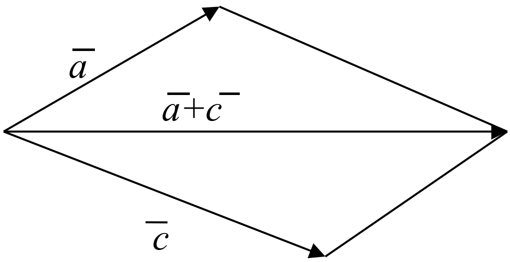

4. ***Дії над векторами***:

– *Додавання векторів:*

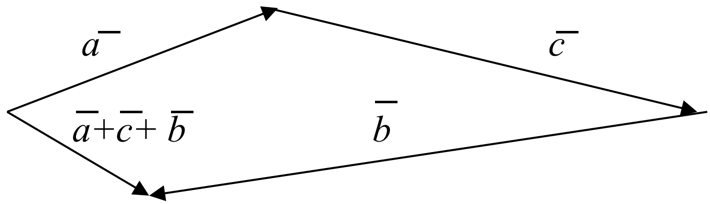
*Правило трикутника* : від кінця першого вектора відкласти другий; сумою векторів буде вектор , що з'єднує початок першого та кінець другого.



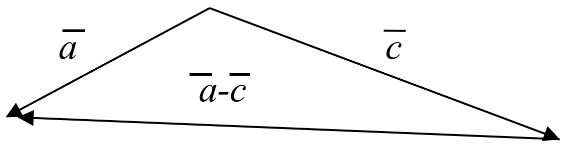

*Правило паралелограма*: відкласти два вектора від однієї точки; на них будуємо паралелограм; діагональ паралелограма з початком у початковій точці дорівнює сумі векторів.



*Правило многокутника*: щоб додати декілька векторів, треба послідовно відкладати з кінця одного вектора наступний; сумою векторів буде вектор , що з’єднує початок першого та кінець останнього вектора.

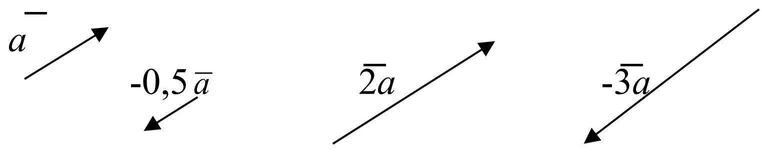



– *Віднімання:* відкласти два вектори від однієї точки; з’єднати їх кінці; вказати на ньому напрям в сторону того вектора, від якого віднімають.




– *Множення на число.*

Добутком ненульового вектора $\bar{a}$ на число $k$ називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжини (модуля) вектора на $k$. Напрям вектора збігається з напрямом вектора $\bar{a}$ , якщо $k>0$, і протилежний напряму $\bar{a}$ , якщо $k<0$ .



– *Скалярний добуток векторів.*

Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, яке дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos \angle(\overline{a}; \overline{b}).$$

Ненульові вектори $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ *перпендикулярні* тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$$

Скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{a}$ називається скалярним квадратом вектора $\overline{a}$ *і позначається* $\overline{a}^2$. Тобто*,*

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2.$$

Якщо $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ - вектори спів направлені, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|.$$

Якщо $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ - вектори протилежно направлені, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|.$$

## Основні формули методу координат

Положення точки на площині або в просторі можна охарактеризувати за допомогою набору чисел, який називають її координатами. Найбільш поширеними в математиці є прямокутні , або декартові, координати.

| НА ПЛОЩИНІ | В ПРОСТОРІ |
|---|---|
| ***Система координат*** | |
| Сукупність двох взаємно перпендикулярних прямих, на яких вказано додатній напрямок та одиничні відрізки називають прямокутною *системою координат.*<br>Перша вісь $x$ – вісь *абсцис*, друга вісь $y$ – вісь *ординат*.<br>Одиничні вектори, напрямлені вздовж осей координат, називаються *ортами:* $\bar{i}, \bar{j}$ . | Сукупність трьох взаємно перпендикулярних прямих, на яких вказано додатній напрямок та одиничні відрізки, називають прямокутною *системою координат.*<br>Перша вісь $x$ – вісь *абсцис*, друга вісь $y$ – вісь *ординат*, третя вісь $z$ – вісь *аплікат*.<br>Одиничні вектори, напрямлені вздовж осей координат називаються *ортами:* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . |
| ***Координати точки*** | |
| Кожній точці системи ставиться у відповідність пара чисел, і навпаки.<br>$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. | Кожній точці системи ставиться у відповідність трійця чисел, і навпаки.<br>$A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$. |
| ***Довжина відрізка*** | |
| $\lvert AB \rvert = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ | $\lvert AB \rvert = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$ |

| | |
|---|---|
| | |
| ***Координати середини відрізка***<br>Якщо точка С – середина відрізка АВ, то | |
| $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$. | $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$;<br>$z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$. |
| ***Поділ відрізка у заданому відношенні***<br>Якщо точка С належить відрізку АВ, то вона ділить його у відношенні<br>$m/n$, причому $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \lambda$. | |
| $x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}$;<br>$y_C = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$. | $x_C = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}$;<br>$y_C = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$;<br>$z_C = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}$. |
| ***Координати вектора*** | |
| Задається вектор координатами :<br>$\overline{a}(a_1; a_2)$.<br>Вектор, розкладений за одиничними ортами:<br>$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j}$. | Задається вектор координатами :<br>$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$.<br>Вектор, розкладений за одиничними ортами:<br>$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$. |
| Вектор, заданий координатами початку і кінця: | |
| $A(x_A; y_A)$-початок,<br>$B(x_B; y_B)$ - кінець:<br>$A\overline{B}(x_B - x_A; y_B - y_A)$. | $A(x_A; y_A; z_A)$ - початок,<br>$B(x_B; y_B; z_B)$ - кінець:<br>$A\overline{B}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ |

| | |
|---|---|
| Щоб знайти *координати вектора* треба від координат кінця відняти координати початку. | |
| ***Довжина вектора*** | |
| $\left\|\overline{a}\right\| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}$ | $\left\|\overline{a}\right\| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^2}$ |
| ***Рівність векторів*** В координатах вектори рівні , якщо відповідні їх координати рівні. | |
| $\overline{a}(a_1;a_2) = \overline{b}(b_1;b_2) \Leftrightarrow$ $a_1 = b_1; a_2 = b_2$ | $\overline{a}(a_1;a_2;a_3) = \overline{b}(b_1;b_2;b_3) \Leftrightarrow$ $a_1 = b_1; a_2 = b_2; a_3 = b_3$ |
| ***Колінеарність векторів*** Два вектори колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні. Якщо $k \succ 0$, то $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ - вектори спів направлені. Якщо $k \prec 0$, то $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ - вектори протилежно направлені | |
| $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = k$ . | $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = k$ |
| ***Дії над векторами*** | |
| Координати *суми (різниці*) двох векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат цих векторів. | |
| *Додавання:* $\overline{a}(a_1;a_2) + \overline{b}(b_1;b_2) =$ $= \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}$ | *Додавання:* $\overline{a}(a_1;a_2;a_3) + \overline{b}(b_1;b_2;b_3) =$ $= \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$ |
| *Віднімання:* $\overline{a}(a_1;a_2) - \overline{b}(b_1;b_2) =$ $= \overline{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}$ | *Віднімання:* $\overline{a}(a_1;a_2;a_3) - \overline{b}(b_1;b_2;b_3) =$ $= \overline{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$ |
| Координати *добутку вектора на число* дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на це число. | |

| | |
|---|---|
| *Множення на число:* $k\overline{a}(a_1;a_2)=\overline{(ka_1;ka_2)}$ | *Множення на число:* $k\overline{a}(a_1;a_2;a_3)=\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$ |
| *Скалярний добуток* двох векторів в координатах – це число, що дорівнює сумі добутків його відповідних координат. | |
| $\overline{a}(a_1;a_2)\cdot\overline{b}(b_1;b_2)=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$ | $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)\cdot\overline{b}(b_1;b_2;b_3)=$ $=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$ |
| ***Кут між векторами*** $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$ | |
| $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$. | $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$. |

## Векторний добуток і його властивості

***Векторним добутком*** двох векторів $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{в}(в_1, в_2, в_3)$ називається такий вектор $\overline{c}$, що задовольняє наступні умови:

1. Модуль вектора

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{в}| \cdot \sin\left(\angle \overline{a}, \overline{b}\right).$$

2. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярний площині, утвореній векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

3. Вектор $\overline{c}$ направлений так, що найкоротший оберт вектора $\overline{a}$ до $\overline{b}$ видно з кінця вектора $\overline{c}$ проти годинникової стрілки.

Позначають $\overline{a} \times \overline{в}$. Причому $\overline{a} \times \overline{в} = -\overline{в} \times \overline{a}$.

### *Векторний добуток в координатах*

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3) - \overline{j}(a_4 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3) + \overline{k}(a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2).$$

Одержали вектор, записаний через одиничні орти.

***Нормальний вектор площини*** – це вектор, що перпендикулярний до площини, тобто перпендикулярний довільному вектору, який лежить у площині.

Нормальний вектор площини , що містить вектори $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{в}(в_1, в_2, в_3)$, дорівнює векторному добутку цих векторів.

$$\overline{n} = \overline{a} \times \overline{b}.$$

***Модуль векторного добутку*** дорівнює площі паралелограма , що побудований на даних векторах.

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|.$$

***Площу трикутника*** , що утворюють дані вектори можна знайти за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|.$$

***Рівняння площини***.

Загальне рівняння площини :

$$Ax + By + Cz = 0$$

Рівняння площини, яка проходить через фіксовану току $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , за даним нормальним вектором $\overline{n}(A, B, C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

## Рівняння прямої на площині.

***Загальне рівняння прямої*** має вигляд

$$Ax + By + C = 0;$$

Якщо С=0, то $Ax + By = 0;$ пряма проходить через початок координат;

Якщо А=0, В $\neq$ 0, то $By + C = 0;$ пряма паралельна осі ОХ;

Якщо А $\neq$ 0, В=0, то $Ax + C = 0;$ пряма паралельна осі ОУ;

Якщо А =0, С=0, то $By = 0;$ пряма співпадає з віссю ОХ;

Якщо В =0, С=0, то $Ax = 0;$ пряма співпадає з віссю ОУ.

***1.*** *Рівняння прямої , яка проходить через фіксовану точку $M(x_0; y_0)$, з даним нормальним вектором $\overline{n}(A; B)$.*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

Вектор, перпендикулярний довільному вектору прямої називається *нормальним вектором прямої***.**

***2.*** *Рівняння прямої , яка проходить через фіксовану точку* $M\ \left(x_0;y_0\right)$ *, з даним направляючим вектором* $\overline{a}(n;m)$**.**

$$\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Вектор , паралельний довільному вектору на прямій , називається *направляючим вектором прямої*.

*3. Рівняння прямої , яка проходить через фіксовані точки* $M_1\left(x_1;y_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2\right)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

*4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* $k$ *(*$k=tg\varphi$, де $\varphi$ - кут між прямою та додатним напрямом осі *x*) *та початковою координатою (0,b)*- координата перетину прямою з віссю *y*.

$$y=kx+b.$$

***5.*** *Рівняння прямої в відрізках на осях (a,0), (0,b)*- точки перетину прямої з осями координат.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

## Приклади розв'язання вправ

1. Дано вектори $\overline{a}(2,-1;0)$ і $\overline{b}(-1,-7;-2)$. Знайти вектор $-2\overline{a}+5\overline{b}$ та його модуль.

*Розв'язання:*

Знайдемо координати вектора:

$$-2\overline{a}+5\overline{b}=-2\overline{(2;-1;0)}+5\overline{(-1;-7;-2)}=$$

$$=\overline{(-4+2+0)}+\overline{(-5;-35;-10)}=\overline{(-9;-33;-10)}.$$

Обчислимо модуль вектора:

$$\left|-2\overline{a}+5\overline{b}\right|=\sqrt{(-9)^2+(-33)^2+(-10)^2}=\sqrt{81+1089+100}=\sqrt{1270}$$

*Відповідь:* $\overline{(-9;-33;-10)}$; $\sqrt{1270}$.

2. Дано вектори $\overline{a}(1;-1;6)$ і $\overline{b}(-2;1;3)$. Знайти таке число $m$, щоб вектор $\overline{a}+m\overline{b}$ був перпендикулярним до вектора $\overline{a}$.

*Розв'язання:*

$$\overline{a}+m\overline{b}=\overline{(1;-1;6)}+m\overline{(-2;1;3)}=\overline{(1-2m;-1+m;6+3m)}.$$

$$\overline{a}+m\overline{b}\perp\overline{a}\Leftrightarrow\left(\overline{a}+m\overline{b}\right)\cdot\overline{a}=0.$$

$$\left(\overline{a}+m\overline{b}\right)\cdot\overline{a}=\overline{(1-2m;-1+m;6+3m)}\cdot$$

$$\overline{(1;-1;6)}=1-2m+1-m+36+18m=15m+38.$$

$$15m+38=0\Rightarrow15m=-38\Rightarrow m=\frac{-38}{15}=-2\frac{8}{15}.$$

*Відповідь:* $m=-2\dfrac{8}{15}$.

3. Знайдіть значення змінних, при яких вектори $\overline{a}(4;-3;z)$ і $\overline{b}(-2;y;10)$ будуть колінеарні.

*Розв'язання:*

$\overline{a}, \overline{b}$ - колінеарні,якщо

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Складемо відношення координат:

$$\frac{4}{-2} = \frac{-3}{y} = \frac{z}{10}.$$

За властивістю пропорції:

$$y = \frac{-2 \cdot (-3)}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5; \quad z = \frac{4 \cdot 10}{-2} = -20.$$

*Відповідь* : $y = 1{,}5$, $z = -20$.

4. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $|\overline{a}| = 3$ і $|\overline{b}| = 8$, $\varphi = 120^\circ$.

*Розв'язання:*

За формулою скалярного добутку:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a}; \overline{b})$$

знайдемо

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -12.$$

*Відповідь* :-12.

5. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}(2;-1;4)$ і $\overline{b}(3;0;-4)$ та косинус кута між ними.

*Розв'язання:*

За формулою скалярного добутку в координатах:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

знайдемо

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) = 6 - 0 - 16 = -10.$$

Використаємо формулу:

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{-10}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\cdot\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} =$$

$$\frac{-10}{\sqrt{4+1+16}\cdot\sqrt{9+0+16}} = \frac{-10}{\sqrt{21\cdot 25}} = \frac{-10}{5\sqrt{21}} = \frac{-2}{\sqrt{21}}$$

*Відповідь:*-10; $\frac{-2}{\sqrt{21}}$.

6. Знайти векторний добуток векторів $\bar{a}(-1;3;-2)$ та $\bar{b}(4;5;-7)$. Записати рівняння площини, що містить дані вектори та проходить через точку $C(1;2;-3)$. Знайти площу паралелограма, що побудований на даних векторах.

*Розв'язання:*

Застосуємо формулу векторного добутку в координатах:

$$\bar{a}\times\bar{в} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(a_2\cdot b_3 - b_2\cdot a_3) - \bar{j}(a_1\cdot b_3 - b_1\cdot a_3) + \bar{k}(a_1\cdot b_2 - b_1\cdot a_2).$$

Отримаємо:

$$\bar{a}\times\bar{в} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(3\cdot(-7) - 5\cdot(-2)) - \bar{j}(-1\cdot(-7) - 4\cdot(-2)) + \bar{k}(-1\cdot 5 - 4\cdot 3). =$$

$$= \bar{i}(-21+10) - \bar{j}(7+8) + \bar{k}(-5-12) = -11\bar{i} - 15\bar{j} - 17\bar{k}.$$

Нормальний вектор до площини , що містить дані вектори, має координати:

$$\overline{n}(-11;-15;-17).$$

Рівняння площини, яка проходить через фіксовану току $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , за даним нормальним вектором $\overline{n}(A, B, C)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

Підставимо координати :

$$-11(x-1) - 15(y-2) - 17(z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$-11\tilde{o} + 11 - 15\acute{o} + 30 - 17z - 51 = 0.$$

Загальне рівняння площини матиме вигляд:

$$-11x - 15y - 17z - 10 = 0 \quad \text{або} \quad 11x + 15y + 17z + 10 = 0 .$$

Площу паралелограма знайдемо за формулою:

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| .$$

$$S = \left|\left(\overline{-11;-15;-17}\right)\right| = \sqrt{(-11)^2 + (-15)^2 + (-17)^2} =$$

$$= \sqrt{121 + 225 + 289} = \sqrt{635} .$$

*Відповідь*: $\left(\overline{-11;-15;-17}\right)$, $11x + 15y + 17z + 10 = 0$ , $S = \sqrt{635}$ .

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4,-8)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(-3,10)$.

*Розв'язання:*

Підставимо дані координати точки та нормального вектора у формулу:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

Отримаємо :

$$-3(x-4) + 10(y+8) = 0.$$

Спростивши отримаємо рівняння прямої:

$$-3x + 12 + 10y + 80 = 0 \Rightarrow -3x + 10y + 92 = 0.$$

*Відповідь*: $-3x + 10y + 92 = 0.$

8. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $C(-3{,}5)$ паралельно вектору $\overline{a}(2,-7)$.

*Розв'язання:*

Підставимо дані координати точки та направляючого вектора у формулу:

$$\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Отримаємо:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-7}.$$

Використаємо основну властивість пропорції:

$$-7(x+3)=2(y-5)\Rightarrow -7x-21-2y+10=0\Rightarrow 7x+2y+11=0.$$

*Відповідь* : $7x+2y+11=0.$

9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M(0,-1)$ та $K(-6{,}4)$.

*Розв'язання:*

Підставимо дані координати точок у формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Одержимо:

$$\frac{x-0}{-6-0}=\frac{y+1}{4+1}.$$

За властивістю пропорції :

$$5(x-0)=-6(y+1)\Rightarrow 5(x-0)+6(y+1)\Rightarrow 5x+6y+6=0.$$

*Відповідь*: $5x+6y+6=0.$

10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(0{,}7)$ та утворює кут $45^\circ$ з додатною віссю х.

*Розв'язання:*

Для рівняння прямої застосуємо формулу:

$$y = kx + b .$$

Кутовий коефіцієнт знайдемо за формулою:

$$k = tg\varphi \Rightarrow k = tg45^{\circ} \Rightarrow k = 1.$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$y = x + 7 .$$

Рівняння прямої в загальному вигляді: $x - y + 7 = 0$ .

*Відповідь*: $x - y + 7 = 0$ .

11. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $T(9;0)$ та $K(0;-2)$.

*Розв'язання:*

Для даної прямої застосуємо формулу прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де $a = 9, b = -2$ .

Маємо:

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{-2} = 1 .$$

Помноживши дане рівняння на 18 , отримаємо рівняння прямої в загальному вигляді :

$$2x - 9y - 18 = 0.$$

*Відповідь*: $2x - 9y - 18 = 0.$

**Зразок виконання контрольної роботи.**

1. Дано координати вершин трикутника ABC в просторі, де A(1;1;1);B(-2;3;4);C(4;-5;5).

Знайти :

1) периметр трикутника;

2) косинус кута $\cos\angle A$;

3) довжину медіани BM;

4) площу трикутника;

5) записати рівняння площини трикутника.

*Розв'язання:*

1) Знайдемо координати векторів на сторонах трикутника.

$$\overline{AB}(-2-1;3-1;4-1)=\overline{(-3;2;3)}; \qquad \overline{BA}=\overline{(3;-2;-3)};$$

$$\overline{AC}(4-1;-5-1;5-1)=\overline{(3;-6;4)}; \qquad \overline{CA}=\overline{(-3;6;-4)};$$

$$\overline{CB}(-2-4;3+5;4-5)=\overline{(-6;8;-1)}; \qquad \overline{BC}=\overline{(6;-8;1)}.$$

Знайдемо довжини сторін трикутника, як модулі векторів.

$$AB=\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BA}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+3^2}=\sqrt{9+4+9}=\sqrt{22};$$

$$AC=\left|\overline{AC}\right|=\left|\overline{CA}\right|=\sqrt{3^2+(-6)^2+4^2}=\sqrt{9+36+16}=\sqrt{61};$$

$$CB=\left|\overline{CB}\right|=\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(-6)^2+8^2+(-1)^2}=\sqrt{36+64+1}=\sqrt{101}.$$

Обчислимо периметр:

$$P=AB+AC+BC=\sqrt{22}+\sqrt{61}+\sqrt{101}.$$

2) Косинус кута обчислимо за формулою:

$$\cos\angle\left(\bar{a};\bar{b}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}.$$

Для кута A формула матиме вигляд:

$$\cos\angle A=\cos\angle\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}.$$

Знайдемо скалярний добуток:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -3\cdot 3 + 2\cdot(-6) + 3\cdot 4 = -9 - 12 + 12 = -9\,.$$

Підставимо отримані значення у формулу:

$$\cos\angle A = \frac{-9}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{61}} = \frac{-9}{\sqrt{1342}}\,.$$

3) Для обчислення медіани BM необхідно знайти координати точки M - середини відрізка AC за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2};\qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2};\qquad z_M = \frac{z_A + z_C}{2}$$

$$x_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2};\quad y_M = \frac{1-5}{2} = -2;\quad z_M = \frac{1+5}{2} = 3;$$

$$M\left(\frac{5}{2};-2;3\right).$$

Знайдемо координати вектора на медіані AM:

$$\overline{BM}\left(\frac{5}{2}+2;-2-3;3-4\right) = \overline{\left(\frac{9}{2};-5;-1\right)}\,.$$

Знайдемо довжину медіани AM, як модуль вектора:

$$\text{绿} = \left|\overline{\text{绿}}\right| = \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + (-5)^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4} + 25 + 1} = \sqrt{\frac{185}{4}} = \frac{\sqrt{185}}{2}$$

4) Площу трикутника знайдемо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|,$$

де використовується векторний добуток векторів на сторонах трикутника.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 2 & 3\\ 3 & -6 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -6 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 3 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}(8+18)-\bar{j}(-12-9)+\bar{k}(18-6)=26\bar{i}+21\bar{j}+12\bar{k}.$$

Обчислимо модуль векторного добутку:

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{26^2+21^2+12^2}=\sqrt{676+441+144}=\sqrt{1261}.$$

Площа трикутника ABC:

$$S=\frac{\sqrt{1261}}{2}.$$

5) Підставимо координати точки A(1;1;1) та нормального вектора $\bar{n}(26;21;12)$ в рівняння площини:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Отримаємо

$$26(x-1)+21(y-1)+12(z-1)=0.$$

Спростивши, рівняння площини матиме вигляд:

$$26x-26+21y-21+12z-12=0\Rightarrow 26x+21y+12z-59=0.$$

*Відповідь*:

1) $P=\sqrt{22}+\sqrt{61}+\sqrt{101}$;

2) $\cos\angle A=\dfrac{-9}{\sqrt{1342}}$;

3) $BM=\dfrac{\sqrt{185}}{2}$;

4) $S=\dfrac{\sqrt{1261}}{2}$;

5) $26x+21y+12z-59=0$.

2. Дано координати вершин трикутника ABC на площині, де A$(-1;3)$, B$(0;-4)$, C$(2;5)$.

Записати рівняння прямої, що містить:

1) сторону AB;
2) медіану CD;
3) висоту BK;
4) пряму AN , яка паралельна стороні BC.

*Розв'язання:*

1) Для рівняння сторони AB використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Підставимо координати точок A $(-1;3)$ ; B $(0;-4)$ і виконаємо перетворення :

$$\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-3}{-4-3}\Rightarrow\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-7}\Rightarrow-7(x+1)=$$
$$=y-3\Rightarrow-7x-7-y+3=0\Rightarrow7x+y+4=0 .$$

Рівняння прямої AB:

$$7x+y+4=0.$$

2) Для медіани CD застосуємо ту ж формулу рівняння прямої, знайшовши спочатку координат точки D за формулами середини відрізка AB:

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}; \qquad y_D=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Обчислимо, підставивши координати точок A $(-1;3)$; B $(0;-4)$:

$$x_D=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}; \qquad y_D=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Підставимо координати точок C $(2;5)$ ,D $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ в рівняння прямої:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Отримаємо

$$\frac{x-2}{-\frac{1}{2}-2}=\frac{y-5}{-\frac{1}{2}-5}\Rightarrow-\frac{11}{2}(x-2)=-\frac{5}{2}(y-5)\Rightarrow.$$

$$-\frac{11}{2}x+11=-\frac{5}{2}y+\frac{25}{2}=0\Rightarrow-11x+5y-3=0$$

Рівняння медіани CD :

$$11x-5y+3=0.$$

3) Щоб записати рівняння висоти BK застосуємо формулу рівняння прямої через фіксовану точку з даним нормальним вектором:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Підставимо у формулу координати нормального (перпендикулярного до висоти BK) вектора $\overline{AC}(2+1;5-3)=\overline{(3;2)}$ і точки B $(0;-4)$.

$$3(x-0)+2(y+4)=0\Rightarrow 3x+2y+8=0.$$

Рівняння висоти BK:

$$3x+2y+8=0.$$

4) Для рівняння прямої AN , що паралельна стороні BC використаємо формулу прямої через фіксовану точку з направляючим вектором:

$$\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Направляючим вектором до прямої AN э вектор $\overline{BC}(2-0;5+4)=\overline{(2;9)}$, а фіксованою точкою є точка A$(-1;3)$.

Отримаємо

$$\frac{\tilde{o}+1}{2}=\frac{y-3}{9}\Rightarrow$$

$$9(\tilde{o}+1)=2(\acute{o}-3)\Rightarrow.$$

$$9\tilde{o}+9=2\acute{o}-6\Rightarrow$$

$$9\tilde{o}-2\acute{o}+15=0$$

Рівняння прямої AN:

$$9x-2y+15=0.$$

*Відповідь*:

1) AB: $7x+y+4=0$;
2) CD: $11x-5y+3=0$;
3) BK: $3x+2y+8=0$;
4) AN: $9x-2y+15=0$.

## Контрольна робота

Зміст завдання контрольної роботи однаковий для всіх студентів. Кожний варіант відрізняється координатами вершин трикутника. Нижче наведена таблиця варіантів. Номер варіанту збігається з номером прізвища студента в списку журналу. Наприклад варіант № 5 будуть виконувати студенти , прізвища яких в списку йдуть під номерами: 5 ,15, 25, 35 і т. д.

Завдання з контрольної роботи студенти виконують дома в окремому зошиті та здають викладачу у визначений термін.

Якість знань та вмінь по темі «Вектори та координати» оцінюється викладачем після перевірки класної контрольної роботи, що аналогічна домашній.

***Завдання для контрольної роботи***

1. Дано координати вершин трикутника ABC в просторі.

Знайти :

1) периметр трикутника;
2) косинус кута $\cos\angle A$;
3) довжину медіани BM;
4) площу трикутника;
5) записати рівняння площини трикутника.

2. Дано координати вершин трикутника ABC на площині.

Записати рівняння прямої, що містить:

1) сторону AB;
2) медіану CD;
3) висоту BK;
4) пряму AN , яка паралельна стороні BC.

| № | Координати вершин трикутника в просторі для завдання №1 | Координати вершин трикутника на площині для завдання №2 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1. | A(0;5;3), B(–3;–3;2), C(6;–1;1) | A(2;-1), B(3;5), C(4;3) |
| 2. | A (1;–3;2) , B (5;–1;0) , C(–3;5;–1) | A(–3;3) , B(–1;–6), C(5;0) |
| 3. | A (2;–3;–1) , B (–4;–1;2) , C(–2;4;–3) | A(2;1), B(-3;4), C(-2;-5) |
| 4. | A (–3;3;–4) , B (–1;–6;–2) , C(5;0;–1) | A(2;–3), B(–4;–1), C(–2;4) |
| 5. | A(0;1;-2), B(2;-1;0), C(1;2;-1) | A(1;–3), B(5;–1), C(–3;5) |
| 6. | A(2;-1;4), B(3;2;1), C(-1;0;-2) | A(–1;4), B(2;–5), C(2;1) |
| 7. | A(2;3;4), B(-2;-3;-4). C(0;1;3) | A(–7;9), B(0;–4), C(–2;3) |
| 8. | A(1;-2;4), B(2;0;-1), C(0;-1;2) | A(8;3), B(1;–2), C(–2;1) |
| 9. | A(2;-5;4), B(-2;3;1), C(-2;1;-3) | A(–6;–3), B(6;7), C(2;–1) |
| 10. | A(3;6;-1), B(0;-2;7), C(1;1;-8) | A(–2;–2), B(2;6), C(6;–2) |

**ЛІТЕРАТУРА**


1. *фанасьєва О. М.* Математика, К. «Вища школа» 2002.

2. *Апанасов П.Т., Орлов М.И.* Сборник задач по математике. Учебное пособие для техникумов.- К.: Вища школа, 1987.

3. *Богомолов Н.В*. Практическое занятие по математике. – М.: Высш. шк., 1979, 1983, 1990.

4. *Богомолов М.В.* Практичні заняття з математики. - К.: Вища школа, 1997.

5. *Валуцэ И. И., Дилигул Т. Д.* Математика для техникумов/на базе средней школы/.-М.: Наука, 1969.

6. *Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О. С.* Алгебра і початки аналізу. 10-11 клас.- К.; Зодіак- ЕКО, 2001.

7. *Яковлев Г. Н.* Алгебра и начала анализа. Математика для техникумов. Часть 1.-М.: Наука, 1987.

8. *Яковлев Г. Н*. Алгебра и начала анализа. Математика для техникумов. Часть II.-М.: Наука, 1987.

9. *Яковлєв Г. Н.* Геометрия .-М.: Наука, 1989.