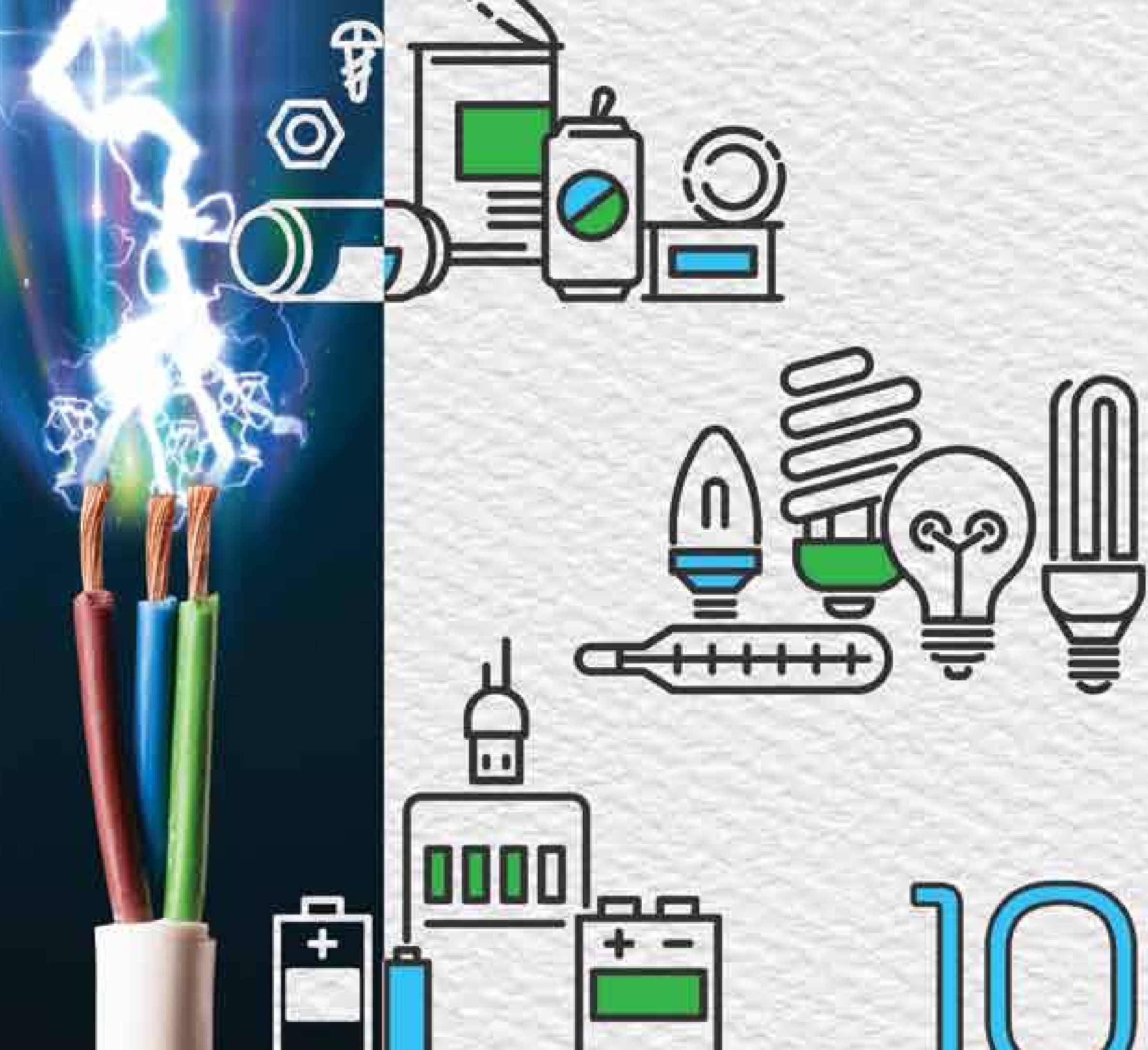
Оріон

Т. М. Засєкіна, Д. О. Засєкін

Фізика

Профільний рівень



10

УДК 53*кл10(075.3)
З-36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 31.05.2018 № 551)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Навчальне видання

ЗАСЄКІНА Тетяна Миколаївна
ЗАСЄКІН Дмитро Олександрович

ФІЗИКА

(профільний рівень,
за навчальною програмою
авторського колективу
під керівництвом Локтєва В. М.)

Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Редактор *О. С. Ісак*
Головний художник *І. П. Медведовська*
Технічний редактор *Е. А. Авраменко*
Коректор *С. В. Войтенко*

При оформленні підручника використано малюнки та фотоілюстрації авторів: *Alex Hansen, Alicia Griffin, Ben Ostrowsky, Bill Smith, Bluefin Trading, Bruce Guenter, Cathy Scola, Christopher Chan, Denis Phominov, Earl Oliver, George Kelly, George Tsimtsimis, Gilles Péris y Saborit, Giuseppe Donatiello, Iosif Szasz-Fabian, Jordan Salkin, Jorge Durán, Katherine Long, Kevin Baird, Kevin Spencer, Liang Cui, Lorenzoclick, Marcus Peaston, Mark Ovens, Markus Gan, Matthew Cole, Matthew Rutledge, MuseScore, Nolwenn Guény, Norman Graf, Pam Broviak, Paul Anderson, Pavel Vanka, Ratz Attila, Robert Couse-Baker, Roman Sigaev, Sergey Ivashutin, Анна Кабиш, Вадим Садовський, Вікторія Павленко, Інститут монокристалів, Інститут сцинтиляційних матеріалів, Наталія Андрійченко, Олег Цимбал*, а також матеріали сайту *freepik.com*.

Формат 70x100 $^1/_{16}$.
Ум. друк. арк. 24,624 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 24,00 + 0,30 форзац.
Зам. №
Наклад 6800 пр.

ТОВ «Український освітянський видавничий центр “Оріон”»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.
Адреса видавництва:
03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелєва, 2
www.orioncentr.com.ua

Віддруковано
ТОВ «МОНОЛІТ-ДРУК»
вул. Новокостянтинівська, 2А, м. Київ, 04080
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 6043 від 27.02.2018 р.

Засєкіна Т. М.
З-36 Фізика (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Т. М. Засєкіна, Д. О. Засєкін. — К. : УОВЦ «Оріон», 2018. — 304 с. : іл.
ISBN 978-617-7485-68-0.
УДК 53*кл10(075.3)

ISBN 978-617-7485-68-0

Передмова

Шановні старшокласники і старшокласниці! Нині будь-яка галузь господарства (інформаційні технології, промисловість, медицина, сільське господарство й навіть гуманітарна сфера життя суспільства) використовує сучасні технологічні установки, автоматизовані пристрої, які нібито зроблять за вас усю роботу, і вам не потрібно знати, як вони працюють. Але якщо ви хочете досягти успіху, то будете шукати способи вдосконалення того чи іншого процесу, вносити зміни, порівнювати й аналізувати різні підходи, вирішувати проблеми, працювати в команді, і тоді в пригоді вам стануть знання, здобуті в старшій школі на уроках фізики й астрономії: ваше вміння глобально мислити, бачити проблему цілісно, пов'язувати й систематизувати факти й події. Застосовуючи базові знання, здобуті в основній школі, ви навчитеся застосовувати математичний апарат для опису природних явищ і процесів, будувати моделі для опису складних процесів і, навпаки, — застосовувати ідеалістичні й теоретичні закономірності до реальних об'єктів.

А щоб вивчення цієї науки стало для вас захопливим і зрозумілим, ми намагалися в тексті підручника наводити не лише наукові факти, теорії й пояснення, а й спонукати вас проблемними запитаннями до пошуку відповіді, описом природного явища чи технологічного процесу — до аналізу й пояснення. У тексті параграфів вам буде траплятися рубрика «**Зверніть увагу**», де зазначено умови, які слід враховувати задля вирішення конкретної ситуації, яку не завжди можна розв'язати загальноприйнятими методами.

До підручника розроблено додатки, розміщені на сайті *www.orioncentr.com.ua*, де ви зможете скористатися математичною довідкою, цікавою інформацією, інструктивними матеріалами.

Підручник містить достатню кількість завдань, приклади їх розв'язування й відповіді. Проте у пригоді вам стануть і збірники задач, які ви будете використовувати на уроках-практикумах з розв'язування задач. Цьому виду діяльності ви маєте приділити особливу увагу! Знання стають вашим здобутком, якщо ви їх можете використати у практичній діяльності: розв'язуючи задачі, виконуючи досліди й навчальні проекти! Проектна робота може бути теоретичною або експериментальною, індивідуальною й груповою. Тривалість проекту різна: від уроку (міні-проект), кількох днів (короткотерміновий проект) до року (довготерміновий). Результати досліджень ви можете оформити у вигляді мультимедійної презентації, доповіді (у разі необхідності — з демонстрацією дослідів), моделі, колекції, буклета, газети, статистичного звіту, тематичного масового заходу, дебатів тощо. Вміщені у підручнику проблемні запитання й теми навчальних проектів є орієнтовними. Також ви можете самостійно (або з допомогою вчителя чи вчительки) сформулювати тему й планувати виконання навчального проекту.

Сподіваємося, що вивчення фізики за цим підручником буде для вас цікавим і нескладним.

Авторський колектив

Розділ 1

МЕХАНІКА

У цьому розділі ми розглянемо теоретичні й прикладні результати пояснення механічних процесів у природі й техніці. Для пояснення багатьох явищ потрібно буде проявити математичну компетентність — застосувати знання з алгебри й геометрії для пояснення фізичних процесів!

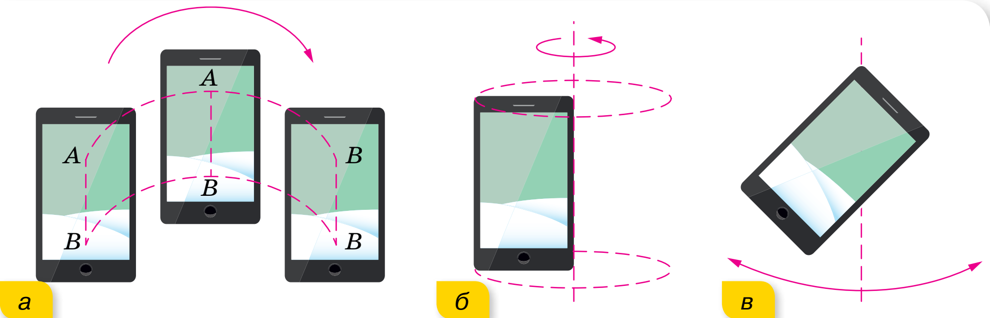
§ 1 Кінематичний опис механічного руху матеріальної точки

Види механічного руху. Науку, яка вивчає механічний рух матеріальних тіл і взаємодії, які при цьому відбуваються, називають ***механікою***. Залежно від опису руху в механіці виділяють розділи: кінематику, де вивчається рух тіл, не беручи до уваги сили; динаміку, яка вивчає рух тіл під дією сил; статику, що вивчає питання рівноваги тіл.

Проте не всі рухи можна описати законами механіки. Наприклад, рух однієї молекули можна описати законами механічного руху, а рух їх сукупності в тілі описується вже іншими — *статистичними законами*. Рух тіла зі швидкістю, близькою до швидкості світла $\left(300\,000\,\frac{\text{км}}{\text{с}}\right)$, описується *законами релятивістської механіки*. Рух і взаємодію елементарних частинок мікросвіту описують у *квантовій механіці*.

Закони механічного руху, які ми вивчатимемо в цьому розділі, поширюються на тіла макро- і мега світу, що рухаються зі швидкостями, набагато меншими від швидкості світла.

Механічні рухи тіл можуть бути різноманітні й складні. На малюнку 1 показані приклади поступального, обертального та коливального рухів.



Мал. 1. Приклади механічного руху: *а* — поступальний; *б* — обертальний; *в* — коливальний

У природі, як правило, тіла одночасно здійснюють кілька рухів. Наприклад, Земля обертається навколо власної осі, навколо Сонця, і разом із Сонцем рухається у напрямку до зорі Вега.

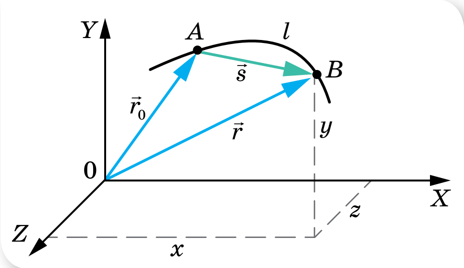
Зверніть увагу, у цьому випадку ми Землю розглядали як ***матеріальну точку***. Так можна ідеалізувати рух, якщо розміри й форма тіла в розглядуваному русі не суттєві й ними можна знехтувати. Надалі, якщо немає спеціальних застережень, вживаючи слово тіло, матимемо на увазі, що його можна розглядати як матеріальну точку.

Основною задачею механіки є опис механічного руху тіл, тобто встановлення *закону руху* (*рівняння руху*) *тіла* на основі його характеристик (координати, переміщення, довжини пройденого шляху, кута повороту, швидкості, прискорення тощо).

У тривимірній системі відліку рівняння руху математично записують так: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Дослідити рух тіла (зміну його положення у просторі з плином часу) можна і за його *траєкторією, шляхом* і *переміщенням*.

Наприклад, у початковий момент часу тіло перебуває в точці A (мал. 2), положення якої визначається ***радіусом-вектором*** $\vec{r}_0$ (так називають вектор, що сполучає початок відліку з точкою). Протягом інтервалу часу Δt тіло перемістилось у точку B, положення якої визначається радіусом-вектором $\vec{r}$. Зміну положення тіла можна визначити за його ***переміщенням***.



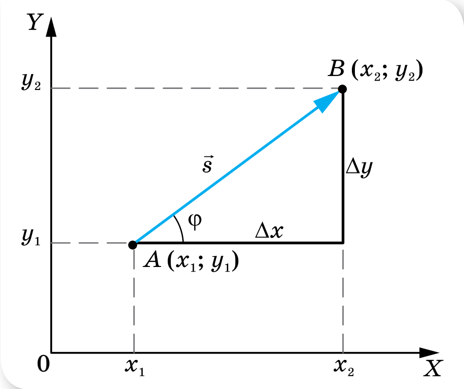
Мал. 2. До введення понять радіус-вектор і переміщення

Як видно з малюнка 4, вектор переміщення $\vec{s}$, проведений з початкової точки A у кінцеву B, дорівнює приросту радіуса-вектора: $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Модуль вектора переміщення позначають $|\vec{s}|$, або просто s.

Одиницею переміщення є метр: 1 м.

Вектор переміщення тіла можна визначити за його координатами. Нехай тіло перебуває на площині в точці A, координати якої x_1 і y_1. За певний інтервал часу тіло перемістилось у точку B, координати якої x_2 та y_2 (мал. 3). З малюнка 3 видно, що модуль і напрямок вектора переміщення $\vec{s}$ можуть бути визначені через різниці координат $\Delta x = x_2 - x_1$ та $\Delta y = y_2 - y_1$.



Мал. 3. Визначення модуля та напрямку вектора переміщення за його координатами

Модуль вектора переміщення $|\vec{s}|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ або $s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Напрямок вектора переміщення відносно координатної осі X визначається тангенсом кута нахилу вектора: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

І навпаки, різниця координат може бути виражена через модуль вектора переміщення:

$$\Delta x = |\vec{s}|\cos\varphi,\ \Delta y = |\vec{s}|\sin\varphi.$$

Таким чином, визначити положення рухомого тіла відносно вибраної системи відліку можна трьома способами: координатним, векторним і траєкторним (природним).

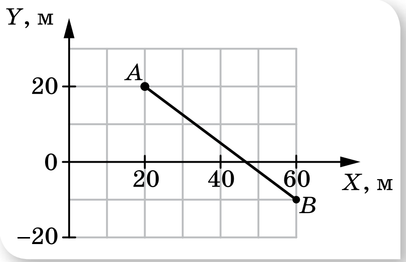
Зазначимо, що можна розглядати рух не лише між початковим і кінцевим положеннями тіла, а й у будь-який момент часу його руху.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. У чому полягає основна задача механіки?
2. Для чого, досліджуючи рух, вводять систему відліку?
3. У яких випадках футбольний м'яч можна вважати матеріальною точкою, а у яких — ні?
4. Чим різняться поняття траєкторія, пройдений шлях і переміщення?
5. Які способи опису механічного руху існують?

ВПРАВА 1

1. За що ми сплачуємо в таксі: за шлях чи переміщення?
2. У спортивній залі м'яч упав з висоти 3 м, відбився від підлоги й був зловлений на висоті 1 м. Визначте шлях і переміщення м'яча.
3. На малюнку 4 зображено траєкторію руху тіла з точки A в точку B. Визначте координати тіла на початку та в кінці руху, проекції переміщення на осі координат, модуль переміщення.



Мал. 4

4. Тіло перемістилося з точки, координати якої $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ м, у точку з координатами $x_2 = 4$ м, $y_2 = -1$ м. Зробіть малюнок і визначте вектор переміщення та його проекції на осі координат.
5. Перед початком поїздки на одометрі автомобіля зафіксовано 40 280 км. Автомобіль проїхав 30 км прямолінійно, потім здійснив поворот, проїхавши половину кола кільцевої дороги радіусом 20 км, і зупинився. Визначте переміщення автомобіля. Якими стали покази одометра?
6. Тіло почало рух із точки A перпендикулярно до радіуса-вектора $\overrightarrow{OA}$ цієї точки. Радіус-вектор $\overrightarrow{OB}$ кінцевої точки B дорівнює 10 м й утворює кут 30° з радіусом-вектором $\overrightarrow{OA}$. Визначте модуль вектора переміщення тіла.
7. Вектор переміщення має модуль $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 10$ см і напрямлений під кутом 30° до осі X. Координати точки A: $x = 2$ см, $y = 2$ см. Визначте координати точки B.
8. Сходинка ескалатора піднялась угору на 10 м. Людина по ескалатору за цей час спустилась униз на 5 м. Визначте й накресліть вектор переміщення людини відносно землі. Накресліть вектори переміщення ескалатора відносно землі та людини відносно ескалатора.
9. Вагон рівномірно рухається в горизонтальному напрямку. У вагоні до стелі прикріплено пружинку, на кінці якої закріплено тягарець. Тягарець здійснює вертикальні коливання. Накресліть траєкторію руху тягарця відносно вагона та відносно землі.
10. Запишіть рівняння траєкторій точок, якщо відомо залежності їх координат від часу: а) $x = 2t$, $y = t - 1$; б) $x = 2t$, $y = 8t^2$; в) $x = 2t$, $y = 0$.

§ 2 Прямолінійний рівномірний і нерівномірний рух

Рівняння рівномірного прямолінійного руху. Пригадаймо означення прямолінійного рівномірного руху, що відоме вам з 9 класу.

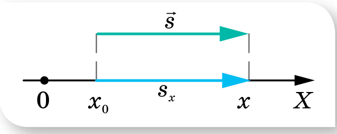
Прямолінійний рівномірний рух — це рух, під час якого тіло (матеріальна точка) за будь-які рівні інтервали часу здійснює однакові переміщення.

Траєкторія такого руху — пряма лінія.

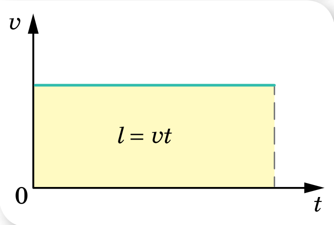
Швидкість рівномірного руху тіла $\vec{v}$ — векторна фізична величина, що дорівнює переміщенню $\vec{s}$, здійсненому тілом за одиницю часу.

Одиниця швидкості в СІ — метр за секунду: $1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Вектор швидкості у випадку рівномірного прямолінійного руху напрямлений так само, як і вектор $\vec{s}$.

Визначаючи швидкість рівномірного руху $\vec{v}$, переміщення $\vec{s}$ (або приріст радіуса-вектора $\Delta\vec{r}$) можна вибрати довільним і ділити на інтервал часу Δt, протягом якого відбулося це переміщення: $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Час найчастіше рахують від початкового моменту $t_0 = 0$, тоді $\Delta t = t - t_0 = t$, а векторні величини, що характеризують рух тіла, записують у проекціях на відповідну вісь, отже, для рівномірного прямолінійного руху $v_x = \frac{s_x}{t}$.



Мал. 5. Переміщення та координати тіла під час рівномірного прямолінійного руху



Мал. 6. Графік модуля вектора швидкості рівномірного прямолінійного руху

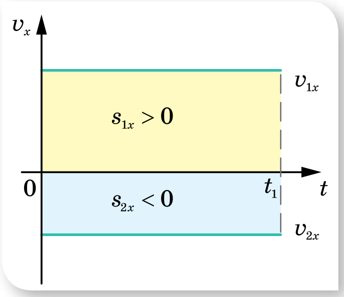
Знаючи проекцію швидкості руху тіла, можна визначити проекцію його переміщення за будь-який інтервал часу: $s_x = v_x t$. Оскільки рівномірний рух є рухом зі сталою швидкістю (v = const), то пройдений шлях прямо пропорційний часові.

З малюнка 5 видно, що числове значення проекції вектора переміщення на координатну вісь X дорівнює зміні координат тіла $x - x_0$, тобто $s_x = x - x_0$. Застосовуючи останні формули, отримаємо кінематичне *рівняння рівномірного прямолінійного руху*:

$$x - x_0 = v_x t \text{ або } x = x_0 + v_x t.$$

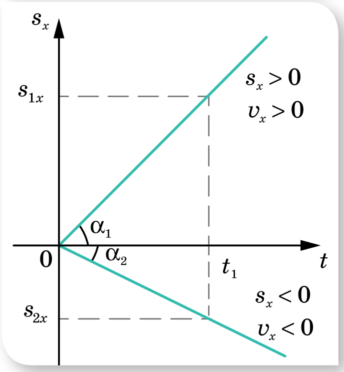
Якщо напрямок руху збігається з напрямком координатної осі, то $\upsilon_x > 0$, $\upsilon_x = \upsilon$, і координата з плином часу збільшується: $x = x_0 + \upsilon t$, де υ — модуль швидкості. Якщо напрямок руху тіла протилежний напрямку координатної осі, то $\upsilon_x < 0$, $\upsilon_x = -\upsilon$, і координата з плином часу зменшується: $x = x_0 - \upsilon t$.

За допомогою отриманого рівняння руху ми можемо визначити положення (координату) тіла в будь-який момент часу. Отже, основна задача механіки для рівномірного прямолінійного руху розв'язана.



Мал. 7. Графіки проекції швидкості

Графічне зображення прямолінійного рівномірного руху. Оскільки швидкість тіла під час рівномірного прямолінійного руху із часом не змінюється, тобто $\vec{\upsilon} = \text{const}$, тому *графік модуля швидкості* — це пряма, паралельна осі часу t й розміщена над нею, оскільки модуль швидкості завжди додатний (мал. 6).

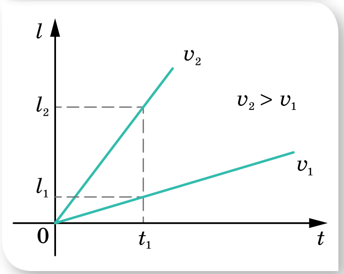


Мал. 8. Графік проекції переміщення для рівномірного прямолінійного руху

Графічна залежність проекції швидкості від часу (мал. 7) відрізняється від попереднього графіка тим, що лінія $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ може розташовуватися як над віссю t, за умови $\upsilon_x > 0$, так і під нею, за умови $\upsilon_x < 0$.

Площі зафарбованих прямокутників дорівнюють значенням проекцій переміщень за певний час.

Графіком проекції переміщення $s_x = s_x(t)$ є пряма (порівняйте з відомим вам графіком лінійної функції $y = ax$). Оскільки проекція переміщення може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то графік проекції переміщення (мал. 8) може бути розташований у I чверті координатної площини ($s_x > 0$, відповідно і $\upsilon_x > 0$) або в IV чверті ($s_x < 0$, $\upsilon_x < 0$).



Мал. 9. Графік шляху для рівномірного прямолінійного руху

За графіками проекції переміщення можна порівняти значення швидкостей рухомих тіл.

Графік шляху $l = l(t)$. Оскільки під час рівномірного прямолінійного руху модуль переміщення дорівнює довжині пройденого шляху, то $l = \upsilon t$. Модуль швидкості завжди величина додатна, і графік шляху завжди напрямлений вгору (мал. 9).

Графік координати тіла $x = x(t)$ характеризує зміну координат тіла із часом.

Нерівномірний рух. У реальному житті найчастіше ми маємо справу з *нерівномірним рухом* — рухом, під час якого тіло за однакові інтервали часу здійснює різні переміщення.

Для опису нерівномірного руху користуються поняттями *середньої* та *миттєвої* швидкостей. Причому середня швидкість нерівномірного руху має подвійне тлумачення: як *середня швидкість переміщення* і як *середня швидкість проходження шляху*.

1) ***Середня швидкість переміщення*** — *векторна* величина, що визначається відношенням переміщення до інтервалу часу, протягом якого відбулося це переміщення: $\vec{v}_c = \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \ldots + \vec{s}_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n}$, де $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots,$ $\vec{s}_n$ — переміщення тіла за відповідні інтервали часу $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$.
2) ***Середня швидкість проходження шляху*** — *скалярна* величина, що визначається відношенням пройденого шляху до інтервалу часу, за який цей шлях пройдено: $v_c = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n}$, де $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — ділянки шляху, пройдені за відповідні інтервали часу $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$.

Причому значення цих швидкостей можуть бути різними. Наприклад, якщо траєкторія руху криволінійна, пройдений шлях завжди більший за переміщення.

Середня швидкість характеризує рух тіла на певній ділянці траєкторії *за весь час* руху, але не дає інформації про рух тіла в певній точці траєкторії (у певний момент часу).

Особливістю механічного руху є його неперервність, тобто ані координати тіла, ані його швидкість руху не можуть змінюватися стрибками. Тому для характеристики нерівномірного руху застосовують поняття *миттєвої швидкості*.

Щоб визначити миттєву швидкість, треба зменшувати інтервал часу, за який здійснюється переміщення. Що меншим буде цей інтервал, то менше переміщення здійснюватиме тіло. Коли швидкість визначатиметься за досить короткий інтервал часу $\Delta t \to 0$ і переміщення буде малим (наближається до точки $(\Delta\vec{s} \to 0)$), то дріб $\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$ прямує до деякого граничного значення, тобто швидкість практично не змінюватиметься ні за значенням, ні за напрямком.

Граничне значення (границя), до якого прямує дріб $\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, називають **миттєвою швидкістю** в певній точці або в певний момент часу. Математично це записується так: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$.

Вираз lim означає «границя», а вираз $\Delta t \to 0$, зображений під ним, показує, за якої умови ця границя отримана.

Миттєва швидкість *збігається з напрямком того малого переміщення, яке здійснює тіло за досить короткий інтервал часу.*

Саме миттєву швидкість показує спідометр автомобіля.

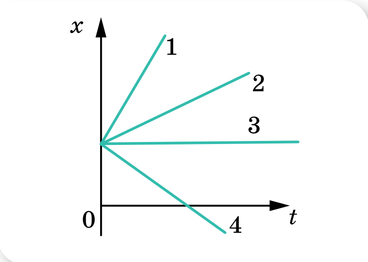
Надалі, говорячи про швидкість нерівномірного руху, ми матимемо на увазі саме миттєву швидкість. Про миттєву швидкість можна говорити й у випадку рівномірного руху. Миттєва швидкість рівномірного руху в будь-якій точці й у будь-який час є однаковою. Миттєва швидкість нерівномірного руху в різних точках траєкторії й у різні моменти часу — різна.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

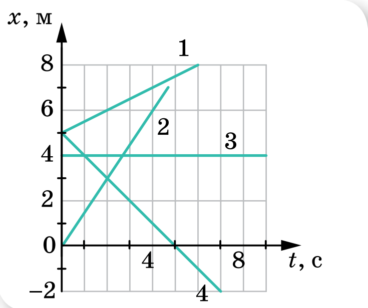
1. Чи можна визначити кінцеве положення тіла, якщо відоме його початкове положення та довжина пройденого шляху?
2. Графік руху перетинає вісь часу, що це означає?
3. Чи можуть зменшуватись із часом координата рухомої точки та пройдений шлях?
4. Навіщо вводять поняття середньої та миттєвої швидкостей? Коли застосовують кожне з них для опису руху? Миттєва швидкість — це диференціальна чи інтегральна характеристика руху?
5. Чи може не дорівнювати нулю середня швидкість переміщення матеріальної точки впродовж деякого інтервалу часу, якщо впродовж більш тривалого часу вона дорівнює нулю?
6. Чи може тіло набувати різних значень шляхової швидкості, якщо при цьому його швидкість переміщення має постійні значення?

ВПРАВА 2

1. Швидкість тіла під час руху по прямій з пункту A в пункт B у два рази більша за швидкість руху цього тіла у зворотному напрямку. Побудуйте графіки залежності від часу: а) координати; б) швидкості; в) шляху.
2. З двох точок A і B, віддалених на відстань 90 м одна від одної, одночасно в одному напрямку почали рухатися два тіла. Перше тіло, що рухається з точки A, має швидкість 5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Друге тіло, що рухається з точки B, має швидкість 2 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Через який час перше тіло наздожене друге? Яке переміщення здійснить кожне тіло? Розв'яжіть задачу аналітичним і графічним способами.
3. На малюнку 10 наведено графіки руху чотирьох тіл уздовж осі X. Що спільного в усіх цих рухів? Чим вони відрізняються? Накресліть схематичні графіки $v_x(t)$ для кожного з рухів.
4. За наведеними на малюнку 11 графіками опишіть рух. Для кожного з них визначте модуль і напрямок швидкості, запишіть формулу $x(t)$.
5. Рівняння руху вантажного автомобіля має вигляд $x_1 = -270 + 12t$, а рівняння руху пішохода, який іде узбіччям того самого шосе, має



Мал. 10



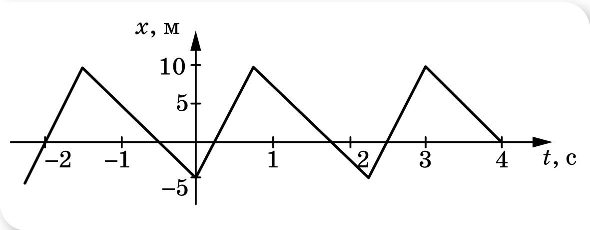
Мал. 11

вигляд $x_2 = -1{,}5t$. Накресліть графіки руху й визначте: а) положення автомобіля та пішохода в момент початку спостереження; б) з якими швидкостями і в якому напрямку вони рухалися; в) коли й де вони зустрілися?

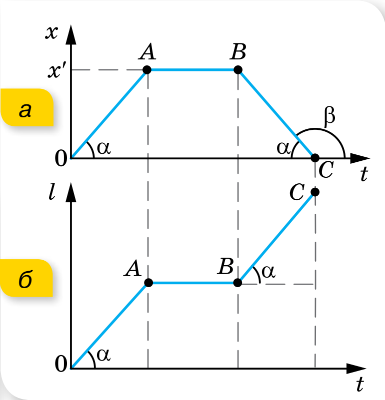
6. Автомобіль, швидкість якого $v_1 = 80\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, обганяє автобус, що має швидкість $v_2 = 60\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яку відстань пройшов автомобіль за час обгону, якщо він розпочав його на відстані $s_1 = 50$ м від автобуса й завершив на відстані $s_1 = 50$ м попереду автобуса.

7. За графіком залежності координати від часу (мал. 12) побудуйте графік залежності швидкості від часу.

8. На малюнку 13 (*а* і *б*) наведено графіки, які характеризують рух пішохода. Побудуйте на їх основі графік залежності $v_x(t)$.



Мал. 12



Мал. 13

9. Потяг першу половину шляху рухався зі швидкістю в $n = 1{,}5$ раза більшою, ніж під час подолання другої половини шляху. Середня швидкість руху потяга на всьому шляху була $43{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Які швидкості руху потяга на першій і другій половинах шляху?

10. Квадроцикл проїхав половину шляху зі швидкістю $50\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Половину часу, який залишився, він їхав зі швидкістю $20\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а решту — зі швидкістю $40\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Визначте середню швидкість руху квадроцикла на всьому шляху.

11. Рух матеріальної точки задано рівнянням $x = at + bt^2 + ct^3$, де $a = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $b = 0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $c = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^3}$. Визначте швидкість точки в моменти часу $t_1 = 2$ с та $t_2 = 4$ с, а також середню швидкість протягом інтервалу часу від t_1 до t_2. Розв'язуючи задачу, скористайтесь поняттям похідної.

Експериментуємо

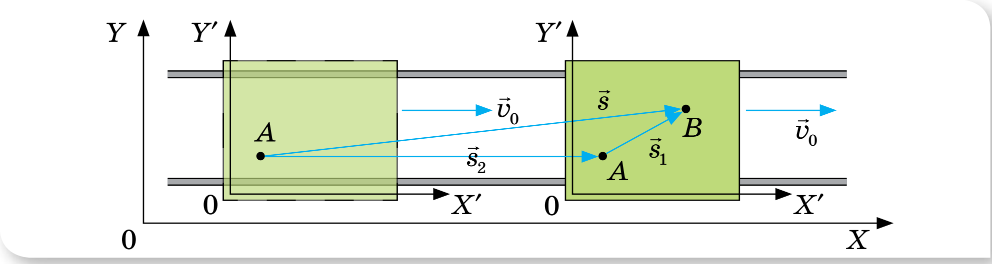
1. Дослідіть характер руху бульбашки повітря в скляній трубці, наповненій водою.
2. Визначте модуль швидкості вашого руху на велосипеді, маючи тільки шкільну лінійку. *Примітка*: вважайте, що на проголошення двоцифрового числа (наприклад, 21) витрачається 1 секунда.

§ 3 Відносність механічного руху

Закони додавання переміщень і швидкостей. Для розв'язування задач кінематики систему відліку вибирають так, щоб рух відносно цієї системи описувався найпростішими виразами. Оскільки тіло відліку можна вибирати довільно і таких тіл може бути безліч, то й рух тіла можна одночасно розглядати в кількох системах відліку.

У разі розгляду руху в різних системах відліку його характеристики (траєкторія, швидкість, переміщення, пройдений шлях) змінюються.

Величини, які залежать від вибору системи відліку, в якій здійснюється вимірювання називають відносними. Нехай маємо дві системи відліку (мал. 14). Систему XY, що умовно можна вважати нерухомою (наприклад, пов'язаною із Землею), і систему $X'Y'$, що рухається відносно системи XY зі швидкістю $\vec{v}_0$ (наприклад, пов'язаною із платформою, що рухається по рельсах). Якщо людина, яка перебуває на рухомій платформі здійснить переміщення s_1 (наприклад, із точки A в точку B), і сама платформа за цей час переміститься відносно Землі на s_2, то з малюнку видно, що переміщення людини відносно Землі s — це вектор, що дорівнює сумі векторів s_1 і s_2.



Мал. 14. Зміна положення тіла та його переміщення відносно різних систем відліку

Тепер можна сформулювати ***закон додавання переміщень***:

переміщення тіла $\vec{s}$ у нерухомій системі відліку дорівнює векторній сумі переміщення $\vec{s}_1$ тіла в рухомій системі відліку й переміщення рухомої системи відліку $\vec{s}_2$ відносно нерухомої: $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

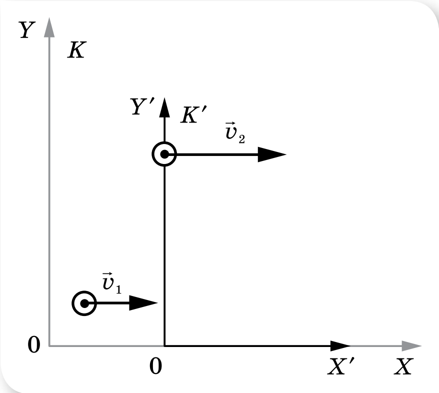
Поділивши обидві частини рівняння $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ на час руху тіла $\frac{\vec{s}}{t} = \frac{\vec{s}_1}{t} + \frac{\vec{s}_2}{t}$, матимемо закон додавання швидкостей.

Класичний закон додавання швидкостей[1]**:** швидкість тіла відносно системи, яку вважають нерухомою $\vec{v}$, дорівнює векторній сумі швидкості тіла в рухомій системі відліку $\vec{v}_1$ й швидкості самої рухомої системи відліку $\vec{v}_2$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Отже, швидкість руху тіла також є *величиною відносною*, що залежить від вибору системи відліку.

Розглянемо приклад. *Нехай два тіла рухаються зі швидкостями v_1 і v_2 відповідно, і потрібно визначити швидкість руху другого тіла відносно першого у випадку, коли тіла рухаються в одному напрямку й назустріч одне одному.*



Мал. 15. Відносний рух двох тіл

Ми переконалися, що говорити про переміщення чи швидкості без зазначення системи відліку немає сенсу. В умові ж задачі вказано, що *два тіла рухаються зі швидкостями v_1 і v_2 відповідно*. У такому випадку цілком зрозуміло, що вказані швидкості v_1 і v_2 — це швидкості руху тіл відносно землі (у нерухомій системі відліку K).

Пов'яжемо рухому систему відліку K' з другим тілом, що рухається відносно землі зі швидкістю $\vec{v}_2$ (мал. 15).

Тоді класичний закон додавання швидкостей набуває вигляду: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'$, де $\vec{v}_1$ — швидкість першого тіла відносно землі, $\vec{v}'$ — швидкість другого тіла відносно першого. Якщо тіла рухаються в одному напрямку, то у проекціях на вісь X закон записується у вигляді $v_1 = v_2 + v'$. Звідки $v' = v_1 - v_2$. У випадку, коли тіла рухаються назустріч одне одному, проекція швидкості руху другого тіла буде від'ємною, $v_1 = -v_2 + v'$, звідки $v' = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2$.

Ми переконалися, що будь-який складний рух можна подати як суму простих незалежних рухів. У цьому полягає суть *принципу незалежних рухів*: якщо тіло одночасно бере участь у кількох рухах, то кожний із рухів відбувається незалежно від інших.

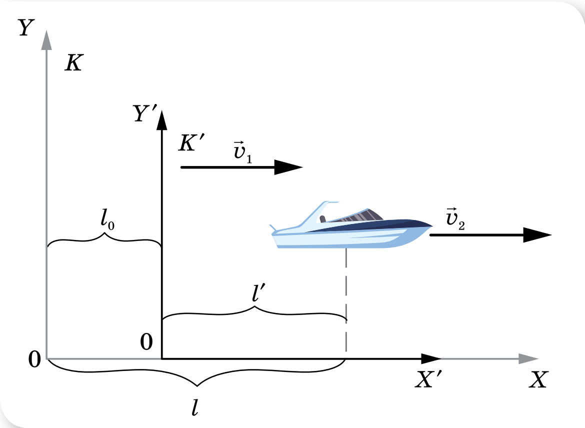
Перетворення Галілея. Розглянемо рух тіла, наприклад катера по річці, відносно різних систем відліку — нерухомої K, пов'язаної із землею, і рухомої K', пов'язаної з течією річки (мал. 16).

Вважаємо, що швидкість течії (рухомої системи відліку) $\vec{v}$ є постійною.

Системи координат вибирають так, щоб осі X та X' збігалися, а в момент часу $t_0 = 0$ збігалися й осі Y та Y'. Вважаємо, що годинники в обох системах відліку йдуть однаково.

[1] Закон має назву «класичний», тому що виконується для тіл, швидкості руху яких набагато менші від швидкості світла.

За час t катер змістився відносно землі (нерухомої системи відліку) на відстань l, за той самий час течія річки (рухома система відліку) здійснила переміщення l_0. Тоді переміщення l' катера відносно рухомої системи відліку дорівнює $l' = l - l_0$ або $l = l_0 + l'$.



Мал. 16. Рух тіла відносно рухомої та нерухомої систем відліку

Таким чином, у будь-який момент часу координати тіла (у нашому випадку катера) у системі K та K' пов'язані співвідношеннями $y = y'$, $x = x_0 + x'$, де x_0 — координата початку відліку системи координат K' у системі координат K у даний момент часу t.

Оскільки швидкість течії (рухомої системи координат) v, то переміщення, яке вона здійснює за час t, визначається формулою $l_0 = vt$, отже, співвідношення для координат набувають вигляду $x = vt + x'$, $y = y'$, $t = t'$.

Співвідношення $x = vt + x'$, $y = y'$, $t = t'$ називають **перетвореннями Галілея.**
Координати тіла залежать від системи відліку, тобто є величинами відносними.
Рівність $t = t'$ виражає абсолютний характер часу, тобто час є величиною інваріантною (незмінною).

Зверніть увагу! Вкажемо на деяке припущення, яке ми застосували, щоб отримати співвідношення Галілея. У наших розрахунках ми вважали, що $t = t'$ (користувались одним часом) і всі відстані вимірювали одним і тим самим масштабом. Тобто, ми вважали, що в нерухомій і рухомій системах відліку годинники відраховують один і той самий час, а відстані вимірюються з однаковим масштабом. Це припущення виконується лише для руху тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла ($v \ll c$, де $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ — швидкість світла у вакуумі). Для рухів зі швидкостями, близькими до швидкості світла, перетворення Галілея набувають іншого вигляду. Про це ви детально довідаєтеся, вивчаючи положення *спеціальної теорії відносності*.

З перетворень Галілея також випливає один важливий висновок: у всіх системах відліку, які рухаються рівномірно і прямолінійно одна відносно одної, прискорення тіла залишається незмінним (інваріантним).

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. У чому суть відносності руху?
2. Чим відрізняються такі поняття, як «відносна швидкість двох тіл» і «швидкість одного тіла відносно іншого»?
3. Швидкість першого тіла відносно другого дорівнює $v_{1,2}$; швидкість другого тіла відносно третього — $v_{2,3}$. Визначте швидкість першого тіла відносно третього. Зробіть висновок про те, як чергуються індекси у правилі додавання.

Приклади розв'язування задач

Задача. Пліт пропливає біля пункту A в той момент, коли від нього відправляється вниз за течією річки до пункту B моторний човен. Відстань між пунктами 15 км човен проплив за 0,75 год і повернув назад. Повертаючись у пункт A, човен зустрів пліт на відстані 9 км від пункту B. Визначте швидкість течії u та швидкість човна відносно води v.

Дано:
$s_1 = 15$ км
$s_2 = 9$ км
$t = 0{,}75$ год

u — ?
v — ?

Розв'язання:

Розв'язання цієї задачі буде набагато простішим, якщо систему відліку пов'язати з плотом. У такій системі пліт і вода в річці нерухомі. Це означає, що відносно плота моторний човен рухається до пункту B й у зворотному напрямку з однаковою швидкістю.

Час руху човна у прямому та зворотному напрямах — $2t$, відстань, яку він при цьому пройшов: $s = s_1 + s_2$. Швидкість човна відносно води:

$$v = \frac{s}{2t} = \frac{15\text{ км} + 9\text{ км}}{2 \cdot 0{,}75\text{ год}} = 16\,\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

За цей час пліт пройшов відстань $s_1 - s_2$.

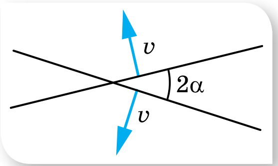
Таким чином, швидкість течії: $u = \dfrac{s_1 - s_2}{2 \cdot t} = \dfrac{6\text{ км}}{2 \cdot 0{,}75\text{ год}} = 4\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

Відповідь: $v = 16\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$, $u = 4\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

ВПРАВА 3

1. Швидкість гіроскутера — 36 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість зустрічного вітру — 4 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Яка швидкість вітру в системі відліку, пов'язаній з гіроскутером?

2. Ескалатор у метро рухається зі швидкістю 0,8 $\frac{м}{с}$. За який час людина переміститься на 40 м відносно Землі, коли вона йде в напрямку руху ескалатора зі швидкістю 0,2 $\frac{м}{с}$ у системі відліку, пов'язаній з ескалатором?
3. Швидкість руху човна відносно води в n разів більша, ніж швидкість течії річки. У скільки разів довше човен пливе між двома пунктами проти течії, ніж за течією? Розв'яжіть задачу для значень $n = 2$ і $n = 11$.
4. На моторному човні, що має в системі відліку, пов'язаній з водою, швидкість 6 $\frac{м}{с}$, потрібно переправитися через річку найкоротшим шляхом. Який курс відносно берега треба тримати під час переправи, якщо швидкість течії річки становить 2 $\frac{м}{с}$?
5. Людина у потязі, що рухається зі швидкістю 36 $\frac{км}{год}$, бачить протягом 60 с сусідній потяг завдовжки 600 м, який рухається паралельно першому в одному напрямку. Визначте: а) з якою швидкістю рухається другий потяг і скільки часу людина у другому потязі бачить перший потяг завдовжки 900 м; б) час, протягом якого люди у кожному з потягів бачать проходження сусіднього потяга, за умови, що вони рухаються назустріч один одному.
6. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 км один від одного, курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за 4 год, а проти течії — за 10 год. Визначте швидкість течії річки і швидкість катера відносно води.
7. Рибалка пливе човном уверх по річці. Пропливаючи під мостом, він упустив рятувальний круг. Через годину рибалка помітив пропажу і, повернувши назад, наздогнав круг за 6 км нижче від мосту. Яка швидкість течії річки, якщо відносно води човен рухався вверх і вниз по річці з однаковою швидкістю?
8. Вагон завширшки 2,4 м, що рухався зі швидкістю 15 $\frac{м}{с}$, пробила куля, яка летіла перпендикулярно до руху вагона. Зміщення отворів у стінках вагона один відносно одного дорівнює 6 см. Яка швидкість кулі?
9. Відносно системи K' рівняння руху матеріальної точки має вигляд $x' = 4t + 5$; $y' = 0$; $z' = 0$. Який вигляд має рівняння руху матеріальної точки відносно системи K, якщо: а) система K' нерухома відносно системи K, а її початок має координати (3; 0; 0); б) система K' рухається відносно системи K рівномірно і прямолінійно вздовж осі X зі швидкістю 5 $\frac{м}{с}$ і в початковий момент руху початки координат та осі систем K' і K збігалися; в) система K' рухається відносно системи K рівномірно і прямолінійно вздовж осі Y зі швидкістю 3 $\frac{м}{с}$ і в початковий момент руху початки координат та осі систем K' і K збігалися?
10. Два стержні перетинаються під кутом 2α і рухаються з однаковими швидкостями v перпендикулярно до самих себе (мал. 17). Якою є швидкість руху точки перетину стержнів?



Мал. 17

§ 4 Прямолінійний рівноприскорений рух

Прискорення. Під час нерівномірного руху швидкість (пам'ятайте, що ми маємо на увазі миттєву швидкість, але слово «миттєва» для спрощення не вживатимемо) у різних точках траєкторії і в різні моменти часу — різна. Тобто швидкість постійно змінюється від точки до точки, від одного моменту часу до наступного.

Під час руху швидкість може змінюватись і дуже стрімко, і порівняно повільно. Очевидно, що для характеристики стрімкості зміни швидкості має існувати певна фізична величина. У фізиці цю величину називають *прискоренням*.

Прискорення $\vec{a}$ — векторна фізична величина, що характеризує стрімкість зміни швидкості руху точки (і за числовим значенням, і за напрямком) і визначається відношенням зміни швидкості тіла до інтервалу часу, протягом якого відбулася ця зміна: $\vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Тут $\vec{v}_0$ — початкова швидкість руху тіла, $\vec{v}$ — його кінцева швидкість, Δt — інтервал часу, протягом якого відбулася зміна швидкості.

Одиниця прискорення — метр за секунду в квадраті: $1\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Оскільки прискорення характеризує стрімкість зміни швидкості тіла під час його нерівномірного руху, а сама швидкість характеризує стрімкість зміни положення (координати) тіла, то ці величини певним чином пов'язані одна з одною.

Величина $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ дорівнює середній за час Δt стрімкості зміни швидкості руху матеріальної точки. Її називають *середнім прискоренням*.

Якщо зменшувати інтервал часу, за який змінюється швидкість, то що меншим буде цей інтервал $\Delta t \to 0$, то меншою буде зміна швидкості $\Delta\vec{v} \to 0$, а дріб $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ прямує до деякого граничного значення. Цю границю називають *миттєвим прискоренням* точки в певний момент часу: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{v}'$.

Рівноприскорений прямолінійний рух. Пригадаймо означення рівноприскореного руху.

Рух тіла, під час якого за будь-які однакові інтервали часу швидкість руху тіла змінюється однаково, тобто прискорення під час руху тіла залишається весь час сталим за напрямком і числовим значенням ($\vec{a} = \text{const}$), називається **рівноприскореним**.

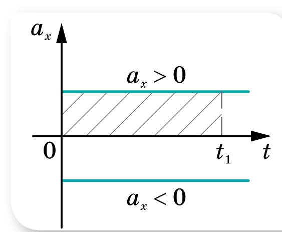
Швидкість і переміщення рівноприскореного руху. З формул для прискорення легко отримати *кінематичне рівняння швидкості для рівноприскореного руху*: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, або в проекціях на вибрану вісь X: $v_x = v_{0x} + a_x t$.

Пригадаємо формули для визначення переміщення, відомі вам з 9 класу. У кожній з формул проекції: $s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2}t$, $s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, $v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x$ — проекції v_x, v_{0x}, a_x можуть бути як додатними, так і від'ємними — залежно від того, як напрямлені вектори $\vec{v}, \vec{v}_0, \vec{a}$ відносно осі X.

Для прямолінійного руху проекція вектора переміщення визначається за формулою $s_x = x - x_0$, тоді *кінематичне рівняння координати для рівноприскореного руху* таке:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

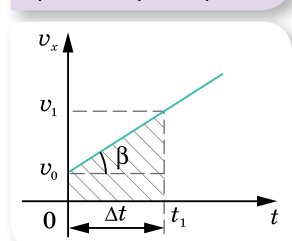
Графік проекції прискорення $a_x = a_x(t)$. Оскільки під час рівноприскореного руху прискорення є величиною сталою, то графіком залежності проекції прискорення від часу є пряма, паралельна осі часу (мал. 18).



Мал. 18. Графік проекції прискорення

Якщо $v_0 = 0$, то за площею фігури, обмеженої графіком і перпендикуляром, опущеним на вісь часу, можна визначити швидкість руху тіла в даний момент часу t_1.

Графік проекції швидкості $v_x = v_x(t)$. Як видно з рівняння $v_x = v_{0x} + a_x t$, залежність проекції швидкості від часу лінійна, тому графіком є пряма (мал. 19). (Порівняйте з відомим вам графіком функції $y = ax + b$.)



Мал. 19. Графік проекції швидкості

Кут нахилу графіка до осі часу визначається числовим значенням прискорення, яке графічно може бути визначено так: $a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$.

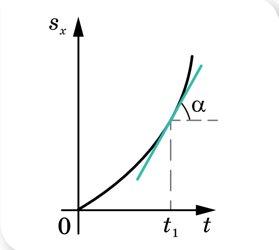
За площею фігури, обмеженої графіком швидкості та перпендикуляром, опущеним на вісь часу, можна визначити довжину пройденого шляху на даний момент часу t_1. Також, маючи даний графік, можна записати закон руху.

Залежно від проекції прискорення та початкової швидкості руху тіла графік $v_x(t)$ матиме різний вигляд.

Графіки проекції переміщення $s_x = s_x(t)$ і координати $x = x(t)$. Кінематичні рівняння проекції переміщення $s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$ і координати $x = x_o + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ є квадратними рівняннями вигляду $y = c + bx + ax^2$, тому графіками залежності проекції переміщення й координати від часу є параболи. Розміщення цих парабол залежно від параметрів руху є різним.

Залежність переміщення від часу $s_x = s_x(t)$ зображено на малюнку 20. Швидкість руху тіла в даний момент часу t_1 визначається тангенсом кута між дотичною до графіка проекції переміщення та віссю часу: $v = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Отже, за зміною кута нахилу дотичних до графіка $s_x(t)$ можна прослідкувати за зміною швидкості руху тіла.



Мал. 20. Визначення графічним методом швидкості руху тіла

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. За будь-якого нерівномірного руху змінюється швидкість. Як прискорення характеризує цю зміну?
2. Як спрямовано вектор прискорення при прямолінійному рівнозмінному русі? У якому випадку проекція прискорення має додатне, а в якому — від'ємне значення?
3. Швидкість прямолінійного руху тіла щосекунди збільшується на 2 %: а) від початкового значення; б) від значення швидкості на початку кожної секунди. Чи стале прискорення тіла в обох випадках?
4. Тіло починає рухатися зі стану спокою прямолінійно, проходячи щосекунди шлях, на 1 м більший, ніж за попередню секунду. Чи стале прискорення тіла?
5. Чи можуть два тіла, які рухаються по одній прямій у протилежних напрямках, мати однакові вектори прискорень?
6. У яких випадках графік проекції швидкості рівноприскореного руху здіймається вгору, а в яких — спадає? Який фізичний зміст має перетин графіком проекції швидкості осі часу?
7. Яку форму має графік проекції переміщення? Чим відрізняються графіки проекції переміщення й координати?
8. Розкажіть, як за графіками прискорення, швидкості та переміщення визначити:
   а) швидкість у будь-який момент часу за графіком прискорення;
   б) закон руху за графіком швидкості;
   в) зміну швидкості за графіком переміщення;
   г) прискорення за графіком швидкості.

Приклади розв'язування задач

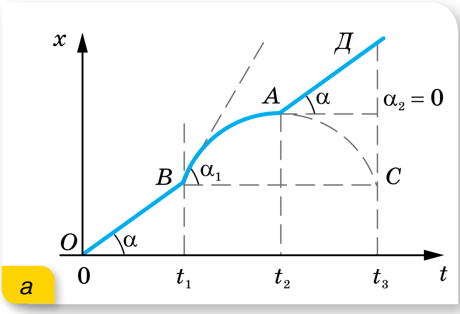
Задача 1. За графіком руху тіла *ОВАД* (мал. 21, *а*, ділянка *ВА* — парабола), накресліть графік залежності швидкості руху тіла від часу та схарактеризуйте його.

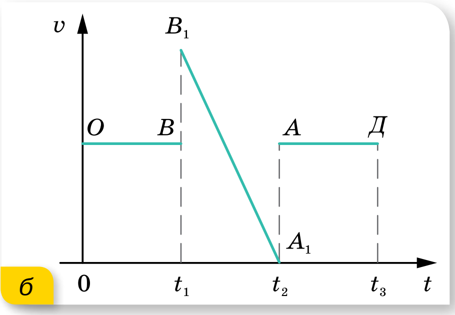
Розв'язання:

Проаналізуємо графік залежності координати від часу. Протягом інтервалу часу t_1 тіло рухалося рівномірно і прямолінійно ($\mathrm{tg}\,\alpha = v$). Від t_1 до t_2 — рівносповільнено, причому, оскільки в точках B і A спостерігаються злами, це означає, що швидкість руху тіла різко змінилася, а саме: у точці B від $v = \mathrm{tg}\,\alpha$ до $v_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1$, у точці A від $v_2 = 0$ ($\alpha_2 = 0$) до $v = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Протягом часу від t_2 до t_3 тіло рухалося рівномірно з тією самою швидкістю, що була й на початку руху.

Оскільки графік залежності координати від часу має злами, графік залежності швидкості руху від часу матиме розриви в моменти часу t_1 та t_2 (мал. 21, *б*).





Мал. 21. Графік залежності: *а* — координати від часу; *б* — швидкості від часу

Звичайно ж це опис ідеалізованого руху. В реальності моментам часу t_1 та t_2 мають відповідати короткі інтервали часу, коли тіло стрімко набирало швидкості.

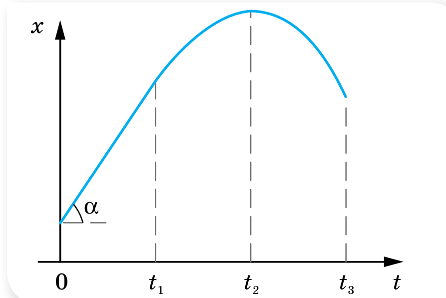
ВПРАВА 4

1. По схилу завдовжки 100 м лижниця з'їхала за 20 с, рухаючись із прискоренням $0{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Яку швидкість мала лижниця на початку та в кінці схилу?
2. Кулька, що котиться похилим жолобом зі стану спокою, за першу секунду пройшла 10 см. Який шлях кулька пройде за три секунди?
3. Визначте, у скільки разів швидкість кулі посередині ствола рушниці менша, ніж швидкість її під час вильоту зі ствола.
4. Тіло, рухаючись рівноприскорено, протягом четвертої секунди пройшло 35 м. З яким прискоренням рухалось тіло? Яка його швидкість наприкінці четвертої, а також десятої секунди руху? Який шлях пройшло тіло за другу, а також за п'яту секунди? Який шлях пройшло тіло за другу і третю секунди, разом узяті?
5. Рух матеріальної точки задано рівняннями: $x = 8t^2 + 4$; $y = 6t^2 - 3$; $z = 0$. Визначте модулі швидкості та прискорення в момент часу $t = 10$ с. Скористайтесь поняттям похідної.
6. За час $t = 10$ с тіло пройшло шлях $l = 18$ м, при цьому його швидкість збільшилась у $n = 5$ разів. Вважаючи рух рівноприскореним, визначте прискорення тіла.
7. Тіло починає рух з точки A й рухається спершу рівноприскорено протягом часу t_0, а потім з тим самим за модулем прискоренням — рівносповільнено. Через який час від початку руху тіло повернеться в точку A?
8. Доведіть, що під час прямолінійного рівноприскореного руху без початкової швидкості справджується рівність: $s_1 : s_2 : \ldots : s_n = 1 : 3 : \ldots : (2n - 1)$ — відстані, які проходить тіло за послідовні однакові інтервали часу, відносяться як послідовні непарні числа.
9. Рухи матеріальних точок задано такими рівняннями: а) $x_1 = 10t + 0{,}4t^2$; б) $x_2 = 2t - t^2$; в) $x_3 = -4t + 2t^2$; г) $x_4 = -t - 6t^2$ (усі величини задано в СІ). Напишіть залежність $v = v(t)$ для кожного випадку, побудуйте графіки цих залежностей, визначте вид руху в кожному випадку.

10. Хлопчик з'їхав на санчатах із гори, що має схил 40 м, за 10 с, а потім проїхав по горизонтальній ділянці ще 20 м і зупинився. Обчисліть швидкість у кінці схилу, прискорення на кожній ділянці, загальний час руху та середню швидкість на всьому шляху. Накресліть графік швидкості.

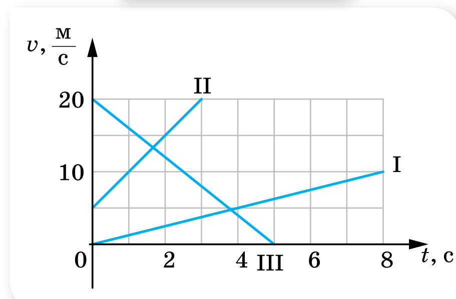
11. Велосипедистка перші 4 с рухалася зі стану спокою з прискоренням $1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а потім 0,1 хв їхала рівномірно, а останні 20 м до зупинки — рівносповільнено. Обчисліть середню швидкість за весь час руху. Побудуйте графік $v_x(t)$.

12. На малюнку 22 наведено графік залежності координати тіла від часу. Після моменту часу t_1 крива графіка — парабола. Який рух зображено на цьому графіку? Побудуйте графік залежності швидкості тіла від часу.



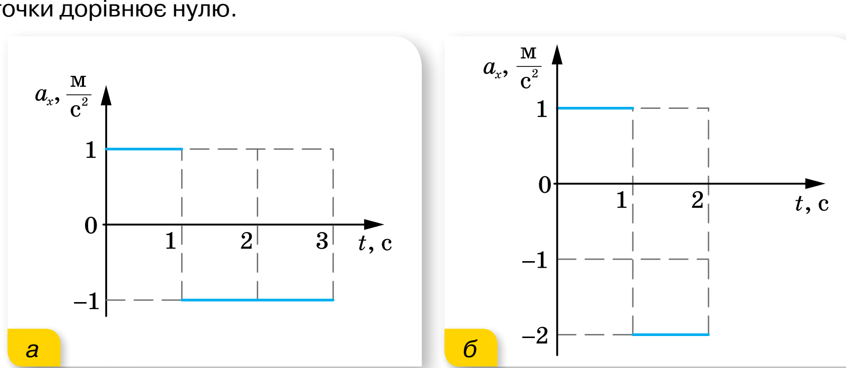
Мал. 22

13. За наведеними на малюнку 23 графіками напишіть рівняння залежностей $v_x = v_x(t)$ і $x = x(t)$. Вважайте, що в початковий момент ($t = 0$) тіло перебуває в початку координат ($x = 0$). Побудуйте графіки залежності $x = x(t)$ для кожного з тіл.



Мал. 23

14. За графіками залежності $a_x(t)$, наведеними на малюнку 24, *а* і *б* побудуйте графіки $v_x(t)$, вважаючи, що в початковий момент часу ($t = 0$) швидкість руху матеріальної точки дорівнює нулю.



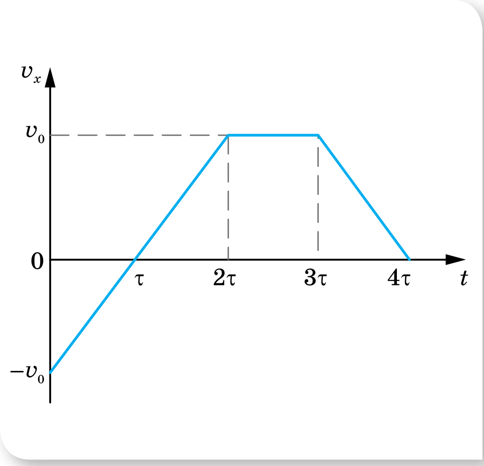
Мал. 24

15. Рухи двох автомобілів по шосе описуються рівняннями $x_1 = 2t + 0{,}2t^2$ і $x_2 = 80 - 4t$. Опишіть картину руху; визначте час і місце зустрічі автомобілів; відстань між ними через 5 с; координату першого автомобіля в той момент часу, коли другий перебував у точці початку відліку. Розв'яжіть задачу аналітично та графічно.

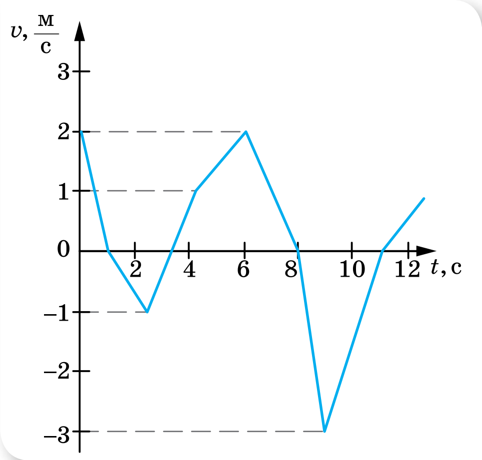
16. Матеріальна точка рухається вздовж осі X зі швидкістю $\vec{v}$ (мал. 25). Один під одним накресліть графіки проекцій прискорення $a_x(t)$, переміщення $s_x(t)$ та пройденого шляху $l(t)$. Визначте середнє значення модуля швидкості за час руху від $t = 0$ до $t = 2\tau$.

17. На малюнку 26 наведено графік швидкості тіла, яке рухається прямолінійно. На яку максимальну відстань від початкового положення перемістилось тіло за час руху?

18. Накресліть графік залежності координати від часу для прямолінійного руху, що одночасно задовольняє дві вимоги: а) протягом інтервалу часу від 2 до 6 с середня швидкість руху дорівнює 5 $\frac{м}{с}$; б) максимальна швидкість протягом цього ж інтервалу часу дорівнює 15 $\frac{м}{с}$.



Мал. 25



Мал. 26

Експериментуємо

Кулька скочується по жолобу з уклоном 0,3 (*уклон* — це відношення висоти жолоба до його довжини). Визначте: максимальну швидкість руху кульки; швидкість у середній точці жолоба; прискорення кульки. Дослідіть залежність прискорення руху кульки від кута нахилу жолоба.

§ 5 Вільне падіння та криволінійний рух в однорідному полі тяжіння

Рух тіла у вертикальному напрямку. Розглядаючи приклади рівнозмінного руху в горизонтальному напрямку, ми не загострювали уваги на причинах, які змушували тіла рухатися з різними прискореннями. Про це детальніше буде розглянуто після вивчення законів Ньютона і природи механічних сил. Зважаючи, що рух тіла, який відбувається поблизу поверхні землі під дією сили тяжіння (без урахування сил опору повітря) є унікальним прикладом рівнозмінного руху, розглянемо його.

Це рух зі сталим прискоренням g, яке називають прискоренням вільного падіння, вектор якого завжди напрямлений вертикально вниз. Після численних вимірювань було встановлено середнє значення $g = 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (детальніше про те, як визначили значення прискорення вільного падіння у § 10).

Рух тіла у вертикальному напрямку описується рівняннями рівноприскореного руху: $\vec{h} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, де $\vec{h}$ — переміщення по вертикалі, $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ — швидкість на початку та в кінці руху, $\vec{g}$ — прискорення вільного падіння.

Рух тіла, кинутого вертикально вгору до максимальної висоти підйому, є рівносповільненим, потім вниз — рівноприскореним, без початкової швидкості. Час підйому дорівнює часу падіння.

З певної висоти тіло можуть кидати вниз, надаючи йому деякої початкової швидкості, а можуть відпускати — тоді тіло падає без початкової швидкості ($v_0 = 0$) (вільне падіння).

Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту. Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту, можна розглядати як результат додавання двох незалежних рухів: *рівномірного прямолінійного вздовж осі X і рівнозмінного вздовж осі Y*. Із цього випливає, що проекція швидкості v_x (мал. 27) весь час залишається постійною: $v_{0x} = v_x = \text{const}$. Координата x змінюється згідно із законом рівномірного руху: $x = x_0 + v_{0x}t$.

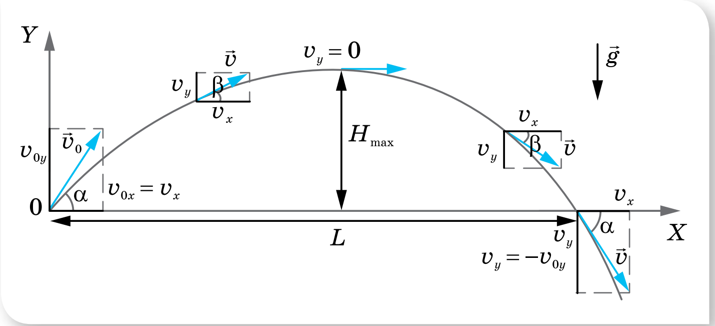
Уздовж осі Y рух є рівноприскореним, оскільки вектор прискорення вільного падіння $\vec{g}$ на невеликих висотах є величиною сталою, отже, згідно із законом рівноприскореного руху: $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$.

У вибраній нами системі координат (мал. 27) $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$; $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$.

Таким чином, закон руху для тіла, кинутого під кутом α до горизонту, має вигляд:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t, \\ y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь, можна отримати рівняння траєкторії такого руху. Для цього з першого рівняння виразимо час $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ і підставимо його у друге рівняння. Після спрощень і враховуючи, що $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$, отримуємо *рівняння траєкторії:* $y = x\,\text{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$. З рівняння видно, що залежність $y(x)$ є квадратичною, отже, графіком руху є парабола. Вітки параболи напрямлені вниз, оскільки коефіцієнт перед x^2 менший від нуля, і парабола проходить через початок координат, оскільки $y = 0$ при $x = 0$ (мал. 27).



Мал. 27. Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту

Визначимо основні параметри руху: час і дальність польоту, максимальну висоту підйому.

Унаслідок незалежності рухів уздовж координатних осей підйом тіла по вертикалі визначається лише проекцією початкової швидкості v_{0y} на вісь Y. Звідси випливає, що якщо вертикальна проекція швидкості тіла, кинутого під кутом α до горизонту така сама, як і початкова швидкість тіла, кинутого вертикально вгору, то ці тіла будуть рухатися синхронно. Тому максимальну висоту підйому і час підйому можна визначити з відомих вам формул, що описують рух тіла, кинутого вертикально вгору.

Для тіла, кинутого вертикально вгору, $v_y = v_{0y} - gt$. Ураховуючи, що на максимальній висоті підйому $v_y = 0$, визначимо час підйому: $t_п = \dfrac{v_{0y}}{g}$.
З урахуванням того, що для тіла, кинутого під кутом до горизонту, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, час підйому буде $t_п = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

Оскільки парабола симетрична, то час підйому дорівнює часу падіння, і загальний час польоту $t = 2t_п = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.

Щоб визначити максимальну висоту підйому (яка дорівнює максимальній координаті $y = H_{max}$), підставимо в рівняння $y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$ час підйому $t_п = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Після спрощень отримуємо формулу: $H_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Дальність польоту L у горизонтальному напрямку дорівнює координаті x тіла в момент часу $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Оскільки $x = (v_0 \cos\alpha)t$, то

$$L = (v_0 \cos\alpha) \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Використовуючи формулу синуса подвійного кута $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, отримаємо: $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Як видно з формули, дальність польоту L буде найбільшою, коли $\sin 2\alpha = 1$, тобто для кута $\alpha = 45°$.

За наявності опору повітря траєкторія польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту, не буде правильною параболою. Дальність польоту при цьому буде меншою від розрахованої за цією формулою.

Форму траєкторії руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, відтворює струмінь води, спрямований під кутом до горизонту. Спочатку зі збільшенням кута α струмина б'є все далі й далі. Коли кут досягає 45°, дальність є найбільшою. З подальшим збільшенням кута дальність зменшується.

Для розрахунку швидкості руху тіла в довільній точці траєкторії та визначення кута β, який утворює вектор швидкості з горизонталлю, достатньо знати проекції швидкості на осі X та Y. При цьому слід враховувати, що горизонтальна проекція швидкості залишається постійною й дорівнює початковому значенню, $v_x = v_{0x} = \text{const}$, вертикальна ж проекція змінюється: у разі підйому вгору вона зменшується за лінійним законом, $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$, на максимальній висоті $v_y = 0$, далі тіло падає вниз.

Модуль результуючої швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$. Вектор результуючої швидкості утворює з горизонтом кут β, що змінюється із часом, $\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}$. Висота, на яку підніметься тіло за довільний інтервал часу польоту: $h = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.

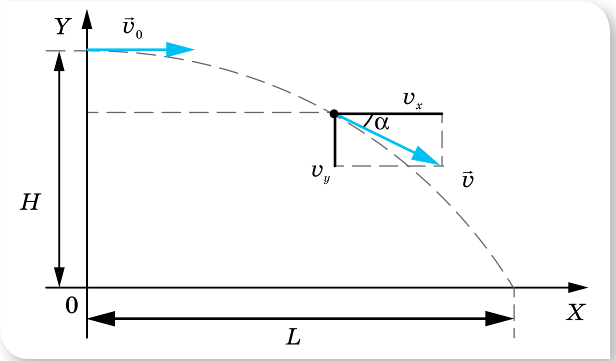
Рух тіла, кинутого горизонтально з висоти *H*. Це окремий випадок руху тіла, кинутого під кутом до горизонту ($\alpha = 0$) з деякої висоти H. Це криволінійний рух уздовж однієї вітки параболи від її вершини. У вертикальному напрямку вздовж осі Y відбувається вільне падіння, у горизонтальному напрямку вздовж осі X — рівномірний рух (мал. 28).

У будь-який момент часу швидкість $\vec{v}$ напрямлена по дотичній до траєкторії. Горизонтальна проекція швидкості в будь-який момент часу залишається сталою, $v_x = v_0$, а вертикальна проекція лінійно зростає із часом: $v_y = gt$.

Рівняння руху в горизонтальному напрямку $x = v_x t$, у вертикальному — $y = \frac{gt^2}{2}$. Оскільки $v_x \perp v_y$, то модуль швидкості в будь-який момент польоту $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$.

Час падіння на поверхню землі $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Дальність польоту $L = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Модуль швидкості в момент падіння на поверхню землі: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.



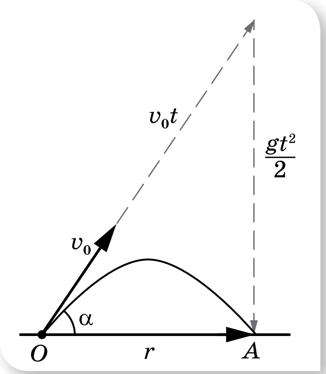
Мал. 28. Рух тіла, кинутого горизонтально з певної висоти

Зверніть увагу! Усі формули в даному параграфі отримано за умови $g = \text{const}$, тобто рух відбувається на малих висотах.

Геометричний спосіб опису руху в полі тяжіння землі. Розглянуті вище формули виводились аналітичним методом — з використанням проекцій векторних величин на осі координат. Описати рух кинутого під кутом до горизонту тіла можна й векторним методом.

Згідно з принципом незалежності рухів, рух кинутого тіла є одночасно прямолінійним рівномірним з постійною швидкістю v_0 (у напрямку вектора $\vec{v}_0$) та рівноприскореним із прискоренням g без початкової швидкості (у напрямку вектора $\vec{g}$). У першому випадку переміщення тіла $\vec{v}_0 t$, у другому — $\frac{\vec{g}t^2}{2}$, результуюче переміщення дорівнює векторній сумі $\vec{v}_0 t$ і $\frac{\vec{g}t^2}{2}$. Якщо початок відліку міститься в точці, де тіло перебувало в момент $t = 0$, то вектор переміщення за інтервал часу від 0 до t збігається з радіусом-вектором у момент часу t. Тобто $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$.

Розглянемо приклад. Нехай тіло, що кинуто з поверхні землі під деяким кутом з початковою швидкістю v_0, через деякий час t впало на землю. Необхідно визначити відстань l від місця кидання до місця падіння. Накреслимо трикутник переміщень (мал. 29).



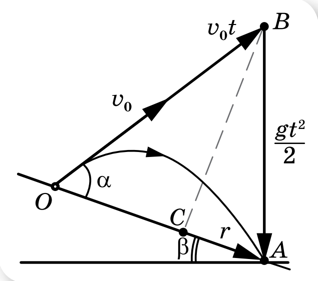
Мал. 29. Переміщення $\vec{r}$ як сума двох переміщень $\vec{v}_0 t$ і $\frac{\vec{g}t^2}{2}$

Вектор $\vec{v}_0 t$ виходить з точки кидання й напрямлений уздовж вектора $\vec{v}_0$ під деяким кутом до горизонту. Вектор $\frac{\vec{g}t^2}{2}$ напрямлений вертикально вниз у точку падіння тіла. Відповідно, результуючий вектор переміщення $\vec{r}$ — між точками кидання та падіння. Як видно, утворений трикутник є прямокутним. Шукану відстань l, що дорівнює модулю вектора $\vec{r}$, визначимо за теоремою Піфагора:

$$l = \sqrt{(v_0 t)^2 - \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2}.$$

Зверніть увагу на те, що в цьому випадку дальність польоту не залежить від кута кидання. Формально цей кут визначається початковою швидкістю та часом польоту. З малюнка 29 видно, що $\sin\alpha = \dfrac{gt}{2v_0}$.

Спробуйте самостійно, використовуючи цей метод та малюнок 30, визначити дальність польоту l, якщо тіло кидають зі схилу, що утворює з горизонтом кут β. Початкова швидкість тіла v_0 напрямлена під кутом α до схилу.



Мал. 30

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Доведіть, що час підйому тіла, кинутого вертикально вгору, дорівнює часу його падіння.
2. Доведіть, що тіло, яке кидають вертикально вгору і яке згодом падатиме вниз, матиме в будь-якій точці траєкторії швидкості, рівні за модулем і протилежні за напрямком.
3. Людина, що стоїть на краю схилу, кидає одне тіло вертикально вгору, інше — вертикально вниз. У якого з тіл у момент падіння на землю буде більша швидкість?
4. Які фактори має враховувати людина, що виконує стрибок у довжину? А людина, що стрибає у висоту?

ВПРАВА 5

1. Тіло вільно падає з висоти 39,2 м. За який час тіло пройде: а) перший метр свого шляху; б) останній метр свого шляху? Чому дорівнює середня швидкість на другій половині шляху?
2. Тіло, яке вільно падає без початкової швидкості, за останню секунду руху проходить $\frac{2}{3}$ усього шляху. Визначте шлях, пройдений тілом за час падіння.
3. Тіло вільно падає з висоти 80 м. Визначте його переміщення за останню секунду падіння.
4. Вільно падаюче тіло пролетіло точку A своєї траєкторії зі швидкістю v_A. З якою швидкістю воно пролетить точку B, яка лежить на відстані h нижче точки A?
5. З вежі, що має висоту h, кидають одночасно два тіла: перше — зі швидкістю v_1 вертикально вгору, а друге — зі швидкістю v_2 вертикально вниз. Визначте різницю часу Δt між моментами падіння кожного з тіл на землю.
6. М'ячик вільно падає з висоти 120 м на горизонтальну поверхню. Після кожного відбивання від поверхні швидкість м'ячика зменшується в $n = 2$ рази. Побудуйте графік швидкості та визначте шлях, пройдений м'ячиком за час руху.

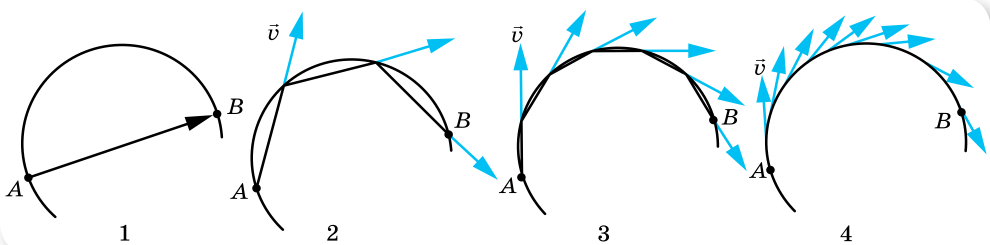
7. Дальність польоту тіла, кинутого в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, дорівнює висоті кидання. З якої висоти кинуто тіло?
8. Під кутом 60° до горизонту кидають тіло з початковою швидкістю $50\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначте переміщення тіла від точки кидання через 5 с.
9. Тіло кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Накресліть графіки залежності: а) вертикальної проекції швидкості від часу $v_y(t)$; б) вертикальної проекції швидкості від висоти підйому $v_y(h)$; в) вертикальної проекції швидкості від дальності польоту $v_y(L)$.
10. Два тіла кинуто з однаковими швидкостями під кутами α і $\frac{\pi}{2} - \alpha$ до горизонту. Визначте відношення максимальних висот підйому цих тіл.
11. На яку відстань викидається струмина води з брандспойта, встановленого під кутом 30° до горизонту, якщо початкова швидкість струмини води $12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$? Урахуйте, що опір повітря зменшує дальність викидання струмини порівняно з розрахованою на 20 %.
12. По футбольному м'ячу вдарили так, що він піднімається під кутом 37° зі швидкістю $20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначте: а) максимальну висоту підйому м'яча; б) час до падіння на землю; в) відстань від місця удару до місця падіння. Вважайте, що м'яч відбивається від ноги футболіста на рівні землі.

§ 6 Рівномірний рух матеріальної точки по колу

Переміщення і швидкість у криволінійному русі. У рівномірному прямолінійному русі вектор швидкості не змінюється ні за модулем, ні за напрямком $\vec{v} = \text{const}$. У рівноприскореному прямолінійному русі вектор швидкості зберігає напрямок, але змінюється за модулем. Вектори швидкості $\vec{v}$ і переміщення $\vec{s}$ під час прямолінійного руху напрямлені в один бік.

Як напрямлені вектори швидкості $\vec{v}$ і переміщення $\vec{s}$ у криволінійному русі?

Нехай протягом певного інтервалу часу тіло рухається криволінійною траєкторією від точки A до точки B (мал. 31). Пройдений тілом шлях — це довжина дуги $\smile AB$, а переміщення — це вектор, напрямлений уздовж хорди $\overrightarrow{AB}$.



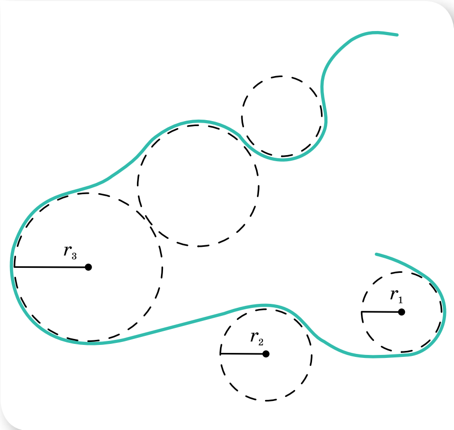
Мал. 31. Напрямок миттєвої швидкості тіла під час його криволінійного руху

Якщо розглядати рух за коротші інтервали часу, то можна дійти висновку, що *миттєва швидкість тіла в точці траєкторії напрямлена по дотичній до дуги в даній точці.*

У тому, що миттєва швидкість напрямлена по дотичній, можна переконатися, спостерігаючи, як відлітають частки багнюки від коліс автомобіля, що забуксував.

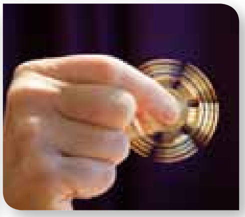
Миттєва швидкість тіла в різних точках криволінійної траєкторії *має різний напрямок*. За модулем ця швидкість може бути однаковою в усіх точках, а може й змінюватись. Навіть коли за модулем швидкість не змінюється, її не можна вважати сталою, адже швидкість — величина векторна. А для векторної величини модуль і напрямок однаково важливі. Тому криволінійний рух — це завжди рух із прискоренням. Якщо модуль швидкості не змінюється, прискорення криволінійного руху пов'язане зі зміною напрямку швидкості.

Зважаючи на те, що будь-яку криволінійну траєкторію можна розглядати як частину кола певного радіуса, цю особливість криволінійного рухуЗможна використати для моделювання його траєкторії (мал. 32).

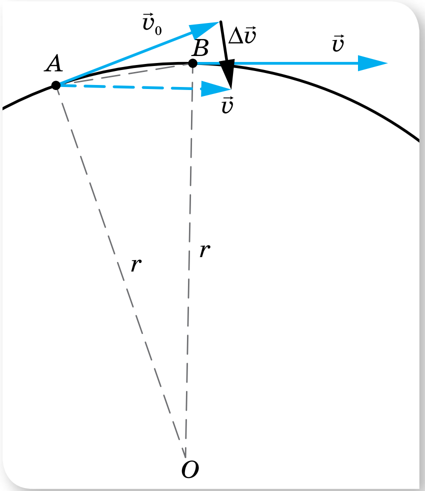


Мал. 32. Моделювання траєкторії криволінійного руху

Основні характеристики рівномірного руху по колу. Обертальний рух досить поширений у природі й техніці (мал. 33) — це обертання коліс, маховиків, лопатей літальних апаратів, Землі навколо своєї осі та ін.



Мал. 33. Використання обертального руху в природі й техніці



Мал. 34. До визначення напряму прискорення в русі по колу

Важливою особливістю обертального руху є те, що всі точки тіла рухаються з однаковим періодом, але їх швидкість може суттєво відрізнятися, бо всі вони рухаються по колах із різним радіусом. Наприклад, під час добового обертання Землі навколо своєї осі точки, що розташовані на екваторі, рухаються найшвидше, тому що їх рух відбувається по найбільшому радіусу.

Зверніть увагу! Вивчення обертального руху тіла ми розпочнемо з розгляду руху окремих точок на його поверхні (обертальний рух тіла як цілого розглянемо в подальшому).

Розглянемо випадок ***рівномірного руху матеріальної точки по колу***.

Рівномірний рух по колу — це рух зі сталою за модулем швидкістю та прискоренням, зумовленим зміною напрямку швидкості. Цю швидкість прийнято називати ***лінійною швидкістю***.

Нехай тіло рухається по колу радіусом r, і в деякий момент часу, який ми приймемо за початок відліку ($t_0 = 0$), воно перебуває в точці A (мал. 34).

Лінійна швидкість $\vec{v}_0$ в цій точці напрямлена по дотичній. Через деякий малий інтервал часу t тіло переміститься в точку B. Вважатимемо, що інтервал часу настільки малий, що дуга $\smile AB$ збігається з хордою AB (на малюнку для наочності точки віддалені). У точці B тіло матиме лінійну швидкість $\vec{v}$ (яка за модулем не змінилась, $v_0 = v$, змінився лише її напрям). Знайдемо різницю векторів $\vec{v}_0$ і $\vec{v}$ за правилом віднімання векторів. Для цього перенесемо вектор $\vec{v}$ паралельно самому собі так, щоб він і вектор $\vec{v}_0$ виходили з точки A. Тоді вектор $\Delta\vec{v}$, проведений від кінця вектора $\vec{v}_0$ до кінця вектора $\vec{v}$, є їх різницею.

З малюнка 34 видно, що вектор $\Delta\vec{v}$ напрямлено майже до центра кола. І якщо точки A і B дуже близькі, то вектор $\Delta\vec{v}$ направлено точно до центра кола. Такий напрямок має і прискорення, яке називають доцентровим $\vec{a}_д$.

Як відомо з курсу геометрії, дотична, проведена в певній точці кола, є перпендикулярною до радіуса, проведеного в цю точку. Отже, вектор доцентрового прискорення $\vec{a}_д$ в кожній точці кола перпендикулярний до вектора лінійної швидкості $\vec{v}$.

З'ясуємо, від чого залежить модуль доцентрового прискорення. Розглянемо трикутник, утворений векторами $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ та $\Delta\vec{v}$ (мал. 34). Він рівнобедрений, оскільки рівні модулі $v_0 = v$. Трикутник OAB — також рівнобедрений. Ці трикутники подібні, як рівнобедрені і з рівними кутами при вершині. З подібності трикутників випливає $\dfrac{\Delta v}{AB} = \dfrac{v}{r}$.

Як згадувалось вище, мала хорда AB збігається з дугою $\smile AB$, довжина якої є пройденим тілом шляхом з постійною за модулем лінійною швидкістю протягом часу t. Отже, $AB = vt$. Тому $\frac{\Delta v}{vt} = \frac{v}{r}$, або $\frac{\Delta v}{t} = \frac{v^2}{r}$. Оскільки $\frac{\Delta v}{t}$ — модуль прискорення, то *доцентрове прискорення* дорівнює $a_д = \frac{v^2}{r}$.

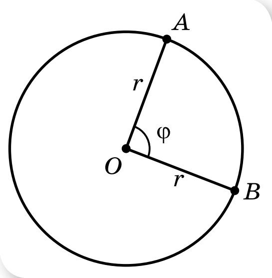
Доцентрове прискорення $a_д$ — прискорення при рівномірному русі матеріальної точки по колу, яке показує не зміну модуля швидкості (як при прямолінійному русі), а зміну напрямку швидкості. Модуль прискорення залежить від швидкості руху тіла й радіуса відповідного кола $a_д = \frac{v^2}{r}$.

Для довільної криволінійної траєкторії в будь-якій її точці тіло рухається з прискоренням, напрямленим до центра того кола, частиною якого є ділянка, що містить цю точку.

Рівномірний рух по колу характеризується також специфічними кінематичними величинами: кутовим переміщенням, кутовою швидкістю, періодом і частотою.

Період обертання T — час одного повного оберту точки, що рухається по колу. Одиниця періоду — секунда: 1 с.

Якщо тіло робить N обертів за час t, то $T = \frac{t}{N}$.



Мал. 35. Кутове переміщення

Обертова частота ν — кількість обертів за одиницю часу: $\nu = \frac{N}{t}$.

Одиниця частоти — оберти за секунду: $1\ \frac{1}{с} = с^{-1}$.

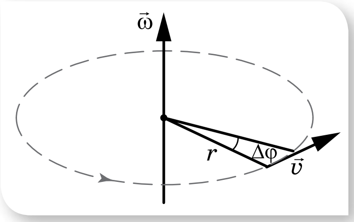
Нехай тіло рівномірно рухається по колу радіусом r і за певний час t переміщується з точки A в точку B (мал. 35). Кут φ, який при цьому описує радіус, називається *кутом повороту*, або *кутовим переміщенням*.

Одиницею кутового переміщення є радіан: 1 рад.

Кутова швидкість ($\vec{\omega}$) точки, що рівномірно рухається по колу, визначається відношенням кутового переміщення до інтервалу часу, протягом якого це переміщення відбулося: $\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$.

Одиниця кутової швидкості — радіан за секунду: $1\ \frac{рад}{с}$.

Кутова швидкість — векторна величина. Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений уздовж нерухомої осі обертання, причому так, що напрямок обертання та напрямок $\vec{\omega}$ утворюють правогвинтову систему (мал. 36): якщо дивитись услід вектору $\vec{\omega}$, то обертання відбувається за годинниковою стрілкою.



Мал. 36. Визначення напрямку вектора кутової швидкості

Оскільки кутове переміщення за один період руху дорівнює 2π рад, кутова швидкість може бути визначена через період і частоту обертання, $\omega = 2\pi\nu$ або $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Для рівномірного руху по колу кутова швидкість є сталою величиною $\omega = \text{const}$.

За період T тіло проходить шлях, що дорівнює довжині кола $l = 2\pi r$, тоді *модуль лінійної швидкості* визначається як $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ або $v = 2\pi r \cdot \nu$.

Одиниця лінійної швидкості — метр за секунду: $1\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Очевидним є *зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями*: $v = \omega r$.

Ураховуючи зв'язок лінійної та кутової швидкостей, доцентрове прискорення можна виразити і так: $a_{\text{д}} = \omega^2 r$.

Зверніть увагу! Як видно з формул, доцентрове прискорення в одному випадку прямо пропорційно залежить від радіуса, а в іншому — обернено пропорційно.

Цей парадоксальний, на перший погляд, висновок відбиває той факт, що якщо в тіл, які рухаються по колу, однакові лінійні швидкості, то доцентрове прискорення є більшим у того з них, яке рухається по колу меншого радіуса; якщо однакові їх кутові швидкості, то доцентрове прискорення більше там, де більший радіус.

Головною особливістю рівномірного руху по колу є те, що відбуваються періодичні повторення положення тіла та відповідні періодичні зміни величин, що характеризують рух. З подібними періодичними змінами величин ми ознайомимося, вивчаючи *коливання*.

Таким чином, за аналогією з кінематикою поступального руху, можна побудувати кінематику обертального руху. *Рівняння обертального руху* — встановлює залежність вектора кутового переміщення від часу: $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Чим відрізняються зміни швидкості прямолінійного і криволінійного рухів?
2. Чи можна вважати рівномірний рух по колу рівноприскореним?
3. Якщо в русі по колу змінюватиметься і модуль швидкості, як це впливатиме на прискорення?
4. Якими специфічними кінематичними величинами характеризується рух по колу?

Приклади розв'язування задач

Задача. Дитина їде на велосипеді по доріжці зі швидкістю $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Скільки обертів за секунду роблять колеса велосипеда, якщо вони не ковзають? Яке доцентрове прискорення мають точки на ободі колеса, якщо його радіус 35 см?

Дано:

$v = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

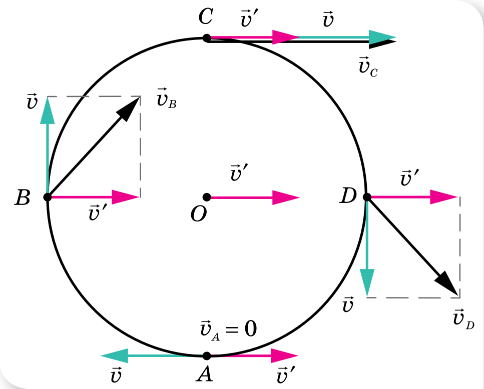
$r = 0{,}35$ м

ν — ?

a — ?

Розв'язання:

Колесо велосипеда бере участь одночасно у двох рухах: поступальному зі швидкістю $\vec{v}\,'$ та обертальному з лінійною швидкістю $\vec{v}$. Напрямки цих швидкостей показано на малюнку 37. Напрямок вектора швидкості поступального руху збігається з напрямком руху велосипеда, тому в усіх точок колеса він однаковий (червоні стрілки на малюнку), вектор лінійної швидкості різних точок колеса напрямлений по дотичній, проведеній у цій точці.



Мал. 37. Поступальний та обертальний рухи колеса

Оскільки колесо рухається без проковзування, то точка A, що стикається в даний момент із дорогою, має швидкість, що дорівнює нулю. Звідси випливає, що швидкість поступального руху за модулем дорівнює лінійній швидкості.

Таким чином, значення швидкості з умови задачі ми можемо використовувати для знаходження доцентрового прискорення: $a_д = \frac{v^2}{r}$,

$$a_д = \frac{100\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{0{,}35\ \text{м}} = 285\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Кількість обертів, що робить за секунду колесо (тобто частоту обертання), визначаємо за формулою $v = 2\pi r\nu$, $\nu = \frac{v}{2\pi r}$, $\nu = \frac{10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{6{,}28 \cdot 0{,}35\ \text{м}} = 4{,}55\ \frac{1}{\text{с}}$.

Відповідь: $a_д = 285\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $\nu = 4{,}55\ \frac{1}{\text{с}}$.

ВПРАВА 6

1. За який час колесо, що має кутову швидкість $4\pi\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, зробить 100 обертів?
2. Якщо радіус колової орбіти штучного супутника Землі збільшити в 4 рази, то його період обертання збільшиться у 8 разів. У скільки разів зміниться швидкість руху супутника по орбіті?

3. Хвилинна стрілка годинника у три рази довша за секундну. Обчисліть співвідношення лінійних швидкостей кінців стрілок.
4. Обчисліть доцентрове прискорення точок колеса автомобіля, які дотикаються до дороги, якщо автомобіль рухається зі швидкістю 72 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ і при цьому частота обертання колеса становить 8 с^{-1}.
5. Дві матеріальні точки рухаються по колах радіусами R_1 і R_2, причому $R_1 = 2R_2$. Порівняйте їх доцентрові прискорення у випадках: а) коли їх лінійні швидкості однакові; б) коли їх періоди однакові.
6. Яка лінійна швидкість точок земної поверхні на широті 60° під час добового обертання Землі? Вважайте, що радіус Землі — 6400 км.
7. Радіус рукоятки коловорота криниці у 3 рази більший за радіус вала, на який намотується трос. Яка лінійна швидкість кінця рукоятки під час піднімання відра з глибини 10 м за 20 с?
8. Визначте радіус диска, який обертається, якщо лінійна швидкість точок, що лежать на його краю, дорівнює 6 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а точок, що лежать на 15 см ближче до його центра, — 5,5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
9. На горизонтальній осі обертаються зі швидкістю 3000 обертів за хвилину два тонких диски, закріплені на відстані 100 см один від одного. Пущена паралельно осі куля пробиває обидва диски, причому другий отвір від кулі виявився зміщеним відносно першого на кут 45°. Пробивши диски, куля заглиблюється у стіну на 60 см. Визначте: а) швидкість кулі під час її руху між дисками; б) час руху в стіні; в) прискорення кулі під час руху у стіні.

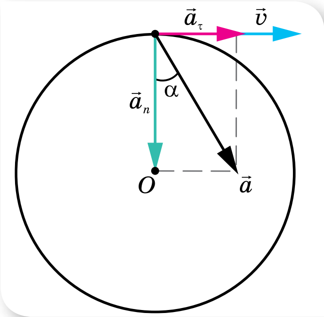
Експериментуємо

Визначте середнє значення періоду обертання кульки, що скочується по похилому жолобу.

§ 7 Нерівномірний рух матеріальної точки по колу

Характеристики нерівномірного обертального руху. Рух по колу (обертальний рух) може бути як рівномірним, так і нерівномірним. У рівномірному русі по колу лінійна швидкість змінюється тільки за напрямком. У нерівномірному — і за напрямком, і за числовим значенням.

Оскільки лінійне прискорення характеризує зміну лінійної швидкості і за числовим значенням, і за напрямком, то його можна подати у вигляді суми двох складових, а саме $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, де ***нормальне*** (***доцентрове***) ***прискорення*** $\vec{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямком і напрямлене до центра кола, $a_n = \frac{v^2}{r}$; ***тангенціальне*** (або ***дотичне***) ***прискорення*** $\vec{a}_\tau$ характеризує зміну модуля швидкості й напрямлене по дотичній до траєкторії, $a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (мал. 38, с. 36).



Мал. 38. Складові лінійного прискорення

Модуль лінійного (або повного) прискорення $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Кут α, який утворює вектор лінійного прискорення $\vec{a}$ з радіусом-вектором рухомої точки, визначається як $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_\tau}{a_n}$.

У разі рівномірного обертання тіла по колу тангенціальне прискорення дорівнює нулю.

Під час нерівномірного руху по колу змінюється і кутова швидкість ω, а це свідчить про те, що кутове прискорення не дорівнює нулю.

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ визначається відношенням зміни кутової швидкості обертання до інтервалу часу, за який ця зміна відбулася:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t}.$$

Одиниця кутового прискорення — радіан за секунду в квадраті: $1\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Вектор $\vec{\varepsilon}$ збігається за напрямком з вектором $\vec{\omega}$, якщо обертання прискорене, і напрямлений у протилежний бік, якщо обертання сповільнене. Вираз $\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ характеризує середню за час Δt стрімкість зміни кутової швидкості руху матеріальної точки. Його називають середнім кутовим прискоренням. Якщо зменшувати інтервал часу, за який змінюється кутова швидкість, то що меншим буде цей інтервал, $\Delta t \to 0$, то меншою буде зміна кутової швидкості, $\Delta\vec{\omega} \to 0$, а дріб $\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ прямує до деякого граничного значення. Цю границю називають миттєвим кутовим прискоренням точки в певний момент часу, отже: $\vec{\varepsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{\omega}'$.

Нерівномірний обертальний рух є досить складним, тому надалі будемо досліджувати рух зі сталим кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon} = \text{const}$, тобто рівноприскорений обертальний рух. Кутова швидкість рівноприскореного обертального руху матеріальної точки в будь-який момент часу визначається формулою $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$.

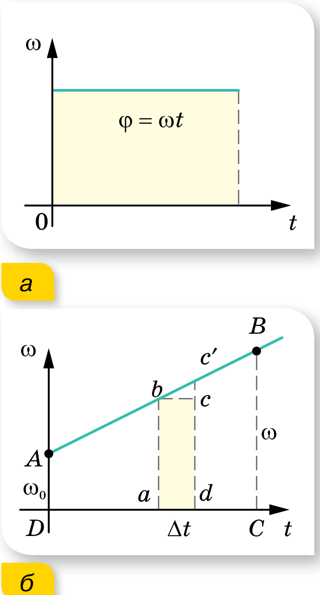
Щоб встановити зв'язок між кутовим і лінійним прискореннями, скористаймося співвідношенням $\Delta\omega = \dfrac{\Delta v}{r}$, тоді $\varepsilon = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v}{r\Delta t}$. Оскільки за означенням $a_\tau = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ — тангенціальне прискорення, то $\varepsilon = \dfrac{a_\tau}{r}$.

Отже, якщо тіло рухається по колу рівномірно, воно має лише доцентрове (нормальне прискорення), яке зумовлене зміною напрямку його лінійної швидкості, $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 4\pi^2\nu^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \omega v$.

У разі нерівномірного руху по колу виникає тангенціальне (дотичне) та кутове прискорення, які зв'язані між собою залежністю, $a_\tau = \varepsilon r$.

Кінематичні рівняння обертального руху матеріальної точки. У випадку рівномірного обертання, тобто руху з постійною кутовою швидкістю, кутове переміщення визначається площею прямокутника, одна зі сторін якого — t, а інша — ω (мал. 39, *а*), $\varphi = \omega t$. У випадку нерівномірного руху по колу зі сталим кутовим прискоренням графік кутової швидкості має вигляд, зображений на малюнку 39, *б*.

Якщо на графіку (мал. 39, *б*) виділити вузьку смужку $abc'd$, ширина якої відповідає малому інтервалу часу Δt, то вона мало відрізняється від прямокутника $abcd$. Для досить малого Δt можна вважати, що рух відбувається з постійною кутовою швидкістю, тому площа прямокутника $abcd$ чисельно дорівнює кутовому переміщенню за малий інтервал часу Δt. На такі смужки можна розбити всю фігуру, розташовану під графіком кутової швидкості. Отже, кутове переміщення при рівноприскореному русі по колу визначається площею трапеції $ABCD$, основами якої є відрізки $CB = \omega$, $DA = \omega_0$, а висота $DC = t$. Ураховуючи, що для рівноприскореного обертання $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, отримуємо: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.



Мал. 39. Графічне визначення кутового переміщення обертальних рухів: *а* — рівномірного; *б* — рівноприскореного

У векторній формі рівняння має вигляд: $\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}$.

Для рівноприскореного обертання виконується також формула: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Який характер зміни швидкості руху тіла в його нерівномірному русі по колу?
2. Що таке повне прискорення руху тіла? З яких компонентів воно складається?
3. Яке прискорення називається тангенціальним? Нормальним? Якими формулами вони визначаються? Наведіть приклади, коли тангенціальне прискорення дорівнює нулю. А коли дорівнює нулю нормальне прискорення?
4. Що таке кутове прискорення? Яке обертання називають рівноприскореним?

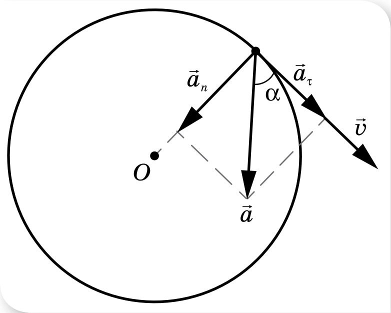
Експериментуємо

Визначте кутове прискорення обертального руху кульки під час скочування її по похилому жолобу.

Приклади розв'язування задач

Задача. Колесо обертається рівноприскорено. Через 2 с від початку руху вектор повного прискорення точки, що лежить на ободі колеса, утворює кут 60° з вектором її лінійної швидкості. Визначте кутове прискорення в цей час.

Дано:	Розв'язання:
$t = 2$ с $\alpha = 60°$	Виконаємо малюнок до задачі (мал. 40).
ε — ?	З малюнка 40 видно, що $a_\tau = a\cos\alpha$.



Мал. 40

Повне прискорення $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Ураховуючи, що $a_n = \omega^2 r$ і $\omega = \varepsilon t$, маємо: $a_n = \varepsilon^2 t^2 r$.

Оскільки тангенціальне прискорення $a_\tau = \varepsilon r$, то нормальне прискорення можна записати так: $a_n = a_\tau \varepsilon t^2$. Підставимо цей вираз у формулу $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{a_\tau^2 \varepsilon^2 t^4 + a_\tau^2} = a_\tau \sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1}$.

Ураховуючи, що $a_\tau = a\cos\alpha$, отримуємо $a_\tau = a_\tau \sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1} \cdot \cos\alpha$, звідки $\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Після перетворень, отримуємо: $\varepsilon = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{t^2}$.

Підставляємо числові значення: $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{4\ \text{с}^2} \approx 0{,}43\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Відповідь: $\varepsilon = 0{,}43\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

ВПРАВА 7

1. Колесо обертається з початковою частотою 5 $с^{-1}$, після гальмування протягом 1 хв частота його обертання зменшилася до 3 $с^{-1}$. Визначте кутове прискорення колеса та кількість обертів, які колесо здійснило за цей час. Вважайте рух рівносповільненим.
2. Кутова швидкість тіла, що рухається по колу, змінюється за законом $\omega = 5 + 2t$, де всі величини задано в СІ. Побудуйте графік зміни швидкості. Визначте кутове прискорення та початкову швидкість. Якою буде кутова швидкість через 10 с після початку обертання?

3. Тіло рухається по колу з постійним кутовим прискоренням 2 $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Скільки повних обертів зробить тіло за 10 с, якщо початкова кутова швидкість дорівнює нулю? Якою буде кутова швидкість руху тіла в цей момент часу?

4. Тіло, що обертається зі швидкістю 120 $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$, зупиняється протягом 1,5 хв. Вважаючи рух рівносповільненим, визначте кількість обертів до повної зупинки. З яким кутовим прискоренням зупиняється тіло?

5. Точка рухається по колу радіусом 20 см з постійним тангенціальним прискоренням 5 $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. За який час від початку руху нормальне прискорення точки буде: а) дорівнювати тангенціальному; б) удвічі більшим за тангенціальне?

6. Колесо обертається з кутовим прискоренням 2 $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Через інтервал часу 0,5 с від початку руху повне прискорення колеса дорівнює 13,6 $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Визначте радіус колеса.

7. Вентилятор робить 900 $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$. Після вимикання вентилятор зупинився через 10 с. Визначте кутове прискорення вентилятора, вважаючи, що до зупинки він обертався рівносповільнено.

Перевірте себе (§ 1–7)

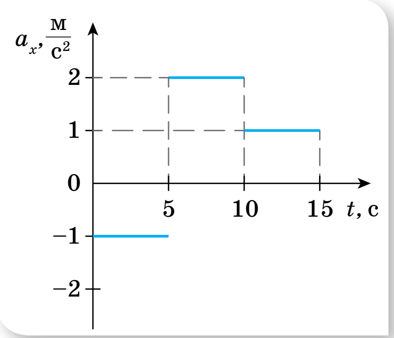
1. Автомобіль першу половину шляху рухався зі сталою швидкістю 30 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а другу — зі швидкістю 20 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначте середню швидкість руху автомобіля на всьому шляху.

А $22\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ **Б** $24\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ **В** $25\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ **Г** $27\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

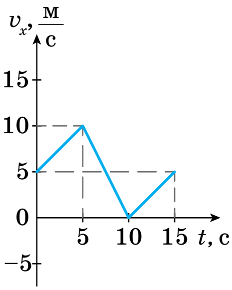
2. Тіло, що мало швидкість 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, через деякий час зупинилося. Якою була його швидкість посередині гальмівного шляху?

А $2\sqrt{2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ **Б** $3\sqrt{2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ **В** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ **Г** $\frac{5}{\sqrt{2}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

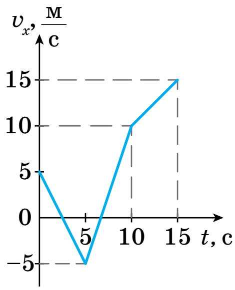
3. Для прямолінійного руху за графіком залежності проекції прискорення тіла від часу визначте графік залежності проекції швидкості цього тіла від часу.



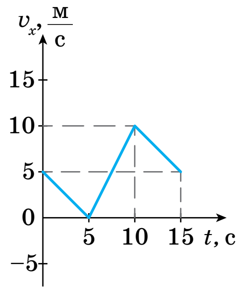
А



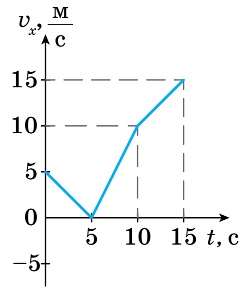
Б



В



Г



4. Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю v_0. На якій висоті його швидкість зменшиться вдвічі?

А $\frac{3v_0^2}{8g}$ **Б** $\frac{v_0^2}{4g}$ **В** $\frac{h}{4}$ **Г** $\frac{h}{2}$

5. Два однакові диски обертаються навколо своїх осей. Точки на краю першого диска мають в 4 рази менше доцентрове прискорення, ніж точки на краю другого диска. Визначте відношення періоду обертання першого диска до періоду обертання другого диска.

А 4 **Б** 2 **В** $\frac{1}{2}$ **Г** 16

6. Тіло, що рухається прямолінійно рівноприскорено, за перші 2 с спостереження пройшло 180 м, за другі — 168 м у тому самому напрямку, за треті 2 с — 156 м і т. д. Визначте прискорення тіла.

7. По похилій площині пустили (кинули) знизу вгору кульку. На відстані 50 см від початку шляху вона побувала двічі: через 3 і 5 с від початку руху. Визначте мінімально можливу довжину дошки (у см).

8. М'яч падає з висоти 5 м без початкової швидкості. На яку висоту підніметься він після відбивання, якщо під час удару він втрачає 10 % своєї швидкості? Опором повітря знехтуйте. Вважайте, що $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

9. Визначте радіус колеса, якщо під час його обертання лінійна швидкість точки на ободі дорівнює $6\ \frac{м}{с}$, а швидкість точки, що лежить ближче до осі обертання на 15 см, дорівнює $5{,}5\ \frac{м}{с}$.

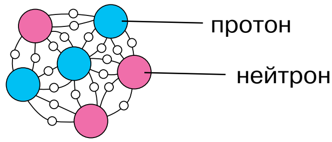
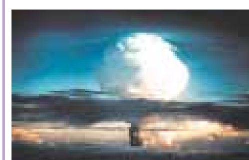
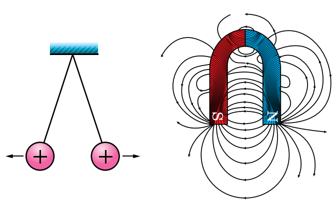
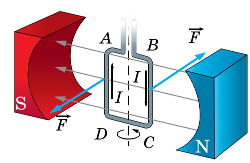
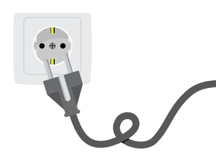
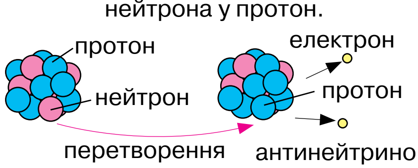
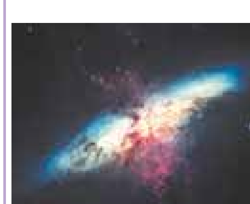
10. Тіло кидають з висоти 4 м в горизонтальному напрямку так, що до поверхні землі воно підлетить під кутом 45°. Яку відстань по горизонталі пролетить тіло? Опором повітря знехтуйте. Вважайте, що $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

§ 8 Механічна взаємодія тіл. Сила. Маса

Фундаментальні взаємодії. Усі природні явища пояснюються на основі чотирьох фундаментальних взаємодій (табл. 1). *Гравітаційна взаємодія* полягає у взаємному притяганні тіл. *Електромагнітна взаємодія* зв'язує електрони і ядра в атомах і молекулах.

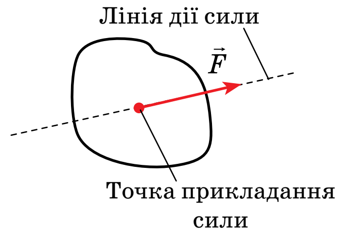
Сильна взаємодія забезпечує зв'язок нуклонів у ядрі й визначає ядерні сили. Нарешті, *слабка взаємодія* описує деякі види ядерних процесів, зокрема, характеризує всі види бета-перетворень.

Таблиця 1

Тип взаємодії	Характер взаємодії	Радіус дії	Приклад взаємодії
Сильна	Забезпечує зв'язок нуклонів у ядрі 	$r = 10^{-15}$ м	
Електромагнітна	Взаємодія між електрично зарядженими частинками:  а) нерухомими; б) рухомими	$r = \infty$	 
Слабка	Взаємодія, яка проявляється в розпадах елементарних частинок. Наприклад, перетворення нейтрона у протон. 	$r = 10^{-18}$ м	
Гравітаційна	Універсальна взаємодія, властива усім без винятку частинкам, які мають масу (у мікросвіті суттєвої ролі не відіграє). 	$r = \infty$	

Взаємодії та сили в механіці. Під *взаємодіями в механіці* розуміють такі дії тіл одне на одне, результатом яких є зміна руху цих тіл або їх деформації. Принципово важливо, що під час взаємодії змін зазнають обидва тіла, але часто, коли вивчають рух лише одного тіла, не зазначають, яке тіло і як саме діє на нього, а говорять, що на тіло діє сила або до тіла прикладена сила. Причому інтенсивність взаємодії між тілами може бути різною, тому й сила, яка відповідає цій взаємодії, може мати різні значення.

Сила в механіці — це фізична величина, яка кількісно характеризує механічну взаємодію.



Мал. 41. Характеристики сили як векторної величини

Позначають силу $\vec{F}$. Одиницею сили є ньютон[1]: 1 Н.

Сила — векторна величина, і в кожний момент часу сила, що діє на тіло, характеризується модулем, напрямком у просторі й точкою прикладання.

Пряма, уздовж якої напрямлена сила, називається *лінією дії сили* (мал. 41).

Сила як кількісна характеристика застосовна для опису лише гравітаційних й електромагнітних взаємодій, дія яких виявляється на великих порівняно з розмірами тіл відстанях, тобто які є *далекодійними*. У тих дуже малих зонах простору і в тих процесах, у яких проявляються сильні й слабкі взаємодії, такі поняття, як точка прикладання, лінія дії, а разом з ними й поняття сили втрачають зміст.

У механіці розглядають гравітаційні сили, а також два різновиди електромагнітних сил — сили пружності та сили тертя.

Діючи на тіло, розглянуті *сили змінюють швидкість його руху* (*тобто надають тілу прискорення*) *і* (*або*) *деформують його.* Якщо на тіло діє тільки одна сила, вона обов'язково спричинює і прискорення, і деформацію цього тіла. Якщо ж на тіло одночасно діє кілька сил, то можлива їх взаємна компенсація, і тіло може не набувати прискорення.

Одночасна дія на тіло кількох сил може бути замінена дією однієї сили (рівнодійної). Це можливо тому, що для сил справджується *принцип суперпозиції* (*незалежності дії сил*): *якщо на тіло діють одночасно кілька сил, дію кожної з них можна розглядати незалежно від дії інших.*

Сила, якою можна замінити дію кількох сил, прикладених до тіла в одній точці, називається **рівнодійною**.

Рівнодійна дорівнює векторній сумі всіх сил, що діють на тіло.

Дуже важливо навчитися правильно зображати на малюнку напрямки діючих на тіло сил, а також розкладати їх на складові (проекції на координатні осі), або знаходити рівнодійну сил. Сили пружності, тертя, тяжіння мають відповідні точки прикладання, на що ми звертатимемо увагу під час детального їх вивчення.

[1] Про зв'язок 1 Н з основними одиницями СІ — у наступному параграфі.

Оскільки сила здатна і надати тілу прискорення, і деформувати його, то обидві ці дії можна використовувати для вимірювання сили. Деформацію, наприклад пружини, застосовують у *динамометрах* — приладах для вимірювання сил.

Інертність тіл. Маса. Миттєво змінити швидкість тіла неможливо — дія на нього іншого тіла має тривати певний час.

Властивість тіл зберігати швидкість свого руху за відсутності зовнішніх дій на нього з боку інших тіл називають **інертністю.**

Що інертнішим є тіло, то менше змінює його швидкість деяка сила за певний час. Це означає, що в результаті дії даної сили більш інертне тіло набуває меншого прискорення, ніж менш інертне.

Кількісну міру інертності тіла називають його *масою*. Що більшу інертність має тіло, то більшою є його маса. І, як нам відомо, маса характеризує гравітаційну взаємодію. Що більшою є маса тіла, то сильніше воно притягує до себе інші тіла.

Отже, **маса** — це скалярна фізична величина, що є кількісною характеристикою інертності та гравітації.

У сучасній фізиці доведено рівність значень гравітаційної та інертної мас тіла ($m_т = m_і$), тому ми не будемо їх розділяти й говоритимемо просто про масу тіла m.

Маса тіла — величина інваріантна, тобто вона не залежить від вибору системи відліку.

Маса тіла — величина адитивна, тобто маса тіла дорівнює сумі мас усіх частинок, із яких складається тіло, а маса системи тіл дорівнює сумі мас тіл, що утворюють систему.

У задачах механіки більшість взаємодіючих тіл вважаються матеріальними точками. Нагадуємо, матеріальна точка — це тіло, розмірами й формою якого в певній задачі можна знехтувати. Тоді всю масу тіла можна вважати зосередженою в точці, яку називають *центром мас* (*згодом ми встановимо точне визначення цього поняття*). Виконуючи малюнок до задачі, вектори сил, що діють на тіло, паралельним перенесенням розташовуватимемо так, щоб початки векторів були прикладені до цієї точки.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які види фундаментальних взаємодій розрізняють у фізиці? Які з них проявляються в механіці?
2. Що таке сила? Які її основні характеристики? Які види сил розглядаються в механіці?
3. Що таке маса? Яку властивість тіл вона характеризує?
4. Поясніть способи вимірювання маси тіла.

ВПРАВА 8

1. Яке значення мають модулі сил, напрямлених перпендикулярно одна до одної, якщо їх можна замінити рівнодійною 250 Н, яка утворює кут 30° з однією із цих сил?
2. Визначте рівнодійну двох сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладених до однієї точки, у випадках, коли кут між їх напрямками становить 60° та 120°. Модулі сил $F_1 = 6$ Н та $F_2 = 8$ Н.
3. Розкладіть силу $F = 10$ Н на дві складові F_1 та F_2, напрямлені під кутами $\alpha_1 = 30°$ та $\alpha_2 = 30°$ до напрямку вектора F.
4. Який максимальний і який мінімальний результати можна дістати від додавання трьох сил, модулі яких дорівнюють F, kF, $2kF$?

§ 9 Закони Ньютона

Закони Ньютона — фундаментальні закони класичної механіки. Закони Ньютона утворюють єдину систему, що пояснює закономірності механічного руху. Перший закон описує стан тіла, коли на нього не діють інші тіла або дія інших тіл скомпенсована. Другий закон Ньютона пояснює, що відбудеться з тілом у результаті взаємодії з іншими тілами. Третій — про те, що відбувається з другим взаємодіючим тілом. Усі закони виконуються в інерціальних системах відліку.

Закони Ньютона разом із законом всесвітнього тяжіння (також встановленим Ньютоном) та апаратом математичного аналізу вперше у свій час надали загальне й кількісне пояснення широкому спектру фізичних явищ, починаючи з особливостей руху маятника й закінчуючи орбітами Місяця та планет.

Закон збереження імпульсу, який Ньютон вивів як наслідок своїх другого та третього законів, також став першим з відомих законів збереження.

Закони Ньютона дають змогу *розв'язати основну задачу механіки*, оскільки якщо відомі сили, прикладені до тіла, можна визначити його прискорення в будь-який момент часу, у будь-якій точці траєкторії. І навпаки, якщо відомо положення тіла в будь-який момент часу, то закони Ньютона дають змогу визначити рівнодійну сил, що діють на тіло.

Інерціальна система відліку. Рух і взаємодію тіл розглядають відносно якогось іншого об'єкта — інших тіл, спостерігача, або за допомогою набору просторово-часових координат. І опис руху багато в чому залежить від обраної системи відліку. Але завжди можна обрати таку систему відліку, у якій тіло рухається рівномірно й прямолінійно, коли сили, що діють на нього, компенсують одна одну, тобто їх рівнодійна дорівнює нулю.

Інерціальна система відліку (ІСВ) — система відліку, відносно якої тіло зберігає швидкість свого руху сталою, якщо на нього не діють інші тіла і поля або якщо їхні дії скомпенсовані.

Будь-яка система відліку, що рухається відносно інерціальної системи відліку поступально, рівномірно і прямолінійно — також є інерціальною системою. Системи відліку, які рухаються відносно інерціальних систем із прискоренням (поступально чи обертально) є ***неінерціальними***.

Суттєвим є те, що в інерціальних системах відліку, наприклад, в автобусі на зупинці, для збереження спокою не потрібно прикладати жодних зусиль, а в неінерціальній системі відліку, наприклад в автобусі в момент різкого гальмування, людям для цього доводиться напружувати м'язи, тримаючись за поручень. Можна дати і таке визначення інерціальної системи відліку — це система відліку, у якій прискорення тіла зумовлене тільки дією на нього сил.

Закони Ньютона. Сформулюємо ***перший закон Ньютона***:

існують такі системи відліку, відносно яких матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на неї не діють інші тіла або дія зовнішніх тіл скомпенсована.

Співвідношення між масою тіла, його прискоренням і діючою силою є змістом ***другого закону Ньютона***:

в інерціальній системі відліку прискорення $\vec{a}$, якого набуває тіло масою m під дією сили $\vec{F}$, прямо пропорційне силі, обернено пропорційне масі тіла і має той самий напрямок, що й прикладена сила:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Якщо на тіло одночасно діє кілька сил, то результуюче прискорення визначається рівнодійною сил: $\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m}$.

З другого закону Ньютона випливає, що у випадку, коли рівнодійна сил дорівнює нулю, прискорення тіла дорівнює нулю. Те ж саме для цього випадку стверджує і перший закон Ньютона.

Для багатьох практичних завдань зручним для використання є запис другого закону Ньютона в такій математичній формі: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Із цієї формули встановлюють одиницю сили. За одиницю сили в СІ взято таку силу, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Таким чином, 1 Н можна визначити через основні одиниці СІ: 1 Н = 1 кг · 1 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ = = 1 кг · м · с$^{-2}$.

Зазначимо, що математична форма запису другого закону Ньютона у вигляді $\vec{F} = m\vec{a}$ є дещо відмінною від тієї, як її записав сам Ньютон, але це не змінює суті закону.

Другий закон Ньютона узагальнює надзвичайно важливий факт: *дія сил не спричинює самого руху, а лише змінює його, адже сила спричинює зміну швидкості, тобто прискорення, а не саму швидкість.*

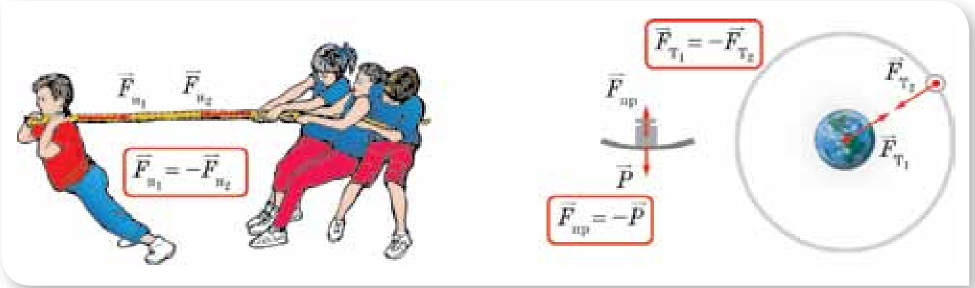
Третій закон Ньютона відображає той факт, що у природі немає і не може бути односторонньої дії одного тіла на інше, а існує лише взаємодія:

в інерціальній системі відліку сили, з якими взаємодіючі тіла діють одне на одне, напрямлені вздовж однієї прямої, рівні за модулем і протилежні за напрямком.

Третій закон Ньютона формулюють ще й так: *у дії завжди є протидія.*

Сили дії та протидії завжди існують разом, парами. Досліди показують, що сили будь-якої природи (гравітаційні, електромагнітні) під час взаємодії тіл виникають попарно, мають протилежні напрями, однакові за модулем. Природа обох сил під час взаємодії однакова.

Зверніть увагу! Сили взаємодії хоч і онакові за величиною та протилежно напрямлені, але не врівноважують одна одну, оскільки прикладені до різних тіл (мал. 42).



Мал. 42. Сили дії та протидії

Межі застосовності законів Ньютона. Закони механіки Ньютона (її ще називають класичною механікою) встановлені для тіл, що нас оточують, так званих макроскопічних тіл, тобто тіл, що складаються з величезної кількості молекул і атомів. Для руху частинок мікросвіту закони Ньютона можна застосовувати лише в деяких випадках.

Закони механіки Ньютона встановлені для тіл, що рухаються порівняно з *невеликими швидкостями,* які набагато менші від швидкості світла. Рух, що відбувається зі швидкістю v, набагато меншою від швидкості світла c у вакуумі $\left(v \ll c, \text{ де } c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, називають *нерелятивістським.*

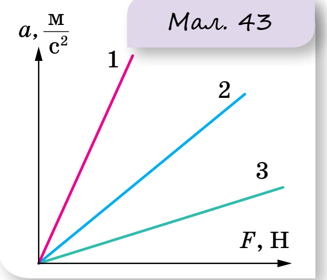
Закони механіки, сформульовані Ньютоном, — незмінні в усіх інерціальних системах відліку. Незмінними є час, маса тіла, прискорення та сила. Траєкторія, швидкість і переміщення різні в різних інерціальних системах відліку.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

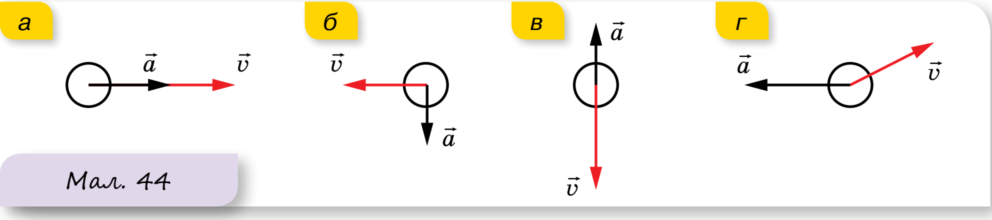
1. Які системи відліку називаються інерціальними? Неінерціальними?
2. Яким чином можна довести, що система відліку є інерціальною?
3. Як формулюються закони Ньютона? Чи можна з формули $\vec{F} = m\vec{a}$ зробити висновок, що сила, яка діє на тіло, залежить від його маси та прискорення?
4. Які висновки можна зробити із законів Ньютона?
5. Чи можна стверджувати, що дія одного тіла на інше є причиною його руху?
6. Застосовуючи закони Ньютона, опишіть рух ноги під час виконання одного кроку.
7. Як, застосовуючи закони Ньютона, пояснити сильну втому, якщо на руці (або нозі) накладено гіпс?
8. Якщо прискорення тіла дорівнює нулю, то чи означає це, що на тіло не діє сила?
9. Чому на початку руху ви сильніше натискаєте на педалі велосипеда, ніж під час подальшого руху?

ВПРАВА 9

1. За приблизними даними, серце ссавців під час кожного скорочення прискорює 20 г крові від 0,25 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ до 0,35 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ за 0,1 с. Якою є сила сердечного м'яза?
2. Під час автомобільної аварії людина має реальні шанси вижити, якщо гальмівне прискорення автомобіля не перевищує 30g. Визначте силу, що діє на людину масою 70 кг і створює таке прискорення. Яку відстань пройде автомобіль до повної зупинки, якщо гальмування почалось за швидкості 80 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$?
3. Визначте середню силу м'язів, що прикладає спортсмен, штовхаючи ядро масою 7 кг, якщо ядро прискорюється на шляху 2,9 м, а надана йому початкова швидкість дорівнює 13 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
4. За графіками залежності прискорень тіл від прикладених до них сил (мал. 43) порівняйте їхні маси.
5. На малюнку 44, *а–г* вказані напрямки векторів прискорення та швидкості тіл. Для кожного випадку вкажіть напрямок рівнодійної сил, що діють на тіло. Відповідь обґрунтуйте.
6. Визначте модуль рівнодійної сил, що діє на тіло масою 8 кг, рух якого описується рівнянням $x = 2 + 3t + 4t^2$.



Мал. 43



Мал. 44

§ 10 Гравітаційна взаємодія

Закон всесвітнього тяжіння. Аналізуючи закони Кеплера (закони руху планет) і закони вільного падіння тіл на Землі, Ісаак Ньютон дійшов висновку, що сили притягання мають існувати не лише на Землі, а й у космосі, що притягання тіл є властивістю матерії.

Закон всесвітнього тяжіння формулюється так:

два тіла (матеріальні точки) притягуються одне до одного із силою, прямо пропорційною добутку їх мас й обернено пропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

тут r — відстань між центрами тіл (матеріальними точками); G — гравітаційна стала.

Цей закон є основою *класичної нерелятивістської теорії гравітації.*

Закон всесвітнього тяжіння *виконується*:

- для тіл, лінійні розміри яких набагато менші за відстань між ними (для матеріальних точок);
- для однорідних куль, наприклад системи Земля—Місяць; або для однорідної кулі й точкового тіла, наприклад, для обертання штучного супутника навколо Землі.

Для визначення сили притягання між тілами, розміри яких сумірні з відстанню між ними, необхідно умовно розбити тіла на складові частини, які можна вважати матеріальними точками, визначити сили взаємодії між цими точками й пододавати їх. Ця операція громіздка і вимагає знань з інтегрального та диференціального числення.

Гравітаційну сталу G було визначено за допомогою експериментів. Уперше це зробив англійський учений Генрі Кавендіш за допомогою крутильного динамометра (крутильних терезів). У СІ гравітаційна стала має значення $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Отже, два тіла масою 1 кг кожне, центри яких розміщені на відстані 1 м один від одного, взаємно притягуються гравітаційною силою, що дорівнює $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н.

Гравітаційне поле та гравітаційна сила. Як ми з’ясували, однією з механічних властивостей матеріальних тіл є властивість взаємного притягання. Але як відбувається взаємне притягання тіл, або, як кажуть, гравітаційна взаємодія?

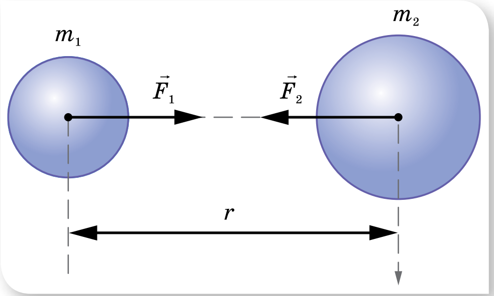
Гравітаційна взаємодія між тілами не залежить від середовища, у якому перебувають тіла, а здійснюється через ***гравітаційне поле*** (поле тяжіння).

Кожне тіло є джерелом гравітаційного поля. Що більшою є маса тіла, то сильніше його гравітаційне поле. Гравітаційне поле неоднорідне — воно сильніше біля поверхні тіла і слабшає з віддаленням від нього.

Гравітаційне поле, на відміну від електричного, яке існує тільки навколо електрично заряджених тіл, і магнітного, яке існує навколо рухомих електрично заряджених тіл, існує навколо всіх без винятку тіл.

У кожній точці гравітаційного поля на вміщене туди тіло діє сила притягання (гравітаційна сила або сила гравітації), пропорційна масі цього тіла.

Гравітаційні сили, які діють на кожне з двох взаємодіючих тіл, однакові за величиною і протилежні за напрямком — у повній відповідності з третім законом Ньютона (мал. 45). Вони напрямлені вздовж прямої, яка з'єднує центри мас тіл (сили, що відповідають таким умовам, називають ***центральними силами***).



Мал. 45. Напрямок сил гравітаційної взаємодії

Зверніть увагу! Розглянуте поняття гравітації стосується випадку взаємодії тіл, що рухаються з нерелятивістськими швидкостями. У випадку сильних змінних гравітаційних полів і релятивістських швидкостей гравітаційна взаємодія описується загальною теорією відносності Альберта Ейнштейна.

Сила тяжіння. Земля оточена її гравітаційним полем, яке називають *полем тяжіння Землі.*

Згідно із законом всесвітнього тяжіння модуль сили тяжіння $F_{тяж}$, яка діє на будь-яке тіло масою m поблизу Землі (на відстані h від її поверхні), можна обчислити за формулою: $F_{тяж} = G\dfrac{M_З m}{(R_З + h)^2}$.

Сила тяжіння, що діє на тіло, напрямлена вертикально вниз і прикладена до точки, яку називають центром тяжіння тіла.

Зверніть увагу! ***Центр тяжіння*** — це зв'язана з твердим тілом точка, через яку проходить рівнодійна сил тяжіння, що діють на всі частини тіла (при будь-якому положенні тіла в просторі).

Центр маси — це точка, через яку повинен проходити напрямок дії сили, що надає тілу прискореного поступального руху.

Для тіл, розміри яких значно менші за розміри земної кулі, центр маси практично збігається з центром тяжіння.

Якщо на тіло масою m діє тільки сила тяжіння, то це тіло вільно падає, рухаючись із прискоренням вільного падіння g. Згідно з другим законом Ньютона $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$.

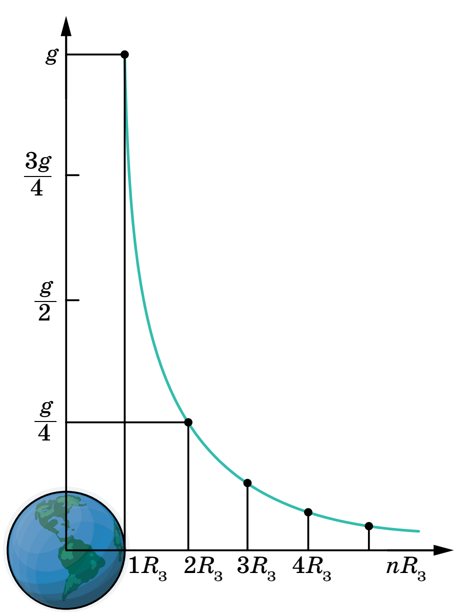
Прискорення вільного падіння. Прирівнюючи дві формули $F_{тяж} = G\frac{M_з m}{(R_з + h)^2}$ і $F_{тяж} = mg$, отримаємо формулу для обчислення ***прискорення вільного падіння***:

$$g = G\frac{M_з}{(R_з + h)^2}.$$

Прискорення вільного падіння залежить від географічної широти. Земна куля дещо сплюснута: її полярний радіус менший від екваторіального приблизно на 21,5 км, тому і значення прискорення вільного падіння відрізняється на полюсах та екваторі: так, на полюсі $g = 9{,}83\ \frac{м}{с^2}$, а на екваторі $g = 9{,}78\ \frac{м}{с^2}$. Однак ця залежність менш суттєва порівняно з *добовим обертанням Землі*. Оскільки Земля обертається навколо своєї осі, то вона не є інерціальною системою. Якщо пов'язати систему відліку з географічним полюсом Землі, що є нерухомим відносно осі обертання, то другий закон Ньютона для будь-якої точки на поверхні Землі матиме вигляд:

$$F_{тяж} = mg + ma_д.$$

Звідки $g = \frac{F_{тяж} - ma_д}{m}$. А як відомо, доцентрове прискорення $a_д = \frac{v^2}{r}$, де r — найкоротша відстань від точки на поверхні Землі до осі обертання.



Мал. 46. Залежність прискорення вільного падіння від відстані до центра Землі, вираженої в земних радіусах

Розрахунки показують, що через сплюснутість Землі значення прискорення вільного падіння на екваторі менше від його значення на полюсі на 0,18 %, а через добове обертання — на 0,34 %.

Прискорення вільного падіння не залежить від маси тіла (цей факт був доведений Галілео Галілеєм).

Прискорення вільного падіння змінюється з висотою. На малюнку 46 зображено залежність прискорення вільного падіння від відстані до центра Землі, вираженої в земних радіусах. З малюнка та формули $g = G\frac{M_з}{(R_з + h)^2}$ видно, що на відстані $4R_з$ у 25 разів зменшується g.

Гравітаційне поле Землі (поле земного тяжіння) є *потенціальним*. Розглядаючи механічну роботу і енергію, ми детальніше розглянемо потенціальні властивості гравітаційного поля.

На значення прискорення вільного падіння також впливають родовища, що містяться в надрах Землі. Поблизу родовищ залізної та інших важких руд g більше, над родовищами газу — менше.

Практично, якщо рух у полі тяжіння Землі відбувається на висоті в кілька сот метрів ($h << R_з$), значення g можна вважати постійним $g = G\frac{M_з}{R_з^2}$.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

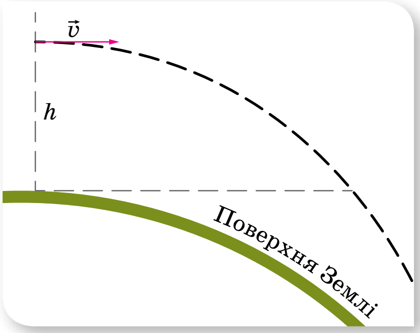
1. Як формулюють закон всесвітнього тяжіння? Який фізичний зміст гравітаційної сталої?
2. Який вид взаємодії тіл описується законом всесвітнього тяжіння? Як здійснюється ця взаємодія?
3. Що таке сила тяжіння? За якою формулою визначають модуль сили тяжіння? Куди прикладена і як напрямлена сила тяжіння, що діє на довільне тіло?
4. Від чого залежить прискорення вільного падіння? Чи залежить прискорення вільного падіння тіла від його маси?

ВПРАВА 10

1. Яке прискорення вільного падіння на висоті, що дорівнює половині радіуса Землі?
2. Радіус планети Марс становить 0,53 радіуса Землі, а маса — 0,11 маси Землі. Визначте прискорення вільного падіння на Марсі.
3. Середня відстань між центрами Землі та Місяця дорівнює 60 земним радіусам, а маса Місяця — у 81 раз менша від маси Землі. У якій точці на прямій, що з'єднує їх центри, тіло притягуватиметься до Землі й до Місяця з однаковими силами?
4. Середня густина Венери $\rho = 4900\ \frac{кг}{м^3}$, а радіус планети $R = 6200$ км. Визначте прискорення вільного падіння на поверхню Венери.
5. Знаючи радіус Землі, прискорення вільного падіння, визначте середню густину Землі. Порівняйте отримане значення з густиною поверхневих шарів Землі $\left(2{,}5 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}\right)$, зробіть висновок про густину надр планети.
6. На якій висоті над поверхнею Землі сила тяжіння зменшується на 10 %? Радіус Землі $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м.

§ 11 Рух штучних супутників Землі. Система «Земля–Місяць»

Космічні швидкості. У § 5 ми розглядали рух тіла, якому на висоті h над землею надано початкову швидкість в горизонтальному напрямку. Тіло рухається по вітці параболи й падає на Землю. При цьому ми вважали поверхню Землі плоскою. Таке спрощення допустиме за невеликих швидкостей, коли дальність польоту незначна.



Мал. 47. Віддалення тіла від поверхні Землі

Насправді одночасно з польотом вздовж траєкторії тіло дещо віддаляється від поверхні Землі (мал. 47).

Можна визначити таке значення швидкості тіла, за якого поверхня Землі, внаслідок своєї кривизни, віддалятиметься від тіла на стільки, на скільки тіло наближатиметься до неї внаслідок притягання. У такому випадку тіло рухатиметься на постійній висоті h над поверхнею Землі, тобто по колу радіусом $R_З + h$, перетворившись на *штучний супутник Землі* (ШСЗ).

Визначимо цю швидкість. Рухаючись рівномірно по колу радіусом $R_З + h$, тіло має доцентрове прискорення $a = \frac{v^2}{R_З + h}$. Його надає тілу сила тяжіння Землі, модуль якої $F = G\frac{M_З m}{(R_З + h)^2}$, де $M_З$ — маса Землі, m — маса тіла.

За другим законом Ньютона $a = \frac{F}{m}$, отже, $\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}$, звідки $v = \sqrt{\frac{GM_З}{R_З + h}}$.

Таким чином, якщо надати тілу довільної маси на висоті h над Землею швидкості, що визначається за цією формулою, воно стане штучним супутником Землі.

Швидкість, яку потрібно надати тілу для того, щоб воно стало штучним супутником Землі, називають ***першою космічною швидкістю***. Перша — тому, що існують друга і третя космічні швидкості.

Обчислимо першу космічну швидкість для ШСЗ, який запускається майже з поверхні Землі ($h \approx 0$). У цьому разі $v_\text{I} = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З}}$, і оскільки $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$, то $v_\text{I} = \sqrt{gR_З}$.

Підставивши у формулу значення $g = 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ і $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, отримуємо $v_\text{I} = \sqrt{9{,}81\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{м}} \approx 7{,}9\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Таким чином, тіло, якому на невеликій висоті від поверхні Землі надається швидкість близько $7{,}9\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$, напрямлена горизонтально відносно поверхні Землі, стає штучним супутником, що рухається по коловій орбіті.

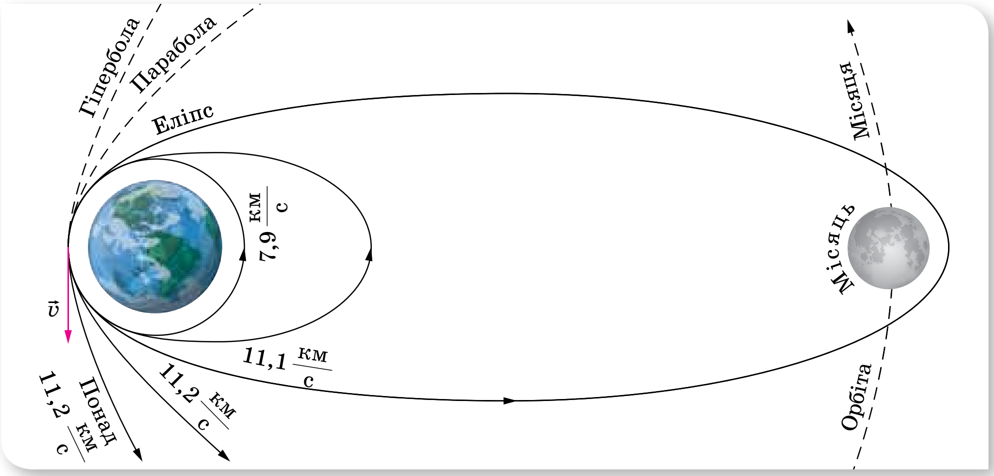
Швидкість, яку потрібно надати тілу, щоб воно, подолавши притягання планети, стало супутником Сонця, називають ***другою космічною швидкістю***.

Виведення формули для її визначення за допомогою законів Ньютона досить громіздке, оскільки необхідно враховувати залежність сили тяжіння від висоти. Використання ж закону збереження енергії дає змогу зробити це досить просто.

Вважаємо, що двигуни ракети практично біля поверхні Землі надають ракеті необхідної початкової швидкості та відключаються. Тоді кінетична енергія ракети в момент запуску дорівнює $\frac{mv^2}{2}$, а потенціальна поблизу поверхні Землі — mgR. Повна механічна енергія відповідно $E = \frac{mv^2}{2} - mgR$ (вважаючи за нульовий рівень нескінченність).

У кінцевому положенні, коли ракета віддаляється від поверхні Землі на нескінченність, її потенціальна енергія дорівнює нулю. Очевидно, що необхідна початкова швидкість буде найменшою, якщо в кінцевому стані швидкість ракети також буде нульовою. Тобто в кінцевому стані повна механічна енергія дорівнює нулю, тобто $\frac{mv^2}{2} - mgR = 0$. Звідси $v = \sqrt{2gR} = 11,2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Якщо значення швидкості більше за 7,9 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, але менше від 11,2 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, то орбіта супутника Землі є еліптичною. Розвинувши швидкість 11,2 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, тіло почне рухатися по параболі й більше не повернеться до Землі (мал. 48).



Мал. 48. Траєкторії руху космічних апаратів

Наведемо деякі особливості руху штучних супутників Землі. У найпростішому випадку колової орбіти, якщо висоти супутників над поверхнею Землі — 220 км, 562 км і 1674 км, періоди їх обертання становитимуть

89 хв, 96 хв і 120 хв відповідно. Дуже цікавим є випадок, коли супутник рухається на висоті 35 800 км. Тоді його період обертання становить 23 год 56 хв 04 с. А це час, за який Земля здійснює оберт навколо власної осі. Тому, якщо орбіта такого супутника лежить у площині земного екватора і він рухається в напрямку обертання Землі, то супутник увесь час перебуватиме над певною точкою земного екватора. Таку орбіту називають геостаціонарною.

Найбільша відстань, на якій супутник усе ще буде обертатися навколо Землі, — 1,5 млн км. Якщо ж супутник опиниться на більшій відстані, то тяжіння з боку Сонця збурюватиме його рух — або повертаючи на менші висоти, або перетворюючи на штучну планету.

Штучні супутники Землі виводять на орбіту за допомогою багатоступеневих ракет-носіїв, які піднімають їх на відповідну висоту над поверхнею Землі й розганяють до першої космічної швидкості або дещо більшої (але не більш ніж у 1,4 раза) за першу космічну швидкість.

Шлях, що називається *траєкторією виведення ШСЗ на орбіту*, становить зазвичай від декількох сотень до двох-трьох тисяч кілометрів. Ракета стартує, рухаючись вертикально вгору, розвертається приблизно горизонтально й розганяється до так званої розрахункової швидкості. Космічний апарат, що є метою запуску, несе остання ступінь ракети; він автоматично відділяється від неї й починає свій рух по певній орбіті відносно Землі, перетворюючись на штучне небесне тіло.

Розвиток і вдосконалення ракетної техніки визначили й ***основні напрями освоєння космосу***:

1. ***Запуски штучних супутників Землі (ШСЗ) на геостаціонарні орбіти.***

За метою і завданням ШСЗ поділяють на дві великі групи — науково-дослідні та прикладні. Науково-дослідні супутники призначені для одержання наукової інформації про Землю, навколоземний простір, з біології та медицини. Прикладні супутники призначені для задоволення практичних потреб людини, одержання інформації в інтересах народного господарства.

Супутники зв'язку призначені для передавання телевізійних програм, забезпечення радіотелефонного та телеграфного зв'язку між наземними пунктами, розміщеними на великих відстанях один від одного.

Метеорологічні супутники регулярно передають на наземні станції зображення хмарного, снігового й льодового покриву Землі, відомості про температуру земної поверхні та різних шарів атмосфери тощо.

Супутники дистанційного зондування Землі використовують для вивчення природних ресурсів Землі. Апаратура цих ШСЗ передає інформацію, важливу для різних галузей народного господарства: для прогнозування врожаїв сільськогосподарських культур; визначення районів, перспективних для пошуку корисних копалин; для контролю забруднення природного середовища (атмосфери, водойм).

Навігаційні ШСЗ дають змогу швидко й точно визначати місцезнаходження морських кораблів у будь-якій точці Світового океану, незалежно від погодних умов.

2. ***Створення пілотованих космічних станцій.***

Для вивчення космосу були створені орбітальні космічні станції (мал. 49); на таких станціях забезпечені умови, необхідні для життя людини та її активної дослідницької діяльності, подібні до звичайних. На навколоземній орбіті працювали такі станції: «Салют», «Скайлеб», «Мир», «Тяньгун». Космонавтів і космонавток на ці станції доставляли космічні кораблі одно- та багаторазового використання.

3. ***Дослідження далекого космосу і планет Сонячної системи.***

Космічні апарати побували на Місяці, Венері, Марсі, долетіли навіть до віддалених Юпітера й Сатурна та передали на Землю відомості про природу цих планет.

Значні досягнення в дослідженні Місяця одержані завдяки пілотованим польотам за космічною програмою США «Аполлон», під час яких астронавти неодноразово виконували дослідження на місячній поверхні.


а


б

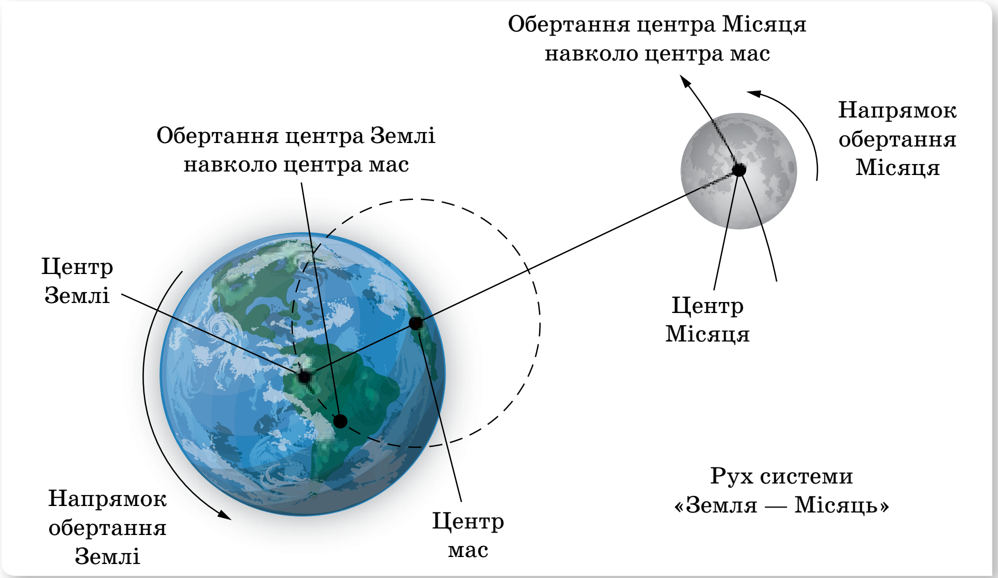
Мал. 49. У космічному просторі: *а* — орбітальна станція «Тяньгун» (Китай); *б* — телескоп «Габбл»

З 1990 р. допомагає досліджувати космос унікальна багатоцільова орбітальна обсерваторія, найбільша серед запущених у космос у XX ст., — телескоп «Габбл». За роки роботи на навколоземній орбіті «Габбл» отримав близько мільйона зображень понад 20 000 небесних об'єктів — зір, туманностей, галактик, планет. Близько 4000 астрономів мали можливість застосовувати його для спостережень.

Система «Земля — Місяць». Земля й Місяць, унаслідок дії взаємного тяжіння, як показав Леонард Ейлер, рухаються навколо спільного центра мас по еліпсах, причому розміри земного еліпса невеликі. Центр мас системи, своєю чергою, рухається по орбіті навколо Сонця. Отже, орбітальний рух Землі ускладнюється: протягом однієї половини синодичного місяця вона опиняється ближче до Сонця, ніж спільний центр, а протягом другої половини — навпаки. Крім того, вона трохи відхиляється то на схід, то на захід. Унаслідок цього довгота Сонця та близьких світил періодично змінюється на певну величину.

Система «Земля — Місяць» деякими вченими розглядається не як система «планета–супутник», а як подвійна планета, оскільки розмір і маса Місяця досить великі. У результаті цього обертання системи «Земля — Місяць» відбувається не навколо центра Землі, а навколо центра мас системи «Земля — Місяць», розташованого на відстані 1700 км над поверхнею Землі (мал. 50, с. 56).

У цьому центрі сили притягання й відцентрові сили зрівноважуються. У всіх інших точках їх взаємодія веде до утворення припливів і відпливів.



Мал. 50. Система «Земля — Місяць»

Якщо уявити, що вся поверхня Землі вкрита океаном, то ділянки води, найближчі до Місяця, у певний момент притягуються сильніше, а ділянки, найвіддаленіші від нього, — слабкіше, порівняно з ділянками в центрі Землі. Як наслідок, водна оболонка набирає форми еліпсоїда, витягнутого в напрямку до Місяця.

Земля обертається навколо осі, а тому припливні виступи пересуваються вздовж поверхні морів та океанів услід за Місяцем зі сходу на захід зі швидкістю 1800 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Над кожним пунктом припливна хвиля проходить двічі на добу. У відкритому морі рівень води піднімається на 1–2 м, а біля узбережжя, особливо у вузьких затоках чи бухтах, рівень води піднімається значно вище — на 4–5 м. Найбільші припливи — близько 18 м — спостерігаються на узбережжі Канади, де берег порізаний вузькими глибокими фіордами.

Тяжіння Місяця створює припливні деформації не тільки в гідросфері, а й в атмосфері, викликаючи двічі на добу зміну тиску повітря на кілька міліметрів ртутного стовпчика, і в літосфері, викликаючи підйом та опускання поверхні Землі.

Оскільки Земля обертається швидше від Місяця, то приливна хвиля зміщується вперед у напрямку обертання Землі, випереджаючи Місяць. Наслідком такого випереджання є те, що значна частина маси океанських вод (і частина маси всієї Землі) зміщується вперед з лінії, яка з'єднує центри мас Землі та Місяця. Ця зміщена вперед маса притягує до себе Місяць, створюючи силу, що діє перпендикулярно лінії «Земля — Місяць». У результаті на Місяць діє момент сили, що прискорює його обертання по орбіті навколо Землі. Це прискорення супроводжується віддаленням Місяця від центра Землі, що згодом може призвести до втрати Місяця.

Зворотним наслідком усього цього є те, що на береги материків, коли вони «набігають» на припливну хвилю, діє протилежно спрямована сила, яка «гальмує» їх. Таким чином Місяць створює прикладений до планети момент сили, який уповільнює обертання Землі. Раніше вона оберталася набагато швидше.

На Місяць припливні сили впливають ще більше, адже Земля набагато масивніша й більша. Саме цим пояснюється встановлена рівність періодів обертання Місяця навколо своєї осі та навколо Землі.

Сонячне тяжіння також спричиняє припливи і відпливи, але через значно більшу віддаленість Землі від Сонця вони у 2,2 раза менші, ніж місячні.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Чому для польотів у космос використовують лише апарати з реактивними двигунами?
2. Як має бути напрямлена швидкість тіла в момент його виходу на колову орбіту, щоб воно стало штучним супутником Землі?
3. Як напрямлене прискорення штучного супутника Землі? Чи можна вважати рух штучного супутника Землі рівноприскореним?
4. Для чого досліджують космос? Які головні напрями дослідження космосу?
5. Які особливості взаємодії між Землею і Місяцем? Які природні явища є наслідком цієї взаємодії?

ВПРАВА 11

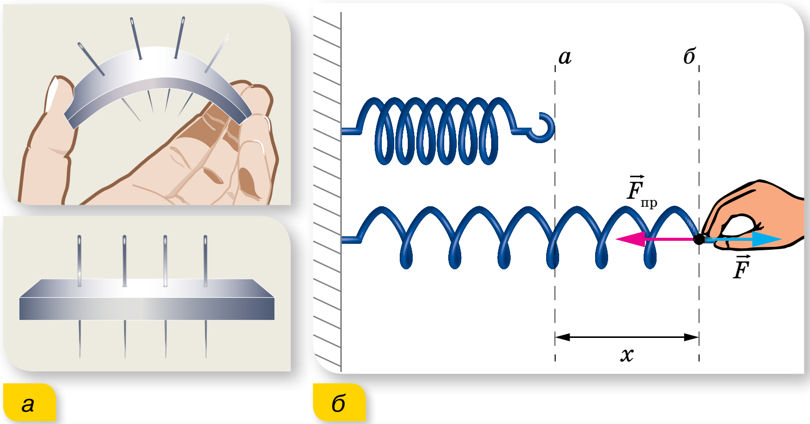
1. Обчисліть першу космічну швидкість для Місяця, якщо радіус Місяця становить 1700 км, а прискорення вільного падіння тіл на Місяці дорівнює 1,6 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.
2. Місяць рухається навколо Землі зі швидкістю близько 1 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Відстань від Землі до Місяця дорівнює $3{,}8 \cdot 10^5$ км. Визначте масу Землі.
3. Яку швидкість повинен мати штучний супутник, щоб обертатись по коловій орбіті на висоті 600 км над поверхнею Землі? Яким буде період його обертання? Радіус Землі становить 6400 км.
4. Доведіть, що період обертання штучного супутника по коловій орбіті визначається за формулою: $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$ (де M — маса планети, r — відстань супутника від її центра).
5. У скільки разів період обертання супутника, який рухається на висоті 21 600 км над поверхнею Землі, більший, ніж у супутника, що рухається на висоті 600 км?
6. Середня відстань від супутника до поверхні Землі становить 1700 км. Визначте його лінійну швидкість і період обертання.
7. Супутник рухається навколо деякої планети по коловій орбіті, радіус якої $4{,}7 \cdot 10^9$ м, зі швидкістю 10^4 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Яка середня густина планети, якщо її радіус $1{,}5 \cdot 10^8$ м?
8. На яку висоту над поверхнею Землі потрібно запустити супутник, щоб він залишався нерухомим відносно неї?

§ 12 Рух під дією кількох сил

Електромагнітні сили в механіці. Рухів, які відбуваються під дією лише однієї сили, у земних умовах практично немає. У розглянутих перед цим випадках руху тіл під дією земного тяжіння ми нехтували опором повітря. Результуючий характер руху тіла залежить від усіх прикладених до нього сил, у тому числі й тих, що перешкоджають руху (сили опору середовища, реакції опори, тертя).

Сила тяжіння є проявом гравітаційної взаємодії. Сили пружності й сили тертя, які також розглядаються в механіці, є проявом електромагнітної взаємодії (на рівні міжмолекулярної взаємодії).

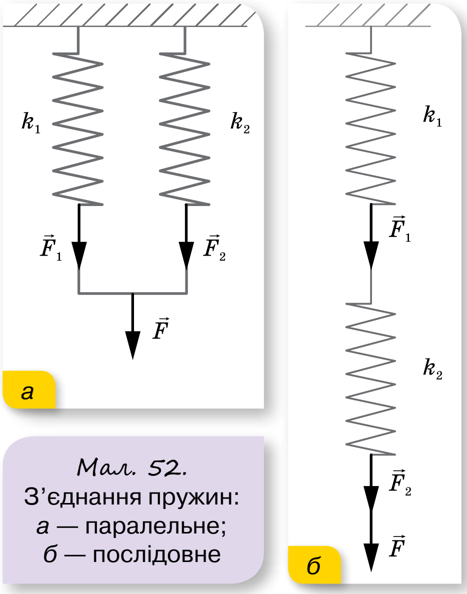
Сила пружності. При деформації тіл їх частинки зміщуються одна відносно іншої (мал. 51, *а*). Унаслідок цього змінюються відстані між атомами чи молекулами, з яких складаються тіла. Це приводить до зміни сил взаємодії між частинками. Якщо відстані між ними збільшуються (наприклад, під час розтягування), то силою міжмолекулярної взаємодії є сила притягання. Якщо відстані між частинками зменшуються (наприклад, під час стискання), то силою міжмолекулярної взаємодії є сила відштовхування. Тобто під час деформації тіла в ньому виникають сили, що прагнуть повернути його в попередній стан. Ці сили і є силами пружності.



Мал. 51. Сила пружності: *а* — виникає внаслідок деформації; *б* — направлена проти зміщення частин деформованого тіла

Головною відмінністю сил пружності від усіх інших сил є те, що вони залежать від деформацій та від властивостей деформованого тіла (його жорсткості) і не залежать від тіла, до якого прикладені. Для сили пружності, що виникає внаслідок пружних деформацій, встановлений ***закон Гука***: $\vec{F}_{пр} = -k\vec{x}$, тут k — коефіцієнт пружності, або жорсткість, його значення залежить від розмірів і матеріалу тіла, вимірюється в ньютонах на метр: $[k] = 1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$; $\vec{x}$ — зміщення кінця тіла. Знак «−» показує, що напрямок сили пружності протилежний напряму зміщення краю деформованого тіла.

Закон Гука можна записати і в проекціях — $F_{\text{пр}x} = -kx$, і для модулів — $F_{\text{пр}} = k|x|$. Оскільки в умові більшості задач ідеться не про силу пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$, а про прикладену силу $\vec{F}$ (мал. 51, *б*), то, враховуючи третій закон Ньютона, формулу $F_{\text{пр}x} = -kx$ можна застосовувати у вигляді $F = kx$.

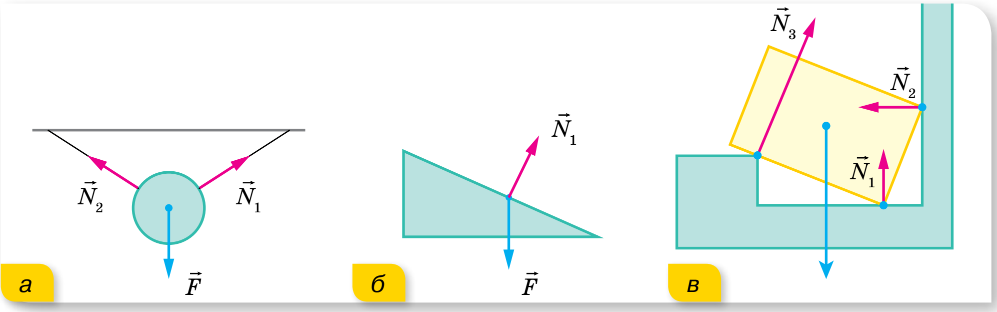


Мал. 52. З'єднання пружин: *а* — паралельне; *б* — послідовне

У випадку паралельного з'єднання пружин, коефіцієнти жорсткості яких k_1 і k_2, загальний коефіцієнт жорсткості системи $k = k_1 + k_2$; для послідовного з'єднання — $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ (мал. 52).

Сили тертя. Як ми вже знаємо, тіло під дією прикладених до нього сил може рухатись у будь-якому напрямку. У реальних умовах часто вільному рухові тіл перешкоджають інші тіла, які перебувають із цим тілом у контакті. Так, тіло внаслідок дії сили тяжіння тисне на опору чи розтягує підвіс — деформує їх. За третім законом Ньютона опора чи підвіс діють на тіло з такою самою за модулем і протилежно напрямленою ***силою реакції опори*** $\vec{N}$. Природа цих сил однакова, але вони не компенсують одна одну, бо прикладені до різних тіл.

Важливою особливістю сил реакції опори є те, що вони напрямлені перпендикулярно до поверхні дотику тіл (мал. 53).



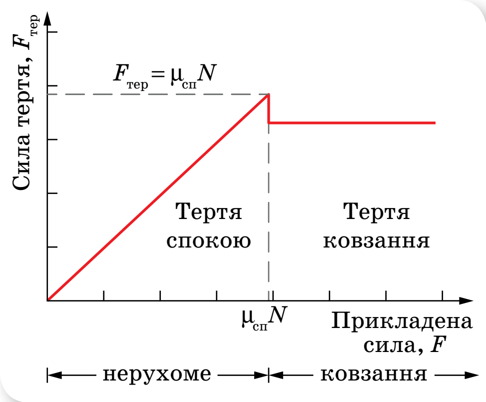
Мал. 53. Напрямок сил реакції: *а* — підвісу; *б*, *в* — опори

Сила тертя, що також є проявом електромагнітної взаємодії, виникає тому, що поверхня будь-якого тіла має різні нерівності, виступи й западини. Коли одне тіло рухається по поверхні іншого, то нерівності перешкоджають цьому рухові. Однак природа тертя набагато складніша. Тертя можна зменшити, якщо відполірувати поверхні тіл, які перебувають у взаємодії. Оскільки розміри нерівностей стануть значно меншими, то зменшиться й тертя. Однак завжди настає момент, коли подальше полірування поверхонь не зменшує силу тертя, а навпаки, вона починає збільшуватися. Причиною цього є те, що під час полірування поверхонь відстань між верхніми шарами молекул тіл, що контактують, стає все меншою. І коли ця відстань зменшується настільки, що між молекулами обох поверхонь виникає сила взаємного притягання, сила тертя збільшується.

Особливістю сили тертя є те, що вона виникає лише в макроскопічних системах, де внаслідок хаотичного руху атомів відбувається необоротний процес розсіяння енергії макроскопічного руху складових системи в енергію мікроскопічного руху атомів і молекул. Тобто сила тертя — це сила, яка протидіє рухові фізичного тіла, розсіюючи його механічну енергію в тепло (цю властивість (непотенційність сили тертя) детальніше розглянемо, вивчаючи енергетичні характеристики руху).

Найближчим часом розглядатимемо випадки, у яких будемо враховувати, що сила тертя залежить від: швидкості руху тіл відносно одне одного; речовини, з якої складаються тіла, що взаємодіють; стану поверхонь тіл (взаємодія твердих тіл); розмірів і форми тіла (рух твердого тіла в рідині або газі); ваги тіла.

Сила тертя спокою завжди діє вздовж поверхні дотику тіл, дорівнює за модулем і протилежна за напрямком зовнішній силі, яка намагається зрушити тіло з місця, $F_{\text{тер.сп}} \le \mu_{\text{сп}} N$, тут N — сила нормального тиску (або рівна їй за модулем сила реакції опори), $\mu_{\text{сп}}$ — коефіцієнт тертя, який залежить від стану поверхонь тіл і від властивостей речовини, з якої вони виготовлені.



Мал. 54. Графік залежності сили тертя від прикладеної сили

Зрушивши з місця, тіло починає ковзати по поверхні іншого тіла, і між ними вже існує ***сила тертя ковзання***, яка дещо менша від максимальної сили тертя спокою, хоча також пропорційна силі нормального тиску (силі реакції опори) і залежить від матеріалу контактуючих поверхонь: $F_{\text{тер.ковз}} = \mu_{\text{ковз}} N$ (мал. 54).

Слід зазначити, що залежність $F_{\text{тер.ковз}} = \mu_{\text{ковз}} N$ не є законом, а лише встановлює взаємозв'язок між силою тертя, що діє вздовж поверхні дотику, і силою нормального тиску, перпендикулярною до цієї поверхні. Це співвідношення не є векторним, оскільки дві сили перпендикулярні між собою.

Сила опору під час руху тіла в рідині або газі. Під час руху шарів рідини чи газу виникають сили внутрішнього тертя. Ці самі сили виникають й у випадку руху твердого тіла в рідині чи газі. Сили тертя завжди напрямлені проти напрямку швидкості відносного руху.

У загальному випадку закон, що встановлює зв'язок між силою рідкого тертя і швидкістю руху тіла відносно рідини чи газу, досить складний. У тих випадках, які розглядатимемо ми, можна вважати, *що* ***сила рідкого тертя*** *прямо пропорційна швидкості відносного руху тіла*:

$$\vec{F}_{\text{оп}} = -\alpha\vec{v}\ .$$

Знак «−» вказує на те, що сила рідкого тертя напрямлена проти напрямку швидкості руху. Коефіцієнт α називається *коефіцієнтом рідкого тертя*, або *коефіцієнтом опору середовища*. Його значення залежить від форми і розмірів тіла, що рухається, а також від властивостей рідини (чи газу).

Сили пружності, як і сила тяжіння належать до консервативних сил. ***Консервативні сили*** — це сили, робота яких під час переміщення тіла залежить тільки від початкового та кінцевого положень тіла у просторі. Системи, у яких не відбувається перетворення механічної енергії в інші види (внутрішню, електромагнітну, хімічну тощо), називаються консервативними системами. Сили тертя не є потенціальними, вони розсіюють механічну енергію, перетворюючи її в теплову. Сили тертя протидіють рухові й залежать від швидкості тіла.

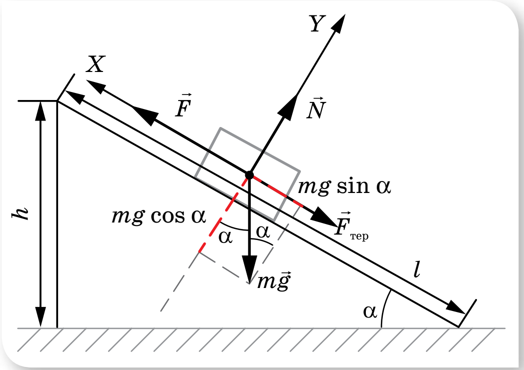
? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Унаслідок чого з'являється сила пружності? Яка природа цієї сили?
2. Що означає знак «мінус» у формулі закону Гука?
3. Чи є формули для розрахунку сили реакції опори або підвісу?
4. Яку силу називають силою нормального тиску?
5. За яких умов виникає сила тертя спокою? Сила тертя ковзання? Від чого вони залежать?
6. Які сили називаються силами рідкого тертя? Від чого вони залежать?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. По похилій площині рівномірно витягують ящик масою 100 кг. Яку силу слід прикласти, щоб витягти ящик, якщо висота похилої площини 1,5 м, а довжина — 4,5 м. Задачу розв'яжіть: а) з урахуванням сили тертя ($\mu = 0{,}3$); б) нехтуючи силою тертя.

Дано:	**Розв'язання:**
$m = 100$ кг	Розв'яжемо задачу з урахуванням сили тертя.
$h = 1{,}5$ м	Зобразимо похилу площину (мал. 55, с. 62) і покажемо сили, що діють на ящик.
$l = 4{,}5$ м	
$\mu = 0{,}3$	Вісь X спрямуємо в напрямку руху.
F — ?	



Мал. 55. Рух тіла по похилій площині

У проекціях на осі X та Y рівняння має вигляд:

$$F - F_{тер} - mg\sin\alpha = 0 \text{ (на вісь } X\text{);} \quad (1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0 \text{ (на вісь } Y\text{).} \quad (2)$$

$F_{тер} = \mu N$, з рівняння (2) $N = mg\cos\alpha$, отже

$$F_{тер} = \mu mg\cos\alpha. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (1), маємо

$$F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \quad (4)$$

З малюнка видно, що $\sin\alpha = \dfrac{h}{l} = \dfrac{1,5\text{ м}}{4,5\text{ м}} \approx 0,33$,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h} = \frac{\sqrt{4,5^2\text{ м}^2 - 1,5^2\text{ м}^2}}{4,5\text{ м}} \approx 0,94.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо: $F = 600$ Н.

З формули (4) для випадку $\mu = 0$ отримуємо: $F = mg\sin\alpha \approx 323$ Н.

Відповідь: 600 Н; 323 Н.

Задача 2. Кулька, що висить на нитці, обертається в горизонтальній площині. Знайдіть кут відхилення нитки від вертикалі. Швидкість руху кульки $1,5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, радіус кола, яке описує кулька, — 30 см.

Дано:	Розв'язання:
$v = 1,5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$	Нитка з кулькою описує у просторі конічну поверхню, тому таку модель називають «конічним маятником» (мал. 56).
$R = 0,3$ м	
α — ?	

На кульку діє сила тяжіння $m\vec{g}$, напрямлена вертикально вниз, і сила натягу нитки (її прийнято позначати $\vec{T}$), що напрямлена вздовж нитки. Нитка вважається нерозтяжною, щоб не враховувати додаткові сили пружності, які виникають при розтягуванні (згідно із законом Гука). Оскільки кулька рухається по колу, то прискорення $\vec{a}$, яке надає їй рівнодійна цих сил, — це доцентрове прискорення.

За другим законом Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

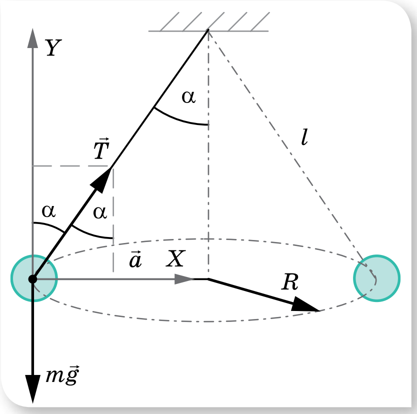
У проекціях на координатні осі:

$T \sin\alpha = ma$ (на вісь X);

$T \cos\alpha \; - \; mg \; = 0$ (на вісь Y) або $T \cos\alpha = mg$.

Поділимо перше рівняння на друге: $\dfrac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \dfrac{ma}{mg}$, отримаємо: $a = g \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$.

Доцентрове прискорення визначаємо за формулою: $a = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Тоді $\dfrac{\upsilon^2}{R} = g \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, звідки $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\upsilon^2}{Rg}$. Підставляємо числові дані:



Мал. 56. Конічний маятник

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1,5^2 \,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{0,3\,\text{м} \cdot 9,8\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} \approx 0,75,\ \alpha = 37°.$$

Відповідь: 37°.

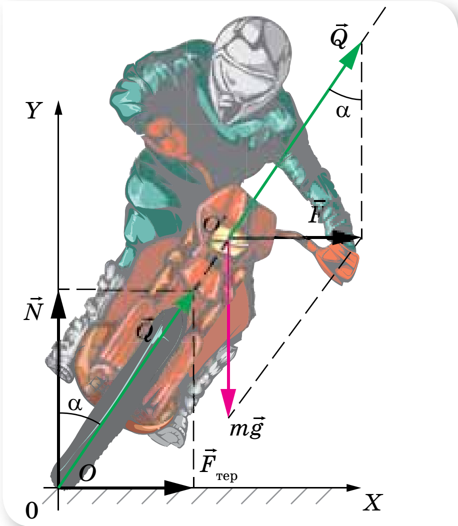
Задача 3. З якою максимальною швидкістю може їхати мотоцикліст по горизонтальній площині, описуючи дугу радіусом 90 м, якщо коефіцієнт тертя коліс об дорогу 0,4? На який кут від вертикалі треба відхилятися мотоциклісту, маючи швидкість руху 15 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$?

Дано:	Розв'язання:
$R = 90$ м $\mu = 0,4$ $\upsilon = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$	На мотоцикліста діють три сили: сила нормальної реакції дороги $\vec{N}$, яка за модулем дорівнює mg, сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, напрямлена до центра кола, по якому рухається мотоцикліст, і сила тяжіння $m\vec{g}$, прикладена до центра тяжіння мотоцикліста (точка O' на мал. 57, с. 64).
υ_{max} — ? α — ?	

Під час руху по колу мотоцикліст має нахилятись на такий кут α, щоб рівнодійна $\vec{Q}$ сили тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$ і сили нормальної реакції опори $\vec{N}$ була напрямлена вздовж прямої, що проходить через центр тяжіння мотоцикліста O' (інакше виникав би обертаючий момент сили, у результаті дії якого мотоцикліст перекинувся б).

Таким чином, оскільки точки O і O' лежать на одній прямій, то точку прикладання сили $\vec{Q}$ можна перенести в точку O'. У результаті до центра тяжіння мотоцикліста виявляються прикладеними дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і $\vec{Q}$, рівнодійна яких $\vec{F}$ напрямлена по горизонталі й відіграє роль доцентрової сили, до того ж за модулем сила F дорівнює силі $F_{\text{тер}}$.

За другим законом Ньютона $m\vec{g} + \vec{Q} = m\vec{a}$.



Мал. 57. Сили, що діють на мотоцикліста під час повороту

У проекціях на координатні осі: $Q \sin\alpha = ma$ (на вісь X);
$Q \cos\alpha - mg = 0$ (на вісь Y), або $Q\cos\alpha = mg$.

Поділимо перше рівняння на друге: $\dfrac{Q\sin\alpha}{Q\cos\alpha} = \dfrac{ma}{mg}$, отримаємо: $a = g\cdot \text{tg}\,\alpha$, або $\dfrac{mv^2}{R} = g\cdot\text{tg}\,\alpha$, звідки $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{v^2}{gR}$.

Щоб визначити максимальну швидкість руху мотоцикліста на повороті, враховуємо, що $F = F_{тер} \le \mu mg$, або $\dfrac{mv_{max}^2}{R} \le \mu mg$, звідки $v_{max} = \sqrt{\mu gR}$.

Після підстановки числових даних:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{15^2\,\frac{м^2}{с^2}}{9{,}8\,\frac{м}{с^2}\cdot 90\,м} \approx 0{,}2551,\ \alpha \approx 14^\circ;\ v_{max} = \sqrt{0{,}4\cdot 90\,м\cdot 9{,}8\,\frac{м}{с^2}} \approx 18{,}8\,\frac{м}{с}.$$

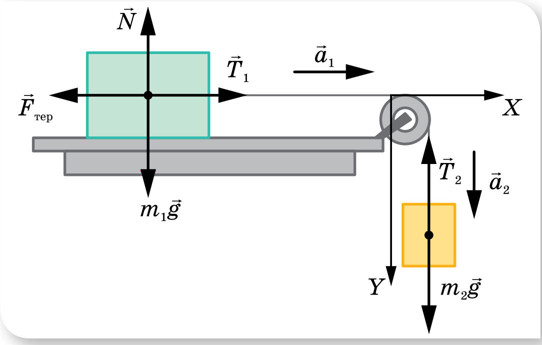
Відповідь: 14°; 18,8 $\frac{м}{с}$.

Задача 4. На горизонтальній площині лежить брусок масою $m_1 = 2$ кг. До кінця нитки, прикріпленої до бруска й перекинутої через нерухомий блок, підвішено тягар масою $m_2 = 0{,}5$ кг. Визначте силу натягу нитки, якщо коефіцієнт тертя між площиною і бруском $\mu = 0{,}1$. Масою нитки і блока, а також тертям у блоці знехтуйте.

Дано:
$m_1 = 2$ кг
$m_2 = 0{,}5$ кг
$\mu = 0{,}1$
T — ?

Розв'язання:

Розглянемо сили, що діють на систему брусок — тягар (мал. 58). На тягар діє сила тяжіння $m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_2$; на брусок — сила тяжіння $m_1\vec{g}$, сила реакції опори $\vec{N}$, сила тертя $\vec{F}_{тер}$ та сила натягу нитки $\vec{T}_1$.



Мал. 58. Сили, що діють у системі зв'язних тіл

З'ясуємо, рухається ця система тіл чи перебуває у спокої.

Якщо система тіл перебуває у спокої, то шукана сила натягу визначається вагою тягаря $m_2g = 4{,}9$ Н, а якщо система рухається, то сила натягу нитки буде меншою. Система рухатиметься, якщо $m_2g > F_{тер}$.

Оскільки брусок перебуває на горизонтальній поверхні, то сила тертя визначається як $F_{тер} = \mu m_1 g = 1{,}96$ Н. Тож система рухається.

Запишемо систему векторних рівнянь другого закону Ньютона для бруска: $\vec{N} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{тер} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$, і для тягарця: $m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$.

Перепишемо ці рівняння у проекціях на координатні осі, враховуючи, що $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ і $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Для бруска $T - F_{тер} = m_1 a$; $N = m_1 g$ або $T - \mu m_1 g = m_1 a$.

Для тягаря $m_2 g - T = m_2 a$.

Визначимо, наприклад, із першого рівняння, прискорення та підставимо його у друге.

$$a = \frac{T - \mu m_1 g}{m_1} = \frac{T}{m_1} - \mu g; \quad m_2 g - T = m_2\left(\frac{T}{m_1} - \mu g\right), \text{ звідки}$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(\mu + 1)}{m_1 + m_2} \approx 4{,}3 \text{ Н}.$$

Відповідь: 4,3 Н.

ВПРАВА 12

1. Дерев'яний брусок масою 2 кг тягнуть рівномірно по дошці, причепивши до пружини, жорсткість якої 100 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Коефіцієнт тертя — 0,3. Визначте видовження пружини.
2. Підіймальний кран піднімає вантаж, маса якого 1 т. Яка сила натягу троса на початку піднімання, якщо вантаж рухається при цьому з прискоренням 25 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$?
3. Потяг, маса якого 10 т, рушаючи з місця, на шляху 50 м набирає швидкість 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначте коефіцієнт опору, якщо сила тяги дорівнює 14 кН.
4. Вантаж масою 50 кг рівноприскорено піднімають вертикально вгору за допомогою каната протягом 2 с на висоту 10 м. Визначте силу натягу каната.

5. За якого прискорення розірветься трос (міцність троса на розрив становить 15 кН), якщо ним піднімати вантаж масою 500 кг?

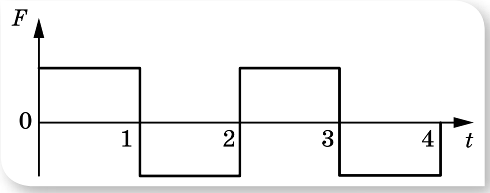
6. Яку масу баласту треба викинути з аеростата, що рівномірно опускається, аби він почав рівномірно підніматися з такою самою швидкістю? Маса аеростата з баластом — 1200 кг, піднімальна сила аеростата стала й дорівнює 8000 Н. Силу опору повітря вважайте однаковою під час піднімання та опускання.

7. Сталевий виливок, маса якого m, піднімають з води за допомогою троса, що має жорсткість k, з прискоренням a. Густина сталі — ρ_1, густина води — ρ_2. Визначте видовження троса x. Опором води знехтуйте.

8. Парашутистка, що летить у затяжному стрибку, до відкривання парашута має швидкість $50\,\frac{м}{с}$, з відкритим парашутом її швидкість стає рівною $5\,\frac{м}{с}$. Оцініть, якою була максимальна сила натягу строп парашута в момент його відкривання. Маса парашутистки з парашутом — 80 кг, $g = 10\,\frac{м}{с^2}$. Опір повітря пропорційний швидкості.

9. У ліфті стоїть відро з водою, у якому плаває м'яч. Як зміниться глибина занурення м'яча, якщо ліфт рухатиметься з постійним прискоренням: а) вгору; б) вниз?

10. Як рухається тіло під дією сили, яка періодично змінює свій напрямок на протилежний (мал. 59)? Накресліть графіки залежності проекції швидкості $v_x(t)$ та координати. Вважайте, що початкові швидкість і координата дорівнюють нулю.



Мал. 59

11. На похилій площині завдовжки 13 м і заввишки 5 м лежить вантаж, маса якого 26 кг. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,5. Яку силу треба прикласти до вантажу вздовж площини, щоб витягнути його? Щоб стягнути? Рух вважайте рівномірним.

12. З яким прискоренням рухається брусок по похилій площині з кутом нахилу 30°, якщо коефіцієнт тертя 0,2?

13. Тіло сковзає рівномірно похилою площиною з кутом нахилу в 40°. Визначте коефіцієнт тертя об площину.

14. Автомобіль масою 1 т підіймається по шосе з нахилом 30° під дією сили тяги 7 кН. Коефіцієнт тертя між шинами автомобіля та поверхнею шосе — 0,1. Визначте прискорення автомобіля.

15. Тіло вільно ковзає з вершини нерухомої похилої площини під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Визначте його швидкість у кінці похилої площини та час руху, якщо висота похилої площини — 10 м, а коефіцієнт тертя — 0,05.

16. Для рівномірного піднімання вантажу вагою 1000 Н по похилій площині, яка утворює кут 60° з вертикаллю, треба прикласти силу 600 Н. З яким прискоренням рухатиметься вантаж униз, якщо його відпустити?

17. На похилій площині висотою $h = 3$ м і довжиною $l = 5$ м лежить тіло масою $m = 10$ кг. Яку горизонтальну силу F необхідно прикласти до тіла, щоб воно рівномірно рухалося по площині?

18. За який час тіло зісковзне з вершини похилої площини висотою $h = 2$ м і кутом при основі $\alpha = 45°$, якщо граничний кут, за якого тіло може не зісковзувати з площини, $\beta = 30°$?

19. По похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30°$, кидають знизу вгору тіло. Воно протягом $t_1 = 2$ с проходить відстань $l = 16$ м, після чого починає зісковзувати вниз. За який час тіло зісковзне донизу? Який коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею площини?

20. Тіло масою m міститься на площині, кут нахилу якої можна змінювати від 0 до 90°. Накресліть графік залежності сили тертя між тілом і площиною від кута нахилу площини до горизонту. Коефіцієнт тертя — μ.

21. Автомобіль, маса якого 2 т, проїжджає по опуклому мосту, що має радіус кривизни 40 м, зі швидкістю 36 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$. З якою силою тисне автомобіль на середину моста?

22. Визначте силу натягу нитки конічного маятника в момент, коли нитка утворює кут 60° з вертикаллю. Маса кульки — 100 г, швидкість її руху — 2 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, довжина нитки — 40 см.

23. Кулька масою 200 г, що прив'язана ниткою до підвісу, рухаючись із постійною швидкістю, описує в горизонтальній площині коло. Визначте швидкість кульки та період її обертання по колу, якщо довжина нитки — 1 м, а її кут з вертикаллю дорівнює 60°.

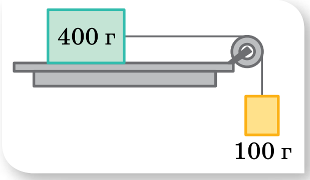
24. Кулька масою 500 г, підвішена на нерозтяжній нитці завдовжки 1 м, здійснює коливання у вертикальній площині. Визначте силу натягу нитки в момент, коли вона утворює з вертикаллю кут 60°. Швидкість кульки в цю мить — 1,5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

25. Який найменший радіус кола, по якому може їхати ковзаняр, що рухається зі швидкістю 20 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$, якщо коефіцієнт ковзання між ковзанами й поверхнею льоду 0,2? Який найбільший кут нахилу ковзаняра від вертикалі, за якого він ще не буде падати на заокругленні?

26.[1] Відерце з водою обертають у вертикальній площині на мотузці завдовжки 0,5 м. З якою найменшою швидкістю необхідно його обертати, щоб у верхній точці вода не виливалась?

27. Посудина, що має форму зрізаного конуса з діаметром дна 20 см і кутом нахилу стінок до горизонту 60°, може обертатись навколо вертикальної осі. На дні посудини міститься кулька. За якої кутової швидкості обертання посудини кулька підніметься й буде викинута з посудини? Тертя не враховуйте.

28. Брусок, маса якого 400 г, під дією вантажу, що має масу 100 г (мал. 60), рухаючись зі стану спокою, проходить за 2 с шлях 80 см. Визначте коефіцієнт тертя.



Мал. 60

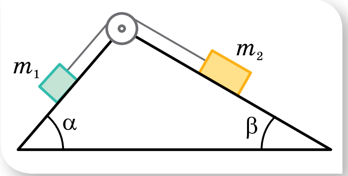
29. На шнурі, перекинутому через нерухомий блок, підвісили вантажі, маси яких 0,3 і 0,2 кг. З яким прискоренням рухається система? Яка сила натягу шнура під час руху?

30. Маневровий тепловоз, маса якого 100 т, тягне два вагони, кожний з яких має масу 50 т, із прискоренням 0,1 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Визначте силу тяги тепловоза та силу натягу зчепів, якщо коефіцієнт опору рухові дорівнює 0,006.

31. На нитці, перекинутій через нерухомий блок, підвісили вантажі, маса яких 0,3 і 0,34 кг. За 2 с від початку руху кожний вантаж пройшов шлях 1,2 м. Визначте прискорення вільного падіння на підставі даних досліду.

32. На кінцях нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвісили тіла, маса кожного — 240 г. Який додатковий вантаж треба покласти на одне з тіл, щоб кожне з них за 4 с змістилося на 160 см?

33. Через невагомий блок, закріплений на ребрі призми, грані якої утворюють кути α і β з горизонтом, перекинуто нитку (мал. 61). До кінців нитки прикріплено вантажі масами m_1 і m_2. Вважайте, що вантаж $\vec{v} = \text{const}$ опускається. Визначте прискорення вантажів і силу натягу нитки. Тертям знехтуйте.

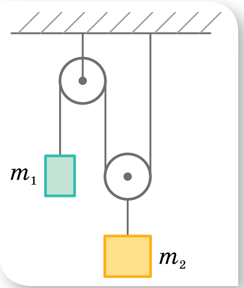


Мал. 61

[1] Далі буде розглянуто ще один спосіб розв'язання цієї задачі.

34. Визначте прискорення a_1 і a_2 тіл масами m_1 і m_2, а також силу натягу нитки в системі, зображеній на малюнку 62. Масою блоку й тертям знехтуйте.

Вказівка: оскільки тіло m_2 закріплене на рухомому блоці, то воно проходить удвічі меншу відстань порівняно з відстанню, що її проходить тіло m_1, відповідно $a_1 = 2a_2$.

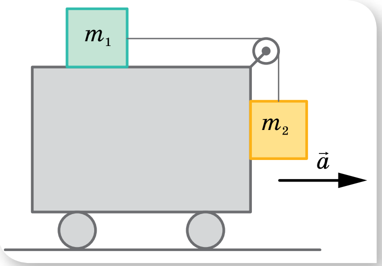


Мал. 62

35. Два тіла масами $m_1 = 4$ кг та $m_2 = 8$ кг, які зв'язані ниткою, ковзають одне за одним по поверхні похилої площини, кут нахилу якої до горизонту $\alpha = 30°$. Коефіцієнт тертя між першим тілом і площиною $\mu_1 = 0,1$, а між другим тілом і площиною $\mu_2 = 0,2$. Яка сила натягу нитки між тілами?

36. З яким прискоренням має рухатись візок (мал. 63), щоб розташування тіл не змінювалось? Коефіцієнт тертя — 0,3.

37. Пілот діє на сидіння крісла літака в нижній точці петлі Нестерова із силою 7,1 кН. Маса пілота — 80 кг, радіус петлі — 250 м. Визначте швидкість літака.



Мал. 63

38. Космічна ракета під час старту з поверхні Землі рухається вертикально з прискоренням $20\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Визначте вагу льотчика-космонавта в кабіні, якщо його маса 80 кг. Якого перевантаження він зазнає?

39. У ліфті стоїть контейнер, маса якого 60 кг. Визначте його вагу на початку й наприкінці піднімання, а також на початку й наприкінці опускання. Прискорення (за модулем) ліфта в усіх випадках дорівнює $2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

40. Космічний корабель робить м'яку посадку на Місяць $\left(g_{\text{М}} = 1,6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$, рухаючись сповільнено у вертикальному напрямку (відносно Місяця) зі сталим прискоренням $a = 8,4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Скільки важить космонавт масою 70 кг, який перебуває в цьому кораблі?

41. З якою швидкістю автомобіль має проїжджати середину опуклого моста радіусом 40 м, щоб пасажир на мить опинився у стані невагомості?

42. Визначте, у скільки разів зменшується вага тіла на екваторі внаслідок добового обертання Землі та якої тривалості має бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі перебували у стані невагомості.

43. Дитина, маса якої 50 кг, спустилась на санках з гірки, проїхала по горизонтальній дорозі (до зупинки) шлях 20 м за 10 с. Визначте силу тертя та коефіцієнт тертя.

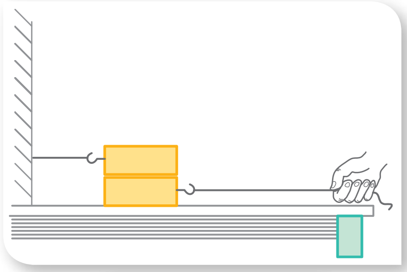
44. Через який час після аварійного гальмування зупиниться автобус, що рухається зі швидкістю $12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,4?

45. Визначте найменший радіус дуги для повороту автомашини, що рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю $36\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, якщо коефіцієнт тертя ковзання коліс об дорогу становить 0,25.

46. Парашутист із парашутом має масу 120 кг. Після розкриття парашута він опускається зі швидкістю $6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначте коефіцієнт опору повітря.

47. Дві однакові сталеві кульки одночасно починають падати без початкової швидкості, одна — у в'язкій рідині, інша — у повітрі. У чому відмінність рухів кульок? Побудуйте графік залежності швидкості руху кульок від часу.

48. Два дерев'яні бруски, кожний з яких має масу 1 кг, лежать на дошці (мал. 64). Яку силу потрібно прикласти на початку рівномірного руху, щоб витягнути нижній брусок з-під верхнього? Коефіцієнт тертя на обох поверхнях нижнього бруска дорівнює 0,3.



Мал. 64

49. На аркуш паперу, що лежить на столі, поставили склянку з водою. З яким прискоренням треба рухати аркуш, щоб склянка почала ковзати назад відносно паперу? Коефіцієнт тертя між склянкою й папером дорівнює 0,3. Чи зміниться результат досліду, якщо склянка буде порожньою? Перевірте.

50. Диск обертається в горизонтальній площині зі швидкістю 30 $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$. На відстані 20 см від осі обертання на диску лежить тіло масою 1 кг. Яким має бути коефіцієнт тертя ковзання, щоб тіло злетіло з диска?

Експериментуємо

1. Дослідіть залежність рівнодійної двох сил, що діють на тіло під кутом α, від величини цього кута.

2. Визначте модуль сили натягу нитки, за якої нитка розірветься. Запропонуйте кілька способів.

4. Визначте модуль сили тертя кочення.

5. Визначте коефіцієнт тертя між частинками сипкої речовини.

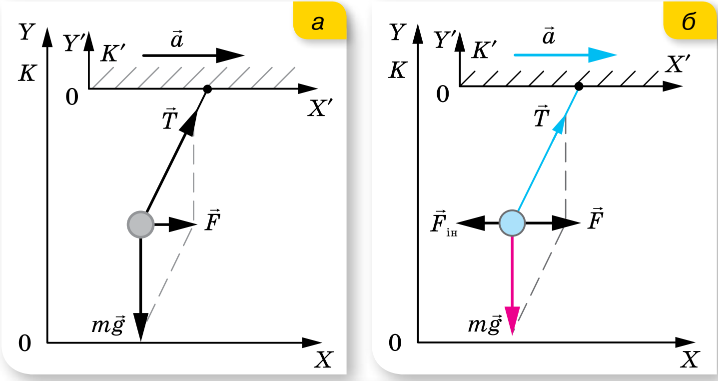
§ 13 Дія законів Ньютона в неінерціальних системах відліку

Опис руху в неінерціальних системах відліку. Закони Ньютона в тому вигляді, як ми їх вивчили, виконуються лише в інерціальних системах відліку. На практиці часто доводиться розв'язувати задачі, у яких необхідно вміти описати рух із погляду спостерігача, що перебуває в неінерціальній системі відліку, особливо в тих випадках, коли відносно цієї системи відліку тіло перебуває у стані спокою.

Нагадаємо, ***неінерціальна система відліку*** — це система відліку, у якій причиною виникнення прискорення руху тіл є не лише взаємодія тіл, а й прискорений рух самої системи відліку.

Нехай у вагоні потяга, що набирає швидкість, а отже, рухається з прискоренням $\vec{a}$, висить на нитці кулька (мал. 65, *а*, на с. 70). Відносно землі (інерціальної системи відліку K) кулька має таке саме прискорення, як і вагон потяга, і воно спричинене рівнодійною $\vec{F}$ сил тяжіння $m\vec{g}$ і натягу нитки $\vec{T}$. Другий закон Ньютона в цьому разі має вигляд $\vec{F} = m\vec{a}$.

Відносно вагона (неінерціальної системи відліку K') кулька перебуває у стані спокою (мал. 65, *б*). У цьому разі сила $\vec{F}$ має бути скомпенсована. Такою силою є *сила інерції* $\vec{F}_{\text{ін}}$. Другий закон Ньютона в цьому випадку записується у вигляді $\vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}} = 0$.



Мал. 65. Сили, що діють на кульку: *а* — в інерціальній системі відліку; *б* — у неінерціальній

Сила інерції. ***Сила інерції*** зумовлена не взаємодією тіл, а прискореним рухом самої системи відліку відносно інерціальної системи відліку. Сили інерції напрямлені завжди протилежно до прискорення руху самої системи відліку.

Таким чином, для визначення сил інерції в неінерціальних системах відліку спочатку необхідно визначити суму сил $\sum \vec{F}$, що діють на дане тіло в «нерухомій» (інерціальній) системі відліку. Сили інерції будуть дорівнювати цій сумі, взятій із протилежним знаком. Іншими словами, сили інерції, що діють на тіло в неінерціальній системі відліку, визначаються добутком маси тіла на прискорення самої системи відліку.

Основне рівняння динаміки в неінерціальних системах відліку за формою аналогічне рівнянню другого закону Ньютона, але в нього, крім «сил, що реально діють», входять сили інерції: $\vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}} = 0$.

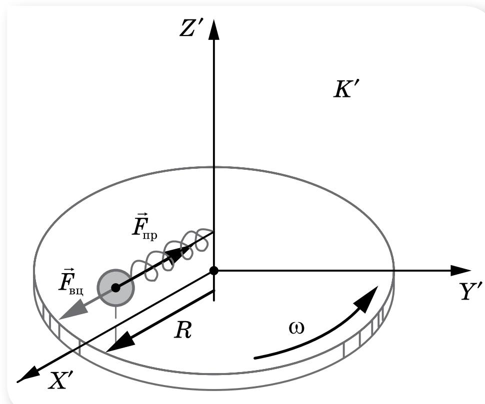
Сила інерції прикладена до тіла, але неможливо вказати тіло, з яким відбувається взаємодія, тому для сили інерції третій закон Ньютона не може бути застосований.

Дію сили інерції відчували майже ви всі, коли падали уперед за різкого гальмування, наприклад, автобуса чи трамвая.

За властивостями сила інерції схожа на силу земного тяжіння. Під дією сили тяжіння всі тіла рухаються з однаковим прискоренням, тобто $F_{\text{тер}} \sim m$. Сили інерції надають тілам також відповідного прискорення, з яким рухається неінерціальна система відліку, тобто $F_{\text{ін}} \sim m$. (Еквівалентність сил інерції і гравітаційних сил покладена Ейнштейном в основу загальної теорії відносності. Про це ви дізнаєтесь згодом.)

Таким чином, властивості сил інерції такі:
а) вони неінваріантні відносно переходу з однієї неінерціальної системи відліку в іншу;
б) вони не підпорядковуються третьому закону Ньютона;
в) вони є зовнішніми силами відносно рухомого тіла;
г) вони пропорційні масі тіла;
д) рух тіла під дією сил інерції аналогічний рухові у гравітаційному полі.

Опис руху в неінерціальних системах відліку, що обертаються з постійною кутовою швидкістю. Розглянемо рух тіла в неінерціальній системі відліку K', що обертається відносно інерціальної K з постійною кутовою швидкістю. Прикладом такого руху може бути рух кульки, що закріплена на одному з кінців пружини, а другим кінцем пружина кріпиться до осі диска, який може обертатись (мал. 66). Якщо диск не обертається — пружина не деформована. Під час розкручування диска кулька розтягує пружину доти, поки сила пружності не набуває значення $F_{пр} = ma = m\omega^2 R$. Відносно інерціальної системи відліку (Землі) кулька рухається по колу з доцентровим прискоренням, яке надає йому сила пружності.



Мал. 66. Рух тіла в неінерціальній системі відліку, що обертається

Відносно неінерціальної системи відліку K' (диска) кулька нерухома. Тобто сила пружності зрівноважується силою інерції (у цьому випадку її називають *відцентровою силою інерції* $\vec{F}_{в.ц.}$), яка напрямлена вздовж радіуса диска від осі його обертання.

Відцентрова сила інерції. Як і будь-яка сила інерції, відцентрова сила інерції існує лише в неінерціальній системі відліку і зникає з переходом в інерціальну (тобто є неінваріантною величиною).

Ще одним прикладом дії відцентрової сили інерції є розкручування молота («ядра», закріпленого на тросі) (мал. 67). Відносно інерціальної системи відліку (Землі) ядро рухається по колу, отже, має доцентрове прискорення, яке надає йому сила пружності (сила натягу троса). Відносно спортсмена, який обертається, ядро нерухоме, отже, на нього крім


Мал. 67. Рух ядра під дією сили натягу троса

сили натягу троса діє ще й відцентрова сила інерції, напрямлена проти доцентрового прискорення.

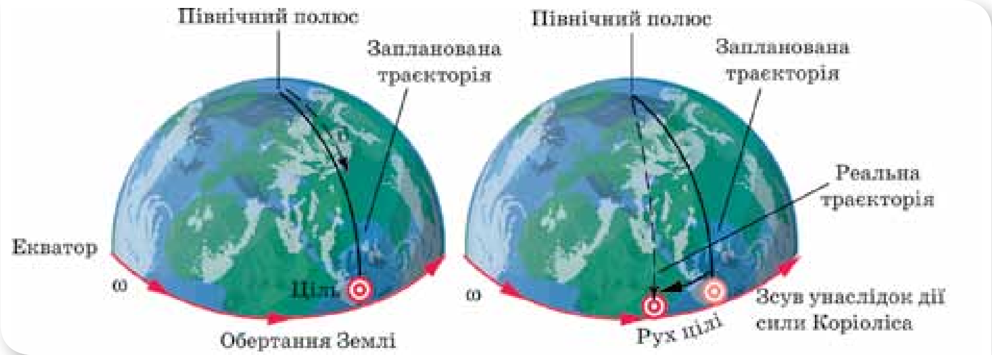
Майже в усіх розв'язаних нами задачах ми не враховували обертання Землі й вважали її інерціальною системою відліку. У точних розрахунках необхідно враховувати відцентрову силу інерції, що діє на тіла, які обертаються разом із Землею. Так, у § 10 ми вже дослідили вплив добового обертання Землі на значення $\vec{g}$ залежно від широти місцезнаходження.

Сила Коріоліса. Окрім відцентрової сили інерції, у неінерціальній системі відліку, що обертається, існує ще й сила інерції Коріоліса.

Сила Коріоліса — це сила інерції, що діє в неінерціальній системі відліку, яка обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ на тіло, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$.

Сила Коріоліса перпендикулярна до вектора $\vec{\omega}$ і діє у площині, перпендикулярній до осі обертання системи, вона перпендикулярна до вектора швидкості руху тіла, а отже, змінює тільки напрямок швидкості, не змінюючи її модуля.

Сила Коріоліса відхиляє на схід тіла, що вільно падають. Це відхилення пропорційне косинусу широти місцезнаходження, отже, воно максимальне на екваторі й дорівнює нулю на полюсах. Так, у результаті падіння тіла на екваторі з висоти 30 м відхилення становить 3,6 мм. Силу Коріоліса необхідно враховувати для точного наведення на ціль під час стрільби на далекі відстані (мал. 68).



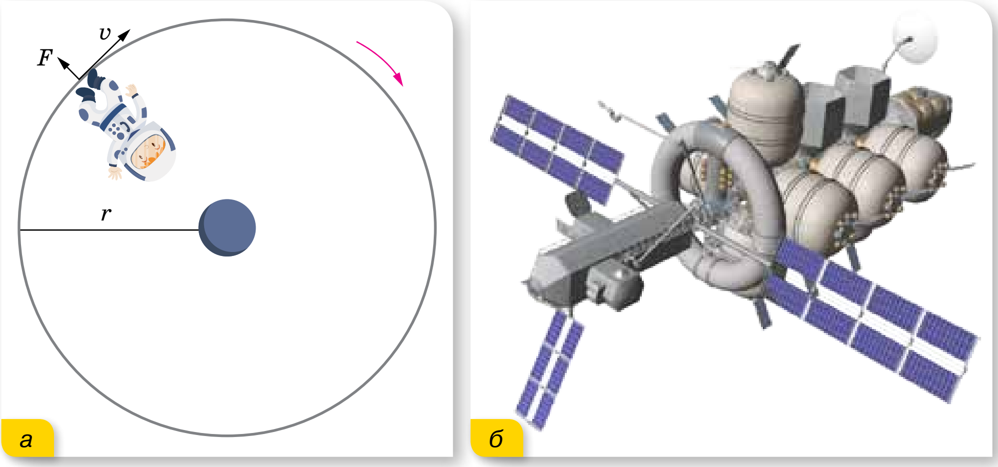
Мал. 68. Дія сили Коріоліса

Мал. 69. Береги річок

У Північній півкулі праві береги річок, що течуть на південь, завжди високі. Це зумовлено їх підмиванням завдяки дії сил інерції Коріоліса (мал. 69).

Ще одним прикладом прояву сили Коріоліса є поворот площини коливань маятника (про це детальніше в § 24).

Штучне тяжіння. Ідея штучної гравітації ґрунтується на принципі еквівалентності сили гравітації і сили інерції, тобто: якщо інертна маса і гравітаційна маса рівні, то неможливо відрізнити, яка сила діє на тіло — гравітаційна або сила інерції. Іншими словами: якщо створити космічний корабель, що обертається навколо своєї осі, відцентрова сила, що виникає при цьому, «виштовхуватиме» космонавта від центра обертання, і він зможе запросто стояти на «підлозі». Що швидше обертатиметься корабель, і що далі від центра буде перебувати космонавт, то сильнішою буде штучна гравітація (мал. 70). Сила «штучного тяжіння» буде такою: $F = \frac{mv^2}{r}$, де m — маса космонавта, v — лінійна швидкість космонавта, r — відстань від центра обертання (радіус). Лінійна ж швидкість така $v = \frac{2\pi r}{T}$, де T — час одного оберту.



Мал. 70. Штучна гравітація: *а* — схематичний малюнок; *б* — модель космічного корабля

Проте теоретичні розрахунки не так легко реалізувати на практиці. Як видно, штучна сила тяжіння прямо пропорційна відстані від центра обертання, а це означає, що для невеликих r сила гравітації значно відрізнятиметься для голови і ніг космонавта, що може утруднити пересування. Якщо ще до цього можна буде пристосуватися, та набагато складніше пристосуватися до дії сили Коріоліса, яка виникатиме кожного разу, коли наш космонавт рухатиметься відносно напрямку обертання, що викликатиме «морську хворобу». Щоб позбавитися від цього ефекту, частота обертання станції має бути меншою ніж 2 $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$, і тут виникає ще одна проблема — за такої частоти обертання радіус обертання має дорівнювати 224 м (а це майже $\frac{1}{4}$ км, або як висота 95-поверхової будівлі).

Вирішення проблеми створення штучної гравітації сприяло б не лише безпечному й тривалому перебуванню космонавтів і космонавток на МКС (міжнародних космічних станціях), а й було б проривом у гравітаційній біології. Стане можливим вивчити: як змінюється структура, функції на мікро-, макрорівнях, закономірності при гравітаційних діях різної величини і спрямованості. Ці відкриття, своєю чергою, допоможуть розвинути новий напрямок — гравітаційну терапію, застосовну при гіпертонічній хворобі, а також для відновлення кісткових тканин при переломах.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Яка система відліку називається неінерціальною?
2. Назвіть особливості сил інерції.
3. Чим обумовлена відцентрова сила інерції? Сила Коріоліса? Наведіть приклади їх прояву.
4. У чому полягають проблеми і перспективи створення штучної гравітації?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. По похилій площині завдовжки 2,5 м одночасно почали рух два тіла: перше — вгору з початковою швидкістю 50 $\frac{см}{с}$, друге — вниз без початкової швидкості. Визначте час зустрічі тіл. Тертя не враховуйте.

Дано:	Розв'язання:
$L = 2{,}5$ м $v = 50\,\frac{см}{с} = 0{,}5\,\frac{м}{с}$ t — ?	1. Розв'яжемо задачу в системі відліку, пов'язаній із Землею, тобто в інерціальній системі. Виберемо координатні осі системи відліку так, як показано на малюнку 71, і запишемо рівняння руху тіл у ній.

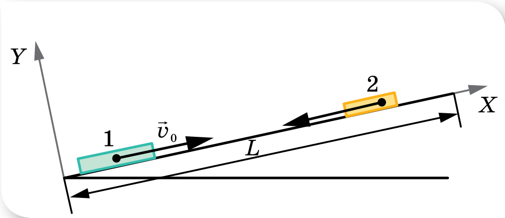
Для першого тіла $x_1 = v_0 t - \frac{at^2}{2}$, для другого — $x_2 = L - \frac{at^2}{2}$.

Прискорення руху тіл визначається лише кутом нахилу площини й буде однаковим за модулем для обох тіл. У момент зустрічі координати тіл $x_1 = x_2$, $v_0 t - \frac{at^2}{2} = L - \frac{at^2}{2}$, звідки $t = \frac{L}{v_0}$.

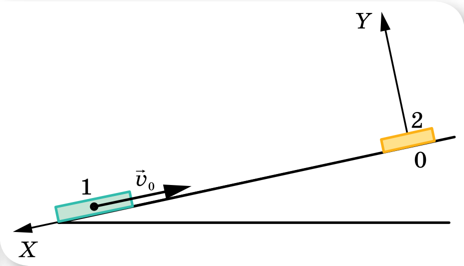
Підставляючи числові дані, отримуємо: $t = 5$ с.

2. Розв'яжемо задачу в неінерціальній системі відліку, пов'язаній з тілом *2* (мал. 72).

У такій системі відліку тіло *2* нерухоме, а перше рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю v_0. Час руху тіла: $t = \frac{L}{v_0} = 5$ с.



Мал. 71. Рух тіл в інерціальній системі відліку



Мал. 72. Рух тіл в неінерціальній системі відліку

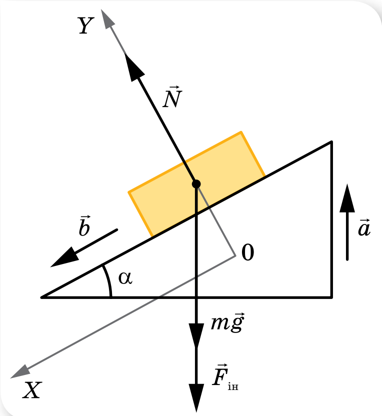
Відповідь: 5 с.

Зверніть увагу! У кінематиці можна розв'язувати задачі і в інерціальній, і в неінерціальній системах відліку. Крім того, розв'язання задачі в неінерціальній системі відліку простіше.

Задача 2. Клин, на поверхні якого лежить брусок, рухається вертикально вгору з прискоренням $\vec{a}$. Брусок зісковзує вниз. Кут нахилу клина — α. Визначте прискорення бруска під час руху по поверхні клина за умови, що поверхня клина гладенька ($\mu = 0$).

Дано:	**Розв'язання:**
$\vec{a}$ α $\mu = 0$	Розв'яжемо задачу в неінерціальній системі відліку (рухомий клин), яка рухається з прискоренням $\vec{a}$ вертикально вгору відносно інерціальної системи відліку (Землі).
b — ?	

У неінерціальній системі відліку на брусок діють сили (мал. 73): $m\vec{g}$ — сила тяжіння, $\vec{N}$ — сила реакції опори, $\vec{F}_{\text{ін}}$ — сила інерції, яка прикладена до тіла й напрямлена протилежно вектору прискорення рухомої системи (клина). Рівнодійна цих сил надає бруску прискорення $\vec{b}$, з яким він зісковзує вниз відносно неінерціальної системи відліку.



Мал. 73. Сили, що діють у неінерціальній системі відліку: клин, що рухається з прискоренням $\vec{a}$ вертикально вгору відносно інерціальної системи відліку (Землі)

Спроектуємо вказані сили на координатні осі:

$mg\sin\alpha + ma\sin\alpha = mb$ (на вісь X),

$N - mg\cos\alpha - ma\cos\alpha = 0$ (на вісь Y).

Розв'язуючи систему рівнянь, отримуємо: $b = (g + a)\sin\alpha$.

Відповідь: $b = (g + a)\sin\alpha$.

Задача 3. Відро з водою обертають у вертикальній площині на мотузці завдовжки l. З якою найменшою швидкістю необхідно обертати відро, щоб вода не виливалася з відра у верхній точці? Розв'яжіть задачу в інерціальній і неінерціальній системах.

Дано:
l

v_{min} — ?

Розв'язання:

Розв'яжемо задачу в інерціальній системі відліку (мал. 74, *а*) — відносно Землі.

У цій системі на воду діють дві сили: $m\vec{g}$ — сила тяжіння та $\vec{N}$ — сила тиску дна відра. Рівнодійна цих сил надає воді доцентрового прискорення $a = \dfrac{v^2}{l}$.

У проекціях на вісь X: $mg + N = \dfrac{mv^2}{l}$.

Мінімальна швидкість обертання відра визначається з умови $N = 0$. Отже, $v_{min} = \sqrt{gl}$.

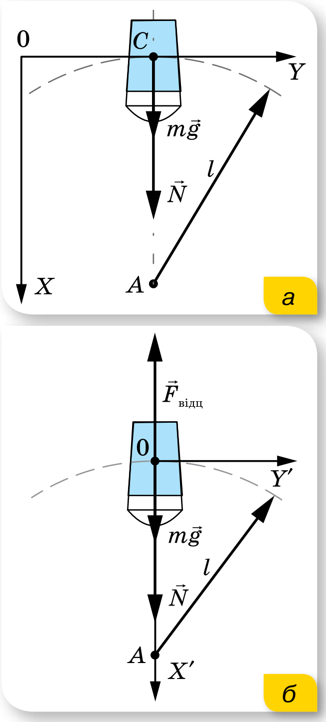
Розв'яжемо задачу в неінерціальній системі відліку (мал. 74, *б*). Оберемо за тіло відліку воду, і зв'яжемо з нею систему координат. У цьому разі сама система відліку обертатиметься навколо нерухомої Землі.

Відносно неінерціальної системи відліку вода нерухома, отже, рівнодійна сил дорівнює нулю.

У проекціях на вісь X: $mg + N - F_{вц} = 0$, де відцентрова сила інерції $F_{вц} = \dfrac{mv^2}{l}$.

Мінімальна швидкість обертання відра визначається з умови $N = 0$. Отже, $v_{min} = \sqrt{gl}$.

Відповідь: $v_{min} = \sqrt{gl}$.



Мал. 74. Сили, що діють на воду: *а* — в інерціальній системі відліку; *б* — у неінерціальній системі відліку

ВПРАВА 13

1. Яким має бути горизонтальне прискорення автомобіля, щоб стійке положення пасажира відповідало куту його нахилу 45°?
2. У ліфті, який під час руху вниз має прискорення 1 $\frac{м}{с^2}$, людина випустила з рук портфель. Яке прискорення матиме портфель відносно ліфта та Землі?
3. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між дошкою і вантажем 0,1. Яке прискорення в горизонтальному напрямку слід надати дошці, щоб вантаж міг з неї зісковзнути?
4. Тіло масою m рухається вниз по похилій площині. Визначте прискорення, з яким зісковзує тіло з похилої площини, та силу реакції опори, якщо кут нахилу площини α, а коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ. Розв'яжіть задачу в неінерціальній та інерціальній системах відліку.

5. Клин, на поверхні якого розміщено брусок, рухається вертикально вгору з прискоренням $\vec{a}$. Брусок зісковзує вниз. Кут нахилу клина — α. Визначте прискорення бруска під час руху по поверхні клина за наявності тертя ($\mu \neq 0$).
6. Гладенький клин ($\mu = 0$), на поверхні якого міститься брусок, рухається ліворуч із прискоренням $\vec{a}$. Брусок зісковзує вниз. Кут нахилу клина — α. Визначте прискорення бруска під час руху по поверхні клина.
7. Клин, на поверхні якого міститься брусок, рухається ліворуч. Яким має бути прискорення клина, щоб брусок не ковзав по його поверхні? Кут нахилу клина $\alpha = 45°$, коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею клина $\mu = 0{,}2$.
8. Невелике тіло масою m зісковзує без тертя з поверхні сфери, радіус якої R. На якій висоті тіло відірветься від поверхні сфери?

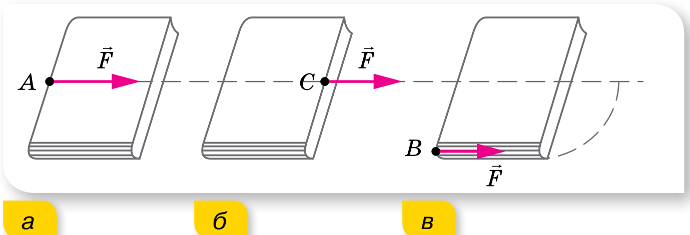
§ 14 Момент сили. Рівновага тіла

Абсолютно тверде тіло. Точка прикладання сили. Ми детально розглянули закони кінематики та динаміки поступального руху матеріальної точки. Але знання законів поступального руху однієї матеріальної точки буває недостатнім для опису руху всього тіла. У складніших випадках дослідження законів руху здійснюється за допомогою моделі — *абсолютно твердого тіла*.

Абсолютно тверде тіло можна розглядати як систему жорстко зв'язаних матеріальних точок, розміщених на незмінних відстанях одна від одної.

Замість поняття «абсолютно тверде тіло» часто вживають термін «тверде тіло». Цією моделлю зручно користуватись у тих випадках, коли деформаціями фізичних тіл можна знехтувати.

Для твердого тіла, крім модуля й напряму діючої сили, важливою характеристикою сили є точка тіла, до якої вона прикладена. Від точки прикладання сили принципово залежить результат дії сили на тіло. Наприклад, сила $\vec{F}$, прикладена до середини бокового краю книжки (точка A) напрямлена паралельно поверхні стола, де лежить книжка, викликає ковзання книги по столу в напрямку дії сили (мал. 75, *а*). Якщо точку прикладання сили $\vec{F}$ перенести з точки A у точку C, що лежить на продовженні прямої, уздовж якої діє сила (лінії дії сили), то результат дії сили не зміниться (мал. 75, *б*). А якщо цю саму силу прикласти в точці B до краю книжки, то книжка почне повертатися (мал. 75, *в*).

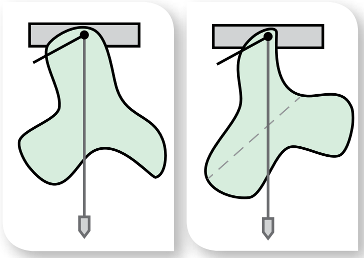


Мал. 75. Точки прикладання сили

Досліди свідчать, що *дія сили не змінюється, якщо точку прикладання переносити вздовж лінії дії сили.*

Центр тяжіння і центр маси тіла. До цього часу ми вживали терміни центр тяжіння і центр маси, ототожнюючи їх. З'ясуємо, у чому відмінність між цими поняттями. ***Центром тяжіння*** тіла називають точку *C* всередині тіла (або поза ним), відносно якої сума моментів сил тяжіння, які діють на окремі частини тіла, дорівнює нулю. (Для деяких практичних завдань потрібно знати ***центр маси***, його ще називають *центром інерції*.) Це точка, що характеризує розподіл маси в тілі або системі тіл. Найчастіше поняття «центр маси» застосовують, розглядаючи рух не одного тіла, а спільний рух декількох взаємодіючих тіл. Наприклад, рух планет Сонячної системи, системи «Земля — Місяць».

В однорідному полі тяжіння положення центра мас тіла збігається з положенням центра тяжіння, що і давало змогу нам використовувати ці поняття як тотожні.



Мал. 76. Визначення центра тяжіння плаского тіла

Положення центра тяжіння плаского тіла можна визначити за допомогою виска (мал. 76).

Якщо тіло має центр симетрії, то центр тяжіння збігається із центром симетрії; якщо тіло має вісь симетрії, його центр тяжіння лежить на цій осі; якщо тіло має площину симетрії, його центр тяжіння лежить у цій площині. Центр тяжіння може міститись і поза тілом, наприклад у кільця, м'яча чи сірникової коробки.

Момент сили. Будь-який рух твердого тіла можна розглядати як сукупність поступального та обертального рухів. Величина, яка характеризує обертальну дію сили на тверде тіло, називається *моментом сили*.

Нехай силу $\vec{F}$ прикладено до точки *A* твердого тіла (мал. 77).

Момент сили $\vec{M}$ відносно нерухомої точки *O* визначається векторним добутком радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки *O* в точку прикладання сили *A*, та вектором сили $\vec{F}$, $\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$. Модуль цього вектора $M = Fr\sin\alpha$, де α — кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$ (мал. 77).

Одиниця моменту сили в СІ — ньютон на метр: 1 Н · м.

Найкоротшу відстань від осі обертання до лінії дії сили називають *плечем сили* й позначають літерою *d* (мал. 77). Оскільки $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то $d = r\sin\alpha$.

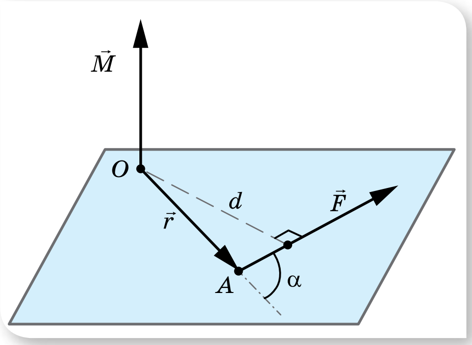
Тоді момент сили можна записати як добуток модуля сили та її плеча: $M = Fd$.

Момент сили називають ще *обертальним моментом*. Прийнято вважати момент сили *від'ємним*, якщо тіло обертається під дією цієї сили *проти годинникової стрілки*, і *додатним*, якщо тіло обертається *за годинниковою стрілкою*.

Вектор моменту сили напрямлений уздовж осі обертання.

З означення моменту сили стає зрозумілим, чому обертання тіла, що має нерухому вісь, може спричинити лише сила, не паралельна цій осі й така, що її не перетинає.

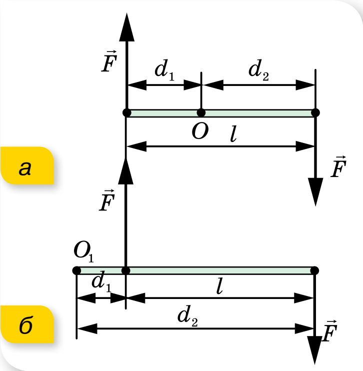
Досить часто трапляється дія двох однакових за модулем паралельних сил, які напрямлені у протилежних напрямках. Такі сили називають *парою сил*.



Мал. 77. До визначення моменту сили

Розглянемо випадок, зображений на малюнку 78, *а*. Обидві сили обертають тіло за годинниковою стрілкою, і їхні моменти $M_1 = Fd_1$ та $M_2 = Fd_2$. Тоді момент пари сил визначається алгебраїчною сумою моментів $M = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2) = Fl$, де *l* — *плече пари сил* є найкоротшою відстанню між напрямками дії сил.

Такий самий результат отримуємо й у випадку, зображеному на малюнку 78, *б*. Тут момент $M_1 = Fd_1$ — від'ємний, а момент $M_2 = Fd_2$ — додатний. Момент пари сил $M = -Fd_1 + Fd_2 = F(d_2 - d_1) = Fl$.



Мал. 78. Дія пари сил на стержень із закріпленою віссю обертання *O*

Таким чином, *момент пари сил відносно будь-якої осі обертання дорівнює добутку однієї із сил на плече пари*. Іншими словами, пара сил не має рівнодійної та обертає тіло, на яке вона діє.

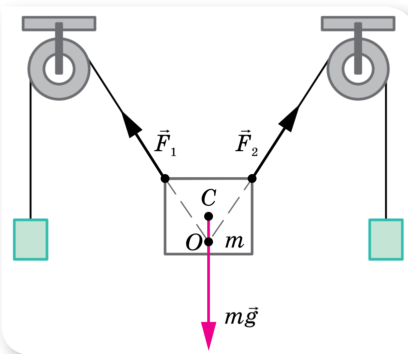
Прикладами обертання тіла під дією пари сил є обертання гайки, яку закручують; обертання звареного яйця на поверхні стола, якщо його розкрутити великим і вказівним пальцями; обертання стрілки компаса в магнітному полі Землі тощо.

Умови рівноваги тіла. Розглянемо окремий випадок руху, коли рівнодійна сил і моментів сил, прикладених до тіла, дорівнює нулю. У цьому разі тіло або перебуває у стані спокою (статична рівновага), або його центр тяжіння рухається з постійною швидкістю (динамічна рівновага). У загальному випадку *рівновагою тіла* називають такий стан механічної системи, у якому тіло залишається нерухомим відносно вибраної інерціальної системи відліку. (При цьому відносно будь-якої іншої інерціальної системи відліку центр тяжіння тіла рухатиметься поступально з постійною швидкістю.)

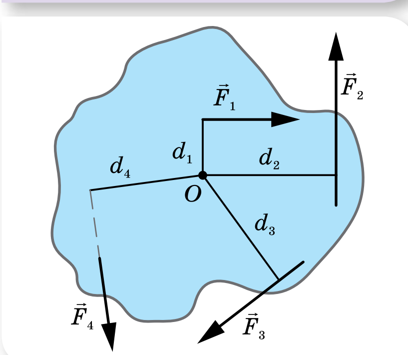
Згідно з другим законом Ньютона тіло може залишатись у спокої (відносно вибраної системи відліку), якщо векторна сума всіх прикладених до тіла сил дорівнює нулю.

Тому ***перша умова рівноваги*** для тіла, що не обертається, сформулюється так:

тіло перебуває в рівновазі, якщо рівнодійна прикладених до нього сил дорівнює нулю, $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$, або (у координатній формі) алгебраїчна сума проекцій сил, прикладених до тіла, на довільну вісь дорівнює нулю.



Мал. 79. Рівновага тіла під дією трьох сил



Мал. 80. Сили, що діють на тіло із закріпленою віссю *O*

На малюнку 79 зображено випадок рівноваги тіла під дією трьох сил. Точка *O* перетину ліній дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ не збігається з точкою прикладання сили тяжіння (центром тяжіння *C*), але в рівновазі ці точки обов'язково мають міститися на одній вертикалі.

Для обчислення рівнодійної сил, як вам уже відомо, усі сили слід звести до однієї точки. Якщо в конкретній задачі тіло можна розглядати як матеріальну точку, виконання першої умови рівноваги достатньо для того, щоб тіло залишалось у спокої. Використовуючи першу умову рівноваги, можна розрахувати сили, які діють з боку тіла, що перебуває в спокої, на кілька опор або підвісів. Якщо в задачі тіло не можна вважати матеріальною точкою й сили, що діють на тіло, прикладені не в одній точці, то тіло може обертатись.

Розглянемо тверде тіло, яке не може рухатись поступально, а може тільки обертатись відносно нерухомої осі. У цьому випадку тіло перебуватиме в рівновазі (мал. 80), якщо виконується ***друга умова рівноваги***.

Тіло перебуває в рівновазі, якщо алгебраїчна сума моментів прикладених до тіла сил дорівнює нулю:

$$M_1 + M_2 + \ldots = 0.$$

Таку умову ще називають ***правилом моментів***. Так, для тіла, зображеного на малюнку 80, друга умова рівноваги має вигляд $F_1d_1 + F_3d_3 - F_2d_2 - F_4d_4 = 0$.

У загальному випадку, коли тіло може одночасно й рухатися поступально, й обертатися, для його рівноваги необхідне виконання обох умов рівноваги.

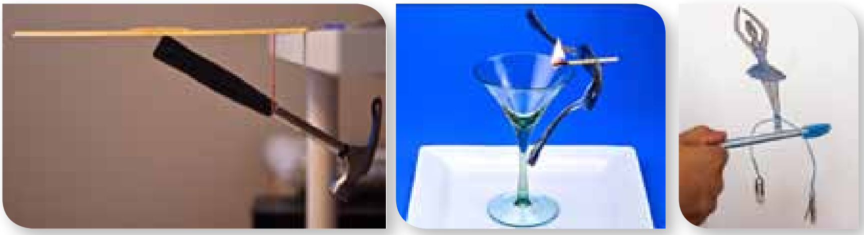
Умови рівноваги не є умовами стану спокою тіла. Наприклад, колесо може котитися по горизонтальній поверхні і разом з тим у будь-який момент часу для нього виконуються умови рівноваги: *рівнодійна сил і сумарний момент сил, що діють на колесо, дорівнюють нулю.*

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Сформулюйте умови рівноваги тіла.
2. Виконавши пояснювальні малюнки, схарактеризуйте види рівноваги тіл, що мають точку опори, нерухому вісь обертання, площу опори. Які види рівноваги можливі для цих тіл?

Експериментуємо

За допомогою монет визначте модуль сили тяжіння, що діє на лінійку. Спробуйте в домашніх умовах провести досліди з рівноваги тіл (мал. 81).

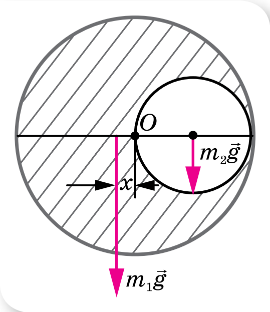


Мал. 81. Досліди з рівноваги тіл

Яким чином можна визначити модуль сили тяжіння неоднорідного стержня, якщо у вашому розпорядженні є штатив з муфтою й затискачем, нитка, мідний дріт, лінійка, олівець, таблиця густин речовин і сам неоднорідний стержень.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Однорідна тонка пластинка має форму круга радіусом R, у якому вирізано круглий отвір удвоє меншого радіуса, що дотикається до краю пластинки (мал. 82). Де буде центр тяжіння?



Мал. 82

Дано:	**Розв'язання:**
R	Очевидно, центр тяжіння пластинки лежить на її діаметрі, який проходить через центр отвору (мал. 82) на відстані x від центра пластинки O.
x — ?	

Сила тяжіння m_1g, що діє на пластинку з вирізаним отвором, прикладена до цього центра. Якщо вставити вирізану частину пластинки на попереднє місце, то сила тяжіння m_2g, що діє на малий диск радіусом $\frac{R}{2}$, прикладена до його центра.

Оскільки суцільна пластина перебуває в рівновазі, $m_1gx = m_2g\frac{R}{2}$.

Звідки $x = \frac{m_2R}{2m_1}$.

Виразимо масу однорідної пластинки через її густину й об'єм: $m = \rho\pi R^2h$. Відповідно маса вирізаної частини: $m_2 = \rho\pi\frac{R^2}{4}h$. Тоді маса пластинки з отвором $m_1 = m - m_2 = \frac{3\rho\pi R^2h}{4}$.

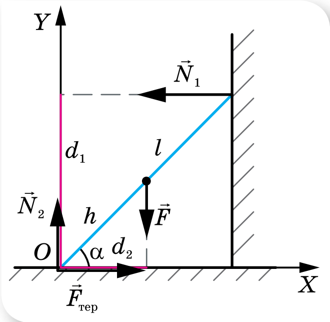
Підставляючи вирази для мас, отримуємо: $x = \frac{R}{6}$.

Відповідь: $x = \frac{R}{6}$.

Задача 2. Драбина завдовжки 4 м приставлена до гладенької стіни під кутом 60° до підлоги. Коефіцієнт тертя між драбиною та підлогою 0,33. На яку висоту може піднятись людина до того, як драбина почне ковзати? Масою драбини знехтуйте.

Дано:	**Розв'язання:**
$l = 4$ м $\alpha = 60°$ $\mu = 0{,}33$	На драбину діють такі сили (мал. 83): $\vec{F}$ — сила тиску людини на драбину; $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$ — сили реакції опори стіни та підлоги; $\vec{F}_{\text{тер}}$ — сила
h — ?	

тертя між драбиною та підлогою (за умовою задачі тертя між драбиною та стіною відсутнє).



Мал. 83. Сили, що діють на драбину

Ковзання драбини можна розглядати як сукупність двох рухів: обертального відносно осі, що проходить через точку O, та поступального — у напрямку, протилежному осі X.

Запишемо першу умову рівноваги $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тер}} = 0$ і відповідно в проекціях:

$$F_{\text{тер}} - N_1 = 0 \text{ (на вісь } X\text{);} \qquad (1)$$
$$N_2 - F = 0 \text{ (на вісь } Y\text{).} \qquad (2)$$

Запишемо другу умову рівноваги відносно точки O: $N_1d_1 = Fd_2$ або $N_1l\sin\alpha = Fh\cos\alpha$.

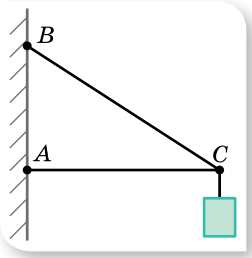
Звідки $h = \frac{N_1l\sin\alpha}{F\cos\alpha} = \frac{N_1l}{F}\operatorname{tg}\alpha$.

З рівняння (1) $N_1 = F_{тер}$. Своєю чергою, $F_{тер} = \mu N_2 = \mu F$. Отже, $h = \mu l \operatorname{tg} \alpha$; $h = 0,33 \cdot 4 \text{ м} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,8 \text{ м}.$

Відповідь: 0,8 м.

ВПРАВА 14

1. З однорідного круга радіусом $R = 6$ м вирізали кружок радіусом $r = \frac{R}{3}$ так, що центр цього кружка розташований на відстані $\frac{2R}{3}$ від центра круга. Визначте положення центра тяжіння круга з вирізом.
2. П'ять куль, маси яких відповідно m, $2m$, $3m$, $4m$ і $5m$, закріплено на стержні так, що їх центри перебувають на відстані l один від одного. Нехтуючи масою стержня, визначте положення центра тяжіння системи.
3. Двоє чоловіків несуть на плечах трубу масою 80 кг і завдовжки 5 м. Перший чоловік підтримує трубу на відстані 1 м від її краю, а другий чоловік — її протилежний край. Визначте силу тиску, яку чинить труба на кожного із чоловіків.
4. Дві сторони дротяної рамки у формі рівностороннього трикутника виготовлено з алюмінієвого дроту, а одну — з мідного. Визначте положення центра тяжіння рамки, якщо дріт має однаковий переріз, а сторона трикутника дорівнює 1 м.
5. На дошці завдовжки 4 м і масою 30 кг гойдаються двоє дітей: дівчинка масою 30 кг і хлопчик масою 40 кг. Де має бути в дошки точка опори, якщо діти сидять на кінцях дошки?
6. До кінця стержня AC завдовжки 2 м (мал. 84), один кінець якого шарнірно прикріплено до стіни, а інший підтримується тросом BC завдовжки 2,5 м, підвісили вантаж масою 120 кг. Визначте сили, що діють на трос і стержень.
7. Чи може людина масою 60 кг підніматись по триметровій драбині масою 10 кг, яку встановлено під кутом 30° до стіни? Коефіцієнт тертя ковзання між стіною та драбиною дорівнює 0,3, а між підлогою та драбиною — 0,5.
8. На площині, що має кут нахилу до горизонту α, стоїть циліндр радіусом r. Якою має бути найбільша висота циліндра, за якої він ще не перекидається, якщо його виготовлено з однорідного матеріалу?
9. Колесо радіусом R і масою m стоїть перед сходинкою, висота якої h. Яку найменшу горизонтальну силу F треба прикласти до осі колеса, щоб воно могло викотитись на сходинку?



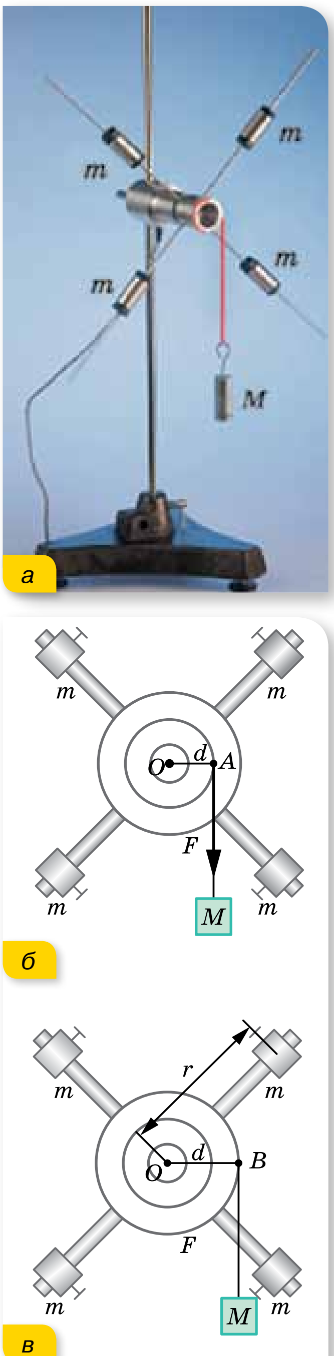
Мал. 84

§ 15 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальний рух твердого тіла. Досліджуючи обертальний рух твердого тіла, ми зупинимось на випадку, коли тіло обертається навколо нерухомої осі. Під час такого руху всі точки тіла описують концентричні кола, центри яких лежать на осі обертання.

Для дослідження обертального руху твердого тіла розглядатимемо лише точки, що лежать в одній площині, перпендикулярній до осі обертання.

Кінематика обертального руху твердого тіла характеризується вже знайомими нам величинами: кутом повороту $\Delta\varphi$, кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε.



Кінематичні рівняння рівноприскореного обертання твердого тіла навколо нерухомої осі мають такий самий вигляд, як і рівняння *рівноприскореного* обертального руху матеріальної точки: $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$; $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$.

Досліди з дослідження динаміки обертального руху твердого тіла. Для дослідження динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі розглянемо такі досліди.

Використаємо установку (мал. 85, *а*), що складається з двох блоків різного радіуса, закріплених на одній осі. До цих блоків прикріплено чотири легкі стержні. На кожному з них розміщуємо тягарець масою m (на однаковій відстані від осі обертання). На один із блоків намотуємо нитку. До вільного кінця нитки підвішуємо тягарець масою M. Під дією сили тяжіння тягарець M опускається, при цьому нитка розкручує блок і вся установка починає обертатися. Дослідимо, як обертається установка за різних значень мас тягарців m та M, а також за їх різного розташування відносно осі.

Спочатку, не змінюючи положення й маси тягарців m, збільшуватимемо масу тягарця M, тим самим збільшуючи силу, що діє на установку (мал. 85, *б*). Спостерігаючи за рухом тягарця M та обертанням установки, можна зробити висновок: *що більшою є маса M, а отже, і діюча сила F, то швидше обертається установка. Це означає, що кутове прискорення тіла прямо пропорційне діючій силі.*

Не змінюючи маси тягарців m і M та положення малих тягарців на стержнях, намотуватимемо нитку з тягарцем M на блоки різних радіусів (мал. 85, *в*). При цьому змінюватиметься відстань d від лінії дії сили до осі обертання.

Мал. 85. Досліди з дослідження обертання твердого тіла

Дослід показує: *що більшим є радіус блока, то швидше обертатиметься установка. Це означає, що кутове прискорення залежить не лише від значення прикладеної сили, а й від її плеча.*

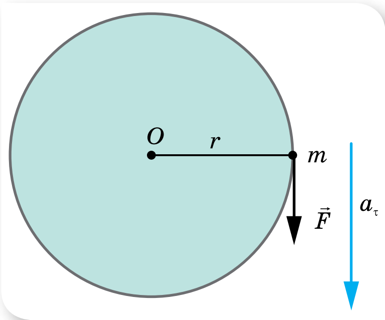
Не змінюючи масу тягарця M і відстань d, змінюватимемо маси малих тягарців m. Збільшуючи масу тягарців, помічаємо, що установка обертається повільніше, тобто *кутове прискорення тіла залежить від маси цього тіла.*

Не змінюючи маси всіх тягарців, змінюватимемо положення малих тягарців на стержнях. Дослід показує: *що меншою є відстань r, тобто що ближче розташовані тягарці до осі обертання, то швидше за фіксованої (сталої) сили F обертається тіло.*

Якщо проводити дослід із секундоміром, то можна визначити, що зі зменшенням відстані r у два рази тягарець M опускається в 4 рази швидше. Це означає, що *кутове прискорення тіла, яке обертається, обернено пропорційне квадрату відстані від осі обертання до цього тіла.*

Рівняння обертального руху твердого тіла має відображати всі ці досліджувані залежності.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Для виведення основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі виділимо невеликий елемент маси цього тіла — точку масою m. Нехай на цю точку масою m, що розташована на відстані r від осі обертання, діє у площині обертання постійна сила F, напрямлена перпендикулярно до радіуса (мал. 86).



Мал. 86. Обертання точки твердого тіла

За другим законом Ньютона $F = ma_\tau$. Оскільки для обертального руху суттєвим є момент сили, то помножимо обидві частини рівняння на r — відстань від осі обертання до лінії дії сили (у нашому випадку $r = d$): $Fr = ma_\tau r$. Оскільки $M = Fd$, а $a_\tau = \varepsilon r$, отримуємо: $M = m\varepsilon r^2$.

Величина mr^2 є постійною для заданих значень m та r і називається *моментом інерції J точки*, що обертається.

Таким чином, вираз для моменту сили має вигляд $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$. Цей вираз аналогічний формулі $\vec{F} = m\vec{a}$. Роль сили F відіграє момент сили M, роль прискорення a — кутове прискорення ε, а роль маси m — момент інерції J.

Для твердого тіла, що складається з n малих елементів маси, момент інерції можна визначити, додавши моменти інерції всіх елементів:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Таким чином, *основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі* має вигляд: $M = J\varepsilon$.

З рівняння випливає, що кутове прискорення, яке отримує тверде тіло внаслідок дії моменту сили, прямо пропорційне значенню цього моменту сили та обернено пропорційне моменту інерції тіла: $\varepsilon = \dfrac{M}{J}$.

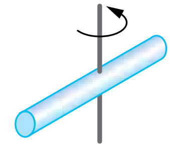
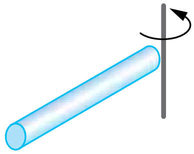
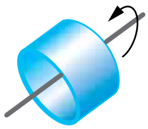
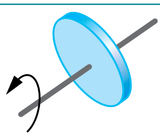
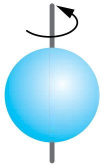
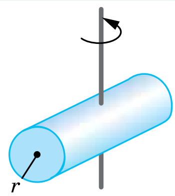
Момент інерції. Момент інерції є величиною, що характеризує обертальний рух твердого тіла — це скалярна величина, яка є мірою інертності тіла в обертальному русі навколо цієї осі. Відіграє таку саму роль, як і маса в поступальному русі. Момент інерції матеріальної точки (або елемента маси), що рухається по колу радіусом r, визначається формулою $J = mr^2$.

Одиниця моменту інерції — кілограм-метр у квадраті: 1 кг · м^2.

Момент інерції тіла одночасно враховує вплив на кутове прискорення маси тіла, його форми, геометричних розмірів, розташування осі обертання та розподіл маси по об’єму тіла.

У таблиці 2 наведено моменти інерції деяких однорідних тіл.

Таблиця 2

Тіло	Як проходить вісь обертання		J
Тонкий стержень масою m і довжиною l	Перпендикулярно до стержня через його середину		$\dfrac{ml^2}{12}$
Тонкий стержень масою m і довжиною l	Перпендикулярно до стержня через його кінець		$\dfrac{ml^2}{3}$
Тонка трубка або кільце радіусом r	Збігається з віссю трубки		mr^2
Круглий диск або циліндр масою m і радіусом r	Перпендикулярно до площини диска через його центр		$\dfrac{mr^2}{2}$
Куля масою m і радіусом r	Збігається з діаметром		$\dfrac{2mr^2}{5}$
Круглий циліндр масою m, довжиною l і радіусом r	Перпендикулярно до осі циліндра через його середину		$m\left(\dfrac{l^2}{12} + \dfrac{r^2}{4}\right)$

Цікаво знати

Можна навести багато прикладів обертання тіл у природі й техніці. Наприклад, дзиґа. Перші свідчення про дзиґу та її незвичайні властивості відомі з давніх-давен. Сучасні іграшки є прототипом тих, що виготовлялись у Китаї ще в III тисячолітті до нашої ери. Дзиґа викликає захоплення не лише в дітей (мал. 87).

Властивості дзиґи — її *стійкість* (незмінність у просторі напряму осі власного обертання й надзвичайна опірність зовнішнім діям) і *прецесія* (повільне обертання осі власного обертання дзиґи під дією моменту сил) — стали підґрунтям створення на її основі цілої низки приладів і пристроїв, які називають гіроскопічними (***гіроскоп*** — пристрій, що містить швидкообертове тверде тіло, яке може обертатися навколо трьох взаємно перпендикулярних осей) (мал. 88).

Гіроскопи застосовують в авіації, космонавтиці, судноплавстві й навіть у сучасних смартфонах. Наприклад, у транспортних засобах (літаках, кораблях) вільний гіроскоп застосовують як «автокермо». Напрямок руху корабля задається напрямком осі вільного гіроскопа. За будь-яких відхилень корабля від курсу вісь гіроскопа зберігає свій колишній просторовий напрямок, а карданів підвіс повертається щодо корпусу корабля. Поворот рами карданова підвісу відстежується за допомогою спеціальних пристроїв, які видають команди автоматам на поворот керма й повернення корабля на заданий курс.

За допомогою гіроскопа визначається положення смартфона в просторі, що дає змогу, приміром, здійснювати управління в іграх, нахиляючи мобільний пристрій в той чи інший бік.

Мал. 87. Нобелівські лауреати з фізики Нільс Бор і Вольфганг Паулі вивчають дзиґу, що під час обертання стає «з ніг на голову» (31.03.1951)

Мал. 88. Гіроскопічні пристрої

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що таке момент інерції тіла? Від чого залежить момент інерції певного тіла?
2. Поясніть досліди з обертання твердого тіла. Які висновки можна зробити з таких дослідів?
3. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

Експериментуємо

Поясніть відмінності в обертанні сирого й круто звареного курячого яйця.
Самобалансуючого робота можна сконструювати й самостійно (мал. 89). Спробуйте.

Мал. 89. Самобалансуючі роботи

Приклади розв'язування задач

Розв'язуючи задачі, потрібно застосовувати основне рівняння динаміки та кінематичні рівняння обертального руху, а також формули, що описують властивості сил, які діють між тілами.

Задача 1. Однорідний диск масою 2500 кг і радіусом 1 м обертається навколо осі, що проходить через його центр, здійснюючи 600 $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$. До диска притискають пластину. Якою має бути сила, що діє по дотичній до диска, щоб через 5 хв кількість обертів стала удвічі меншою?

Дано:
$m = 2500$ кг
$r = 1$ м
$\nu_1 = 600\ \frac{\text{об}}{\text{хв}} = 10\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$
$t = 5$ хв $= 300$ с
$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 2$

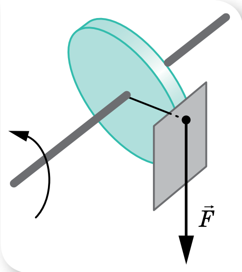
F — ?

Розв'язання:

Скористаємось основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі $M = J\varepsilon$.

У нашому випадку (мал. 90), $M = Fr$, $J = \frac{mr^2}{2}$,

$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{t}$.



Мал. 90. Гальмівна дія сили

Підставляючи ці вирази в основне рівняння, отримуємо:

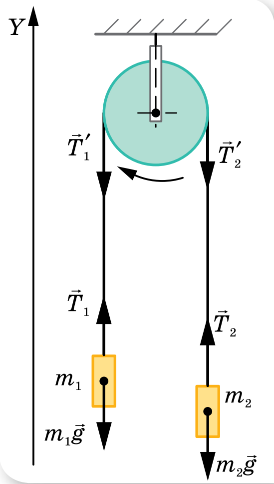
$$F = \frac{\pi r m(\nu_2 - \nu_1)}{t}.$$

Після підстановки числових значень знаходимо: $F = -131$ Н. Знак мінус «−» вказує на гальмівну дію сили.

Відповідь: −131 Н.

Задача 2. Через блок, що має форму диска, масою 0,1 кг та радіусом 0,025 м перекинуто нитку, до кінців якої підвішені вантажі, маси яких 1,2 і 0,8 кг. Визначте різницю сил натягу нитки з обох боків блока та прискорення вантажів. Вважайте, що нитка нерозтяжна і проковзування немає.

Дано:	**Розв'язання:**
$m = 0{,}1$ кг $r = 0{,}025$ м $m_1 = 1{,}2$ кг $m_2 = 0{,}8$ кг	Зробимо малюнок до задачі (мал. 91). Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення вантажів однакові, $\lvert\vec{a}_1\rvert = \lvert\vec{a}_2\rvert = a$.
ΔT — ? a — ?	



Мал. 91. Схематичний малюнок до задачі

За третім законом Ньютона $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$, $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$, отже, можна записати: $\lvert\vec{T}_1'\rvert = \lvert\vec{T}_1\rvert = T_1$; $\lvert\vec{T}_2'\rvert = \lvert\vec{T}_2\rvert = T_2$.

Запишемо рівняння руху вантажів у проекціях на вибрану вісь Y (мал. 91).

$$T_1 - m_1 g = m_1 a; \qquad (1)$$

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a. \qquad (2)$$

Моменти сил T_1 і T_2 напрямлені у протилежні боки, отже, основне рівняння динаміки обертального руху блока набуває вигляду $(T_2 - T_1)r = J\varepsilon$.

Оскільки нитка не проковзує, блок під дією вантажів обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Момент інерції блока (диска) $J = \frac{mr^2}{2}$.

Підставивши ці вирази в основне рівняння динаміки обертального руху, маємо: $(T_2 - T_1)r = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{a}{r}$. (3)

Розв'язуючи систему рівнянь (1) — (3), отримуємо:

$$T_2 - T_1 = \frac{(m_2 - m_1)mg}{2(m_2 + m_1) + m}, \quad a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}}.$$

Підставивши числові значення, знаходимо: $T_2 - T_1 \approx 0{,}1$ Н, $a \approx 1{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Відповідь: 0,1 Н; 1,9 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

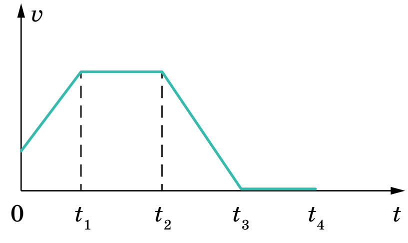
ВПРАВА 15

1. На барабан радіусом 0,5 м намотано нитку, до кінця якої прив'язано вантаж масою 10 кг. Визначте момент інерції барабана, якщо вантаж опускається з прискоренням 2 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2. Кільце масою 1 кг і радіусом 0,2 м обертається з кутовою швидкістю 100 $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Кільце кладуть на горизонтальну поверхню. Внаслідок тертя кільце зупиняється через 10 с. Визначте коефіцієнт тертя.
3. Диск масою 10 кг і радіусом 10 см вільно обертається навколо осі, що проходить через центр, з кутовою частотою 6 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Гальмуючи, диск зупиняється за 5 с. Визначте гальмівний момент.
4. Визначте гальмівний момент, яким можна зупинити за 20 с махове колесо масою 50 кг, розподіленою по ободу колеса, і радіусом 30 см. Кутова частота обертання колеса — 20 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.
5. До обода однорідного диска радіусом 0,2 м прикладена по дотичній сила 98,1 Н. Під час обертання на диск діє момент сил тертя 4,9 Н · м. Визначте масу диска, якщо він обертається з кутовим прискоренням 100 $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.
6. Однорідний стержень завдовжки 1 м і масою 0,5 кг обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через середину стержня. З яким кутовим прискоренням обертається стержень, якщо на нього діє момент сил 98,1 мН·м?
7. Маховик, момент інерції якого 63,6 кг · м^2, обертається з кутовою швидкістю 31,4 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Визначте момент сил гальмування, під дією якого маховик зупиниться за 20 с. Маховик вважайте однорідним диском.

Перевірте себе (§ 8–15)

1. Тіло змінює свою швидкість так, як показано на малюнку. У які інтервали часу систему відліку, пов'язану із цим тілом, можна вважати інерціальною?



А $0–t_1$ і $t_2–t_3$ **Б** $t_1–t_2$ і $t_3–t_4$ **В** $0–t_1$ і $t_1–t_2$ **Г** $t_2–t_3$ і $t_3–t_4$

2. Укажіть, яка із характеристик руху тіла залишається незмінною у результаті переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

А початкові координати
Б напрямок руху
В швидкість
Г прискорення

3. На пружині жорсткістю k висить вантаж масою m. На скільки відсотків зміниться абсолютне видовження пружини, якщо коефіцієнт жорсткості зменшиться на 60 %?

А зменшиться на 30 %
Б зменшиться на 60 %
В зменшиться на 40 %
Г не зміниться

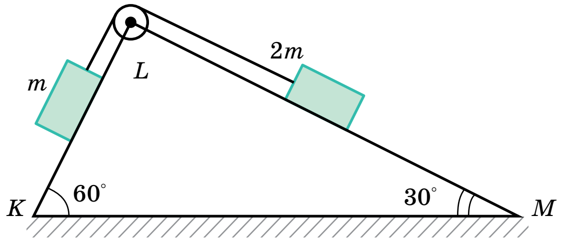
4. Підкинутий м'яч у певний момент рухається вертикально вгору зі швидкістю 5 $\frac{м}{с}$. Визначте, як зміниться модуль його швидкості через 1 с. Вважайте, що $g = 10\ \frac{м}{с^2}$, опір повітря не враховуйте.

А не зміниться
Б зменшиться удвічі
В збільшиться удвічі
Г збільшиться утричі

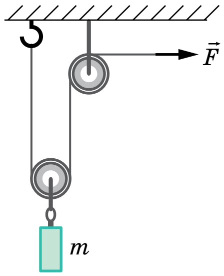
5. Одну цеглину поклали на іншу й підкинули вертикально вгору. У який момент руху сила тиску верхньої цеглини на нижню дорівнюватиме нулю? Опір повітря не враховуйте.

А тільки під час руху вгору
Б тільки під час руху вниз
В тільки в момент досягнення верхньої точки траєкторії
Г протягом усього часу польоту

6. Система із двох тягарців, зображена на малюнку, рухається рівномірно. Визначте коефіцієнт тертя на ділянці KL, якщо поверхня LM гладенька.



7. За допомогою системи блоків рівномірно піднімають вантаж масою m = 4 кг, прикладаючи силу F = 25 Н (див. малюнок). Яким є коефіцієнт корисної дії такого механізму?



8. Тіло ковзає рівномірно похилою площиною з кутом нахилу в 40°. Визначте коефіцієнт тертя між площиною та тілом.

9. Кулька, що підвішена на нерозтяжній нитці завдовжки 10 м рівномірно обертається в горизонтальній площині. При цьому нитка весь час утворює з вертикаллю кут 45°. Визначте період обертання кульки. Вважайте, що $g = 10\ \frac{м}{с^2}$; $\pi = 3$.

10. Щоб виміряти масу лінійки, на один з її кінців поклали вантаж масою 250 г і почали висовувати цей кінець за край стола. Лінійка перебувала в рівновазі доти, поки її не висунули на чверть довжини. Якою є маса лінійки?

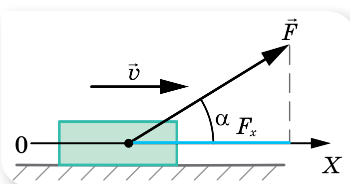
§ 16 Імпульс. Закон збереження імпульсу

Імпульс тіла та імпульс сили. Пригадаємо, що нам відомо про імпульс з курсу 9 класу.

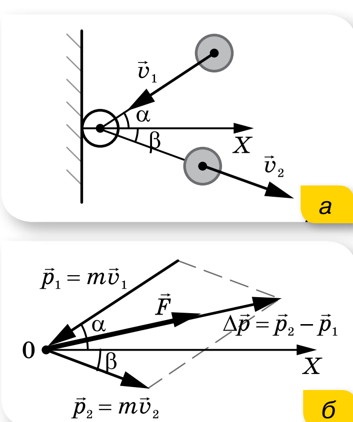
Імпульс тіла, або кількість руху $\vec{p}$ (так називав цю величину Ньютон), — це фізична величина, що характеризує механічний рух і дорівнює добутку маси тіла m на його швидкість $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Одиниця імпульсу тіла — кілограм на метр за секунду: $1\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Імпульсом сили називають добуток середнього значення сили F за певний інтервал часу та тривалості цього інтервалу Δt. Позначається: $\vec{F}\Delta t$.



Мал. 92. Зміну імпульсу тіла визначає проекція сили $\vec{F}$ на вісь X, напрямок якої збігається з напрямком його руху



Мал. 93. Удар м'яча об стіну (*а*), діаграма імпульсів (*б*)

Одиниця імпульсу сили — ньютон-секунда: 1 Н · с.

Імпульс сили — це складна фізична величина, яка одночасно враховує вплив модуля, напряму і часу дії сили на зміну стану руху тіла.

Якщо сила діє під певним кутом до напрямку руху тіла, то зміна імпульсу визначається проекцією цієї сили на вісь, спрямовану вздовж напрямку руху (мал. 92).

Якщо тіло змінює напрямок руху, то зміну імпульсу визначають за діаграмою імпульсів. Наприклад, м'яч масою m ударяється об стіну зі швидкістю $\vec{v}_1$ під кутом α та відлітає від неї зі швидкістю $\vec{v}_2$ під кутом β (кути відраховуються від нормалі X до стіни) (мал. 93, *а*).

На малюнку 93, *б* показано діаграму імпульсів, де вектор зміни імпульсу $\Delta\vec{p}$ визначається за правилом паралелограма. Під час удару на стіну діє сила $\vec{F}$, напрямок якої збігається з напрямком вектора зміни імпульсу $\Delta\vec{p}$.

Системи тіл. Закон збереження імпульсу. У природі всі тіла взаємодіють між собою. Проте взаємодія з деякими тілами настільки незначна, що її можна не враховувати. Для цього у фізиці використовують поняття *ізольованої, або замкненої, системи тіл.*

Замкнена (ізольована) система — це система тіл, які взаємодіють лише між собою й не взаємодіють з тілами, що не входять до цієї системи.

Імпульс системи $\vec{p}_c$ — це векторна сума імпульсів тіл системи: $\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ або $\vec{p}_c = m_c \vec{v}_c$ — імпульс системи тіл дорівнює добутку маси системи тіл m_c на швидкість руху центра мас системи $\vec{v}_c$.

Сили, з якими взаємодіють тіла, що входять до замкненої системи, називають *внутрішніми*. Тож можна стверджувати, що на замкнену систему не діють зовнішні сили.

Нехай замкнена система містить два тіла масами m_1 і m_2, які в початковий момент часу у вибраній інерціальній системі відліку мали швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Через деякий час їх швидкості внаслідок взаємодії змінилися до $\vec{v}_1'$ та $\vec{v}_2'$. За третім законом Ньютона тіла взаємодіють із силами, однаковими за модулем і протилежними за напрямком, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Виразимо ці сили за другим законом Ньютона, записавши його через імпульси: $\vec{F}_1 = m_1 \dfrac{\vec{v}_1' - \vec{v}_1}{\Delta t}$, $\vec{F}_2 = m_2 \dfrac{\vec{v}_2' - \vec{v}_2}{\Delta t}$. Тоді $\dfrac{m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1}{\Delta t} = -\dfrac{m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2}{\Delta t}$.

Якщо записати імпульси тіл до взаємодії по один бік від знаку рівності, а після взаємодії — по інший, то отримаємо вираз: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$, який називається ***законом збереження імпульсу***.

Геометрична сума імпульсів тіл, які утворюють замкнену систему, залишається сталою під час будь-яких рухів і взаємодій тіл системи.

Виконання закону збереження імпульсу ми показали на прикладі системи, що складається з двох взаємодіючих тіл. Закон виконується і для *ізольованої* системи з *довільною кількістю тіл*.

Зазначимо, що закон збереження імпульсу можна застосовувати і для неізольованих систем за умови, що сума імпульсів зовнішніх сил дорівнює нулю.

Ми отримали закон збереження імпульсу, виходячи із законів Ньютона, але потрібно наголосити, що закон збереження імпульсу не є наслідком законів Ньютона. Це — *самостійний фундаментальний закон природи*, а це означає, що він виконується для тіл макро- та мікросвіту. Згідно із цим законом, щоб не відбулось у замкненій системі (співудари, вибухи, хімічні реакції тощо), імпульс системи тіл залишається незмінним. Це дає змогу аналізувати рух тіл системи навіть у тих випадках, коли внутрішні сили невідомі.

Одним із прикладів прояву закону збереження імпульсу є *удар*. Під ударом розуміють таку взаємодію тіл, яка здійснюється миттєво. Як правило, під час удару взаємодія відбувається через сили пружності, які виникають у тілах унаслідок їх деформації під час стискання. Якщо після удару розміри й форма взаємодіючих тіл повністю відновлюється, то такий удар називають *абсолютно пружним*.

У природі спостерігаються також взаємодії, які називають *непружними*. У разі абсолютно непружного удару утворюється нове тіло, маса якого дорівнює сумі мас тіл, що взаємодіяли.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що таке імпульс тіла та імпульс сили? Який між ними зв'язок?
2. Як залежить зміна імпульсу тіла від значення сили й часу її дії?
3. Як розрахувати зміну імпульсу тіла, якщо сила діє під кутом до його переміщення? Як розрахувати зміну імпульсу тіла, якщо воно змінює напрямок руху?
4. Яку систему тіл називають замкненою?
5. Сформулюйте закон збереження імпульсу.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Молекула масою $4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг пружно вдаряється об стінку посудини й відбивається від неї без втрати швидкості. Визначте імпульс сили, отриманий стінкою, якщо молекула летить і відбивається: а) перпендикулярно; б) під кутом 30° до стінки.

Дано:

$m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг

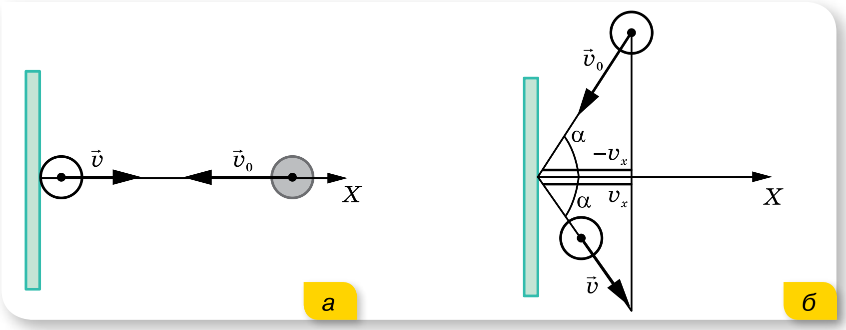
$v_0 = 600\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Ft — ?

Розв'язання:

а) Спрямуємо вісь X перпендикулярно до стінки (мал. 94, *а*).

Під час удару імпульс сили, що діє на молекулу, визначається за формулою $\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$. Оскільки $\vec{v} = -\vec{v}_0$, то $\vec{F}\Delta t = -2m\vec{v}_0$.



Мал. 94. Пружний удар молекули об стінку з початковою швидкістю: *а* — перпендикулярною до стінки; *б* — під кутом α до нормалі X

Знак «мінус» вказує на те, що сила, з якою стінка діє на молекулу, протилежно напрямлена до вектора швидкості $\vec{v}_0$. За третім законом Ньютона молекула діє на стінку з такою самою за модулем силою, але протилежно напрямленою. $F\Delta t = 2mv_0$, $F\Delta t \approx 5{,}6 \cdot 10^{-23}$ Н · с.

б) Кут, під яким молекула відбивається від стінки, дорівнює куту падіння, а $v = v_0$, оскільки молекула відбивається від стінки пружно. За умовою задачі кут між напрямком руху молекули і стінкою дорівнює 30°, тоді кут $\alpha = 60°$ (мал. 94, *б*).

Під час удару $\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$.

У проекціях на вісь X:

$$F\Delta t = mv_x - (-mv_x) = mv_0 \cos\alpha + mv_0 \cos\alpha = 2mv_0 \cos\alpha.$$

Стінка отримує такий самий за модулем імпульс сили $F\Delta t = 2mv_0 \cos 60°$,

$$F\Delta t = 2 \cdot 4,65 \cdot 10^{-26}\,\text{кг} \cdot 600\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 0,5 = 1,4 \cdot 10^{-23}\ \text{Н} \cdot \text{с}.$$

Відповідь: а) $5,6 \cdot 10^{-23}$ Н · с; б) $1,4 \cdot 10^{-23}$ Н · с.

Задача 2. Людина масою 70 кг стоїть на кормі човна, що міститься на озері. Довжина човна дорівнює 5 м, а його маса — 280 кг. Людина переходить на ніс човна. На яку відстань відносно дна озера переміститься людина? Опором води знехтуйте.

Дано:	Розв’язання:
$m_1 = 70$ кг $m_2 = 280$ кг $l = 5$ м	Позначимо через v швидкість людини відносно човна, u — швидкість човна відносно дна озера. Додатний напрямок осі X виберемо в напрямку руху людини. Тоді $v - u$ — швидкість людини відносно дна.
Δx — ?	

За законом збереження імпульсу $m_1(v - u) = m_2 u$. Звідки $\dfrac{u}{v} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$.

Враховуючи, що шляхи, які проходять людина і човен, пропорційні їх швидкостям, то $\dfrac{x}{l} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$. Звідки $x = \dfrac{m_1 l}{m_2 + m_1}$ — відстань, на яку перемістився човен відносно дна. Тоді $\Delta x = l - x = \dfrac{m_2 l}{m_2 + m_1}$ — відстань, на яку перемістилась людина відносно дна.

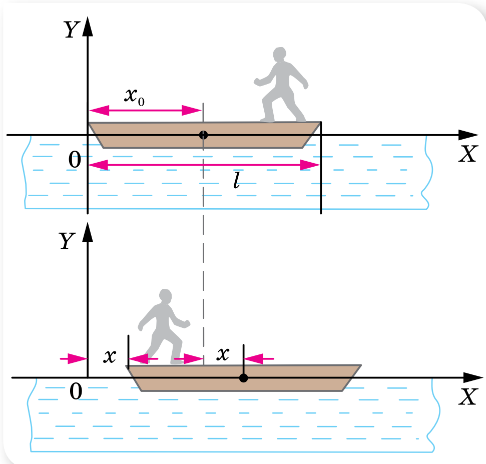
Обчислення:

$$\Delta x = \frac{280\,\text{кг} \cdot 5\,\text{м}}{350\,\text{кг}} = 4\ \text{м}.$$

Другий спосіб розв’язання задачі. *Координату центра мас* системи тіл масами $m_1, m_2, \dots, m_n$, розміщених на одній прямій, можна визначити за формулою: $x_{\text{ц.м}} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$, де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координати тіл.

Положення центра мас системи човен—людина в системі координат, яка пов’язана з водою, під час руху людини не змінюватиметься (мал. 95; с. 96):

$$x_{\text{ц.м}} = \frac{m_2 x_0 + m_1 l}{m_2 + m_1} = \frac{m_2(x_0 + x) + m_1 x}{m_2 + m_1},$$



Мал. 95

де x_0 — координата центра тяжіння човна до переміщення, x — координата носа човна після переміщення туди людини, l — довжина човна й початкова координата людини.

Отже, човен перемістився на відстань $x = \dfrac{m_1 l}{m_2 + m_1}$ відносно дна, а людина — на відстань $\Delta x = l - x = \dfrac{m_2 l}{m_2 + m_1}$ відносно дна.

Обчислення:

$$\Delta x = \frac{280\ \text{кг} \cdot 5\ \text{м}}{350\ \text{кг}} = 4\ \text{м}.$$

Відповідь: 4 м.

ВПРАВА 16

1. Рух матеріальної точки описується рівнянням $x = 5 - 8t + 4t^2$. Вважаючи, що маса точки дорівнює 2 кг, визначте імпульс через 2 с і через 4 с після початку відліку часу.
2. М'яч масою 100 г, що летів зі швидкістю 20 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, ударився об горизонтальну площину. Кут падіння (кут між напрямком швидкості й перпендикуляром до площини) дорівнює 60°. Визначте зміну імпульсу, якщо удар абсолютно пружний, а кут відбивання дорівнює кутові падіння.
3. Два непружні тіла масою 2 і 6 кг рухаються назустріч одне одному зі швидкістю 2 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ кожне. З якою швидкістю і в який бік рухатимуться ці тіла після удару?
4. На вагонетку масою 800 кг, яка котиться по горизонтальній колії зі швидкістю 0,2 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, насипали зверху 200 кг щебеню. На скільки при цьому зменшилася швидкість вагонетки?
5. Із човна масою 200 кг, який рухається зі швидкістю 1 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, стрибає дитина, що має масу 50 кг, у горизонтальному напрямку зі швидкістю 7 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Яка швидкість човна після стрибка дитини, якщо вона стрибає: а) з корми в бік, протилежний рухові човна; б) з носа човна в напрямку його руху?
6. Кулька масою 20 г падає на горизонтальну поверхню з висоти 2,5 м і потім підстрибує на висоту 60 см. Яка за величиною зміна вектора імпульсу кульки під час удару?
7. М'яч рухається зі швидкістю v назустріч стінці, яка сама рухається зі швидкістю u. Якою буде швидкість м'яча після пружного удару?
8. Снаряд, що вилетів з гармати, розірвався у верхній точці траєкторії на висоті 1960 м на два однакових уламки. Швидкість снаряда перед вибухом — 100 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Один з улам-

ків полетів горизонтально у зворотному напрямку з більшою у два рази швидкістю. На якій відстані будуть уламки один від одного в момент падіння на землю?

9. Два човни рухаються за інерцією у стоячій воді назустріч один одному з однаковими швидкостями — 0,6 $\frac{м}{с}$. Коли човни порівнялись, то з першого на другий переклали вантаж масою 60 кг. Після цього другий човен продовжував рухатись у тому самому напрямку, але зі швидкістю 0,4 $\frac{м}{с}$. Визначте масу другого човна. Опором води знехтуйте.

§ 17 Механічна робота. Потужність

Робота сили. Якщо на тіло діє постійна сила $\vec{F}$ і тіло здійснює в напрямку дії сили переміщення $\vec{s}$, то кажуть, що сила виконує *роботу*.

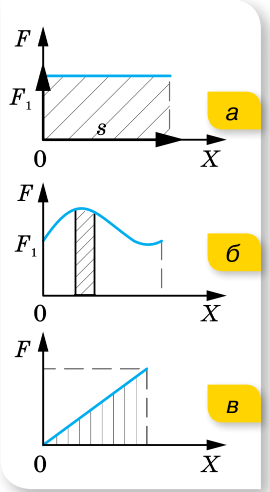
Механічною роботою, або **роботою сили** A, називають фізичну величину, що характеризує дію сили протягом певного переміщення і яка визначається скалярним добутком сили $\vec{F}$ і переміщення $\vec{s}$: $A = (\vec{F} \cdot \vec{s})$.

Якщо на тіло діє постійна сила під кутом до переміщення, тоді роботу виконує тільки складова сили, напрямлена уздовж переміщення і $A = Fs \cos \alpha$, де α — кут між векторами сили F і переміщення s.

Робота — величина скалярна. Одиниця роботи — джоуль: 1 Дж = 1 Н · м.

Графічний метод обчислення роботи сили. Нехай на тіло діє постійна за величиною і напрямком сила, під дією якої воно переміщується на відстань s. Тоді, відклавши у вибраному масштабі по осі ординат значення сили F, а по осі абсцис — переміщення, з'ясовуємо, що робота у вибраному масштабі дорівнює площі прямокутника, обмеженого віссю абсцис і графіком сили (мал. 96, *а*).

Якщо сила, що діє на тіло, змінюється, то для обчислення роботи цієї сили переміщення розбивають на елементарні ділянки, у межах яких силу можна вважати постійною величиною. Визначивши роботу на кожному елементарному переміщенні (мал. 96, *б*) й обчисливши алгебраїчну суму цих робіт, отримаємо значення повної роботи змінної сили, яка дорівнює площі фігури, обмеженої віссю абсцис і графіком сили (мал. 96, *б*).



Мал. 96. Графічний метод визначення роботи

У випадку, коли сила змінюється в будь-який момент часу на одну й ту саму величину, тобто сила пропорційна переміщенню, $F = ks$ (наприклад, сила пружності), то значення роботи чисельно дорівнює площі трикутника, утвореного віссю абсцис і графіком сили (мал. 96, *в*; с. 97), тобто $A = \frac{F}{2}s$.

Потужність. Швидкість виконання роботи характеризується такою величиною, як *потужність*.

Потужність N — скалярна фізична величина, яка характеризує швидкість перетворення енергії з одного виду в інший (іншими словами — швидкість виконання роботи). Дорівнює роботі A, виконаній за одиницю часу t:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{\Delta E}{t}.$$

Одиницею потужності є ват: $1\ \text{Вт} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$.

Розглянута формула описує середню потужність. Якщо зменшувати інтервал часу, протягом якого виконується робота, можна визначити *миттєву потужність*.

Миттєва потужність дорівнює відношенню роботи до інтервалу часу Δt, протягом якого вона виконується, за умови, що $\Delta t \to 0$, $N = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$.

Перетворимо останній вираз. Оскільки $\Delta A = F_x \Delta x$,

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_x \Delta x}{\Delta t} = F_x \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x$, отже, миттєва потужність визначається добутком проекції сили, що діє на тіло, і швидкістю, напрямленою в напрямку переміщення: $N = v_x F_x$.

Ця закономірність практично виявляє себе під час руху транспортних засобів. За рівномірного руху транспорту двигун виконує роботу проти сил опору. І від того, наскільки великою є ця сила, залежить швидкість руху. Дійсно, $v = \frac{N}{F}$, тобто швидкість транспортного засобу під час рівномірного руху пропорційна потужності й обернено пропорційна силі опору.

Для довільного змінного руху тіла можна також визначити середню потужність $N_{сер}$ через середню швидкість $v_{сер}$:

$$N_{сер} = F v_{сер}.$$

Коефіцієнт корисної дії. Кожний вид енергії може перетворюватися повністю в довільний інший вид енергії. Однак у всіх реальних енергетичних машинах, крім перетворень енергії, для яких використовуються ці машини, відбуваються перетворення енергії, які називають втратами енергії.

Що менше втрачається енергії, то досконалішою є машина. Ступінь досконалості машини характеризується *коефіцієнтом корисної дії* (*ККД*).

ККД η визначається відношенням корисної роботи до затраченої (або відношенням відповідних потужностей):

$$\eta = \frac{A_{\text{кор}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{N_{\text{кор}}}{N_{\text{затр}}}.$$

У СІ η визначається в частках одиниці, а поза СІ — у відсотках.

Коефіцієнт корисної дії завжди менший від одиниці. Знаючи ККД певного двигуна чи машини, можна обчислити виконану корисну роботу: $A_{\text{кор}} = \eta A_{\text{затр}}$, або корисну потужність: $N_{\text{кор}} = \eta N_{\text{затр}}$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Яку роботу називають механічною? Яка формула виражає її зміст? У яких випадках про силу можна сказати, що вона виконує роботу?
2. Коли сила виконує додатну роботу, а коли — від'ємну? За якої умови сила, прикладена до рухомого тіла, не виконує роботу?
3. Автомобіль рухається по рівній дорозі. Чи здійснює роботу сила тяжіння, що діє на автомобіль?
4. Тіло кинуто вертикально вгору. Укажіть, додатну чи від'ємну роботу виконує сила тяжіння: а) під час підняття тіла; б) під час його падіння.
5. Від чого залежить робота сили тертя? Чи може робота сили тертя дорівнювати нулю?
6. Що називається потужністю? Як її обчислити?
7. Що показує коефіцієнт корисної дії?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Двоє людей пересувають рівномірно по підлозі ящик, при цьому одна людина штовхає його із силою 300 Н під кутом 30° до підлоги, а інша — тягне його з такою самою силою за мотузку, що утворює з підлогою кут 45°. Яку роботу виконали люди, рівномірно пересунувши ящик на відстань 20 м?

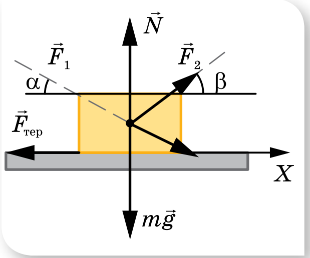
Дано:
$\alpha = 30°$
$F_1 = F_2 = 300$ Н
$\alpha = 45°$
$s = 20$ м

A — ?

Розв'язання:

Спрямуємо вісь X у напрямку руху (мал. 97) і вкажемо сили, що діють на ящик.

За другим законом Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, оскільки рух рівномірний.



Мал. 97

У проекції на вісь X: $F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta - F_{\text{тер}} = 0$.

Корисна робота затрачається на подолання сили тертя, тому $A = (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta) \cdot s$.

$$A = (300\,\text{Н} \cdot \cos 30^\circ + 300\,\text{Н} \cdot \cos 45^\circ) \cdot 20\,\text{м} = 9{,}4\ \text{кДж}.$$

Відповідь: 9,4 кДж.

ВПРАВА 18

1. Сплавник, пересуваючи багром пліт, прикладає до багра силу 200 Н. Яку роботу виконує сплавник, переміщаючи пліт на відстань 10 м, якщо кут між напрямком сили і напрямком переміщення становить 45°?
2. На яку відстань було переміщено санки, якщо до мотузки санок силу 23 Н під кутом 30° до напрямку руху й виконано роботу 1,2 кДж?
3. Яку роботу треба виконати, щоб по похилій площині з кутом нахилу 30° підняти вантаж масою 400 кг на висоту 2 м з коефіцієнтом тертя 0,3? Який при цьому ККД?
4. Мотоблок під час оранки, рухаючись зі швидкістю 4 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, розвиває корисну потужність 40 кВт. Яку силу опору долає мотоблок?
5. По горизонтальній дорозі починають везти санки з вантажем за мотузку, що утворює з горизонтом кут 30°, прикладаючи зусилля 450 Н. Визначте роботу за 10 с руху, якщо відомо, що за 20 с руху санки набувають швидкості 6 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
6. Віконну штору масою 1 кг завдовжки 2 м, відкриваючи вікно, скручують у тонкий валик біля верхньої частини вікна. Яку при цьому виконують роботу?
7. Із шахти завглибшки 200 м піднімають тягар масою 500 кг на канаті, кожен метр якого має масу 1,5 кг. Яка робота виконується за час піднімання тягаря? Який ККД установки?
8. Вантаж масою m піднімають на висоту h. Чи залежить при цьому робота, яку виконує піднімальний механізм, від швидкості піднімання?

§ 18 Механічна енергія. Закон збереження енергії

Механічна енергія. Пригадаємо, що нам відомо про механічну енергію з курсу 9 класу.

Якщо тіло (або система тіл) може виконати механічну роботу, то кажуть, що воно (вона) має енергію.

Тіло виконує роботу тоді, коли переходить з одного стану в інший: піднятий над землею м’яч падає, стиснута пружина розпрямляється, рухома кулька зупиняється. Енергія тіла при цьому змінюється (зменшується), а виконана тілом механічна робота дорівнює зміні його механічної енергії.

Енергію позначають символом E або W. Одиницею енергії в СІ є джоуль: 1 Дж.

Розрізняють два види механічної енергії — потенціальну і кінетичну.

Енергію, зумовлену взаємодією тіл або частин одного тіла, називають ***потенціальною енергією***. Потенціальну енергію мають пружно деформоване тіло і тіло, підняте над поверхнею Землі.

Потенціальну енергію піднятого над поверхнею Землі тіла можна обчислити за формулою: $E_п = mgh$, де m — маса тіла; g — прискорення вільного падіння; h — висота, на якій розташоване тіло, відносно нульового рівня.

Потенціальну енергію пружно деформованого тіла обчислюють за формулою: $E_п = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$, де k є коефіцієнтом жорсткості пружини, Δx — абсолютне видовження (стиснення) пружини.

Енергію, яка зумовлена рухом тіла, називають ***кінетичною енергією*** $E_к$ і обчислюють за формулою: $E_к = \frac{mv^2}{2}$, де m — маса тіла, v — швидкість руху тіла.

Закон збереження механічної енергії. Суму кінетичної та потенціальної енергій тіла називають ***повною механічною енергією*** тіла: $E = E_к + E_п$.

Кінетична і потенціальна енергії тіл можуть змінюватися з часом, але в замкненій системі їх сума залишається сталою. ***Закон збереження і перетворення повної механічної енергії*** формулюють так:

повна механічна енергія замкненої системи тіл, які взаємодіють силами тяжіння або (та) пружності, залишається незмінною за будь-яких взаємодій тіл між собою.

Формулюючи цей закон, завжди підкреслюють, *що він справджується лише тоді, коли тіла взаємодіють силами пружності або* (*та*) *тяжіння без дії сторонніх сил.*

Якщо в системі *діють сили тертя* (опір повітря, внутрішнє тертя в речовині кульки і плити), *повна механічна енергія не залишається сталою.*

Робота сили тертя завжди від'ємна, тому повна механічна енергія тіла, на яке діє лише ця сила, поступово зменшується. Робота сил тертя завжди спричинює нагрівання взаємодіючих тіл, тобто збільшення їх внутрішньої енергії.

Якщо система *незамкнена* і в ній діють сили тертя (опору), то зміна механічної енергії системи дорівнює сумі робіт зовнішніх сил і внутрішніх сил тертя, тобто $A + A_{оп} = \Delta E$.

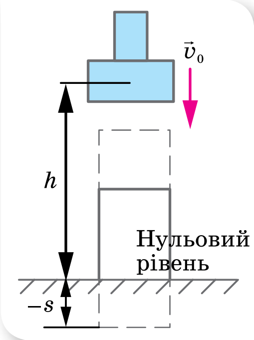
Закон збереження і перетворення енергії дає змогу розкрити фізичний зміст поняття роботи. Робота сил тяжіння або сил пружності, з одного боку, дорівнює збільшенню кінетичної енергії, а з другого — зменшенню потенціальної енергії тіл. Таким чином, робота дорівнює зміні енергії.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Виведіть формулу для розрахунку роботи, що виконується у випадку зміни швидкості тіла.
2. Як зміниться кінетична енергія тіла, якщо сила, прикладена до тіла, виконує: додатну роботу; від'ємну роботу?
3. Тіло кинуто вертикально вгору. Вкажіть, додатну чи від'ємну роботу виконує сила тяжіння: а) під час піднімання тіла; б) під час його падіння.
4. Чи залежить робота сили тяжіння від траєкторії руху тіла в полі тяжіння Землі? Чому дорівнює робота сили тяжіння по замкненій траєкторії?
5. Чому дорівнює потенціальна енергія тіла, що перебуває на деякій висоті над Землею? Як змінюється потенціальна енергія тіла під час його руху вгору?
6. Чому під час розрахунків роботи сили пружності використовують її середнє значення?
7. Що спільного у виразах для роботи сили пружності та роботи сили тяжіння? Що спільного в потенціальних енергіях тіла, на яке діє сила тяжіння, і тіла, на яке діє сила пружності?
8. Що таке повна механічна енергія? Сформулюйте й запишіть закон збереження повної механічної енергії.
9. У яких системах виконується закон збереження повної механічної енергії в загальному вигляді?
10. Як впливає на енергію системи тіл дія сили тертя?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Молотом, який падає з висоти $h = 12$ м, забивають палю. Від удару паля заглиблюється в землю на $s = 2$ см. Визначте середню силу удару F_c і його тривалість τ, якщо маса молота $m = 5 \cdot 10^2$ кг, маса палі значно менша від маси молота.



Мал. 98

Дано:
$h = 12$ м
$s = 2$ см
$m = 5 \cdot 10^2$ кг

F_c — ?
τ — ?

Розв'язання:

Робота, яка витрачається на подолання сил опору ґрунту, дорівнює зміні потенціальної енергії молота (мал. 98): $F_c s = mg(h + s)$.

Звідси $F_c = mg\left(1 + \frac{h}{s}\right)$. Підставляючи числові значення, отримуємо: $F_c \approx 3 \cdot 10^5$ Н.

Тривалість удару визначаємо із співвідношення:

$$\tau = \frac{s}{v_c}.$$

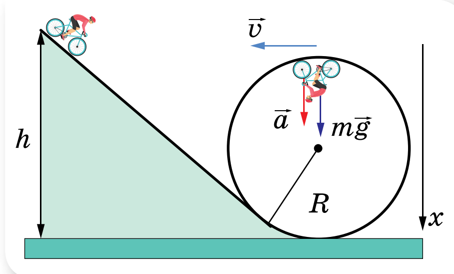
Вважаємо рух палі у ґрунті рівносповільненим, тому $v_c = \frac{v_0 + v}{2}$.

За законом збереження енергії початкова швидкість палі дорівнює швидкості молота на початку удару $v_0 = \sqrt{2gh}$, у кінці руху палі $v = 0$.

Таким чином, $\tau = \frac{2s}{\sqrt{2gh}}$, $\tau \approx 8 \cdot 10^{-3}$ с.

Відповідь: $3 \cdot 10^5$ Н; $8 \cdot 10^{-3}$ с.

Задача 2. З якої мінімальної висоти h має спускатись велосипедист, щоб проїхати за інерцією (без тертя) по внутрішній стороні велотреку у вигляді «мертвої петлі» радіусом R без відриву у верхній точці (мал. 99)?



Мал. 99

Розв'язання:

Виберемо нульовий рівень енергії. Пов'яжемо його з підніжжям гірки. Щодо цього рівня, тіло на висоті h має потенціальну енергію $E_{п1} = mgh$. У міру руху потенціальна енергія тіла зменшується й перетворюється в кінетичну енергію.

Біля підніжжя гірки потенціальна енергія тіла дорівнює нулю, а кінетична енергія максимальна й дорівнює $E_{к1} = \dfrac{mv_{max}^2}{2}$.

Далі тіло, піднімаючись угору, рухається по колу. У верхній точці кола воно має швидкість v, отже, має кінетичну енергію $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$. Ця енергія менша від кінетичної енергії, яку тіло мало біля підніжжя гірки, оскільки воно піднялося на висоту, яка дорівнює $2R$, і набуло потенціальної енергії $E_п = mg2R$.

Якщо втрат енергії немає, то сума потенціальної та кінетичної енергії в будь-якій точці траєкторії є величиною постійною.

Описуючи рух з точки зору перетворення енергії, проміжними етапами руху ми можемо не цікавитись. Обираємо тільки два стани тіла — у вихідній точці та верхній точці кола. Згідно із законом збереження енергії $E_{п1} = E_к + E_п$.

$$\text{Або: } mgh = \frac{mv^2}{2} + mg2R. \text{ Звідки } h = \frac{v^2}{2g} + 2R.$$

У верхній точці «мертвої петлі» на велосипедиста діє тільки сила тяжіння, оскільки сила тиску коліс на поверхню компенсується силою реакції опори.

Направимо вісь X вертикально вниз і напишемо рівняння другого закону Ньютона у векторній формі: $m\vec{a}_д = m\vec{g}$. Звідси: $a_д = g = \dfrac{v^2}{R}$.

Виразимо $v^2 = Rg$. Підставляємо: $h = \dfrac{Rg}{2g} + 2R = 2,5R$.

Відповідь: $2,5\,R$.

ВПРАВА 19

1. Визначте кінетичну енергію штучного супутника Землі масою 1300 кг, який рухається по коловій орбіті на висоті 100 км над поверхнею Землі.

2. Шофер вимкнув двигун автомобіля на швидкості 72 $\frac{км}{год}$. Здолавши після цього відстань 34 м, автомобіль зупинився. Якою була кінетична енергія автомобіля в момент вимкнення двигуна, якщо сила тертя коліс об дорогу 5880 Н? Яка маса автомобіля?

3. Яку роботу виконує сила тертя, коли автомобіль масою 1000 кг, що мав швидкість 90 $\frac{км}{год}$, гальмує до швидкості 54 $\frac{км}{год}$?

4. Потяг на дитячій залізниці, маса якого 15 т, рушає з місця з прискоренням 1,4 $\frac{м}{с^2}$. Визначте роботу сили тяги та роботу сили опору на перших 10 м шляху, якщо коефіцієнт опору дорівнює 0,02. Якої кінетичної енергії набув цей потяг?

5. З якою швидкістю рухався потяг масою 1500 т, якщо під дією гальмівної сили в 150 кН він пройшов з моменту початку гальмування до зупинки шлях 500 м?

6. Баштовий кран піднімає в горизонтальному положенні сталеву балку завдовжки 5 м і перерізом 100 см^2 на висоту 12 м. Яку корисну роботу виконує кран?

7. Яку роботу виконує людина, піднімаючи тіло масою 2 кг на висоту 1 м з прискоренням 3 $\frac{м}{с^2}$?

8. Автомобіль масою 10 т рухається з вимкненим двигуном по схилу, який утворює з горизонтом кут 4°. Обчисліть роботу сили тяжіння на шляху 100 м.

9. На балкон, розташований на висоті 6 м, кинули з поверхні землі предмет масою 200 г. Під час польоту предмет досяг максимальної висоти 8 м від поверхні землі. Визначте роботу сили тяжіння під час польоту предмета вгору, вниз і на всьому шляху, а також результуючу зміну потенціальної енергії.

10. Щоб стиснути пружину дитячого пружинного пістолета на 3 см, приклали силу 20 Н. Визначте потенціальну енергію стиснутої пружини.

11. Щоб розтягнути пружину на 4 мм, треба виконати роботу 0,02 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю саму пружину на 4 см?

12. Потужність гідроелектростанції становить 73,5 МВт, ККД — 0,75. Визначте, на який рівень гребля піднімає воду, якщо витрата води становить 10^3 $\frac{м^3}{с}$.

13. Двигун насоса, розвиваючи потужність 25 кВт, піднімає 100 м^3 нафти на висоту 6 м за 8 хв. Визначте ККД установки.

14. Куля масою 3 кг падає з висоти 3 м на пружину й стискає її. Визначте максимальний стиск пружини, якщо її жорсткість — 700 $\frac{Н}{м}$. Масою пружини знехтуйте.

15. Кулька масою 10 г, що вилітає горизонтально з пружинного пістолета, потрапляє в центр підвішеної на нитці пластилінової кулі масою 40 г і застряє в ній. Жорсткість пружини пістолета — 400 $\frac{Н}{м}$, стиск пружини перед пострілом — 5 см. На яку висоту піднімуться кульки?

16. Колода масою 10 кг скочується з гірки заввишки 5 м і зупиняється на горизонтальній ділянці шляху. Яку роботу необхідно виконати, щоб закотити колоду тим самим шляхом на гірку?

17. З гори, висота якої $h = 2$ м й основа $d = 5$ м, з'їжджають сани, які потім зупиняються, коли пройдуть по горизонталі шлях $l = 35$ м від підніжжя гори. Визначте коефіцієнт тертя.

18. Тіло кидають з поверхні Землі вертикально вгору зі швидкістю 20 $\frac{м}{с}$. Визначте максимальну висоту підйому тіла та висоту, на якій його кінетична й потенціальна енергії однакові. Опором повітря знехтуйте.

19. Тіло вільно ковзає з вершини нерухомої похилої площини під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Визначте його швидкість у кінці похилої площини та час руху, якщо висота похилої площини 10 м, а коефіцієнт тертя — 0,05.

20. Угору по похилій площині починає рухатися тіло з початковою швидкістю 10 $\frac{м}{с}$. На якій відстані від нижнього краю похилої площини кінетична енергія тіла зменшиться у 2 рази? Коефіцієнт тертя між тілом і площиною 0,6. Кут нахилу площини до горизонту 30°.

21. Ковзаняр масою 70 кг, що стоїть у ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямку камінь масою 3 кг зі швидкістю 8 $\frac{м}{с}$. Визначте, на яку відстань від'їде при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів об лід — 0,02.

22. Сталева кулька масою 20 г падає з висоти 1 м на сталеву плиту й відскакує від неї на висоту 81 см. Визначте: а) імпульс сили, яка діє на плиту під час удару; б) кількість теплоти, яка при цьому виділяється.

23. Людина стоїть на нерухомому візку й кидає горизонтально камінь масою 8 кг зі швидкістю 5 $\frac{м}{с}$ відносно Землі. Визначте, яку роботу при цьому виконує людина, якщо маса візка разом з людиною — 160 кг. Проаналізуйте залежність роботи від маси. Тертям знехтуйте.

24. Куля, що летіла горизонтально зі швидкістю 40 $\frac{м}{с}$, потрапляє у брусок, підвішений на нитці завдовжки 4 м, і застрягає в ньому. Визначте кут, на який відхилиться брусок, якщо маса кулі — 20 г, а бруска — 5 кг.

25. Два вантажі масами 10 і 15 кг підвішені на нитках завдовжки 2 м так, що вони дотикаються один до одного. Менший вантаж відхилили на кут 60° і відпустили. На яку висоту піднімуться обидва вантажі після удару? Удар вважайте непружним. Яка кількість теплоти при цьому виділиться?

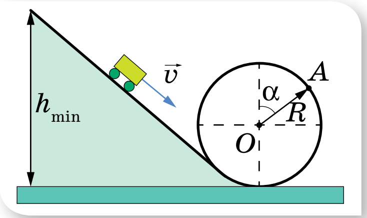
26. Свинцева куля масою 500 г, що рухається зі швидкістю 10 $\frac{см}{с}$, вдаряється в нерухому кулю з воску масою 200 г, після чого обидві кулі рухаються разом. Визначте кінетичну енергію куль після удару.

27. Дві кулі підвішені на паралельних нитках однакової довжини так, що вони дотикаються одна до одної. Маси куль — 0,2 кг і 100 г. Першу кулю відхиляють так, що її центр ваги піднімається на висоту 4,5 см, і відпускають. На яку висоту піднімуться кулі після удару, якщо удар: а) пружний; б) непружний?

28. Між двома тілами масами 6,5 та 2,5 кг стиснено пружину. Коли пружина розпрямилась, перше тіло пройшло в горизонтальному напрямку до повної зупинки шлях 1,2 м. Визначте кінетичну енергію другого тіла відразу після випрямлення пружини, нехтуючи масою пружини і вважаючи, що коефіцієнт тертя під час руху тіл однаковий і дорівнює 0,2, а втрат енергії, коли пружина випрямляється, немає.

29. Куля, що летіла горизонтально зі швидкістю 100 $\frac{м}{с}$, ударяється об нерухомий клин, що лежить на горизонтальній поверхні, і пружно відлітає вертикально вгору. Початкова швидкість клина після удару — 2 $\frac{м}{с}$. Визначте, на яку висоту підніметься куля. Опором повітря знехтуйте.

30. Невеликий візочок масою m = 1 кг описує у вертикальній площині «мертву петлю», скочуючись із найменшої необхідної для цього висоти (мал. 100). Визначте, з якою силою F візок тисне на рейки в точці A петлі, радіус якої утворює кут $\alpha = 60°$ з вертикаллю. Тертя не враховуйте.



Мал. 100

§ 19 Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Момент імпульсу. Підставимо в основне рівняння динаміки обертального руху матеріальної точки $M = J\varepsilon$ вираз для кутового прискорення $\varepsilon = \dfrac{\omega - \omega_0}{\Delta t}$. Маємо: $M = \dfrac{J\omega - J\omega_0}{\Delta t}$ (1), або $M\Delta t = J\omega - J\omega_0$.

Ураховуючи, що для матеріальної точки момент інерції $J = mr^2$, а кутова швидкість $\omega = \dfrac{v}{r}$, отримаємо: $M\Delta t = mvr - mv_0 r$. Величину mvr називають *моментом імпульсу* матеріальної точки.

Момент імпульсу L — це характеристика обертального руху матеріальної точки (чи системи матеріальних точок), що визначається відстанню точки від осі обертання, величиною та напрямком імпульсу відносно осі обертання: $L = L\omega = mvr$.

Момент імпульсу є векторною величиною. Напрямок вектора моменту імпульсу збігається з напрямком вектора кутової швидкості.

Таким чином, формулу (1) можна записати як $\vec{M} = \dfrac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$, тобто момент сили дорівнює зміні моменту імпульсу тіла за одиницю часу.

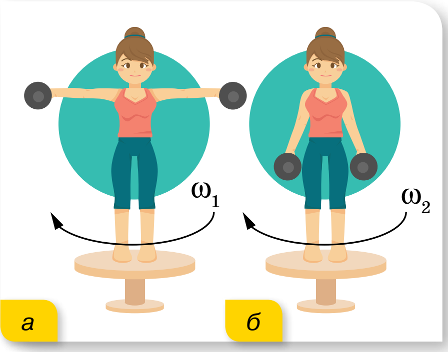
Закон збереження моменту імпульсу. Зміна моменту імпульсу тіла відбувається лише в результаті дії зовнішніх сил і залежить від моменту зовнішніх сил (обертального моменту). Якщо на тіло не діють зовнішні сили або їх рівнодійна не створює моменту відносно осі обертання $M = 0$, то зміна моменту імпульсу також дорівнює нулю: $\Delta J\omega = M\Delta t = 0$. Якщо зміна величини $\Delta J\omega$ дорівнює нулю, сама величина залишається незмінною: $J\omega = \text{const}$. Отже, ми познайомилися ще з одним законом збереження — ***законом збереження моменту імпульсу***:

якщо на систему не діють моменти зовнішніх сил (замкнена система), то повний момент імпульсу системи тіл залишається постійним за величиною та напрямком: $\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const}$.

Збільшення моменту імпульсу одного з тіл має бути скомпенсованим відповідним зменшенням моменту імпульсу інших тіл системи.

Якщо розглядати окремо взяте тіло, яке не зазнає дії зовнішніх сил і не є твердим, тобто може змінювати свій момент інерції, то для такого тіла також виконується умова $J\omega = \text{const}$. При цьому зміна моменту інерції (наприклад, збільшення) супроводжується відповідною зміною кутової швидкості (зменшенням). Продемонструємо це на прикладі.

Дівчинка стоїть на круглій платформі, яка може обертатися навколо нерухомої осі майже без тертя (мал. 101). Змінюючи положення рук (краще з гантелями), вона змінюватиме свій момент інерції, у результаті чого зміниться кутова швидкість обертання (мал. 101, *б*).



Мал. 101. Зміна кутової швидкості обертання внаслідок зміни моменту інерції

Цю властивість на практиці використовують балерини, акробати, танцівники, фігуристи під час виконання стрибків, переворотів тощо.

Кінетична енергія тіла, що обертається. Лінійна швидкість v матеріальної точки масою m, що обертається навколо осі O, може бути виражена через кутову швидкість ω й радіус обертання r: $v = \omega r$.

Вираз для кінетичної енергії в цьому разі набуває вигляду $E_к = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$. Добуток mr^2 є моментом інерції цієї точки відносно осі O, $J = mr^2$, отже, для обертального руху $E_к = \frac{J\omega^2}{2}$. Цей вираз можна застосовувати для всього тіла в цілому.

Отже, для загального випадку руху твердого тіла, що одночасно рухається поступально й обертається, наприклад котиться, *повна кінетична енергія* складається з кінетичної енергії поступального руху центра мас та енергії обертального руху відносно осі, що проходить через центр мас: $E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що називають моментом імпульсу?
2. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
3. За якої умови зміна моменту інерції зумовлює зміну кутової швидкості? Як практично використовується прийом зміни моменту інерції?
4. Виведіть формулу кінетичної енергії тіла, що обертається.
5. Якою є кінетична енергія тіла, що котиться?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Горизонтальна платформа масою M і радіусом R обертається з кутовою швидкістю ω. На краю платформи стоїть людина масою m. З якою кутовою швидкістю ω_1 обертатиметься платформа, якщо людина перейде з краю платформи до її центра? Людину можна вважати матеріальною точкою, платформу — однорідним диском.

Дано:
M, R, ω, m

ω_1 — ?

Розв'язання:

Початкова сума моментів імпульсів людини та платформи дорівнює $\frac{MR^2}{2}\omega + mR^2\omega$.

Якщо людина перейде до центра платформи, то момент імпульсу дорівнюватиме $\frac{MR^2}{2}\omega_1$.

За законом збереження моменту імпульсу $\frac{MR^2}{2}\omega + mR^2\omega = \frac{MR^2}{2}\omega_1$, звідки $\omega_1 = \frac{M + 2m}{M}\omega$.

Відповідь: $\omega_1 = \frac{M + 2m}{M}\omega$.

Задача 2. Горизонтальна платформа масою 80 кг і радіусом 1 м обертається навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. У центрі платформи стоїть людина і тримає в розставлених руках гантелі. Платформа обертається з кутовою швидкістю $2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. З якою кутовою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина опустить руки і зменшить при цьому свій момент інерції від 3 до 1 кг · м²? Платформу вважайте круглим однорідним диском.

Дано:
$m = 80$ кг
$R = 1$ м
$\omega_1 = 2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$
$J_1 = 3$ кг · м²
$J_2 = 1$ кг · м²

ω_2 — ?

Розв'язання:

За законом збереження моменту імпульсу

$$\frac{MR^2}{2}\omega_1 + J_1\omega_1 = \frac{MR^2}{2}\omega_2 + J_2\omega_2 .$$

Звідки $\omega_2 = \frac{MR^2 + 2J_1}{MR^2 + 2J_2}\omega_1$.

Обчислення:

$$\omega_2 = \frac{80\ \text{кг}\cdot 1\ \text{м}^2 + 2\cdot 3\ \text{кг}\cdot\text{м}^2}{80\ \text{кг}\cdot 1\ \text{м}^2 + 2\cdot 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2}\cdot 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}} = 2{,}1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $2{,}1\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Задача 3. Маховик масою m та радіусом R обертається навколо осі, що проходить через його центр. Кутова швидкість обертання маховика — ω. Щоб зупинити маховик, до його обода притискають гальмівну колодку, яка діє на нього із силою $F_{\text{тер}}$. Скільки обертів зробить маховик до повної зупинки? Вважайте, що маса маховика розподілена по ободу.

Дано:
$m, R, \omega, F_{\text{тер}}$

n — ?

Розв'язання:

Розв'язуючи задачу, вважатимемо обертання маховика подібним до обертання тонкого однорідного обруча радіусом R і масою m, що обертається з кутовою швидкістю ω.

Кінетична енергія такого обруча: $E_к = \frac{J\omega^2}{2}$, де $J = mR^2$.

Маховик зупиниться за умови, що вся його кінетична енергія витратиться на роботу з подолання сили тертя $F_{тер}$, що виникає між гальмівною колодкою та ободом, $E_к = F_{тер}s$, де s — гальмівний шлях, що дорівнює $2\pi R \cdot n$. Отже, $\frac{mR^2\omega^2}{2} = F_{тер} \cdot 2\pi Rn$, звідки $n = \frac{m\omega^2 R}{4\pi F_{тер}}$.

Відповідь: $n = \frac{m\omega^2 R}{4\pi F_{тер}}$.

Задача 4. На барабан масою $m = 9$ кг намотано шнур, до кінця якого прив'язано вантаж масою $m_0 = 2$ кг. Визначте прискорення вантажу. Барабан вважайте однорідним циліндром. Тертям знехтуйте.

Дано:	**Розв'язання:**
$m = 9$ кг $m_0 = 2$ кг	Під час опускання вантажу його потенціальна енергія зменшується й переходить у кінетичну енергію поступального руху вантажу та кінетичну енергію обертання барабана: $m_0gh = \frac{m_0v^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$.
a — ?	

Оскільки для циліндра момент інерції $J = \frac{mR^2}{2}$ і $\omega = \frac{v}{R}$, можна записати:

$$m_0gh = \frac{m_0v^2}{2} + \frac{mv^2}{2 \cdot 2} = \frac{v^2}{2}\left(m_0 + \frac{m}{2}\right).$$

Рух рівноприскорений без початкової швидкості, отже, $h = \frac{at^2}{2}$, $v = at$.

Підставляючи, отримуємо: $m_0g\frac{at^2}{2} = \frac{a^2t^2}{2}\left(m_0 + \frac{m}{2}\right)$, звідки $a = \frac{2m_0g}{2m_0 + m}$.

Обчислення $a = \frac{2 \cdot 2\ \text{кг} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2 \cdot 2\ \text{кг} + 9\ \text{кг}} = 3\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Відповідь: $3\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

ВПРАВА 20

1. Спортсмен стоїть у центрі платформи, що обертається зі швидкістю $1\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$. Спочатку спортсмен тримав гантелі на витягнутих руках на відстані 60 см від осі обертання. Як зміниться швидкість обертання платформи, якщо спортсмен зігне руки й гантелі опиняться на відстані 10 см від осі обертання?
2. Людина, що стоїть у центрі платформи, тримає в руках стержень завдовжки 2,4 м і масою 8 кг у вертикальному положенні (уздовж осі обертання платформи). Платформа з людиною обертається із частотою 1 $с^{-1}$. З якою частотою буде обертатися платформа, якщо людина поверне стержень у горизонтальне положення? Сумарний момент інерції людини і платформи — 6 кг · $м^2$.

3. На краю горизонтальної платформи, що має форму диска радіусом $R = 2$ м, стоїть людина масою: $m_1 = 80$ кг. Маса платформи: $m_2 = 240$ кг. Платформа може обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. З якою кутовою швидкістю буде обертатися платформа, якщо людина буде йти вздовж її краю зі швидкість $v = 2\ \frac{м}{с}$ відносно платформи?
4. Платформа у формі диска може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою: $m_1 = 60$ кг. На який кут повернеться платформа, якщо людина піде краєм платформи і, обійшовши її по колу, повернеться в початкове положення? Маса платформи: $m_2 = 240$ кг. Момент інерції людини розраховуйте як для матеріальної точки.
5. Доведіть, що людина, яка стоїть на ідеально гладкій горизонтальній поверхні, зможе провернутись навколо вертикальної осі, якщо почне обертати руку над головою.
6. Диск масою 2 кг котиться без тертя по горизонтальній поверхні зі швидкістю $4\ \frac{м}{с}$. Визначте кінетичну енергію диска.
7. Мідна куля радіусом 10 см обертається із частотою $2\ \frac{об}{с}$ навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу слід виконати, щоб збільшити кутову швидкість обертання кулі вдвічі?
8. Космічний корабель обертався в міжзоряному просторі з кутовою швидкістю ω. По команді із Землі на ньому відкрились антени, внаслідок чого момент інерції корабля збільшився у 2 рази. Як змінилися кутова швидкість і кінетична енергія обертального руху корабля?
9. По похилій площині, висота якої 1 м, першого разу зісковзує без тертя вантаж, наступного разу — скочується без тертя обруч. Маси вантажу та обруча однакові й дорівнюють 1 кг. Радіус обруча — 10 см. Маса обруча розподілена по ободу. Яку швидкість поступального руху матимуть вантаж та обруч після спуску з похилої площини?
10. На обід шківа, насадженого на спільну вісь із маховим колесом, намотано нитку, до кінця якої підвішений вантаж масою 1 кг. На яку відстань має опуститись вантаж, щоб махове колесо зі шківом отримало кутову швидкість $6\ \frac{рад}{с}$? Момент інерції колеса зі шківом — 0,39 кг · м^2, радіус шківа — 0,1 м.
11. Тіло кинули зі швидкістю v_0 під кутом до горизонту. Визначте швидкість тіла на висоті $h \le h_{max}$.

§ 20 Механіка рідин і газів

Гідростатика та гідродинаміка. *Гідростатика* вивчає закони рівноваги рідин, які перебувають у стані абсолютного чи відносного спокою та рівноваги тіл, занурених у рідини за умови, коли відсутні переміщення часток рідини одна відносно одної.

Одне з основних завдань гідростатики — вивчення розподілу тиску в рідині. Знаючи розподіл тиску на підставі законів гідростатики, можна розрахувати сили, що діють з боку рідини, яка перебуває в стані спокою, на занурені в неї тіла, наприклад, на стіну греблі, занурений трубопровід, конструкції морських нафто- і газовидобувних платформ тощо. Зокрема, можна вивести умови плавання тіл на поверхні або всередині рідини, а також з'ясувати, за яких умов тіла, які плавають, будуть мати стійкість, що особливо важливо в кораблебудуванні. На законах гідростатики, зокрема на законі Паскаля, ґрунтується робота гідравлічного преса, гідравлічного акумулятора, рідинного манометра, сифона й багатьох інших машин і приладів.

Закон Паскаля: тиск, який діє на рідину або газ, передається ними в усіх напрямках однаково.

Кожний верхній шар рідини своєю вагою тисне на шари, що містяться нижче. Тиск у рідинах називають *гідростатичним*. Гідростатичний тиск рідин залежить від густини рідини й висоти стовпа рідини в посудині: $p = \rho g h$, де ρ — густина рідини, h — висота стовпа рідини.

За цією формулою можна визначити тиск рідини, налитої в посудину будь-якої форми. Крім того, за нею можна обчислити й тиск на стінки посудини, а також тиск усередині рідини, у тому числі й тиск знизу вгору, оскільки він на тій самій глибині однаковий у всіх напрямках.

Закон Архімеда: на тіло, занурене в рідину або газ, діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі рідини або газу в об'ємі цього тіла: $F = \rho g V$, де ρ — густина рідини, у яку повністю занурене тіло об'ємом V.

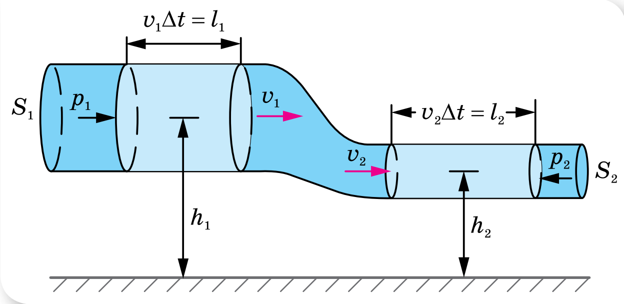
Гідродинаміка вивчає рух нестисливих рідин під дією зовнішніх сил і механічну взаємодію між рідиною й тілами під час їхнього відносного руху.

Рух реальних рідин і газів — складне явище для дослідження математичними методами, тому для його опису застосовують модель — *ідеальну рідину*, яка вважається однорідною нестисливою й нев'язкою. Під час руху ідеальної рідини не відбувається перетворення механічної енергії у внутрішню, отже, для опису її руху можна застосовувати закон збереження механічної енергії.

Рух рідин може бути *ламінарним* (від лат. *laminia* — шар) і *турбулентним* (від лат. *turbulentus* — вихор).

У ламінарній течії шари рідини ніби ковзають один по одному, не змішуючись. Такий рух рідини — стаціонарний. За невеликих швидкостей руху рідини можливий її стаціонарний потік. У турбулентній течії рух рідин нестаціонарний — шари рідини змішуються, утворюючи завихрення.

Розглянемо стаціонарний рух ідеальної рідини по трубі змінного перерізу (мал. 102).



Мал. 102. Рух рідини по трубі змінного перерізу

Протягом інтервалу часу Δt рідина у трубі на ділянці перерізом S_1 змістилася на $l_1 = v_1\Delta t$, а на ділянці перерізом S_2 — на $l_2 = v_2\Delta t$, де v_1, v_2 — швидкість руху рідини на відповідних ділянках труби.

Оскільки рідина у трубі не накопичується і не стискається, то об'єм рідини, що проходить через широку ділянку труби, дорівнює об'єму рідини, що проходить через її вузьку ділянку протягом однакового інтервалу часу Δt: $V_1 = V_2$ — ***умова неперервності течії рідини***.

Об'єм рідини, що проходить через переріз S_1 труби, дорівнює $V_1 = l_1S_1 = v_1\Delta tS_1$, відповідно через переріз S_2: $V_2 = l_2S_2 = v_2\Delta tS_2$. Оскільки $V_1 = V_2$, то $v_1S_1 = v_2S_2$ або $\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1}$.

Швидкість руху однорідної нестисливої та нев'язкої рідини у трубі змінного перерізу обернено пропорційна площі її поперечного перерізу:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Рівняння Бернуллі. Як відомо, нерухома рідина в посудині, згідно із законом Паскаля, передає зовнішній тиск до всіх точок рідини без змін. Якщо рідина тече без тертя по трубі змінного перерізу, то тиск на різних ділянках труби неоднаковий: у вузьких ділянках труби, де швидкість руху рідини є більшою, тиск менший, у широких — навпаки. Пояснимо цей факт.

Переходячи із широкої ділянки труби у вузьку, рідина змінює свою швидкість, тобто рухається з прискоренням. А за другим законом Ньютона тіло набуває прискорення тоді, коли на нього діє сила. Це означає, що на рідину, яка в даний момент міститься у звуженій частині труби, діє з боку рідини в ширшій її частині певна сила, що може виникнути тільки внаслідок різниці тисків у різних перерізах труби. Сила напрямлена в бік вузької частини труби, отже, у вузьких місцях тиск менший, ніж у широких. Ця сила тиску, яка змушує рідину текти по трубі, є силою пружності стиснутої рідини. Говорячи про нестисливість рідини, мають на увазі лише те, що вона не може бути настільки стиснутою, щоб помітно змінився її об'єм. Разом з тим, дуже мале стиснення, яке спричиняє виникнення сил пружності, неминуче відбувається. Ці сили й створюють тиск рідини.

Установимо зв'язок між тиском і швидкістю рідини в різних перерізах труби. Виділимо тонкий поперечний шар рідини масою m. У перерізі S_1 потенціальна енергія шару рідини дорівнює mgh_1 і кінетична — $\frac{mv_1^2}{2}$. Перемістившись у переріз S_2, цей шар матиме потенціальну енергію mgh_2 і кінетичну — $\frac{mv_2^2}{2}$.

На вибраний шар рідини в перерізі S_1 тисне рідина, що тече позаду, а рідина, що тече попереду, заважає його переміщенню. Іншими словами, над даним шаром рідини решта рідини виконує роботу. Визначимо її.

Позначимо тиск рідини на перерізі S_1 через p_1, а зустрічний тиск на перерізі S_2 — через p_2. Сила тиску на перерізі S_1 виконує додатну роботу $p_1S_1l_1$, а сила зустрічного тиску — від'ємну роботу $-p_1S_1l_1$. Ураховуючи, що $S_1l_1 = S_2l_2 = V$, вираз для роботи сили тиску має вигляд $(p_1 - p_2)V$. У результаті виконання силами тиску роботи змінюється повна механічна енергія шару рідини $(p_1 - p_2)V = \left(\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2\right) - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1\right)$.

Розкриємо дужки та перенесемо всі члени, що стосуються перерізу S_1 у лівий бік рівності, а ті, що стосуються перерізу S_2 — у правий. Поділимо рівність на V і, врахувавши, що $\frac{m}{V} = \rho$, отримаємо:

$$p_1 + \rho g h_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \rho\frac{v_2^2}{2}.$$

Перерізи були вибрані довільно, отже, ця рівність виконується для всіх перерізів:

$$p + \rho g h + \rho\frac{v^2}{2} = \text{const}.$$

Отриманий вираз називається ***рівнянням Бернуллі***, що описує рух ідеальної рідини.

З'ясуємо, який фізичний зміст мають доданки цього рівняння. Очевидно, що ρgh— потенціальна енергія одиничного об'єму рідини, $\rho\frac{v^2}{2}$ — його кінетична енергія, тому і перший доданок має зміст енергії, а саме — це потенціальна енергія «стиснутого» зовнішнім тиском p одиничного об'єму рідини.

Отже, фізичний зміст рівняння Бернуллі полягає в тому, що в потоці ідеальної рідини повна механічна енергія одиниці її об'єму є величиною сталою по всій довжині труби.

Закон Бернуллі був відкритий у 1738 р. Цей закон справджується і для рухомого газу, але за умови, що його тиск невеликий і густина суттєво не змінюється.

Зауважимо ще один факт. Усі доданки рівняння мають розмірність тиску. Тому в інженерній практиці їх називають: p — статичний тиск, ρgh — ваговий тиск, $\rho\frac{v^2}{2}$ — динамічний тиск.

Рівняння Бернуллі для горизонтального потоку має вигляд $p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2}$. З нього випливає, що зі збільшенням швидкості v має зменшуватись тиск p, щоб сума статичного і динамічного тисків була сталою, і навпаки.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

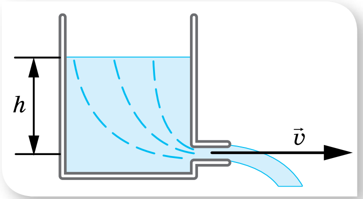
1. У чому полягає суть закону Паскаля? Як ви уявляєте механізм передачі тиску рідинами та газами, якщо на них діє зовнішня сила?
2. Які сили діють на тіло, що плаває в рідині? Зобразіть їх.
3. Доведіть, що швидкість руху рідини у трубі змінного перерізу обернено пропорційна площі поперечного перерізу.
4. Поясніть, чому тиск рідини більший там, де швидкість потоку менша, і менший там, де швидкість потоку більша.
5. Наведіть приклади, що підтверджують закон Бернуллі. Наведіть приклади застосування закону Бернуллі в техніці.

Експериментуємо

Тримаючи за кінчики два аркуші паперу зі шкільного зошита так, щоб відстань між їх площинами була 3–5 см, подуйте у простір між ними. Опишіть і поясніть явище, що спостерігалося.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Доведіть теорему Торрічеллі, згідно з якою швидкість витікання з вузького отвору в широкій посудині дорівнює швидкості вільного падіння з висоти рівня рідини в посудині над отвором.



Мал. 103

Дано:
h

v — ?

Розв'язання:

Застосуємо рівняння Бернуллі для горизонтального потоку:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

У широкій частині посудини $v_1 \to 0$, $p_1 = p_{атм} + \rho g h$, під час витікання з отвору $p_2 = p_{атм}$ (мал. 103).

Рівняння Бернуллі набуває вигляду: $p_{атм} + \rho g h = p_{атм} + \frac{\rho v^2}{2}$, звідси: $v = \sqrt{2gh}$.

Відповідь: $v = \sqrt{2gh}$.

Задача 2. Медична сестра тисне на поршень шприца діаметром 1 см із силою 0,01 Н. Визначте швидкість витікання струменя рідини зі шприца, який розташовано горизонтально. Тертям знехтуйте. Густина рідини — $10^3\ \frac{кг}{м^3}$.

Дано:
$d = 0{,}01$ м
$F = 0{,}01$ Н
$\rho = 10^3\ \frac{кг}{м^3}$

v — ?

Розв'язання:

Застосуємо рівняння Бернуллі для горизонтального потоку: $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$.

Оскільки діаметр шприца значно перевищує діаметр голки, то швидкість руху рідини у шприці $v_1 \to 0$, тиск p_1 дорівнює сумі зовнішнього тиску $\left(\frac{F}{S}\right)$ та атмосферного $p_{атм}$, тиск $p_2 = p_{атм}$.

Рівняння Бернуллі набуває вигляду $\frac{F}{S} + p_{атм} = p_{атм} + \frac{\rho v^2}{2}$, звідси: $v = \sqrt{\frac{2F}{S\rho}}$. Площа поперечного перерізу поршня шприца $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Підставляючи, отримуємо: $v = \sqrt{\frac{8F}{\pi d^2 \rho}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2F}{\pi\rho}}$.

Обчислення: $v = \frac{2}{10^{-2}\text{ м}}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}01\text{ Н}}{10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 3{,}14}} = 0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Відповідь: $0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 3. Переріз русла річки має площу 130 м², швидкість течії в цьому місці — $0{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Яка швидкість течії у вузькому місці, площа перерізу якого дорівнює 52 м²?

Дано:

$S_1 = 130$ м²

$v_1 = 0{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$S_2 = 52$ м²

v_2 — ?

Розв'язання:

Для течії води в річці застосовуємо рівняння нерозривності потоку $\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1}$. Звідси: $v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$.

Обчислення: $v_2 = \frac{0{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 130\text{ м}^2}{52\text{ м}^2} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Відповідь: $1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ВПРАВА 21

1. У циліндричну трубку площею поперечного перерізу 5 см² налили 100 г ртуті, 50 г гліцерину і 30 г води. Визначте тиск рідин на дно трубки, якщо її встановлено вертикально й під кутом 30° до горизонту.
2. На якій глибині у воді тиск буде в п'ять разів більшим від атмосферного, що становить 750 мм рт. ст.?
3. У сполучені посудини налили гліцерин, а зверху в одну посудину налили стовп води заввишки 40 см, а в другу — стовп олії заввишки 60 см. Визначте різницю рівнів гліцерину в сполучених посудинах.
4. Порожниста чавунна куля масою 5 кг плаває у воді так, що її половина занурена у воду. Визначте об'єм порожнини кулі.
5. У посудину налили ртуть і олію. Опущена в посудину куля плаває так, що її нижня половина занурена у ртуть, а верхня — в олію. Визначте густину кулі.
6. Крижина площею поперечного перерізу 1 м² і заввишки 40 см плаває у воді. Яку роботу треба виконати, щоб повністю занурити крижину у воду?

7. Наповнену воднем метеорологічну кулю-зонд масою 8 кг запускають без початкової швидкості. Вважаючи рух рівноприскореним, визначте висоту підняття кулі та її повну енергію в кінці 5-ї секунди руху. Радіус оболонки кулі — 1,5 м, опір її рухові — 50 Н. Зміною густини повітря знехтуйте.
8. У пожежному шлангу діаметром 7 см тече вода зі швидкістю 9 $\frac{м}{с}$. Визначте внутрішній діаметр трубки брандспойта, якщо вода витікає з нього зі швидкістю 129,6 $\frac{км}{год}$.
9. У горизонтальній трубі, діаметр якої 8 см, нафта тече зі швидкістю 2 $\frac{м}{с}$ за тиску 150 кПа. Визначте, під яким тиском тече нафта у вузькій частині труби діаметром 4 см.
10. Під час польоту тиск повітря під крилом літака дорівнює 97,8 кПа. Площа крила — 20 м^2. Визначте піднімальну силу крила літака.
11. Якою має бути висота циліндричної посудини радіусом 5 см, заповненої водою, щоб сила тиску води на дно дорівнювала силі тиску на бічну поверхню?
12. Площа поршня у шприці — 2 см^2, а площа отвору — 1 мм^2. Скільки часу витікатиме вода зі шприца, якщо діяти на поршень із силою 8 Н і якщо хід поршня дорівнює 5 см? Шприц розташовано горизонтально.
13. З брандспойта б'є струмина води, що дає 60 $\frac{л}{хв}$. Яка площа поперечного перерізу струмини на висоті 2 м над кінцем брандспойта, якщо поблизу нього вона дорівнює 1,5 см^2?

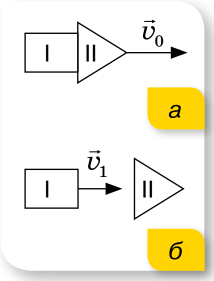
Перевірте себе (§ 16–20)

1. Автомобіль масою 1 т рівномірно рухається по колу зі швидкістю 54 $\frac{км}{год}$. Визначте модуль зміни імпульсу автомобіля за час проходження чверті кола.

А 0 **В** $15 \cdot 10^3\ \frac{кг \cdot м}{с}$

Б $21 \cdot 10^3\ \frac{кг \cdot м}{с}$ **Г** $54 \cdot 10^3\ \frac{кг \cdot м}{с}$

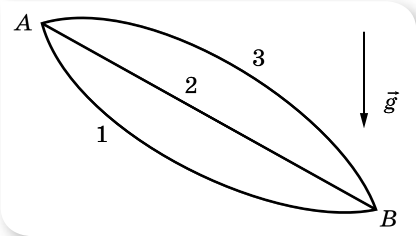
2. Ракета, що складається з двох ступенів, рухалася зі швидкістю $v_0 = 6\ \frac{км}{с}$ (*а*). Ступінь I після відділення рухався зі швидкістю $v_1 = 2\ \frac{км}{с}$ (*б*). Маса ступеня I $m_1 = 1 \cdot 10^3$ кг, маса ступеня II $m_2 = 2 \cdot 10^3$ кг. Якою була швидкість ступеня II після відділення першого?



А $2\ \frac{км}{с}$ **В** $6\ \frac{км}{с}$

Б $4\ \frac{км}{с}$ **Г** $8\ \frac{км}{с}$

3. Тіло може рухатись з точки A в точку B різними траєкторіями (див. малюнок). Порівняйте роботу сили тяжіння під час переміщення тіла.



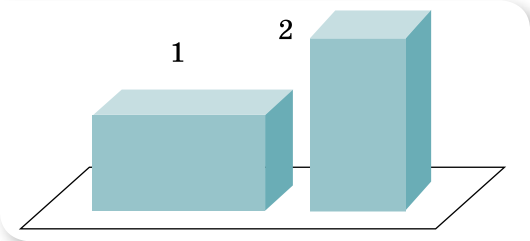
А $A_1 > A_2 > A_3$

Б $A_1 = A_2 = A_3$

В $A_3 > A_2 > A_1$

Г $A_2 = A_3 > A_1$

4. Цеглину, густина якої 2700 $\frac{кг}{м^3}$, довжина — 0,4 м, ширина і висота — по 0,2 м, перевели з положення *1* у положення *2*. Яку роботу при цьому було виконано? Вважайте, що $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

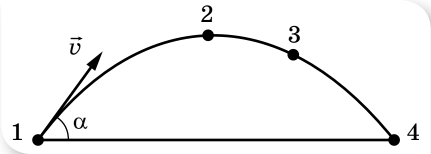


А 8,64 Дж **Б** 4,32 Дж **В** 86,4 Дж **Г** 43,2 Дж

5. Визначте роботу, яку виконує людина, повільно піднімаючи на 60 см під водою камінь масою 50 кг й об'ємом 0,02 м^3. Густина води — $10^3\ \frac{кг}{м^3}$. Вважайте, що $g = 10\ \frac{м}{с^2}$.

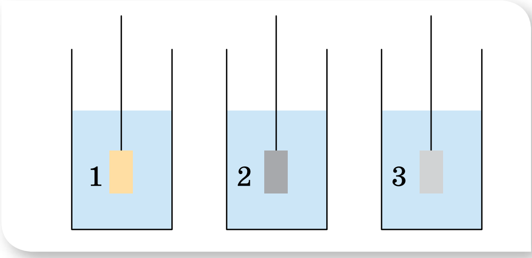
А 360 Дж **Б** 300 Дж **В** 180 Дж **Г** 120 Дж

6. Тіло кинули під кутом до горизонту. У якій точці траєкторії кінетична енергія тіла є найменшою?



А точка 1 **Б** точка 2 **В** точка 3 **Г** точка 4

7. Три суцільні металеві циліндри однакового об'єму занурили в склянки з водою (див. малюнок). Порівняйте сили Архімеда, що діють на циліндри, якщо перший циліндр — мідний, другий — сталевий, а третій — алюмінієвий.



А сили однакові в усіх трьох випадках
Б для першого — найбільша, для третього — найменша
В для другого — найбільша, для третього — найменша
Г для третього — найбільша, для першого — найменша

8. Брусок зісковзує з вершини похилої площини завдовжки 42 см і заввишки 7 см, а потім рухається по горизонтальній поверхні завдовжки 142 см і зупиняється. Визначте коефіцієнт тертя, вважаючи його однаковим на горизонтальній і похилій площинах.

9. На нерухому кульку масою 4 кг налітає кулька масою 1 кг і відлітає назад. Визначте (у метрах за секунду) швидкість, з якою почне рухатися після зіткнення важча кулька, якщо легша до зіткнення мала швидкість 5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Зіткнення абсолютно пружне.

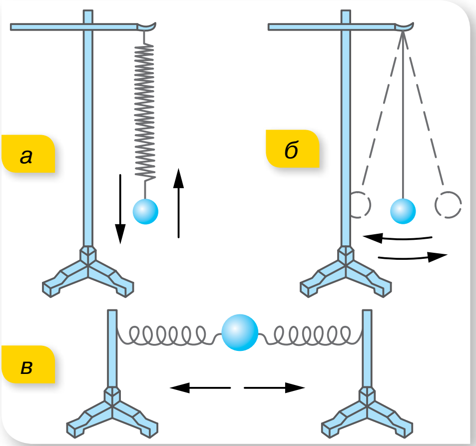
10. Визначте найменший об'єм кулі, наповненої воднем $\left(\text{густина — } 0{,}1\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$, здатної підняти людину масою 70 кг на висоту 100 м за 30 с. Маса оболонки кулі з гондолою — 20 кг, густина повітря — 1,3 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Опором і зміною густини повітря знехтуйте.

§21 Вільні та вимушені коливання

Коливальні системи, умови виникнення вільних коливань. Ще одним видом механічного руху є коливання. У природі й техніці існує нескінченна кількість видів коливань. Вивчити їх усі практично неможливо. Ми обмежимося вивченням найпростіших випадків коливань. На малюнку 104 наведено приклади механічних пристроїв, які здатні здійснювати коливання. Ці пристрої є *коливальними системами*.

Для коливальних систем систем характерні такі спільні ознаки.

1. Кожна коливальна система має стан рівноваги. Для нитяного маятника — це положення, у якому центр тяжіння підвішеної кульки лежить на одній вертикалі з точкою підвісу; у вертикального пружинного маятника в положенні рівноваги сила тяжіння, що діє на тягарець, зрівноважується силою пружності; у горизонтального пружинного маятника — це положення, в якому обидві пружини деформовані однаково.



Мал. 104. Коливальні системи:
а — вертикальний пружинний маятник;
б — нитяний маятник;
в — горизонтальний пружинний маятник

2. Якщо коливальну систему вивести зі стану рівноваги, виникає сила, що повертає систему в рівноважний стан. Для кожної коливальної системи це сила різної природи. Так, для нитяного маятника — це рівнодійна сил тяжіння та сили натягу нитки.
3. Повертаючись у рівноважний стан, коливальне тіло не зупиняється, а продовжує свій рух за інерцією.

Вільними (або власними) називають коливання, які виникають у результаті початкового виведення системи з положення стійкої рівноваги і здійснюються за рахунок внутрішніх сил системи, не зазнаючи впливу з боку змінних зовнішніх сил.

У всіх коливальних системах, зображених на малюнку 104, вільні коливання виникають, якщо: 1) коливальне тіло вивести з положення рівноваги, тобто надати коливальній системі енергії; 2) рівнодійна всіх сил, що діють на тіло, виведене з положення рівноваги, спрямована до цього положення; 3) сили тертя в системі достатньо малі.

Підкреслимо, що коливання — це явища і процеси, у яких відбувається періодичне повторення станів системи. Періодичними є й обертальні рухи, але на відміну від обертальних рухів, у яких кожна точка рухається коловою траєкторією, під час коливальних рухів точка чи тіло зміщується в протилежних напрямках по одній і тій самій траєкторії.

Характеристики коливального руху. Основними характеристиками коливального руху є амплітуда, період і частота коливань.

Амплітуда коливань x_{max} — це максимальне зміщення тіла від положення рівноваги.

Період коливань T — час одного повного коливання. $T = \frac{t}{N}$, де t — час, протягом якого відбувається N коливань.

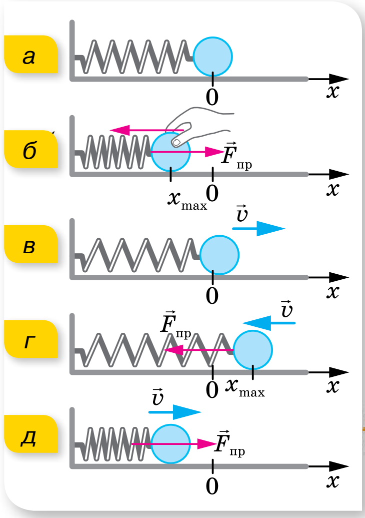
Частота коливань ν — фізична величина, що визначається кількістю повних коливань за одиницю часу, $\nu = \frac{N}{t}$, де t — час, протягом якого відбувається N коливань.

Одиниця частоти коливань — герц: 1 Гц = $1\ \frac{1}{\text{с}}$.

З означення випливає, що $\nu = \frac{1}{T}$ або $T = \frac{1}{\nu}$.

Вільні та вимушені коливання. Розглянемо вільні коливання горизонтального пружинного маятника (мал. 105, *а*; с. 120).

Якби не існувало тертя, рух кульки не припинився б ніколи. Однак тертя (зокрема, опір повітря) впливає на рух коливного тіла. Оскільки сила опору повітря напрямлена проти швидкості руху, то амплітуда коливань поступово зменшується, допоки рух не припиниться, тобто коливання будуть *загасаючими*. Якщо опір незначний, то загасання стає помітним лише після того, як коливне тіло здійснить багато коливань. Сили тертя (опору) можуть бути й настільки великі, що в коливальній системі



Мал. 105. Коливання горизонтального пружинного маятника

коливання не виникнуть. Наприклад, якщо пружинний маятник опустити у в'язку рідину, то після відхилення тіла від положення рівноваги воно плавно повернеться в це положення й зупиниться. Під час дослідження коливального руху та розв'язуючи задачі на коливання, ми нехтуватимемо опором і вважатимемо вільні коливання ***незагасаючими***.

У реальних умовах, щоб коливання були незагасаючими, необхідно поповнювати енергією коливальну систему, тобто потрібно, щоб діяла зовнішня періодична сила.

Вимушеними називають коливання, які виникають у системі в результаті впливу на неї зовнішньої періодичної сили.

Підкреслимо, що вимушені коливання відбуваються не під впливом внутрішніх, а під впливом зовнішніх сил. Наприклад, рух поршня у двигунах внутрішнього згорання. Основна відмінність вільних коливань від вимушених полягає в тому, що вони відбуваються з власною частотою і власним періодом, які визначаються властивостями коливальної системи. Під час вимушених коливань зовнішня сила «нав'язує» коливальній системі свою частоту, свій період. Вільні коливання реальної коливальної системи внаслідок дії сил тертя є загасаючими, амплітуда ж вимушених коливань не зменшується із часом, навіть якщо в системі є тертя. Вимушені коливання — незагасаючі.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. За яких умов у коливальній системі виникають вільні коливання? Наведіть приклади коливальних систем.
2. Які коливання називаються вільними, а які — вимушеними?
3. Назвіть основні характеристики коливального руху.

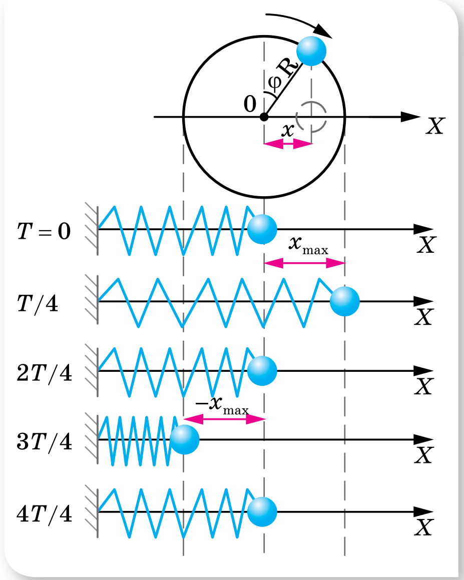
§22 Гармонічні коливання

Рівняння гармонічних коливань. У попередньому параграфі ми розглянули коливальний рух горизонтального пружинного маятника. Було показано, що в будь-якій точці траєкторії коливного тіла сила пружності напрямлена до положення рівноваги, тобто протилежно до зміщення тіла. У цьому прикладі горизонтальний пружинний маятник здійснює так звані *гармонічні* коливання. У гармонічних коливаннях сили, під дією яких вони відбуваються, завжди пропорційні зміщенню і спрямовані протилежно до нього (до положення рівноваги).

Сили, пропорційні відхиленню системи від положення рівноваги, це не обов'язково пружні сили. Вони можуть мати різну фізичну природу, але схожі між собою тим, що викликають гармонічні коливання. Тому сили, пропорційні зміщенню від положення рівноваги, незалежно від їхньої природи, називають квазіпружними («ніби пружними»; квазі — від лат. *quasi* — ніби, майже, немовби). Так, роль квазіпружної сили може відігравати рівнодійна сили всесвітнього тяжіння та сили пружності (для нитяного маятника), рівнодійна кількох сил різної природи.

Як і для будь-якого руху, для коливань необхідно отримати формулу, що дасть змогу розв'язувати основну задачу механіки — визначати координату тіла в будь-який момент часу. Крім того, оскільки коливання — це періодичні рухи, необхідно вміти визначати період коливань. Щоб виявити залежність координати (швидкості та прискорення) коливного тіла від часу, необхідно розв'язати рівняння другого закону Ньютона. Оскільки сила, що діє на коливне тіло, змінюється, то розв'язання цього рівняння потребує глибших знань з математики (знань диференціального числення). Тому скористаємося подібністю між коливаннями маятника та рівномірним рухом по колу.

Нехай по колу рівномірно рухається кулька (мал. 106). Розташуємо горизонтальний пружинний маятник паралельно осі X так, щоб положення рівноваги кульки маятника розмістилося на одній вертикалі з центром кола. Виведемо маятник з положення рівноваги, розтягнувши пружину на величину $x_{max} = R$. Легко помітити, що під час руху кульки по колу проекція її радіуса-вектора здійснює коливання вздовж діаметра, тобто вздовж осі X, аналогічні коливанням кульки маятника. Центр кола відіграє роль положення рівноваги, радіус кола R — амплітуди коливань x_{max}, період обертання кульки — періоду коливань T, проекція радіуса-вектора в довільний момент часу відповідає зміщенню $x = x_{max} \cos \varphi$, де φ — кут повороту радіуса-вектора.



Мал. 106. Аналогія між коливальним і обертальним рухом

Кут φ є центральним кутом, а, як відомо, дуга l, що стягує центральний кут, дорівнює добутку кута φ (у радіанах) на радіус кола (у нашому випадку — x_{max}), $l = \varphi x_{max}$. За час, що дорівнює періоду, кулька робить один повний оберт і проходить відстань, що дорівнює довжині кола. Отже, швидкість кульки $v = \dfrac{2\pi x_{max}}{T}$. Протягом інтервалу часу, за який радіус-вектор кульки повернувся на кут φ, кулька пройшла відстань $l = vt = \dfrac{2\pi x_{max} t}{T}$. Прирівнюючи обидва вирази для l, отримуємо: $\varphi = \dfrac{2\pi}{T} t$. Отже, проекція радіуса-вектора на вісь X змінюється за законом $x = x_{max} \cos \dfrac{2\pi}{T} t$.

Величину $\dfrac{2\pi}{T}$ називають *циклічною*, або *коловою*, *частотою* і позначають літерою ω. Циклічна (або колова) частота показує, яку кількість коливань здійснює тіло за 2ω секунд, $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$.

Одиниця циклічної частоти — радіан за секунду: $1\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Отже, зміщення (координата) тіла, що здійснює механічні гармонічні коливання, із часом змінюється за законом $x = x_{max} \cos \omega t$, якщо в початковий момент $(t = 0)$ коливне тіло займало крайнє положення, або $x = x_{max} \sin \omega t$, якщо в момент початку відліку тіло перебувало в положенні рівноваги.

Гармонічними називаються прості періодичні в часі коливання фізичної величини, які здійснюються за синусоїдальним або косинусоїдальним законом.

Зверніть увагу! У задачах найчастіше ми використовуватимемо рівняння $x = x_{max} \cos \omega t$, тобто вважатимемо, що в початковий момент $(t = 0)$ коливне тіло перебуває в крайньому положенні.

Фаза коливань. Гармонічні коливання характеризуються ще однією важливою величиною — фазою коливань. Виводячи основне рівняння гармонічних коливань, ми отримали вираз: $x = x_{max} \cos \dfrac{2\pi}{T} t$, тут величину $\varphi = \dfrac{2\pi}{T} t$ називають *фазою коливань*.

У виразі $\varphi = \dfrac{2\pi}{T} t$ відношення $\dfrac{t}{T}$ показує, яка частка періоду минула з моменту початку коливань, отже, будь-якому інтервалу часу, вираженому в частках періоду, відповідає значення фази, виражене в радіанах. Наприклад, для $t = \dfrac{1}{4} T$ (чверть періоду) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, для $t = \dfrac{1}{2} T$ (півперіоду) $\varphi = \pi$.

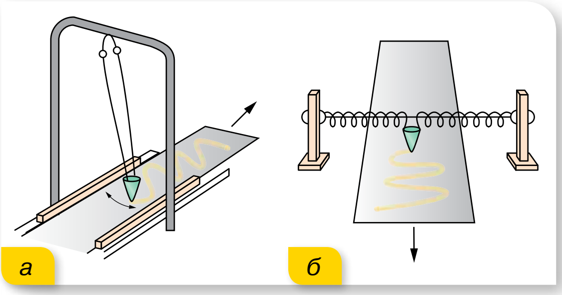
Фаза коливань — це фізична величина, що визначає миттєві значення змінних параметрів коливальної системи в певний момент часу, тобто визначає ступінь відхилення системи від положення рівноваги в цей момент, $\varphi = 2\pi \dfrac{t}{T} = \omega t$.

Одиниця фази коливань — радіан: 1 рад.

У наведених нами прикладах коливальний рух починався з моменту часу, коли коливне тіло перебувало в крайньому положенні. Оскільки, спостерігаючи за коливаннями, час можна відлічувати від будь-якого моменту, то початкове положення коливного тіла визначатиметься початковою фазою φ_0, і рівняння коливального руху набуде вигляду $x = x_{max}\cos(\omega t + \varphi_0)$.

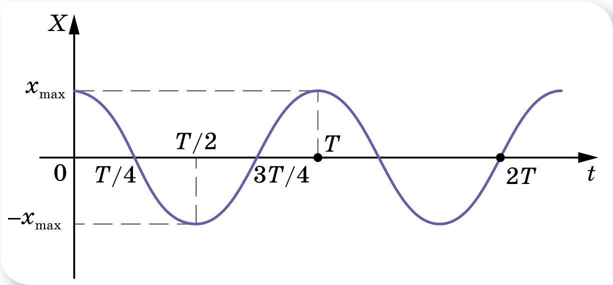
Фаза коливань у загальному випадку визначається формулою $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Для гармонічних коливань фаза є аргументом синуса чи косинуса.

Графіки гармонічних коливань. Графіком гармонічних коливань є крива, яку в математиці називають синусоїдою або косинусоїдою. Графік гармонічного коливання можна дістати безпосередньо з досліду, якщо за коливне тіло взяти пісочницю, з якої висипається пісок. Пісочницю підвішують на довгій нитці (мал. 107, *а*) або закріплюють на пружинах (мал. 107, *б*) і змушують здійснювати коливання. Якщо під пісочницею протягувати папір, то на ньому залишається слід, що нагадує синусоїду.



Мал. 107. Наочний спосіб спостереження коливань

Форма запису закону гармонічного коливання може бути вибрана довільно (через синус або косинус). Припустимо, що маятник відвели в крайнє положення та відпустили (без поштовху), розпочавши відлік часу. Рівняння руху в цьому випадку слід записати у вигляді $x = x_{max}\cos\omega t$, але можна записати і так: $x = x_{max}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Обидві форми запису еквівалентні, тобто описують одне й те саме коливання, графік якого є косинусоїдою (мал. 108).



Мал. 108. Графік коливань

Якщо початок відліку часу починається в момент проходження коливним тілом положення рівноваги, то рівняння руху може бути записане у вигляді $x = x_{max}\sin\omega t$ або $x = x_{max}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

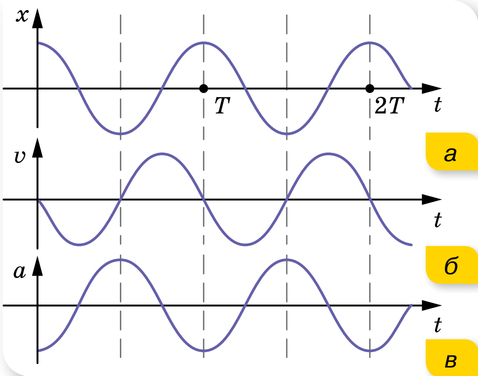
У гармонічних коливаннях швидкість і прискорення коливного тіла також змінюються за гармонічним законом, оскільки швидкість дорівнює першій похідній координати за часом, а прискорення — першій похідній від швидкості (або другій похідній координати).

З курсу математики відомо, що $(\cos kx)' = -k \sin kx$, $(\sin kx)' = k \cos kx$.

Виходячи з рівняння $x = x_{max} \cos \omega t$, отримуємо $v = (x_{max} \cos \omega t)' = -x_{max}\, \omega \sin \omega t$, де $v_{max} = -x_{max}\, \omega$ — максимальна швидкість. Для прискорення маємо $a = (-x_{max}\, \omega \sin \omega t)' = -x_{max}\, \omega^2 \cos \omega t$, де $a_{max} = -x_{max}\, \omega^2$ — максимальне прискорення.

З попередніх рівнянь видно, що прискорення прямо пропорційне зміщенню. Отже, у будь-який момент часу сила, що зумовлює коливання тіла масою m, також пропорційна зміщенню, $F = -m\omega^2 x_{max} \cos \omega t$, де $F_{max} = -m\omega^2 x_{max}$ — максимальне значення сили. Таким чином, гармонічні коливання відбуваються під дією сили, напрямленої до положення рівноваги і прямо пропорційної зміщенню від цього положення.

Графіки часових залежностей зміщення, швидкості та прискорення гармонічних коливань зображено на малюнку 109. Згідно з формулами зведення тригонометричних функцій залежність швидкості від часу $v = -v_{max} \sin \omega t$ набуває вигляду $v = v_{max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Порівнюючи це рівняння з рівнянням $x = x_{max} \cos \omega t$ бачимо, що коливання швидкості випереджають за фазою коливання зміщення на $\frac{\pi}{2}$ (мал. 109, *б*). Коливання прискорення, що описуються рівнянням $a = -a_{max} \cos \omega t$ можна записати у вигляді $a = a_{max} \cos(\omega t + \pi)$, тобто коливання прискорення випереджають за фазою коливання координати на π рад (перебувають у протифазі) (мал. 109, *в*).



Мал. 109. Графіки залежностей: *а* — $x(t)$; *б* — $v(t)$; *в* — $a(t)$

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які коливання називають гармонічними?
2. Як пов'язані прискорення та координата в гармонічних коливаннях?
3. Як змінюється із часом швидкість у гармонічних коливаннях?
4. Яку фізичну величину називають фазою коливання? Що вона характеризує?
5. Миттєве зміщення частинки в коливаннях описується функцією $x = x_{max} \cos(\omega t + \varphi_0)$. Якою має бути початкова фаза φ_0, щоб коливання були синусоїдними?

Приклади розв'язування задач

Задача. Тіло здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0{,}05 \cos 10\,\pi t$, де всі величини задано в СІ.

а) Визначте амплітуду коливань, частоту коливань і період коливань. Запишіть рівняння залежності швидкості й прискорення від часу, $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ і $a_x = a_x(t)$, та побудуйте графіки залежностей зміщення, швидкості, прискорення від часу.

б) Визначте зміщення для фази $\frac{\pi}{4}$. У який момент часу зміщення дорівнюватиме 0,025 м?

Дано:

$x = 0{,}05 \cos 10\pi t$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

$x = 0{,}025$ м

а) x_{max} — ?;
ν — ?; T — ?;
$\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ — ?;
$a_x = a_x(t)$ — ?;
б) x — ?; t — ?

Розв'язання:

а) З рівняння коливань визначаємо $x_{max} = 0{,}05$ м, $\omega = 10\pi$. Оскільки $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, то $\nu = 5$ Гц, $T = 0{,}2$ с.

Залежність проекції швидкості від часу визначимо, обчисливши похідну від зміщення:

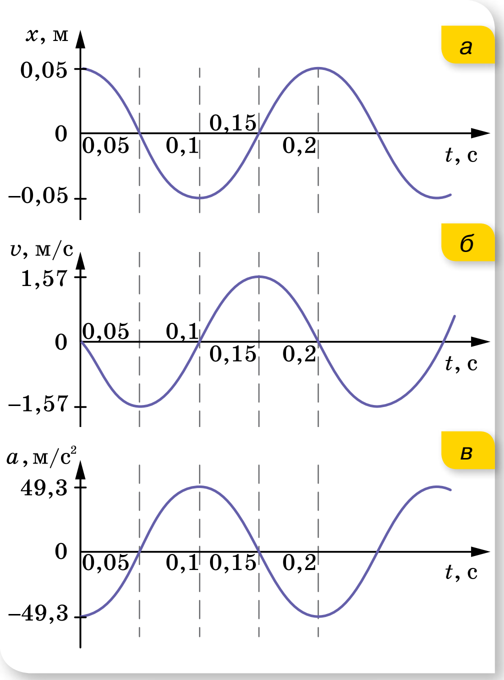
$\upsilon_x = x' = -0{,}05 \cdot 10\pi \sin 10\pi t = -1{,}57 \sin 10\pi t$,

де $\upsilon_{max} = -1{,}57\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Залежність проекції прискорення від часу визначаємо, обчисливши похідну від швидкості:

$$a_x = \upsilon' = -1{,}57 \cdot 10\pi \cos 10\pi t = -49{,}3 \cos 10\pi t \text{, де } a_{max} = -49{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідні графіки коливань наведено на малюнку 110.



Мал. 110

б) Для фази $\frac{\pi}{4}$ з рівняння коливань отримуємо:

$$x = 0{,}05 \cos\frac{\pi}{4} = 0{,}05 \cdot 0{,}71 \approx$$
$$\approx 0{,}036 \text{ м}.$$

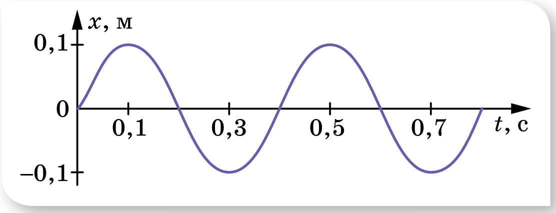
Щоб визначити момент часу, у який зміщення дорівнює 0,025 м, підставимо це значення в рівняння для x, $0{,}025 = 0{,}05 \cos 10\pi t$, звідси $\cos 10\pi t = 0{,}5$. Оскільки косинус набуває значення 0,5 при $\frac{\pi}{3}$, то

$10\pi t = \frac{\pi}{3}$, звідси $t \approx 0{,}03$ с.

Відповідь: а) 0,05 м; 5 Гц; 0,2 с; $\upsilon_x = -1{,}57 \sin 10\pi t$; $a_x = -49{,}3 \cos 10\pi t$; б) 0,036 м; 0,03 с.

ВПРАВА 22

1. Рівняння руху гармонічного коливання має вигляд $x = 0{,}02 \cos 100\pi t$. Побудуйте графік залежності $x(t)$. Обчисліть зміщення через 0,25 с; через 1,25 с. Відповіді поясніть за допомогою графіка.
2. За графіком гармонічних коливань, зображеним на малюнку 111, запишіть рівняння цього коливання.



Мал. 111

3. Напишіть рівняння гармонічного коливального руху з амплітудою 0,2 м, періодом 4 с і початковою фазою, що дорівнює нулю. Накресліть графік цього руху.
4. Напишіть рівняння гармонічного коливального руху, якщо максимальне прискорення точки 49,3 $\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, період коливань 2 с і зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу — 25 мм.
5. Коливальний рух точки описується рівнянням $x = 0{,}05 \cos 20\pi t$ (усі величини задано в СІ). Обчисливши першу та другу похідні, напишіть рівняння залежності швидкості й прискорення від часу, $v_x = v_x(t)$ і $a_x = a_x(t)$. Визначте зміщення, швидкість і прискорення через $\frac{1}{60}$ с від початку руху.
6. Напишіть рівняння гармонічного коливального руху за такими його характеристиками: а) амплітуда 5,5 см, період 1 хв, початкова фаза 30°; б) амплітуда 0,1 м, частота 10 коливань за секунду, початкова фаза дорівнює нулеві.
7. Напишіть рівняння гармонічного коливального руху з амплітудою 0,2 м, періодом 4 с і початковою фазою, що дорівнює нулеві. Накресліть графік цього руху.
8. Амплітуда гармонічних коливань — 50 мм, період — 4 с і початкова фаза — $\frac{\omega}{4}$. Визначте зміщення коливної точки від положення рівноваги в моменти часу $t = 0$ і $t = 1{,}5$ с.

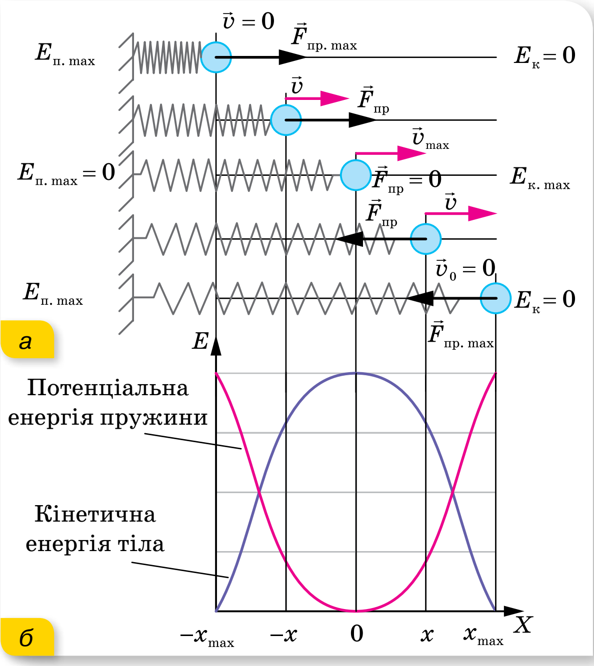
§ 23 Перетворення енергії в гармонічних коливаннях

Зміна енергії коливальної системи. Розглядаючи коливання горизонтального пружинного маятника, ми бачили, що при початковому його відхиленні, наприклад, ліворуч на відстань — x_{max}, коливне тіло, повертаючись, проходить положення рівноваги та відхиляється праворуч на x_{max}. Це можливо, якщо виконується закон збереження повної механічної енергії. У процесі гармонічних коливань повна механічна енергія коливальної системи, що дорівнює сумі потенціальної та кінетичної енергій, залишається незмінною.

За допомогою малюнка 112 можна прослідкувати, як змінюється енергія під час гармонічних коливань. У початковий момент (коли пружина стиснена) коливальна система має максимальну потенціальну енергію $E_{п.\max} = \frac{kx_{\max}^2}{2}$, де k — жорсткість пружини. Як далі буде встановлено, маса тягарця — m, що коливається на пружині жорсткістю k, і циклічна частота коливань пов'язані співвідношенням $\omega^2 = \frac{k}{m}$, тоді вираз для максимальної потенціальної енергії можна записати у вигляді $E_{п.\max} = \frac{m\omega^2 x_{\max}^2}{2}$.

Рухаючись до положення рівноваги, система зменшує потенціальну енергію, але при цьому збільшується її кінетична енергія, яка набуває максимального значення в положенні рівноваги, де швидкість коливного тіла максимальна, $E_{к.\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$. З урахуванням того, що $v_{\max} = -x_{\max}\omega$, маємо $E_{к.\max} = \frac{m\omega^2 x_{\max}^2}{2}$.

Значення повної енергії в кожний момент часу дорівнює максимальній кінетичній або максимальній потенціальній енергії, $E_{повна} = E_{п.\ \max} = E_{к.\ \max} = \frac{m\omega^2 x_{\max}^2}{2}$.



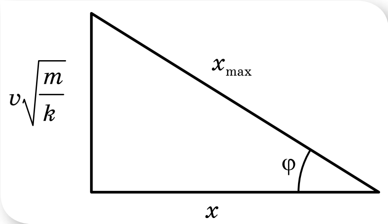
Мал. 112. Перетворення енергії коливальної системи

Таким чином, кінетична енергія коливальної системи матиме максимальні значення в моменти проходження тілом положень рівноваги, а потенціальна — у моменти перебування тіла в точках найбільших відхилень від положення рівноваги. У довільний момент часу сума потенціальної $E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_{max}{}^2}{2}\cos^2\omega t$ і кінетичної енергії $E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_{max}{}^2}{2}\sin^2\omega t$ є сталою величиною й дорівнює повній енергії коливань:

$$E = E_п + E_к = \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2}\cos^2\omega t + \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2}\sin^2\omega t = \frac{m\omega^2 x_{max}{}^2}{2}.$$

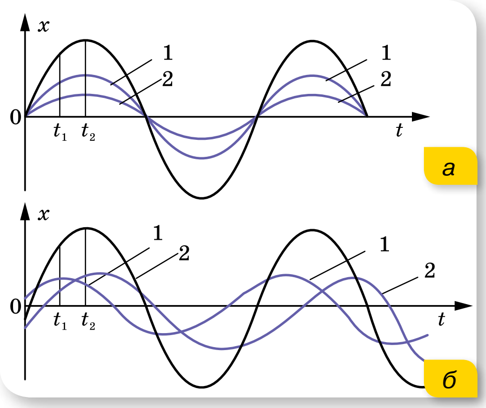
На малюнку 112, *б*, на с. 127 зображено графік зміни потенціальної та кінетичної енергій коливальної системи за один період коливань.

Покажемо, як, виходячи із закону збереження повної механічної енергії під час коливального руху, також можна вивести рівняння коливань.



Мал. 113. Графічний спосіб виведення рівняння гармонічних коливань

Повна енергія під час гармонічного коливання дорівнює $\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}$, або $kx^2 + mv^2 = kx_{max}^2$. Поділивши на k, отримуємо: $x^2 + \frac{mv^2}{k} = x_{max}^2$ або $x^2 + \left(v\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = x_{max}^2$. Побудувавши прямокутний трикутник з катетами x і $v\sqrt{\frac{m}{k}}$ та гіпотенузою x_{max} (мал. 113), отримуємо: $x = x_{max}\cos\varphi$.



Мал. 114. Додавання гармонічних коливань

Додавання коливань. На практиці часто коливання накладаються одне на одне. Щоб визначити параметри результуючого коливання, користуються графічним методом. Для цього, побудувавши в одних і тих самих координатних осях графіки коливань, які треба додати, послідовно додають ординати цих графіків для певних моментів часу t_1, t_2, t_3, ... , відкладених на осі абсцис.

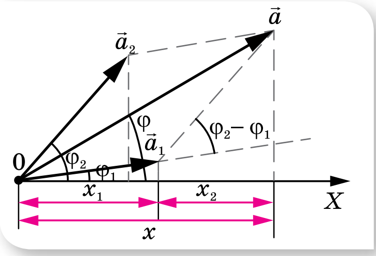
Приклади додавання коливань з однаковим періодом наведено на малюнку 114.

Векторні діаграми. Значно зручніше додавати гармонічні коливання за допомогою векторних діаграм.

Нехай коливання задано рівняннями $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ та $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, де a_1, a_2 — амплітуди коливань, φ_1, φ_2 — їхні початкові фази.

Зобразимо обидва коливання в момент часу $t = 0$ за допомогою векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ (мал. 115).

Побудуємо за правилами додавання векторів результуючий вектор $\vec{a}$. Проекція цього вектора на вісь X дорівнює сумі проекцій векторів, які додаються, $x = x_1 + x_2$. Результуюче коливання буде гармонічним коливанням із частотою ω, амплітудою a і початковою фазою φ, яку визначають за формулою $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$.



Мал. 115. Векторні діаграми

Метод векторних діаграм широко застосовують, розв'язуючи практичні завдання, зокрема в електротехніці для розрахунку параметрів електричних кіл змінного струму.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Розкажіть про перетворення енергії під час гармонічних коливань.
2. За даної амплітуди коливань повна енергія коливного тіла є сталою величиною. Чи можна це саме стверджувати про кінетичну та потенціальну енергії?
3. Чи залежить енергія коливного тіла від його маси?
4. Скільки разів протягом періоду гармонічного коливання кінетична енергія системи дорівнює її потенціальній енергії в той самий момент часу?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Тягар масою 2 кг здійснює горизонтальні коливання на пружині за законом $x = 0{,}05 \cos 10\omega t$, де всі величини задано в СІ. Обчисліть максимальні значення сили, кінетичної та потенціальної енергії. А також їх значення в момент, коли фаза коливань дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$.

Дано:

$m = 2$ кг

$x = 0{,}05 \cos 10\omega t$

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

F_{max} — ?; $E_{п.max}$ — ?; $E_{к.max}$ — ?; F — ?; $E_п$ — ?; $E_к$ — ?

Розв'язання:

Максимальне значення сили визначаємо з формули $F_{max} = -m\omega^2 x_{max}$.

$F_{max} = -2 \cdot 100\omega^2 \cdot 0{,}05 = -100$ Н.

Максимальне значення кінетичної енергії дорівнює максимальному значенню потенціальної енергії й дорівнює повній енергії,

$$E_{повна} = E_{п.\,max} = E_{к.\,max} = \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2};\ E_{повна} = 2{,}5\ \text{Дж}.$$

Щоб визначити силу в момент, коли фаза коливань дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$, у вираз для сили $F = -m\omega^2 x_{max} \cos \omega t$ підставляємо значення фази, знаходимо: $F = -71$ Н.

Аналогічно для фази коливань $\frac{\pi}{4}$ обчислюємо потенціальну енергію за формулою: $E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2}\cos^2 \omega t = 1{,}25$ Дж. Кінетичну енергію можна визначити за однією з формул $E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2}\sin^2 \omega t$ або $E_к = E_{повна} - E_п$.

$E_к = 2{,}5$ Дж $- 1{,}25$ Дж $= 1{,}25$ Дж.

Відповідь: −100 Н; 2,5 Дж; 2,5 Дж; −71 Н; 1,25 Дж; 1,25 Дж.

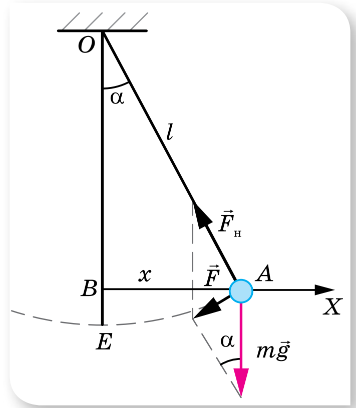
ВПРАВА 23

1. Вантаж, маса якого 400 г, коливається горизонтально на пружині, що має жорсткість 250 $\frac{Н}{м}$. Амплітуда коливань — 15 см. Визначте частоту, повну механічну енергію коливань і найбільшу швидкість руху вантажу.
2. Вантаж, підвішений на пружині, жорсткість якої 1 $\frac{кН}{м}$, коливається горизонтально з амплітудою 2 см. Визначте кінетичну та потенціальну енергію для фази $\frac{\pi}{3}$ рад.
3. Пружинний маятник вивели з положення рівноваги та відпустили. Через який час (у частинах періоду) кінетична енергія коливного тіла дорівнюватиме потенціальній енергії пружини? Коливання відбуваються в горизонтальному напрямку.
4. Вантаж масою 1 кг, підвішений до пружини жорсткістю 100 $\frac{Н}{м}$, коливається з амплітудою 10 см. Напишіть рівняння руху вантажу $x = x(t)$. Напишіть формулу, що виражає залежність зміни сили пружності від часу, $F = F(t)$. Визначте найбільше значення сили пружності, а також значення сили пружності через $\frac{1}{6}$ періоду. Коливання відбуваються в горизонтальному напрямку.
5. Напишіть рівняння гармонічного коливання тіла, якщо його повна енергія — $3 \cdot 10^{-5}$ Дж, максимальна сила, що діє на тіло, — 1,5 мН, період коливань — 2 с і початкова фаза — 60°.
6. Тіло масою $m = 1$ кг під дією пружини жорсткістю $k = 400$ $\frac{Н}{м}$ коливається без тертя в горизонтальній площині вздовж стержня. Користуючись законом збереження енергії, визначте період коливань тіла.

§ 24 Маятники

Період коливань пружинного маятника. З попередніх рівнянь, отриманих для коливань горизонтального пружинного маятника, видно, що прискорення в довільний момент часу пропорційне зміщенню: $a = -\omega^2 x$. Разом з тим, у будь-якій точці траєкторії сила пружності напрямлена до положення рівноваги і прямо пропорційна зміщенню, $F_{пр} = -kx$, де k — жорсткість пружини. За другим законом Ньютона $a = \frac{F_{пр}}{m} = -\frac{k}{m}x$. Прирівнюючи обидва вирази для прискорення, отримуємо: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ або $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Оскільки $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то *період вільних коливань пружинного маятника*: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Період коливань математичного (нитяного) маятника. ***Математичний маятник*** — це модель ідеальної коливальної системи. Реальний нитяний маятник (мал. 160), що складається з невеликого тіла й довгої тонкої нерозтяжної нитки (наприклад, сталевого дроту), можна вважати математичним маятником.



Мал. 116. Нитяний маятник

Нитяний маятник коливається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили натягу нитки $\vec{F}_н$. За малих відхилень такого маятника від положення рівноваги ($\alpha < 5°$) його коливання будуть гармонічними.

Відведемо коливне тіло в крайнє праве положення. У цьому разі рівнодійна сили тяжіння та сили натягу нитки напрямлена проти зміщення — до положення рівноваги (мал. 116). З малюнка видно, що за модулем ця рівнодійна дорівнює $F = mg \sin \alpha$.

Оскільки кут відхилення малий, то дуга $\smile EA$, по якій рухається кулька, мало відрізняється від півхорди BA, тому зміщення $x = BA$. Крім того, для малих кутів виконується співвідношення $\sin \alpha \approx \text{tg}\, \alpha$. З трикутника OBA $\text{tg}\, \alpha = \frac{x}{l}$, де l — довжина нитки.

Таким чином, проекція рівнодійної, що діє на коливне тіло (з урахуванням того, що вона напрямлена проти зміщення) описується формулою $F_x = -\frac{mg}{l}x$. Як бачимо, цей вираз аналогічний виразу для сили пружності $F_{пр_x} = -kx$, де роль коефіцієнта пружності k відіграє величина $\frac{mg}{l}$.

Однакові причини виникнення коливань ведуть до однакових результатів. Виведемо формулу періоду коливань нитяного маятника так само, як ми це робили для пружинного маятника. Оскільки коливання математичного маятника є гармонічними, то прискорення в довільний момент часу пропорційне зміщенню, $a = -\omega^2 x$. Водночас у будь-якій точці траєкторії рівнодійна F напрямлена до положення рівноваги і прямо пропорційна зміщенню, $F = -\frac{mg}{l}x$. За другим законом Ньютона: $a = \frac{F}{m} = -\frac{g}{l}x$.

Прирівнюючи обидва вирази для прискорення, отримуємо: $\omega^2 = \frac{g}{l}$ або

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Оскільки $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *то період вільних коливань нитяного маятника* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Період власних коливань нитяного маятника не залежить від маси й амплітуди коливань, а визначається прискоренням вільного падіння та довжиною маятника.

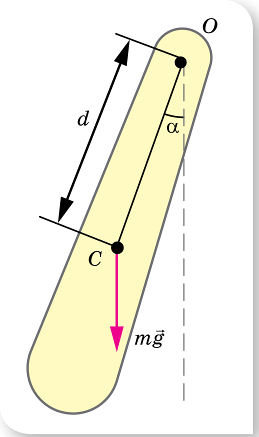
Оскільки будь-який маятник має фіксований період коливань, їх використовують для регулювання ходу годинників. Маятники використовують і в геологічних розвідках. У місцях, де залягають породи металевих руд, значення g аномально велике. Точні вимірювання прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника дають змогу виявити такі родовища.

За допомогою математичного маятника можна виявити добове обертання Землі. Цей дослід у 1851 р. в Парижі виконав Жан Фуко з маятником завдовжки 67 м. Тому маятники, за допомогою яких можна продемонструвати добове обертання Землі навколо своєї осі, називають маятниками Фуко.

Зміст досліду полягає в тому, що площина коливань математичного маятника залишається незмінною відносно інерціальної системи відліку. Тоді відносно неінерціальної системи відліку, пов'язаної із Землею, внаслідок дії сили Коріоліса, площина коливань маятника має повертатись.

Пізніше цей дослід повторювали в різних місцях. Очевидно, що ефект повороту площини коливань маятника залежить від широти місця проведення досліду, він найбільш виражений на земних полюсах і не спостерігається на екваторі.

Часто в задачах розглядають нитяний маятник, який коливається, рухаючись із певним прискоренням $\vec{a}$. У цьому разі період коливань маятника визначають з формули: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{a} - \vec{g}|}}$.



Мал. 117.
Фізичний маятник

Період коливань фізичного маятника. ***Фізичний маятник*** — це абсолютно тверде тіло, що закріплене на осі, яка не проходить через центр мас тіла C і коливається під дією сили тяжіння відносно вертикальної осі (мал. 117).

За малих кутів відхилення ($\alpha < 5°$) коливання маятника є гармонічними.

Період власних коливань фізичного маятника визначають за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$, де J — момент інерції тіла відносно осі, m — маса тіла, g — прискорення вільного падіння, d — відстань від осі коливання до центра мас тіла.

За періодом коливань фізичного маятника просто визначити момент інерції різноманітних деталей (твердих тіл), що використовуються в техніці.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Яка коливальна система називається математичним (нитяним) маятником; пружинним маятником; фізичним маятником?
2. Для яких відхилень від положення рівноваги коливання нитяного та фізичного маятників будуть гармонічними?
3. Виведіть формулу періоду коливань нитяного маятника. Чи залежить період коливань маятника від його маси?
4. Від чого залежить період коливань пружинного маятника?
5. Які перетворення енергії відбуваються під час гармонічних коливань.

Приклади розв'язування задач

Задача. Нитяний маятник завдовжки 1 м коливається з амплітудою 1 см. За який час він пройде шлях 1 см, якщо в початковий момент маятник проходить положення рівноваги? За який час маятник пройде: а) першу половину амплітуди; б) другу половину амплітуди?

Дано:
$l = 1$ м
$x_{max} = 1 \cdot 10^{-2}$ м
$S = 1 \cdot 10^{-2}$ м
$x_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м
$x_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м

t — ?
t_1 — ?
t_2 — ?

Розв'язання:

Оскільки в початковий момент маятник проходить положення рівноваги, рівняння його руху має вигляд $x = 0{,}01 \sin \omega t$.

Шлях 1 см, який дорівнює амплітуді, маятник проходить за чверть періоду. Період коливань нитяного маятника визначається формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, отже,

$$t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0{,}5 \text{ с}.$$

Час, за який маятник проходить першу половину амплітуди, визначаємо з рівняння $0{,}005 = 0{,}01 \sin \omega t$, тоді $\sin \omega t = 0{,}5$. Синус набуває значення 0,5 при $\frac{\pi}{6}$, отже, $\pi t = \frac{\pi}{6}$, звідси $t \approx 0{,}167$ с. Тоді час, за який маятник проходить другу половину амплітуди, становить

$$t_2 = t - t_1,\ t_2 = 0{,}5 \text{ с} - 0{,}167 \text{ с} = 0{,}33 \text{ с}.$$

Відповідь: 0,5 с; 0,167 с; 0,33 с.

ВПРАВА 24

1. Маятник зробив 50 коливань за 1 хв 40 с. Визначте період, частоту та циклічну частоту коливань.
2. Як відносяться довжини нитяних маятників, якщо за той самий час перший робить 10, а другий — 30 коливань?
3. За один і той самий час перший нитяний маятник робить 50 коливань, другий — 30. Визначте довжини цих маятників, якщо один з них на 32 см коротший від іншого.

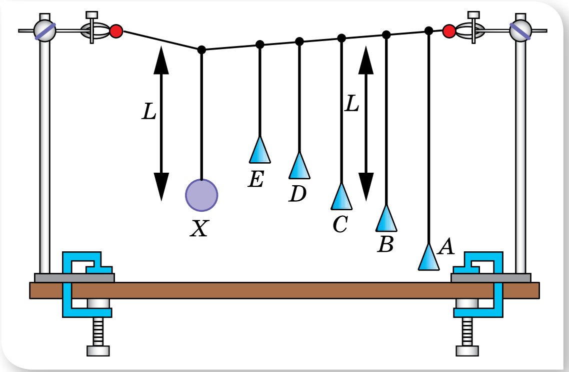
4. Як зміниться хід годинника з маятником на металевому стержні: а) з підвищенням температури; б) під час підняття на гору; в) при переміщенні від полюса до екватора?
5. У скільки разів зміниться період коливань маятника в ракеті, яка стартує з поверхні Землі вертикально вгору з прискоренням 30 $\frac{м}{с^2}$?
6. Нитяний маятник на Землі має період малих коливань 1 с. Яким буде період його коливань на Місяці?
7. Визначте прискорення вільного падіння в тому місці земної поверхні, де довжина секундного маятника буде 0,995 м.

§ 25 Вимушені коливання. Резонанс. Автоколивання

Вимушені коливання. Як зазначалося, для того щоб коливання не загасали, енергія коливальної системи має поповнюватися. Наприклад, щоб гойдалка не зупинялась, її необхідно підштовхувати через інтервали часу, кратні періоду коливань гойдалки.

Коливання, які здійснюються під дією як внутрішніх, так і зовнішніх періодичних сил, називають **вимушеними**.

Резонанс і його практичне використання. Дослідимо деякі особливості вимушених коливань. Для цього пробимо такий дослід. Закріпимо між двох штативів трос і підвісимо до троса маятники різної довжини (мал. 118).



Мал. 118. Демонстрація резонансу

Виведемо зі стану спокою, наприклад, маятник X, надамо йому можливість вільно коливатися (площина коливань маятника перпендикулярна до площини малюнка). Ці коливання викликатимуть коливання троса і змусять коливатись інші маятники. При цьому маятник C, що має таку саму довжину, а отже, і такий самий період, як і маятник X, коливатиметься найсильніше; маятники B і D, періоди коливань яких близькі до періоду коливань маятника X, коливатимуться дещо слабше, а маятники A й E майже не коливатимуться.

Отже, якщо період (частота) коливань діючої сили дорівнює власному періоду (частоті) коливань коливальної системи, амплітуда вимушених коливань системи буде найбільшою. Це явище називають *резонансом*.

Резонанс — явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань, коли частота зовнішньої періодичної сили збігається із частотою власних коливань.

Спробуємо це довести. Для зручності розглянемо коливальну систему — горизонтальний пружинний маятник. Уздовж осі X на коливне тіло діє сила пружності $F_{\text{пр}_x} = -kx$ і змінна зовнішня сила $F = F_{\max}\cos\omega t$. Застосовуючи другий закон Ньютона до опису коливань тіла, отримаємо рівняння: $ma_x = -kx + F_{\max}\cos\omega t$. Урахуємо, що $a_x = -\omega^2 x_{\max}\cos\omega t$, $x = x_{\max}\cos\omega t$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, тобто $k = \omega_0^2 m$, та отримаємо рівняння другого закону Ньютона у вигляді $-m\omega^2 x_{\max}\cos\omega t = -\omega_0^2 m x_{\max}\cos\omega t + F_{\max}\cos\omega t$.

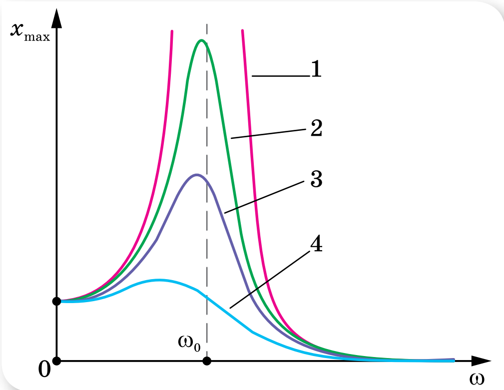
Скоротимо рівняння на $\cos\omega t$ і запишемо з нього вираз для амплітуди вимушених коливань, $x_{\max} = \left|\dfrac{F_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right|$.

Проаналізуємо отриману залежність і побудуємо її графік. Зі зміною частоти ω зовнішньої сили змінюється амплітуда вимушених коливань. Якщо ця частота наближається до частоти вільних коливань системи ω_0, то знаменник дробу наближується до нуля. У цьому разі амплітуда різко збільшується, прямуючи до нескінченності (мал. 119, с. 136; крива *1*) за умови $\omega = \omega_0$.

Сили опору перешкоджають збільшенню амплітуди коливань. Зі збільшенням сил опору значення резонансної амплітуди зменшуватиметься (кривій *4* на малюнку 119, що на с. 136, відповідає максимальне значення сил опору).

Резонанс відіграє важливу роль у природі й техніці, як позитивну, так і негативну. Позитивними проявами є резонатори — підсилювачі звуку, настроювання коливальних контурів у радіозв'язку; негативними — руйнування фундаментів і конструкцій унаслідок коливань. Відомі випадки, коли руйнувалися мости під час переходу по них колони військових, які крокували «в ногу» і до того ж частота кроків збігалася із власною частотою коливань моста. У 1850 р. зруйнувався Анжерський підвісний міст над Луарою, по якому крокували французькі піхотинці. Тоді загинуло 226 осіб. У 1906 р. зруйнувався ланцюговий Єгипетський міст через річку Фонтанку в Петербурзі. У 1940 році, через кілька місяців після введення в дію, зруйнувався Такомський підвісний міст (*США, штат Вашингтон*), у якому виникли резонансні коливання під дією вітру (мал. 120, с. 136).

Конструюючи заводи, вокзали, мости, літаки та інші споруди, фахівці мають враховувати явище резонансу, не допускаючи, щоб їх власний період коливань збігався з періодом коливань механізмів, які можуть викликати вимушені коливання цих конструкцій.



Мал. 119. Резонансні криві

Мал. 120. Руйнування Такомського моста

Автоколивальні системи. Отже, незагасаючі вимушені коливання можна отримати, діючи на тіло, здатне коливатись, періодичною зовнішньою силою. Проте можна зробити так, щоб коливальна система сама керувала зовнішнім впливом, забезпечуючи узгодженість дії сили зі своїм рухом. Така система називається автоколивальною, а її незагасаючі коливання — автоколиваннями.

Автоколивання — незагасаючі коливання, спричинені сталим зовнішнім впливом на систему, яка сама регулює їх частоту.

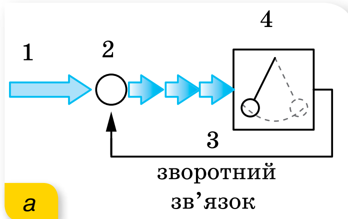
На відмінну від вимушених коливань, частота й амплітуда автоколивань визначаються властивостями самої коливальної системи. Від вільних коливань автоколивання відрізняються тим, що вони із часом не загасають, а також тим, що їх амплітуда не залежить від початкового короткочасного впливу, який збуджує коливання.

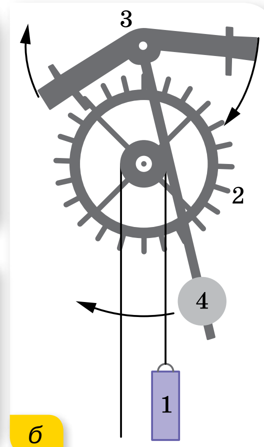
У будь-якій автоколивальній системі виокремлюють три основні елементи (мал. 121, *а*): *1* — джерело енергії, *2* — передавальний пристрій зі зворотним зв'язком *3*, який регулює надходження енергії із джерела в коливальну систему *4*.

Прикладом автоколивальної системи є годинник з маятником (мал. 121, *б*). Джерелом енергії такої системи є гиря *1*, передавальним пристроєм — храпове колесо *2* та анкер *3*, коливальною системою — маятник *4*.

Піднята над землею гиря, опускаючись, обертає храпове колесо. Оскільки гиря вільно опускається, то її рух є рівноприскореним. Для рівномірного обертання храпового колеса слугує маятник, який з'єднано із храповим колесом через анкер. За одну секунду маятник здійснює одне повне коливання. Призначення анкера полягає в тому, щоб храпове колесо, до якого кріпляться стрілки, при цьому повернулося лише на один зубець.

Маятниковий механізм нині ще використовується в годинниках на вежах або в настінних годинниках. Згодом маятниковий механізм годинників змінили на пружинний, електронний, кварцовий.





Мал. 121. Автоколивальна система: *а* — принципова схема; *б* — приклад автоколивальної системи (годинник з маятником)

У техніці застосовуються електромеханічні автоколивальні системи, у яких коливання здійснює механічна система, а надходження енергії регулюється спеціальним електричним пристроєм.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які коливання називають вимушеними? Наведіть приклади вимушених коливань.
2. Від чого залежить амплітуда вимушених коливань?
3. Що називають резонансом? За яких умов він виникає?
4. Наведіть приклади позитивного та негативного резонансних проявів.
5. Які коливання називаються автоколиваннями?
6. Які елементи входять до складу автоколивальної системи? Наведіть приклади автоколивальних систем.

§ 26 Механічні хвилі

Характеристики хвильового руху. Досі ми розглядали коливання, які не виходили за межі коливальної системи. У повсякденному житті нам більше доводиться мати справу з коливаннями, які передаються від однієї системи до іншої. Наприклад, коливання поплавка передаються частинкам води, звукові коливання в повітрі — барабанній перетинці вуха.

Механічна хвиля — процес поширення коливань у пружному середовищі з плином часу.

Прикладом найпоширеніших механічних хвиль є звук, хвилі на поверхні рідин. Механізм поширення пружної хвилі полягає у збудженні коливань унаслідок деформації середовища й передавання збурення в сусідні його ділянки. Тобто коливання джерела хвиль спричинюють деформацію прилеглих до нього ділянок середовища. Унаслідок деформації в цих ділянках виникають сили пружності, які спричинюють переміщення частинок прилеглих до деформованих ділянок. Таким чином, коливання джерела хвилі зумовлює вимушені коливання сусідніх частинок, ті, своєю чергою, збуджують коливання наступних частинок і т. д. Під час поширення хвиль частинки середовища лише коливаються відносно своїх положень рівноваги, тому перенесення речовини не відбувається. (Останнє іноді може відбуватися як супутнє явище в разі сильних збурень (*ударна хвиля*)).

Пружна хвиля може бути ***поперечною***, якщо частинки коливаються в площинах, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі. Напрямок поширення хвилі називають ***променем***.

Поперечні хвилі виникають у середовищах, де можливі пружні деформації зсуву (у твердих тілах і в поверхневих шарах рідин).

Поздовжня хвиля утворюється, якщо коливання частинок середовища відбуваються в напрямку поширення хвилі.

Поздовжні хвилі виникають у середовищах, де можливі пружні деформації стиску та розтягу. Прикладом поздовжньої механічної хвилі є звук.

У газах і рідинах виникають лише поздовжні хвилі, які є чергуванням розріджень і згущень середовища. У твердих тілах можливі як поздовжні, так і поперечні пружні хвилі.

Для опису хвильових процесів уводять такі величини.

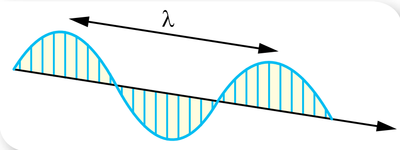
Фронт хвилі — геометричне місце точок, до яких на певний момент часу дійшли коливання.

Швидкістю поширення хвилі υ називають швидкість поширення її фронту.

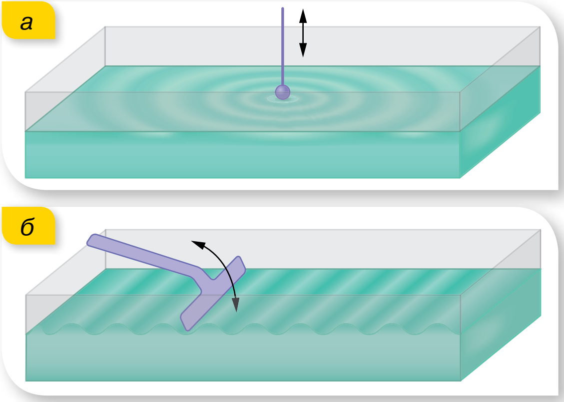
Швидкість пружної хвилі залежить від пружних властивостей і густини середовища $\upsilon = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, де E — модуль Юнга (характеризує пружні властивості середовища), ρ — густина середовища. В однорідному середовищі від точки, яка коливається, коливання поширюються в усіх напрямках зі сталою швидкістю.

Довжина хвилі λ — це відстань, на яку поширюється хвиля протягом одного періоду коливань (мал. 122), $\lambda = \upsilon T$, де υ — швидкість поширення хвилі, T — період коливань джерела хвилі.

Точки середовища, віддалені одна від одної на відстань, що дорівнює довжині хвилі, коливаються в однакових фазах. Можна сказати, що довжина хвилі — це найменша відстань між двома точками, які коливаються в однаковій фазі.



Мал. 122. Графічне зображення довжини хвилі



Мал. 123. Ванночки з водою для демонстрації: *а* — сферичної хвилі; *б* — плоскої хвилі

Досить наочними і знайомими є хвилі на поверхні води. Для демонстрації та дослідження таких хвиль використовують неглибоку ванночку, заповнену водою (мал. 123). Якщо до поверхні води дотикається точкове джерело, що періодично коливається, то утворюються сферичні хвилі (мал. 123, *а*). Фронт хвилі від точкового джерела в однорідному середовищі — сфера.

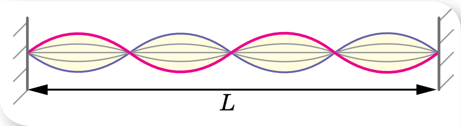
Якщо джерелом є пластина, що періодично коливається, то утворюються плоскі хвилі (мал. 123, *б*). Плоска хвиля — це хвиля, фронт якої — площина.

Рівняння плоскої гармонічної хвилі. Якщо коливання середовища спричинює періодична зовнішня сила, яка змінюється із часом за гармонічним законом, то породжені нею хвилі називають *гармонічними*. У цьому разі кожна частинка середовища, захоплена хвилею, здійснює гармонічні коливання із частотою зовнішнього впливу. Гармонічні хвилі є найпростішим і важливим видом хвильового руху. Ми обмежимось у подальшому розглядом саме цих хвиль.

Рівняння хвилі визначає положення коливної точки, яка лежить на відстані l від джерела в будь-який момент часу t. Якщо джерело коливань здійснює гармонічні коливання $x = x_{max} \sin \omega t$, то відхилення цієї точки від положення рівноваги: $x = x_{max} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\upsilon T}\right)$ або $x = x_{max} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)$.

Відбивання механічних хвиль. Поширюючись у просторі, механічна хвиля може дійти до межі, де починається інше середовище. У такому разі механічні хвилі можуть відбиватися. На межі відбиття в момент відбивання може відбутись *відбивання із втратою півхвилі*, тобто після відбивання фаза коливань фронту хвилі змінюється на протилежну (наприклад, хвиля поширюється по шнуру опуклістю вперед, а після відбивання від поверхні — біжить уперед западиною), або *відбивання без втрати півхвилі* (хвиля, що до відбивання поширювалась опуклістю вперед, і після відбивання поширюватиметься опуклістю вперед).

Стояча хвиля — це хвиля, що утворюється як результат накладання основної та відбитої хвиль, які поширюються назустріч одна одній, мають однакові періоди й амплітуди (мал. 124, с. 140).



Мал. 124. Стояча хвиля

Стояча хвиля має точки, у яких амплітуда коливань найбільша (*пучності*) і в яких вона дорівнює нулю (*вузли*).

Оскільки пряма й відбита хвилі переносять енергію у взаємно протилежних напрямках, то стояча хвиля енергії не переносить, хоча між окремими точками обмін енергією відбувається.

Стоячі хвилі утворюються за умови, що лінійні розміри тіла L, у якому поширюється хвиля, кратні одній четвертій довжини хвилі $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$, тобто на відстані від джерела хвиль до межі, від якої хвилі відбиваються, вміщується ціле число чвертей хвилі.

Стоячі хвилі використовують для визначення довжини пружних хвиль, швидкості поширення хвиль, вивчення пружних властивостей тіл тощо. Механізм їх утворення покладено в основу конструювання струнних і духових музичних інструментів, органа.

Мал. 125. Накладання хвиль

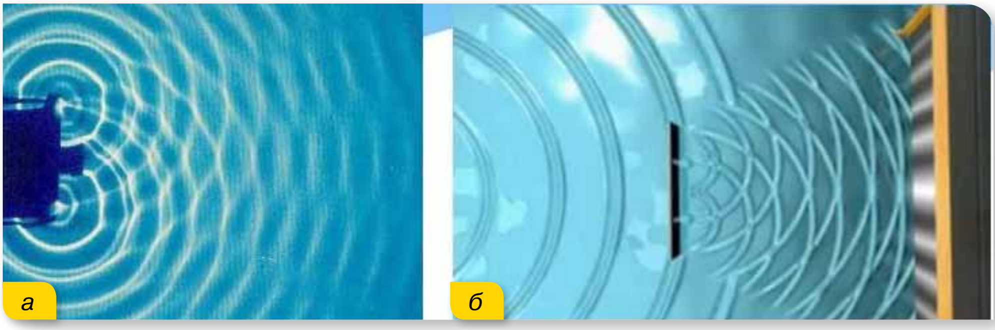
Інтерференція та дифракція хвиль. Вам доводилося бачити, як на поверхні води поширюються хвилі, що йдуть із двох різних точок (мал. 125).

Ці хвилі зустрічаються, накладаються і продовжують поширення так, ніби їх рухові ніщо не заважало. Описану властивість хвиль називають *суперпозицією*.

Якщо два джерела хвиль будуть коливатися з однаковою частотою і зберігатимуть сталою різницю фаз (такі джерела називають когерентними), то утворені від таких джерел хвилі будуть накладатися по-особливому (мал. 126, *а*). Під час накладання когерентних хвиль утворюється стійка картина коливань точок середовища, на якій видно, що в одних точках відбувається взаємне посилення хвиль та послаблення в інших, залежно від співвідношення між фазами цих хвиль. Описане явище називають *інтерференція*.

Інтерференція — явище взаємного підсилення й послаблення коливань у різних точках середовища внаслідок накладання когерентних хвиль.

Відзначимо, що при інтерференції не відбувається простого додавання енергій хвиль. В інтерференційних максимумах інтенсивність результуючої хвилі більша за суму інтенсивностей хвиль, що накладаються, а в інтерференційних мінімумах — менша від їх суми. Тобто інтерференція хвиль приводить до перерозподілу енергії коливань між сусідніми областями середовища. Проте в середньому для великої області простору енергія результуючої хвилі дорівнює сумі енергій хвиль, які інтерферують, як і має бути згідно із законом збереження та перетворення енергії.

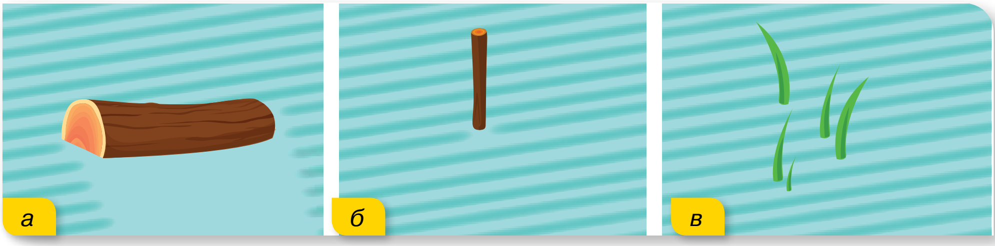


Мал. 126. Утворення інтерференційної картини: *а* — від двох когерентних джерел; *б* — від двох щілин (після проходження щілин також утворюються когерентні хвилі)

Розглянуті нами вище умови утворення стоячої хвилі є окремим випадком інтерференції.

Для хвиль притаманне і явище огинання перешкод (мал. 127), яке називають *дифракція*.

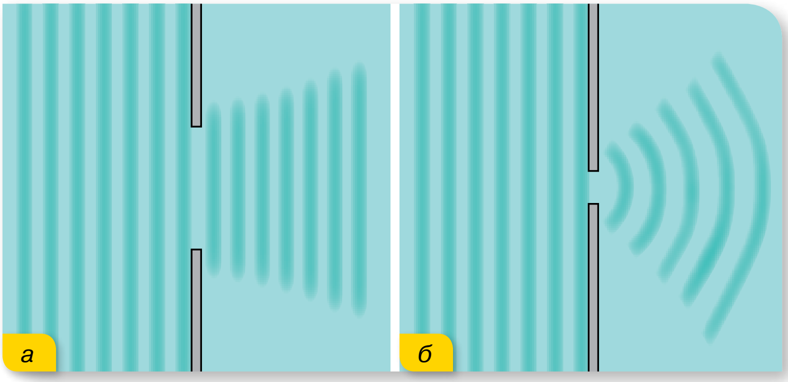
Перешкоди порушують прямолінійність поширення фронту хвилі. Якщо перешкода велика (порівняно з довжиною хвилі), то за нею хвиль немає (мал. 127, *а*). Якщо розмір перешкоди малий, то хвилі заходять за її краї (мал. 127, *б*), малу перешкоду хвилі огинають так, що за нею фронт хвилі не змінюється (мал. 127, *в*).



Мал. 127. Огинання перешкод

Вигинання фронту хвилі можна спостерігати і в разі проходження її крізь отвір (мал. 128, с. 142).

Якщо отвір великий (порівняно з довжиною хвилі), то хвилі майже не заходять за його краї (мал. 128, *а*; с. 142). Якщо отвір малий — хвилі помітно заходять за краї отвору (мал. 128, *б*; с. 142). У цьому разі отвір є ніби самостійним джерелом хвиль, які й поширюються за перешкодою в усі боки. У результаті проходження хвилі через отвір його краї стануть джерелами вторинних когерентних хвиль, які, поширюючись, утворюють ***інтерференційну картину***.



Мал. 128. Вигинання хвиль по краю отвору

Дифракція — явище відхилення хвилі від прямолінійного поширення в разі проходження повз край перешкоди.

Наведений опис явищ інтерференції та дифракції є досить спрощеним. Вивчаючи електромагнітні хвилі, зокрема світлові, ми ще раз будемо розглядати ці явища і встановимо кількісні співвідношення для них. Головне — описані властивості хвильового процесу, притаманні хвилям будь-якої природи, чи-то механічні, чи електромагнітні.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Поясніть механізм утворення пружних механічних хвиль.
2. У чому полягає відмінність між поздовжньою та поперечною хвилями? У яких середовищах можуть поширюватися поздовжні хвилі, а в яких — поперечні?
3. Від чого залежить швидкість поширення хвилі в пружному середовищі?
4. Які властивості притаманні хвильовому рухові?

Перевірте себе (§ 21–26)

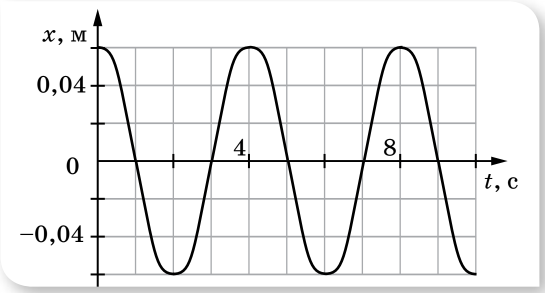
1. Укажіть назву коливань, що відбуваються під впливом зовнішніх сил.

А гармонічні	**В** вільні
Б автоколивання	**Г** вимушені

2. Дівчинка, що гойдається на гойдалці, проходить положення рівноваги 30 разів за хвилину. Укажіть частоту коливань.

А 30 Гц	**В** 0,5 Гц
Б 2 Гц	**Г** 0,25 Гц

3. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання. На малюнку зображено графічну залежність її координати від часу. Укажіть амплітуду коливань.

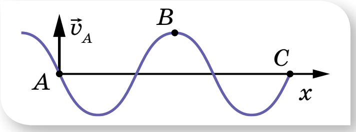


А 4 см **Б** 6 см **В** 8 см **Г** 12 см

4. Тягарець, підвішений на пружині, робить вертикальні коливання. Укажіть правильне твердження.

А що більшою є маса тягарця, то більша частота коливань
Б потенціальна енергія пружини максимальна, коли тягарець проходить положення рівноваги
В що більшою є жорсткість пружини, то меншим — період коливань
Г швидкість тягарця максимальна, коли тягарець перебуває в нижній точці

5. На малюнку зображено поперечну хвилю в певний момент часу. Як напрямлена швидкість у точці С?



А угору **Б** униз **В** ліворуч **Г** праворуч

6. Амплітуда коливань матеріальної точки — 2 см, період коливань — 0,2 с. Укажіть на рівняння коливань, якщо вони почалися з амплітудного відхилення від положення рівноваги.

А $x = 2 \sin 5\pi t$
Б $x = 0{,}02 \cos 10\pi t$
В $x = 0{,}02 \sin 0{,}1\pi t$
Г $x = 0{,}02 \sin 10\pi t$

7. Звукова хвиля переходить із води у металевий борт судна. Укажіть, як змінюються характеристики хвилі.

А частота хвилі збільшується, швидкість поширення не змінюється
Б частота хвилі не змінюється, швидкість поширення збільшується
В частота хвилі зменшується, довжина хвилі збільшується
Г частота хвилі не змінюється, довжина хвилі зменшується

8. У нерухомому ліфті висить маятник, період коливань якого 1 с. З яким прискоренням рухається ліфт, якщо період коливань цього маятника став дорівнювати 1,1 с. Відповідь запишіть у метрах за секунду в квадраті.

9. Матеріальна точка масою 5 г здійснює гармонічне коливання із частотою 0,5 Гц. Амплітуда коливань — 3 см. Визначте: 1) швидкість точки в момент часу, коли зміщення 1,5 см; 2) максимальну силу, що діє на точку; 3) повну енергію точки, що коливається.

10. На озері з човна в безвітряну погоду скинули якір. Дослідник, який стояв на березі, полічив, що хвиля досягла берега за 1 хв, а за 10 с відбувся 21 сплеск, рахуючи з першого. Відстань між сусідніми гребенями хвиль становила 0,7 м. Визначте відстань від човна до берега.

Розділ 2

ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

У 1905 році в німецькому науковому журналі «Анналeн дер фізик» з'явилася невелика стаття обсягом 30 друкованих сторінок двадцятишестирічного Альберта Ейнштейна «До електродинаміки рухомих тіл», у якій майже повністю було викладено спеціальну теорію відносності, яка зробила невдовзі молодого експерта патентного бюро знаменитим.

Спеціальна теорія відносності з'явилася не на порожньому місці, вона ґрунтується на дослідженнях рухомих тіл, а саме руху світла, який, починаючи із середини XIX століття досліджувало багато фізиків.

Релятивістська механіка — це механіка тіл, які рухаються зі швидкостями, близькими до швидкості світла, $v \approx c$. З такими швидкостями можуть рухатися частинки мікросвіту.

Основою релятивістської механіки є постулати спеціальної та загальної теорій відносності.

§ 27 Основи спеціальної теорії відносності

Принцип відносності Галілея. Основою уявлень класичної фізики про простір і час було тлумачення їх як самостійних сутностей, які існують відокремлено одне від одного. Тобто час плине сам по собі, незалежно від особливостей простору, у якому відбуваються фізичні явища і процеси. Простір є «вмістилищем» усього, що існує довкола нас і за своїми властивостями він однорідний (у будь-якій його точці властивості однакові) та ізотропний (однаковий в усіх напрямках). Інтервал часу, протягом якого відбувається певна подія, є однаковим для будь-якого спостерігача. Як наслідок, дві події, одночасні для одного спостерігача, неминуче будуть одночасними і для будь-якого іншого.

Класичні уявлення про простір і час давали змогу знайти зручну систему відліку, відносно якої простіше було описати явища, що відбуваються в безмежному однорідному просторі й рівномірному плині часу. На підставі такого розуміння простору і часу Галілео Галілей сформулював принцип відносності, згодом покладений Ісааком Ньютоном в основу класичної механіки.

Принцип відносності Галілея: жодними дослідами, що проводяться всередині інерціальної системи відліку, неможливо встановити, перебуває ця система в спокої чи рухається рівномірно і прямолінійно.

Мал. 129. До принципу відносності Галілея

Людина в каюті корабля може встановити факт руху тільки тоді, коли вона спостерігатиме зовнішні тіла: острів, берег моря тощо (мал. 129).

Водночас принцип відносності Галілея стверджував, що усі інерціальні системи відліку цілком рівноправні, тобто час у всіх інерціальних системах відліку вимірюють однаково, маса тіла не змінюється ($m = \text{const}$), його прискорення і сили взаємодії не залежать від швидкості руху інерціальної системи відліку. Виходячи з цього, принцип відносності Галілея можна сформулювати і так:

у будь-яких інерціальних системах відліку усі механічні явища відбуваються однаково за одних і тих самих початкових умов.

Постулати спеціальної теорії відносності. Після того як учені переконалися, що в усіх інерціальних системах механічні явища протікають однаково, у кінці XIX — на початку XX ст. були здійснені експерименти, спрямовані на виявлення таких явищ природи, які б змінювалися під час переходу з однієї інерціальної системи в іншу. Проте жодна спроба не була успішною. Теплові, електричні, оптичні, магнітні й атомні явища відбуваються в усіх інерціальних системах відліку однаково. Однаково протікають також хімічні й біологічні процеси.

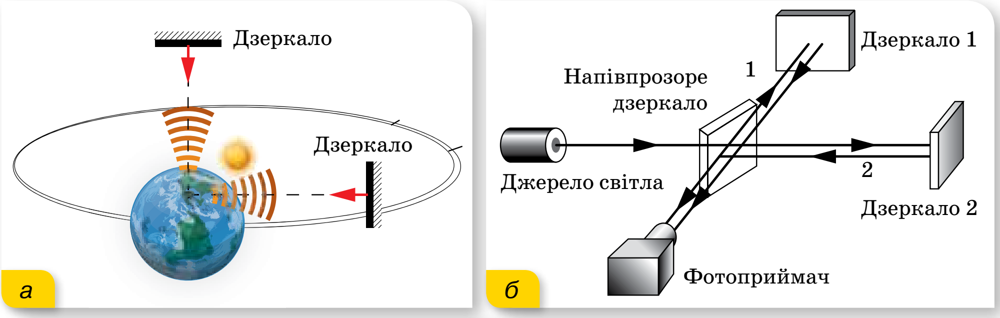
У 1905 р. Альберт Ейнштейн висловив припущення про те, *що незалежність явищ природи від вибору інерціальної системи відліку є одним з основних законів Всесвіту*.

Цей постулат став першим основним положенням *спеціальної теорії відносності* (*СТВ*).

Друге положення СТВ було сформульовано як результат дослідів з вимірювання швидкості світла. Швидкість світла у вакуумі $c = (2{,}997928 \pm 0{,}000004) \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Виникає питання: відносно якої системи відліку визначено цю величину?

У 1881 р. американські вчені Альберт Майкельсон і Генрі Морлі провели експеримент, яким намагалися виявити вплив швидкості руху Землі навколо Сонця на швидкість поширення світла від джерела, розташованого на Землі. Пригадаємо, що згідно з класичним законом додавання швидкостей, коли тіло рухається відносно інерціальної системи зі швидкістю $\vec{v}_1$, а сама система рухається зі швидкістю $\vec{v}_2$ відносно нерухомої системи, то швидкість v тіла відносно нерухомої системи відліку дорівнює $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Оскільки Земля рухається по орбіті у світовому просторі (який вважався абсолютним і нерухомим), то на швидкість поширення світлового сигналу має впливати швидкість руху самої Землі. В експерименті визначали час, за який світло проходить одну й ту саму відстань у прямому і зворотному напрямках у двох випадках. В одному — світловий сигнал посилався у напрямку добового обертання Землі, а в другому — перпендикулярно до напрямку обертання Землі (мал. 130).



Мал. 130. Схема: *а* — досліду; *б* — інтерферометра Майкельсона-Морлі

Якби швидкість поширення світлового сигналу залежала від швидкості руху джерела, то цей час був би різним. Вимірювання проводилися дуже точно за допомогою спеціального приладу — інтерферометра Майкельсона-Морлі. Експерименти ставили в різний час доби і в різні пори року, а результат завжди був негативним — *швидкість поширення світлового сигналу була однаковою й не залежала від швидкості руху джерела.*

Отже, було встановлено, що класичний закон додавання швидкостей не справджується для явищ, пов'язаних із поширенням світла. Із цього робимо висновок і про обмеженість застосування перетворень Галілея, з яких випливає, що при складному русі швидкості руху тіл алгебраїчно додаються.

Виявились певні суперечності, які не можна було вирішити, застосовуючи закони механіки Ньютона. Учені намагалися подолати ці труднощі різними шляхами. Найреволюційнішим шляхом до розв'язання проблем підійшов Альберт Ейнштейн: не потрібно придумувати різні гіпотези — необхідно ці факти сприймати як постулати (постулат — положення, яке не можна довести логічно, це результат узагальнення дослідних фактів).

Отже, основні ***постулати спеціальної теорії відносності*** формулюються так:

1. Усі закони фізики в усіх інерціальних системах відліку однакові (принцип відносності Ейнштейна).
2. Швидкість поширення світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела чи приймача, тобто є однаковою в усіх інерціальних системах відліку.

З другого постулату випливає, що швидкість поширення світла є максимально можливою швидкістю передавання взаємодії у природі. Жоден сигнал, жодна взаємодія тіл не може поширюватися зі швидкістю, більшою за швидкість світла.

Висновки теорії відносності є основою *релятивістської* (від. англ. *relativity* — відносність) *механіки,* що вивчає закони руху тіл, швидкість яких наближається до швидкості світла.

У повсякденному житті ми стикаємося тільки з рухом тіл зі швидкостями, набагато меншими за швидкість світла, коли всі релятивістські ефекти практично не помітні. Ми звикли до повільних рухів і позбавлені можливості уявити собі процеси за швидкостей, близьких до швидкості світла. Такі процеси недоступні ані нашим органам чуттів, ані нашій уяві.

Але, описуючи реальні рухи заряджених частинок (електронів, протонів, α-частинок тощо) у прискорювачах (пристроях для отримання частинок з великою кінетичною енергією — циклотронах, бетатронах, синхрофазотронах, генераторах Ван-де-Граафа тощо) та частинок високих енергій у космічних променях, виникає необхідність використовувати співвідношення саме спеціальної теорії відносності. Адже швидкість руху цих частинок наближається до швидкості поширення світла й найчастіше її виражають у частках від швидкості світла (наприклад, $v = 0{,}99\,c$, де c — швидкість поширення світла у вакуумі).

Щоб відважитися на формулювання постулатів теорії відносності, Альберту Ейнштейну потрібна була велика наукова сміливість, оскільки ці постулати суперечили класичним уявленням про простір і час.

Ці два постулати змусили переглянути спрощені уявлення про простір і час, якими керувалася класична фізика, і дати узагальнене їх тлумачення.

Насамперед простір і час потрібно розглядати як єдиний континуум — простір-час. За таких умов кожне явище, наприклад, розглядається в чотиривимірній системі координат (x, y, z, t), тобто кожній події, кожному явищу відповідає не лише просторова визначеність їх координат, а й пов'язана з ними часова характеристика їх перебігу. Це не механічне об'єднання простору й часу, коли до системи координат долучається годинник, а спільна, поєднана інтерпретація явищ у просторово-часовому вимірі. Таке розуміння простору й часу (вірніше простору-часу) привело до зміни сутнісних положень фізики, зокрема одночасності подій, сповільнення часу та скорочення довжини.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

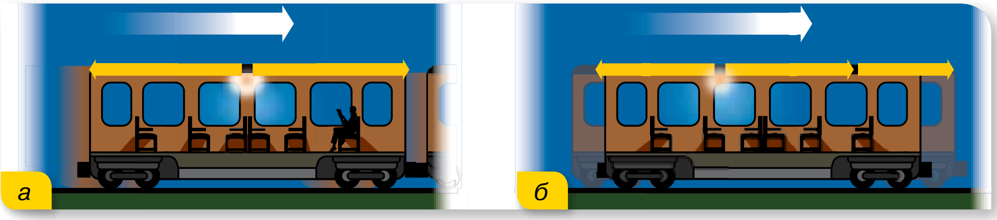
1. Сформулюйте постулати спеціальної теорії відносності.
2. Чим відрізняється перший постулат СТВ від принципу відносності в класичній механіці?

§ 28 Відносність часу

Відносність одночасності. Теорія відносності спростувала твердження класичної фізики про одночасність подій для будь-якого спостерігача. Розглянемо поширення світлового променя одночасно в нерухомій і рухомій системах відліку.

Нехай із середини потяга, що рівномірно рухається, посилається світловий сигнал в обидва боки (мал. 131). Спостерігач у потязі помітить, що світловий сигнал досягнув голови і хвоста потяга одночасно (мал. 131, *а*). Спостерігач, який стояв на платформі, зазначив, що сигнал досягнув хвоста потяга раніше, ніж голови (мал. 131, *б*). Оскільки за другим постулатом швидкість поширення світлового сигналу однакова в обох інерціальних системах відліку, це означає, що *час у цих системах не однаковий*: *що швидше рухається система відліку відносно спостерігача, то повільніше, з його погляду, у ній відбуваються події.*

До початку XX ст. ніхто не мав сумнівів щодо абсолютності часу. Дві події, одночасні для жителів Землі, одночасні й для жителів будь-якої космічної цивілізації. Тобто одночасність у ньютонівській механіці вважається абсолютною. Але теорія відносності довела, що це не так. Уявлення про абсолютний час, який тече раз і назавжди заданим темпом, цілком незалежно від матерії та її руху, хибне.



Мал. 131. Приклад, що доводить неодночасність події

Події, одночасні в одній інерціальній системі відліку, не одночасні в інших інерціальних системах, що рухаються відносно першої. Одночасність подій — відносна.

Відносність інтервалів часу. Розглянемо такий уявний дослід. Припустимо, що на підлозі вагона розташоване джерело світла, а на стелі — дзеркало. Яким буде інтервал часу, протягом якого світло досягне стелі та, відбившись від дзеркала, повернеться назад?

Для спостерігача у вагоні (мал. 132, *а*) цей час дорівнює подвоєній відстані від підлоги до стелі (висота вагона BD), поділеній на швидкість світла c: $t_0 = \dfrac{2BD}{c}$.

Час, виміряний за годинником, який рухається разом з тілом (у системі відліку, пов'язаній із цим тілом), називають **власним часом** t_0.

Як бачимо, цей інтервал часу не залежить від того, нерухомий вагон чи рухається він рівномірно і прямолінійно.

Розв'яжемо задачу відносно нерухомого спостерігача (в іншій інерціальній системі відліку), відносно якого вагон рухається зі швидкістю $\vec{v}$ праворуч (мал. 132, *б*).

Відносно нерухомого спостерігача світло проходить відстань $2AB$. Отже, час проходження світлового сигналу дорівнює $t = \dfrac{2AB}{c}$. Оскільки гіпотенуза AB більша за катет BD, то $t > t_0$. І що більшою є швидкість руху вагона v, то відчутніша ця нерівність.

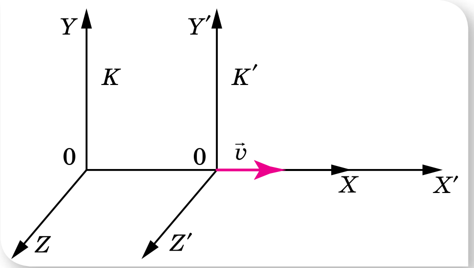
Мал. 132. Поширення світлового сигналу відносно: *а* — спостерігача, що рухається разом із вагоном; *б* — відносно нерухомого спостерігача

Установимо математичну залежність між t і t_0. Для цього обчислимо відповідні відстані $AB = ct$, $BD = ct_0$, $AD = vt$ і застосуємо теорему Піфагора: $(ct)^2 = (ct_0)^2 + (vt)^2$. Перетворимо цей вираз: $(c^2 - v^2)t^2 = c^2 t_0^2$, звідки $t^2 = \dfrac{c^2 t_0^2}{c^2 - v^2} = \dfrac{t_0^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, або $t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Оскільки $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} < 1$, то $t > t_0$, тобто *відносно нерухомого спостерігача подія, що відбувається в рухомій системі відліку, триває довше*. Або, іншими словами, власний інтервал часу менший від інтервалу часу, виміряного в іншій інерціальній системі відліку: $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Таким чином, простір і час, які в ньютонівській механіці вважалися незалежними, у релятивістській механіці взаємопов'язані та є чотиривимірним простором-часом.

Перетворення Лоренца. Нехай відбувається деяка подія. У системі K вона характеризується значеннями координат і часу x, y, z, t. У системі K', яка рухається відносно системи K з постійною швидкістю $\vec{v}$ уздовж осі X (мал. 133), ця подія характеризується значеннями x', y', z', t'.



Мал. 133. Інерціальні системи відліку

Нагадаємо, що співвідношення $x = vt + x'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$ називають *перетвореннями Галілея*. Ці рівняння дають змогу перейти від координат і часу в одній інерціальній системі відліку до координат і часу в іншій інерціальній системі. Координати тіла залежать від системи відліку, тобто є величинами відносними. Рівність $t = t'$ виражає абсолютний характер часу.

Згідно з теорією відносності час є величиною відносною, тому перетворення Галілея мають бути замінені більш загальними — перетвореннями Лоренца (Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) — нідерландський фізик-теоретик).

Зв'язок між величинами, що характеризують подію в різних інерціальних системах відліку, називають **перетвореннями Лоренца:**

$$x' = \frac{x \pm vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},\ y = y',\ z = z';\ t' = \frac{t \pm \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Знак «+» у чисельнику беруть, переходячи від системи K' до системи K, знак «−» — від системи K до системи K'. Це зумовлено тим, що система K' рухається відносно системи K зі швидкістю v, водночас можна вважати, що система K рухається відносно системи K' зі швидкістю $-v$.

Як видно, у перетвореннях Лоренца взаємопов'язані координата x та час t. Для швидкостей $v << c$ перетворення Лоренца практично не відрізняються від перетворень Галілея.

Таким чином, простір і час, які в ньютонівській механіці вважалися незалежними, у релятивістській механіці взаємопов'язані та є чотиривимірним простором-часом. Будь-яка подія характеризується чотирма величинами: координатами x, y, z, які вказують на те, ***де*** вона відбулася, і часом t, який вказує на те, ***коли*** вона відбулася. Значення цих чотирьох величин залежать від системи відліку, у якій спостерігається подія.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Чому виникла необхідність у перегляді уявлень про простір і час?
2. Чому не можна стверджувати, що події, які відбуваються одночасно в одній системі відліку, є одночасними і в іншій?
3. Яка тривалість подій у різних інерціальних системах відліку?
4. У чому відмінність між перетвореннями Галілея та Лоренца?

§ 29 Відносність довжин

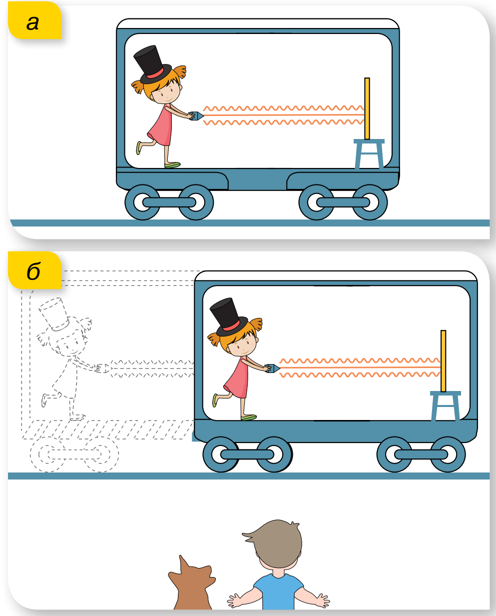
Відносність довжин. Довжина відрізка, яка в ньютонівській механіці вважалась абсолютною, також залежить від швидкості руху тіла відносно певної системи відліку.

Адже що означає — виміряти довжину відрізка? Це означає — одночасно вказати координати його початку і кінця: $l = x_2 - x_1$. Але, як ми вже знаємо, поняття одночасності є відносним. Події, одночасні в одній системі відліку, неодночасні в іншій.

Альберт Ейнштейн показав, що уявлення про абсолютну довжину відрізка виникає в нас лише тому, що ми зазвичай маємо справу зі швидкостями, набагато меншими від швидкості світла. Якщо ж система рухається відносно спостерігача зі швидкістю, близькою до швидкості світла, і в ній міститься лінійка завдовжки l_0, то з погляду такого спостерігача довжина лінійки буде меншою: $l < l_0$.

Розглянемо це детальніше. Нехай лінійка лежить у вагоні, що рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\vec{v}$. Лінійка розташована вздовж прямої, у напрямку якої відбувається рух вагона. На одному кінці лінійки закріплено джерело світла, а на іншому — дзеркало. Довжину лінійки визначимо за часом проходження світла вздовж лінійки у прямому і зворотному напрямках (мал. 134).

Для спостерігача у вагоні (мал. 134, *а*) цей час (власний час) дорівнює $t_0 = \frac{2l_0}{c}$, звідки $l_0 = \frac{ct_0}{2}$. Для спостерігача, відносно якого вагон, а відповідно і дзеркало, віддаляється (мал. 134, *б*) зі швидкістю $\vec{v}$, час руху світлового сигналу до дзеркала буде $t_1 = \frac{l + vt_1}{c}$, а від дзеркала — $t_2 = \frac{l - vt_2}{c}$. Загальний час руху $t = t_1 + t_2$. Розв'язуючи систему з трьох рівнянь, отримуємо: $t = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$, звідки $l = \frac{c^2 - v^2}{2c}t$. (1)



Мал. 134. Приклад, що ілюструє скорочення довжини

Щоб знайти зв'язок між l та l_0, пригадаємо, що відносно спостерігача у вагоні час руху сигналу — $t_0 = \frac{2l_0}{c}$, а для спостерігача, відносно якого вагон рухається, ця подія відбувається повільніше: $t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, або $t = \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Підставляючи останній вираз у формулу (1), отримуємо:

$$l = \frac{c^2 - v^2}{2c}t = \frac{c^2 - v^2}{2c} \cdot \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{c^2 - v^2}{c^2} \cdot \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Отже, якщо система рухається відносно нерухомого спостерігача зі швидкістю, близькою до швидкості світла, і в ній міститься лінійка завдовжки l_0, то з погляду нерухомого спостерігача довжина лінійки буде у $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ разів менша: $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Довжина відрізка не є поняттям абсолютним, вона залежить від тієї системи відліку, відносно якої відбувається вимірювання. Довжина тіла в системі відліку, відносно якої воно перебуває у спокої, ***називається власною довжиною*** l_0.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

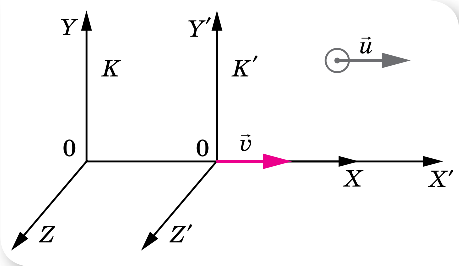
1. Чи впливає на вимірювання лінійних розмірів тіла рух системи, у якій відбувається вимірювання?
2. Що називають власним часом і власною довжиною?

§ 30 Релятивістський закон додавання швидкостей

Релятивістський закон додавання швидкостей. Новим релятивістським уявленням про простір і час відповідає новий закон додавання швидкостей. Очевидно, що класичний закон додавання швидкостей уже не дійсний, бо суперечить постулату про сталість світла у вакуумі. Справді, згідно з класичним законом додавання, якщо в потязі, що рухається зі швидкістю v, відправити в напрямку руху світловий сигнал, то відносно землі його швидкість має бути $c + v$, а це суперечить другому постулату СТВ.

Нехай тіло рухається відносно системи K' зі швидкістю $\vec{u}$. Сама система K' рухається відносно системи K, яка вважається нерухомою, з постійною швидкістю $\vec{v}$ уздовж осі X (мал. 135).

Позначимо швидкість цього самого тіла відносно нерухомої системи K літерою $\vec{w}$.



Мал. 135. До виведення релятивістського закону додавання

Тоді **релятивістський закон додавання швидкостей** матиме вигляд:
$\vec{w} = \dfrac{\vec{v} + \vec{u}}{1 + \dfrac{\vec{v}\vec{u}}{c^2}}$, тут $\vec{u}$ — швидкість руху тіла відносно рухомої системи відліку K', $\vec{v}$ — швидкість рухомої системи K', відносно нерухомої K, $\vec{w}$ — швидкість руху тіла відносно нерухомої системи відліку K.

Якщо $u << c$ та $v << c$, маємо класичний закон додавання швидкостей $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$.

Якщо $u = c$, то $w = \dfrac{v + c}{1 + \dfrac{vc}{c^2}} = c\dfrac{v + c}{v + c} = c$, як цього і вимагає другий постулат СТВ.

Релятивістський імпульс. Під час руху тіл з великими швидкостями виявляються й інші специфічні властивості. Так, з новими просторово-часовими уявленнями СТВ за великих швидкостей руху не узгоджуються закони механіки Ньютона. Зокрема, запис другого закону Ньютона

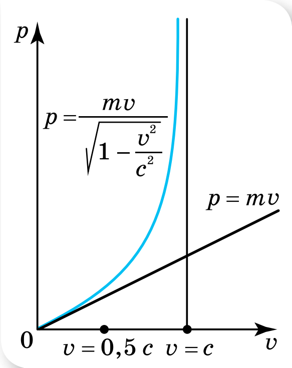
$\vec{F} = m\vec{a}$ не відповідає другому постулату теорії відносності. Справді, якщо $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, то за сталої сили $\vec{F}$ прискорення $\vec{a}$ теж буде сталим і за тривалий час ця сила могла б надати тілу як завгодно великої швидкості. Однак швидкість світла у вакуумі є граничною, і за жодних умов рухомі тіла не можуть її перевищити.

Ейнштейн показав, що запис другого закону Ньютона в імпульсній формі в релятивістській механіці такий самий, як і в класичній, $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$, але з урахуванням того, що формула для імпульсу набуває дещо іншого вигляду.

У класичній механіці імпульс тіла визначається формулою: $\vec{p} = m\vec{v}$ або $\vec{p} = m\dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$. Якщо в цій формулі замінити інтервал часу Δt власним інтервалом часу Δt_0, то отримаємо: $\vec{p} = m\dfrac{\Delta\vec{s}}{\Delta t_0}$, де $\Delta\vec{s}$ — переміщення тіла в тій системі відліку, у якій визначається імпульс (власній системі), а Δt_0— інтервал часу, виміряний за годинником, що рухається разом з тілом (власний час). Урахувавши те, що для власного часу виконується співвідношення $\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$, отримуємо релятивістську формулу для імпульсу $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Із цієї формули видно, що залежність імпульсу від швидкості є складнішою, ніж у ньютонівській механіці.

Залежність імпульсу тіла від швидкості зображено на графіку (мал. 136). Для швидкостей руху, малих порівняно з c, графік релятивістського імпульсу збігається з прямою $p = mv$, яка відображає залежність імпульсу від швидкості в класичній механіці.



Мал. 136. Залежності імпульсу від швидкості

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Чому класичний закон додавання швидкостей і другий закон динаміки Ньютона не узгоджуються з постулатами теорії відносності?
2. Як залежить імпульс тіла від його швидкості руху в спеціальній теорії відносності?

Приклади розв'язування задач

Під час розв'язування задач необхідно чітко встановити, яку систему відліку вважати рухомою, а яку — нерухомою. Визначити, яке саме тіло перебуває у стані спокою відносно рухомої системи відліку, і тоді параметри цього тіла вважати власними.

Задача. Система відліку K' рухається відносно системи відліку K зі швидкістю $\frac{2}{3}c$. Частинка рухається відносно системи відліку K' зі швидкістю $\frac{2}{3}c$. Визначте швидкість руху частинки в системі відліку K.

Дано:

$v = \frac{2}{3}c$

$u = \frac{2}{3}c$

w — ?

Розв'язання:

Оскільки рух усіх тіл відбувається в одному напрямку, то за релятивістським законом додавання швидкостей:

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}c}{1+\frac{\frac{2}{3}c\cdot\frac{2}{3}c}{c^2}};\, w = \frac{4c}{3\cdot\left(1+\frac{4}{9}\right)} = \frac{12}{13}c = 0,92\,c, \text{ тобто } w < c.$$

За класичним законом додавання швидкостей було б:

$$w = \frac{2}{3}c+\frac{2}{3}c = \frac{4}{3}c = 1,33\,c, \text{ тобто } w > c,$$

що неприпустимо, оскільки швидкість поширення світла у вакуумі є максимально можливою швидкістю передавання сигналу.

Відповідь: 0,92 c.

ВПРАВА 26

1. Тіло рухається відносно рухомої системи відліку зі швидкістю 0,2c, а відносно нерухомої — зі швидкістю 0,8c, де c — швидкість поширення світла у вакуумі. З якою швидкістю рухається система відліку відносно нерухомої системи?
2. Два тіла рухаються відносно нерухомого спостерігача рівномірно і прямолінійно у протилежних напрямках зі швидкостями 0,8c та –0,5c. Визначте відносні швидкості цих тіл за класичним і релятивістським співвідношеннями.
3. Частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкістю 0,9c. Визначте їх відносну швидкість.
4. За якої відносної швидкості руху релятивістське скорочення довжини рухомого тіла становить 25 %?
5. Яку швидкість повинно мати рухоме тіло, щоб його поздовжні розміри зменшились удвічі?
6. У скільки разів збільшується час існування нестабільної частинки за годинником нерухомого спостерігача, якщо вона рухається зі швидкістю 0,99c?

§ 31 Закон взаємозв'язку маси та енергії

Зв'язок між енергією спокою та масою тіла. Невдовзі після створення теорії відносності в невеликій роботі «Чи залежить інертність тіла від наявної в ньому енергії?» Альберт Ейнштейн вивів формулу $E_0 = mc^2$. Він розглянув енергію тіла, яке випромінює рівні порції електромагнітної енергії у двох протилежних напрямках. При цьому він розрахував цю енергію як у власній системі відліку тіла, так і в системі, що рухається зі швидкістю v відносно першої. І дійшов висновку, що інертна маса (її ще називають масою спокою тіла) змінюється на $\frac{\Delta E}{c^2}$. Цей висновок Ейнштейн узагальнив для будь-яких явищ природи.

Нині достеменно доведено, що ***повна енергія рухомого тіла*** дорівнює

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Відповідно ***нерухоме тіло має енергію спокою*** $E_0 = mc^2$.

Термін «повна енергія» в релятивістській механіці має інший зміст, ніж у ньютонівській. У ньютонівській механіці, як ви вже знаєте, повна енергія тіла — це сума кінетичної та потенціальної енергій тіла. У релятивістській механіці повна енергія — це сума кінетичної енергії тіла та його енергії спокою $E = E_к + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

У класичній механіці дослідження матерії ґрунтується на тому, що матерія поділяється на два види — речовину та поле. Основною характеристикою речовини є маса, а поля — енергія. Відповідно існують закон збереження маси та закон збереження енергії. Ейнштейн узагальнив поняття енергії спокою тіла як енергії, яка пропорційна його масі. Тим самим Ейнштейн об'єднав закони збереження маси та енергії в один ***закон збереження маси-енергії***. Іншими словами, ним було доведено еквівалентність маси тіла і його енергії спокою: маса тіла є мірою енергії, що міститься в ньому, $m = \frac{E_0}{c^2}$.

Так, 1 г маси будь-якого тіла еквівалентний $9 \cdot 10^{13}$ Дж енергії. Цієї енергії вистачило б для перетворення в пару 39 000 т води.

Дефект маси. Із взаємозв'язку маси й енергії випливає, що зміні енергії тіла відповідає зміна маси тіла, $\Delta E_0 = \Delta mc^2$.

Величину Δm називають *дефектом маси*.

Наприклад, під час нагрівання тіла збільшується його внутрішня енергія, отже, збільшується й маса тіла. Куля, що летить зі швидкістю 5000 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, набуває кінетичної енергії, отже, і збільшує свою масу. Зрозуміло, що ці зміни практично не відчуваються у звичайних умовах. Так, у наведеному прикладі з кулею, якщо її маса у стані спокою була 1 г, то за швидкості 5000 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ її повна маса стане 1,00000000001 г.

Достовірним підтвердженням правильності такого висновку стали експериментальні дані, отримані з дослідження взаємодії елементарних частинок.

У 9 класі, вивчаючи ядерні реакції, ви з'ясували, що є реакції, які відбуваються з виділенням величезної кількості енергії. Це пояснюється тим, що енергія спокою здатна перетворюватись у кінетичну енергію частинок у результаті ядерних та хімічних реакцій, якщо маса вихідної речовини більша за масу продуктів реакції.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. У чому полягає закон взаємозв'язку маси та енергії?
2. Чому єдиний закон збереження маси-енергії в класичній механіці розглядають як два закони збереження маси та енергії?
3. Що таке повна енергія тіла?

Приклади розв'язування задач

Оскільки релятивістські співвідношення справедливі для об'єктів мікросвіту, швидкість руху яких близька до швидкості світла, їхні маси й енергії прийнято виражати у спеціальних одиницях. Так, замість кілограма — одиниці маси, використовують *атомну одиницю маси* 1 а.о.м. $= 1{,}667 \cdot 10^{-27}$ кг, а енергію виражають в *електрон-вольтах*, 1 еВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача. Енергія спокою деякої частинки — 0,94 ГеВ. Кінетична енергія цієї частинки, яка розганяється у прискорювачі, дорівнює приблизно 76 ГеВ. До якої швидкості розганяється частинка?

Дано:

$E_к \approx 76$ ГеВ
$E_0 = 0{,}94$ ГеВ

υ — ?

Розв'язання:

Повна енергія тіла:

$$E = E_к + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}},$$

звідки $\dfrac{\upsilon^2}{c^2} = 1 - \dfrac{E_0^2}{(E_к + E_0)^2} = \dfrac{2E_0E_к + E_к^2}{(E_к + E_0)^2}$; $\upsilon = \dfrac{c}{E_к + E_0}\sqrt{E_к(2E_0 + E_к)}$.

Після підстановки даних: $\upsilon \approx 0{,}999\, c$.

Відповідь: $0{,}9999\, c$

ВПРАВА 27

1. Визначте швидкість частинки (у $\frac{м}{с}$), якщо її кінетична енергія вдвічі менша від її енергії спокою.
2. Визначте швидкість космічної частинки, якщо її повна енергія в k разів перевищує енергію спокою.
3. Визначте швидкість руху частинки (мезона), якщо її повна енергія в 10 разів більша за енергію спокою.
4. Яку частку швидкості поширення світла має становити швидкість руху частинки, щоб її кінетична енергія дорівнювала її енергії спокою?

5. Синхрофазотрон дає пучок протонів з кінетичною енергією 10 ГеВ. Яку частку швидкості поширення світла становить швидкість руху протонів у цьому пучку?
6. Енергія рухомого електрона вдвічі більша за його енергію спокою. Визначте кінетичну енергію електрона.
7. Визначте імпульс і кінетичну енергію електрона, який рухається зі швидкістю $0{,}9c$.

Перевірте себе (§ 27–31)

1. На ракеті, що стартувала із Землі й з великою швидкістю наближається до космічної станції, увімкнули прожектор, промінь світла від якого спрямований на космічну станцію. Порівняйте значення світла відносно Землі, станції та ракети й виберіть правильне твердження.
   А значення швидкості світла відносно Землі є найбільшим
   Б значення швидкості світла відносно Землі, станції та ракети є однаковими
   В значення швидкості світла відносно ракети є найбільшим
   Г значення швидкості світла відносно космічної станції є найбільшим

2. Закони класичної механіки справедливі в тих інерціальних системах відліку, відносно яких макроскопічні тіла рухаються зі швидкістю…
   А $v = c$
   Б $v < c$
   В $v << c$
   Г v — довільна

3. Джерело світла рухається до нерухомого спостерігача зі швидкістю $v = 0{,}5\ c$. Якою є швидкість світла відносно спостерігача?
   А c
   Б $1{,}5\ c$
   В $0{,}5\ c$
   Г 0

4. Яка фізична величина залишається незмінною в рухомих і нерухомих ІСВ?
   А енергія тіла
   Б імпульс тіла
   В проміжок часу між двома подіями
   Г заряд тіла

5. Виберіть величини, що належать до інваріантних (незмінних у разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої інерціальної системи відліку) величин у теорії відносності.
   А швидкість світла у вакуумі
   Б час
   В відстань
   Г маса

6. Дві ракети рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = v_2 = 0{,}75\ c$ відносно нерухомого спостерігача. Знайдіть швидкість зближення ракет за класичною та релятивістською формулами додавання швидкостей.

7. З якою швидкістю відносно Землі має рухатися космічний корабель, щоб його поздовжні розміри для земного спостерігача були в 2 рази менші від справжніх?

Розділ 3

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Молекулярною фізикою *називається розділ фізики, який вивчає будову, фізичні властивості та агрегатні стани речовини на основі їх мікроскопічної (молекулярної) будови. Молекулярна фізика користується так званим* статистичним методом*, який дає змогу визначити середні величини, що характеризують рух і взаємодію величезної сукупності молекул. Саме тому молекулярну фізику часто називають статистичною фізикою.*

Дослідженням різних властивостей тіл і змін стану речовини займається також ***термодинаміка****, яка користується* термодинамічним методом — *вивченням макроскопічних властивостей тіл і явищ без урахування їх внутрішньої будови.*

Обидва методи доповнюють один одного. Спільне їх використання дає найбільш повну характеристику властивостей систем, що складаються з величезної кількості частинок.

§ 32 Молекулярно-кінетична теорія будови речовини

Основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини. На основі досліджень багатьох учених у XX ст. було створено теорію будови речовини, так звану *молекулярно-кінетичну теорію*.

Молекулярно-кінетичною теорією (МКТ) називають теорію, яка пояснює будову та властивості тіл на основі закономірностей руху та взаємодії атомів і молекул.

Ця теорія прагне пов'язати характеристики руху та взаємодії окремих атомів і молекул з величинами, які описують властивості макротіл.

В основу молекулярно-кінетичної теорії речовини покладено *три положення*, сучасне формулювання яких таке:

1. *Будь-які речовини мають дискретну (переривчасту) будову. Вони складаються з найдрібніших частинок — молекул або атомів (йонів).*
2. *Молекули перебувають у стані безперервного хаотичного (невпорядкованого) руху. Цей рух називається тепловим і в загальному випадку є сукупністю поступального, обертального та коливального рухів.*
3. *Молекули взаємодіють одна з одною силами притягання й відштовхування. Природа цих сил — електромагнітна.*

Мал. 137. Електронний мікроскоп (*а*), фотографія атомів Літію (*б*)

Можна навести безліч фактів на підтвердження цих положень. Зокрема, пружність газів, твердих тіл і рідин, здатність рідин змочувати тверді тіла, процеси фарбування, склеювання, деформації твердих тіл тощо — свідчать про існування сил притягання й відштовхування між молекулами. У 1974 р. вперше вдалося сфотографувати окремі атоми та молекули за допомогою електронного мікроскопа.

Розміри та маси атомів і молекул. Нині за допомогою сучасних мікроскопів (електронних і тунельних) отримано достатню кількість фотографій різних видів молекул і атомів. На малюнку 137 зображено електронний мікроскоп і фотографію атомів Літію, отриману за його допомогою. Світлі точки на фотографії — це зображення атомів Літію. Знаючи збільшення мікроскопа, можна оцінити розміри атомів Літію.

Цікавий факт виявився, коли вчені визначили розміри атома та розміри його ядра. Діаметр атома становить близько 10^{-10} м, а діаметр ядра в різних атомів — $10^{-14} \div 10^{-15}$ м, тобто діаметр ядра в 10 000 разів менший від діаметра всього атома.

Оскільки маси молекул неорганічних речовин дуже малі, то в розрахунках зручніше використовувати не абсолютні значення мас, а відносні. Для зручності розрахунків ввели поняття *відносної атомної* (*молекулярної*) *маси*.

Відносною атомною масою речовини A_r називають відношення маси атома m_0 даної речовини до $\frac{1}{12}$ маси атома Карбону C^{12}: $A_r = \dfrac{m_0}{\frac{1}{12} m_0(C^{12})}$.

Величину $\frac{1}{12} m_0\,(C^{12})$ використовують для порівняння тому, що Карбон є одним із найпоширеніших елементів у природі, а ізотоп C^{12} — найстійкіший його ізотоп. Одиницею відносної атомної (молекулярної) маси є атомна одиниця маси (1 а. о. м.).

Абсолютні значення атомних мас різних хімічних елементів лежать у межах 10^{-25}–10^{-27} кг, а їхні відносні маси, наведені в періодичній таблиці хімічних елементів — у межах 1–100 а. о. м. (Для практичних розрахунків наведені в цій таблиці відносні атомні маси хімічних елементів ми будемо заокруглювати до найближчого цілого числа.)

Якщо речовина складається не з атомів, а з молекул, то її відносна молекулярна маса M_r дорівнює сумі відносних атомних мас атомів, які утворюють цю молекулу. Наприклад, для води (H_2O): $M_r = 1 \cdot 2 + 16 \cdot 1 = 18$ а. о. м.

Експериментально встановлено, що 1 а. о. м. $= 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг ($1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг — це $\frac{1}{12}$ маси атома Карбону). Оскільки в періодичній системі Менделєєва вказані відносні атомні маси елементів, то легко обчислити масу будь-якого атома чи молекули. Наприклад, маса молекули води:

$$m_{H_2O} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \cdot 18 = 29{,}88 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Кількість речовини. Кількість молекул у будь-якому макроскопічному тілі надзвичайно велика, тому в обчисленнях використовують не абсолютну кількість молекул у тілі, а відносну, тобто користуються порціями речовини, які мають однакову кількість молекул.

Кількість речовини ν — це фізична величина, яка визначається відношенням кількості молекул (атомів чи йонів) N у певному тілі до кількості N_A атомів у 0,012 кг Карбону: $\nu = \dfrac{N}{N_A}$.

Одиницею кількості речовини є моль: 1 моль.

Моль — одна із семи основних одиниць Міжнародної системи одиниць (СІ). В одному молі речовини міститься стільки ж структурних елементів (молекул, атомів), скільки атомів міститься в 0,012 кг ізотопу Карбону $^{12}_{6}C$. Отже, незалежно від агрегатного стану 1 моль речовини містить одну й ту саму кількість молекул, що дорівнює числу Авогадро: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

У 1811 р. італійський фізик і хімік Амедео Авогадро (1776–1856) відкрив важливий для фізики та хімії закон, згідно з яким за однакових температур і тисків у однакових об'ємах різних газів міститься однакова кількість молекул. Згідно із законом 1 кмоль будь-якого ідеального газу за *нормальних умов*[1] займає об'єм 22,4 м^3.

Авогадро, виходячи із цього закону, запропонував метод визначення атомних мас елементів і молекулярних мас речовин.

Молярна маса. Крім відносної молекулярної маси у фізиці та хімії широко використовують молярну масу M.

Молярна маса, M — фізична величина, яка визначається відношенням маси речовини m до кількості речовини ν: $M = \dfrac{m}{\nu}$.

Іншими словами, молярною масою називають масу речовини, взятої в кількості одного моля. Відповідно до цього означення молярна маса визначається добутком маси молекули та сталої Авогадро: $M = m_0 N_A$ або $M = M_r \cdot 10^{-3}\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

Молярна маса суміші, яка складається з n різних газів, визначається за формулою $M = \dfrac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2} + \ldots + \dfrac{m_n}{M_n}}$, де m_1, m_2, m_n — маси газів, а M_1, M_2, M_n — їх молярні маси.

Кількість атомів (або *молекул*) N, що містяться в речовині масою m, можна визначити за формулою $N = \dfrac{m}{M} N_A = \nu N_A$.

Усі величини, означені в цьому параграфі, називаються мікроскопічними параметрами, оскільки вони характеризують мікроскопічну будову речовини. Молярну масу визначають хімічними методами. Стала Авогадро з високою точністю визначена кількома фізичними методами. Маси молекул і атомів з високою точністю визначають за допомогою *масспектрографа*. Це прилад, у якому за допомогою електричних і магнітних полів відбувається розділення заряджених частинок (йонів) у просторі залежно від їх маси та електричного заряду.

Сучасні методи дослідження будови речовини. Наноматеріали. Потреби людини в різних матеріалах постійно зростають, але ресурси природних речовин на планеті обмежені. Друга половина XX ст. стала періодом інтенсивного пошуку, дослідження й виробництва штучних матеріалів. Це — полімери і пластмаси, створені на основі полімерів (поліетилен, поліпропілен, полістирен, тефлон, поліметилметакрилат, полівінілацетат,

[1] *Нормальні умови* (*н.у.*) — стандартні фізичні умови, які характеризуються тиском $p = 101\,325$ Па (760 мм рт. ст.) і температурою $T = 273{,}15$ К ($t = 0$ °С).

епоксидні смоли, каучуки й волокна та ін.). Важливою умовою сталого розвитку є створення новітніх матеріалів на основі біосировини.

Сучасні матеріали вражають розмаїттям (мал. 138). Їхні унікальна структура і властивості зумовлюють створення не лише принципово нових продуктів, а й галузей науки та індустрії, наприклад нанотехнології. ***Нанотехнології*** — це технології, основані на маніпуляції окремими атомами та молекулами для побудови структур з наперед заданими властивостями. Властивості наносистем багато в чому відрізняються від властивостей більших об'єктів, що складаються з тих самих атомів і молекул. Наприклад, наночастинки платини набагато ефективніше очищають автомобільні викиди від токсичних забруднювачів, ніж звичні платинові каталізатори. Одношарові та багатошарові графітні циліндри нанометрової товщини, так звані вуглецеві нанотрубки, прекрасно проводять електрику й тому, можуть стати заміною мідним провідникам. Нанотрубки також дозволяють створювати композитні матеріали виняткової міцності та принципово нові напівпровідникові й оптоелектронні пристрої. На сучасному етапі нанотехнології використовують під час виробництва особливих сортів скла, на яких не осідає бруд (застосовується в автомобіле- й авіабудуванні), для створення одягу, який неможливо забруднити або пожмакати. Особливого значення набуває використання нових пристроїв на основі нанотехнологій у медицині, які можуть маніпулювати на клітинному рівні.

Створенню нових речовин сприяє те, що сучасні методи експериментальних досліджень структури речовини надзвичайно різноманітні — від нескладних визначень дефектів кристалічної будови твердих тіл

Мал. 138. Сучасні матеріали

за допомогою порівняно простих оптичних мікроскопів до досліджень нанокристалічної структури за допомогою сучасних електронних мікроскопів.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Обґрунтуйте вислів «Вчення про будову речовини лежить в основі всіх природничих наук».
2. Сформулюйте основні положення молекулярно-кінетичної теорії.
3. Наведіть факти, що підтверджують положення молекулярно-кінетичної теорії.
4. Опишіть будову атома. (Як описується атом у квантовій фізиці? Для відповіді скористуйтесь додатковими джерелами.)
5. Чому молекулярна фізика використовує відносні величини для вимірювання маси?

Експериментуємо

1. Визначте, скільки молекул містить вода в склянці. (Обладнання: посудина з водою, склянка, мензурка.)
2. Визначте кількість речовини, що міститься в певному тілі. (Обладнання: досліджуване тіло (залізне, мідне тощо), терези з важками.)
3. Визначте кількість речовини, що міститься в певному тілі правильної геометричної форми. (Обладнання: досліджуване тіло правильної геометричної форми (залізне, мідне тощо), лінійка (штангенциркуль), таблиці (густин, періодичної системи хімічних елементів).)

Виконуємо навчальні проекти

- Дослідне підтвердження основних положень молекулярно-кінетичної теорії речовини.
- Рециклінг як цивілізований спосіб утилізації твердих побутових відходів.

Приклади розв’язування задач

Задача. Яку частину об’єму газу за нормальних умов займає власний об’єм молекул і яка середня відстань між ними? Вважайте, що діаметр молекули газу $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано:

$d = 3 \cdot 10^{-10}$ м

$V_0 = 22{,}4$ л $= 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ м^3

$\frac{V}{V_0}$ — ? L — ?

Розв’язання:

Об’єм однієї молекули $V_м \approx d^3$. Оскільки в 1 молі речовини міститься N_A молекул, то об’єм всіх молекул 1 моля газу $V = d^3 N_A$.

Згідно із законом Авогадро за нормальних умов об’єм 1 моля газу становить $V_0 = 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ м^3.

Тоді $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{d^3 N_A}{V_0} = \dfrac{(3 \cdot 10^{-10}\text{м})^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}\text{моль}^{-1}}{2,24 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^3} = 7 \cdot 10^{-4} = 0,07\,\%$.

Щоб визначити відстань між молекулами, спочатку визначимо, скільки молекул міститься в 1 м^3 газу: $N = \nu N_A$. Оскільки в $V_0 = 2,24 \cdot 10^{-2}$ м^3 міститься 1 моль газу, то в 1 м^3 $\nu = \dfrac{1\text{моль} \cdot 1\ \text{м}^3}{V_0}$. Отже,

$$N = \frac{N_A}{V_0} = \frac{6,02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}}{2,24 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^3} = 2,7 \cdot 10^{25}.$$

Якщо припустити, що молекули розташовані рівномірно по всьому об'єму куба, то на 1 м висоти припадає $\sqrt[3]{2,7 \cdot 10^{25}} = 3 \cdot 10^8$ шарів молекул. Отже, відстань між шарами і між молекулами $L = \dfrac{1\ \text{м}}{3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-9}$ м. Тобто відстань між молекулами на порядок більша за їхні лінійні розміри.

Відповідь: 0,07 %; $3 \cdot 10^{-9}$ м.

ВПРАВА 28

1. Мікроскопічна порошинка вуглецю має масу 0,1 нг. Скільки молекул у ній?
2. На виріб, поверхня якого 20 см^2, нанесено шар срібла завтовшки 1 мкм. Скільки атомів срібла міститься в покритті?
3. Скільки молекул міститься: в 1 г заліза; в 1 г водню; в 10 г кисню?
4. Скільки молей містять: 50 г заліза; 50 г кисню?
5. Визначте масу молекул азоту, кисню, води.
6. Знаючи сталу Авогадро N_A, густину ρ певної речовини та її молярну масу M, виведіть формули для розрахунку кількості молекул в одиниці маси цієї речовини, в одиниці об'єму, у тілі масою m, у тілі об'ємом V.
7. Вважаючи, що діаметр молекули водню становить близько $2,3 \cdot 10^{-10}$ м, обчисліть, якої довжини вийшла б нитка, якби всі молекули, що містяться в 1 мг цього газу, були розташовані в один ряд упритул один до одного. Зіставте довжину цієї нитки із середньою відстанню від Землі до Місяця.
8. Вода масою 200 г, яка була налита у склянку, цілком випарувалася за 20 діб. Скільки в середньому молекул води вилітало з її поверхні за 1 с?
9. В озеро, що має середню глибину 10 м і площу поверхні 20 км^2, кинули кристалик кухонної солі масою 0,01 г. Скільки молекул цієї солі виявилося б у наперстку води об'ємом 2 см^3, зачерпнутої з озера, якщо вважати, що сіль, розчинившись, рівномірно розподілилася в усьому об'ємі води озера?
10. Кристал кухонної солі має кубічну форму і складається з йонів *Na* і *Cl*, які чергуються. Визначте середню відстань d між їх центрами, якщо густина солі $\rho = 2200\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.
11. Вважаючи, що повітря переважно складається з кисню й азоту, визначте процентний (ваговий) вміст цих газів в атмосфері. Молярна маса азоту $M_1 = 0,028\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$, кисню $M_2 = 0,032\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$, повітря $M_3 = 0,029\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$.

§ 33 Взаємодія молекул. Пояснення агрегатних станів на основі молекулярно-кінетичної теорії

Природа сил міжмолекулярної взаємодії. З проявом сил міжмолекулярної взаємодії ми ознайомились, вивчаючи механіку (пригадайте природу сили тертя та сили пружності).

Згідно з третім положенням молекулярно-кінетичної теорії, молекули взаємодіють одна з одною силами електромагнітної природи. Хоча молекули є електронейтральними, до їх складу входять різнойменно заряджені частинки — ядро та електрони. Як відомо, однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні — притягаються, тому між молекулами одночасно діють сили і притягання, і відштовхування. Крім того, між рухомими зарядженими частинками атомів і молекул є магнітна взаємодія, яка робить свій внесок у рівнодійну сил притягання й відштовхування молекул.

Сили притягання й відштовхування існують одночасно, але, як показують досліди, залежать від відстаней між частинками по-різному. Теоретичні розрахунки доводять, що сили відштовхування між двома молекулами залежать від відстані між ними за законом $F_{\text{відшт}} \sim \dfrac{1}{r^{13}}$, а сили притягання – $F_{\text{прит}} \sim \dfrac{1}{r^{7}}$.

Кінетична і потенціальна енергія молекул. Молекули тіла можуть мати різні швидкості, тому для характеристики стану тіла використовують середню кінетичну енергію поступального руху молекул $E_{\text{к}}$. Оскільки між молекулами є сили взаємодії, то молекули тіла, крім кінетичної, мають потенціальну енергію $E_{\text{п}}$. Вважатимемо, що потенціальна енергія відокремленої молекули, яка не взаємодіє з іншими молекулами, дорівнює нулю. Тоді під час взаємодії двох молекул потенціальна енергія, зумовлена силами відштовхування, буде додатною, а силами притягання — від'ємною, оскільки, зближуючи молекули, для подолання сил відштовхування треба виконати певну роботу, а сили притягання, навпаки, самі виконують роботу.

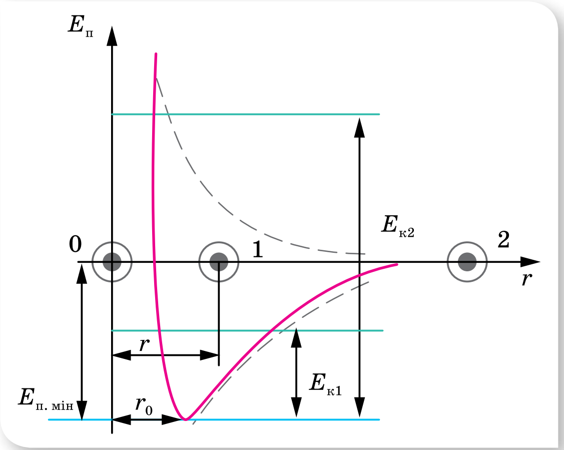
На малюнку 139 наведено залежність зміни потенціальної енергії взаємодії двох молекул від відстані між ними. Частину кривої потенціальної енергії в околі її найменшого значення називають *потенціальною ямою*, а найменше значення потенціальної енергії $E_{\text{п.мін}}$ — *глибиною* потенціальної ями (або *енергією зв'язку*).

Енергія зв'язку $E_{\text{п.мін}}$ визначається величиною роботи, яку потрібно виконати проти сил притягання, щоб молекули, які перебували в рівноважному стані, віддалилися на нескінченно велику відстань. Іншими словами, глибина потенціальної ями має простий фізичний зміст: «щоб викотитися з ями, необхідна енергія, що дорівнює глибині ями».

Повна енергія, яка складається з кінетичної енергії молекул і їх потенціальної енергії взаємодії визначає ***внутрішню енергію тіла***. Співвідношення між двома складовими внутрішньої енергії — середньою кінетичною та середньою потенціальною енергіями — визначає той чи інший агрегатний стан речовини.

Повна енергія на будь-яких відстанях залишається сталою: $E_{пов} = E_к + E_п = \text{const}$.

Якби не було теплового руху ($E_к = 0$), молекули розмістилися б на відстані r_0, яка відповідає рівноважному стану, оскільки рівнодійна міжмолекулярних сил на цій відстані дорівнює нулю (мал. 139). Повна енергія в цьому разі дорівнює потенціальній енергії взаємодії.



Мал. 139. Графік залежності потенціальної енергії взаємодії молекул від відстані між ними

Оскільки молекули завжди мають кінетичну енергію (їх тепловий рух ніколи не припиняється), то відстань між ними безперервно змінюється. Якщо кінетична енергія $E_{к1}$ молекули буде меншою від $E_{п.мін}$, то молекула рухатиметься так, що значення її потенціальної енергії взаємодії лежатиме в межах потенціальної ями. До того ж сили взаємодії утримують молекули одна біля одної на деякій середній відстані r. Що більшою буде кінетична енергія молекули, то більшою стає середня відстань між молекулами.

Якщо кінетична енергія молекули $E_{к2}$ більша за $E_{п.мін}$, то вона подолає «потенціальний бар'єр» і відстань між молекулами може збільшуватись безмежно.

Слід зазначити, що характер зміни потенціальної енергії в усіх речовинах однаковий, але значення мінімальної потенціальної енергії $E_{п.мін}$ залежить від природи речовин та її агрегатного стану.

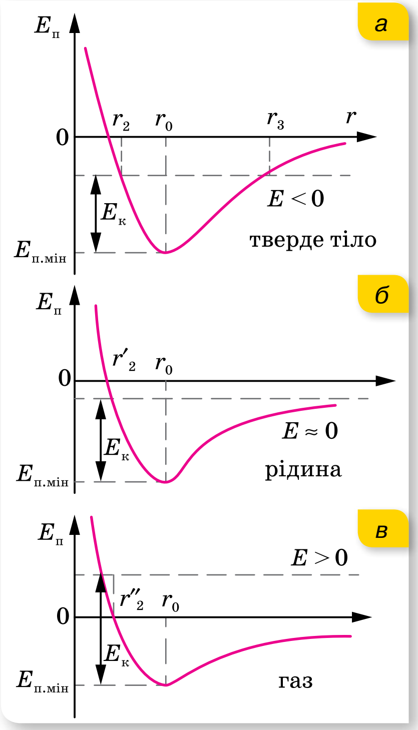
Агрегатні стани речовини. Одна й та сама речовина може перебувати у твердому, рідкому та газоподібному станах, які називають *агрегатними станами речовини*. Наприклад, лід, вода та водяна пара.

Властивості речовини залежать від руху її молекул і сили взаємодії між ними. Сили міжмолекулярної взаємодії намагаються утримати молекули на певних відстанях одна від одної, а хаотичний рух молекул намагається розкидати їх по всьому простору. Спільна дія обох цих чинників і визначає агрегатний стан кожної речовини.

Звернімося знову до графіка залежності потенціальної енергії взаємодії молекул від відстані між ними (мал. 139, с. 167). Доки кінетична енергія поступального руху молекул мала, молекула здійснює коливальний рух у межах потенціальної ями. Її кінетична енергія при цьому переходить у потенціальну енергію взаємодії, і навпаки. Швидкості окремих молекул можуть мати різні значення, відповідно різними будуть і значення кінетичної енергії, але поки середнє значення кінетичної енергії набагато менше від $E_{п.мін}$, молекули тільки коливаються навколо своїх середніх положень і речовина залишається у твердому стані.

Повна (внутрішня) енергія речовини у твердому стані визначається потенціальною енергією і має найменше значення порівняно з іншими агрегатними станами (за однакових значень температури) (мал. 140, *а*).

З підвищенням температури тіла кінетична енергія $E_к$ руху його молекул збільшується, а з наближенням $E_к$ до $E_{п.мін}$ речовина переходить у рідкий стан. Абсолютне значення внутрішньої енергії речовини в рідкому стані близьке до нуля (мал. 140, *б*). З подальшим нагріванням тіла $E_к$ поступального руху стає більшою за енергію зв'язку молекул $E_к > E_{п.мін}$, сили міжмолекулярної взаємодії вже не можуть утримати молекули одна біля одної, і вони розлітаються по всьому наданому їм простору (об'єму), речовина переходить у газоподібний стан. Внутрішня енергія визначається практично тільки значенням кінетичної енергії (мал. 140, *в*).



Мал. 140. Порівняння повної (внутрішньої) енергії в різних агрегатних станах речовини

Отже, якщо $E_к < E_{п.мін}$, то речовина перебуває у твердому стані, якщо $E_к \approx E_{п.мін}$ — стан речовини рідкий, якщо $E_к > E_{п.мін}$ — газоподібний.

Виникає запитання, чому за тієї самої температури одні речовини тверді, інші рідкі чи газоподібні? Пояснюється це тим, що, хоч вигляд потенціальної кривої для всіх речовин однаковий, глибина потенціальної ями і відстань рівноважного стану залежать від виду речовини.

Поняття фази речовини. Під час перетворення речовини з одного агрегатного стану в інший протягом деякого часу речовина може існувати в різних агрегатних станах (неоднорідна система). Для опису рівноважних станів неоднорідних систем вводять поняття *фази речовини*.

Однорідна речовина перебуває в одній фазі, наприклад, шматок льоду або краплина води. Якщо в закритій посудині міститься вода, у якій плавають шматочки льоду, то вода — це рідка фаза, лід — тверда, а суміш повітря й водяної пари над поверхнею води — газоподібна. Це приклад трифазної системи. Якщо до води додати олію, то матимемо систему з двома рідкими фазами, оскільки вода й олія не змішуються.

Різні агрегатні стани речовини є її різними фазами. Але поняття «фаза» — ширше, ніж агрегатний стан. Так, багато речовин у твердому агрегатному стані можуть мати кілька фаз, які відрізняються одна від одної своїми властивостями. Наприклад, алмаз і графіт є різними твердими фазами вуглецю.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Яка природа міжмолекулярних сил? Які властивості мають сили молекулярної взаємодії?
2. Як сили взаємодії між молекулами залежать від відстані між ними?
3. Назвіть основні визначальні властивості газів, рідин, твердих тіл.
4. Опишіть характер руху та розміщення молекул у газах, рідинах і твердих тілах.
5. Яке співвідношення між кінетичною та потенціальною енергіями молекул для газоподібного, рідкого і твердого станів речовини?
6. Яка середня відстань між молекулами в газах, рідинах і твердих тілах?

Експериментуємо

Візьміть два невеликі скельця (найкраще — предметні скельця від мікроскопа) і добре витріть їхні поверхні сухою ганчіркою, щоб на них не було пилу, жиру та вологи. Складіть поверхні разом і, тримаючи одне з них у горизонтальному положенні, переконайтеся, що вони «злиплися». Поясніть це «злипання» скелець. Чому вони не тримаються разом, якщо їх попередньо не протерти? Чому дослід не вдається зі шматочками дерева чи металу?

§ 34 Ідеальний газ у молекулярно-кінетичній теорії

Ідеальний газ. Як ми вже знаємо, вивчаючи фізичні явища, використовують метод моделювання. При цьому чинниками, які не мають суттєвого впливу на хід явища, нехтують, отримавши можливість теоретично (математично) досліджувати ідеалізоване явище. Якщо модель явища створено вдало, це дає змогу вивчати процеси, що відбуваються реально, і передбачати їх перебіг у різних випадках.

Сформульовані раніше основні положення молекулярно-кінетичної теорії речовини спочатку застосуємо до найпоширенішого і найпростішого за будовою стану речовини — газоподібного. Зробимо це, використавши модель — ***ідеальний газ*** — таку фізичну модель реального газу, у якій молекули вважають матеріальними точками, що майже не взаємодіють між собою. Точніше, в ідеальному газі:

а) силами міжмолекулярної взаємодії нехтують;

б) вважається, що взаємодія між молекулами відбувається тільки під час зіткнень молекул і є пружною взаємодією, між зіткненнями молекули рухаються рівномірно і прямолінійно;

в) власним об'ємом молекул нехтують, тобто вважають молекули матеріальними точками.

На основі експериментальних результатів дослідження газів, з використанням моделі ідеального газу була побудована *молекулярно-кінетична теорія газів*. Відразу зазначимо, що реальні гази набувають властивостей ідеального газу за значного розрідження, коли середня відстань між молекулами набагато більша за їхні розміри. Більшість реальних газів за кімнатної температури й нормального атмосферного тиску є близькими за своїми властивостями до ідеального газу. Найближчими до ідеального газу є водень і гелій (за нормальних умов).

За високих тисків і низьких температур реальний газ не можна вважати ідеальним, оскільки за цих умов відстані між молекулами такі, що сили притягання починають відігравати помітну роль. Істотно впливає на поведінку молекул за цих умов і власний об'єм молекул. Поведінка реального газу в такому разі описується законами, що відрізняються від законів ідеального газу. Детальніше про властивості реальних газів — у § 43.

Надалі, досліджуючи властивості газу, матимемо на увазі саме ідеальний газ (навіть якщо термін «ідеальний» не вказано).

Мікроскопічні й макроскопічні параметри газу. Основним завданням вивчення властивостей газів на основі молекулярно-кінетичної теорії є встановлення кількісних зв'язків між величинами, які вимірюються експериментально (тиском, температурою тощо), і характеристиками самих молекул. Останні називають *мікроскопічними параметрами*. До них належать: маса молекули, її швидкість і кінетична енергія хаотичного поступального руху. Параметри газу як молекулярної системи, що складається з величезної кількості частинок, називаються *макроскопічними параметрами*. Це об'єм, тиск і температура.

Іншими словами, завданням молекулярно-кінетичної теорії газів є встановлення зв'язку між макроскопічними і мікроскопічними параметрами газу.

Поняття про статистичні закономірності. У практичній діяльності ми маємо справу з явищами, у яких задіяна величезна кількість частинок. Наприклад, в 1 см^3 газу за нормальних умов міститься $2{,}7 \cdot 10^{19}$ молекул. При цьому кожна молекула зазнає близько мільярда зіткнень за секунду, внаслідок чого постійно змінюється її швидкість і напрямок руху. Навіть якщо нам вдасться дослідити закономірності руху однієї молекули, стверджувати, що ці закономірності властиві всій сукупності молекул не можна! Механічний рух великої сукупності молекул має *якісно* інші властивості порівняно з окремою молекулою.

Закони молекулярної фізики ґрунтуються на *статистичних методах*, які дають можливість досліджувати системи, що складаються з великої сукупності частинок. Фізичні закономірності таких систем мають ймовірнісний, або статистичний характер.

Одним із прийомів статистичного методу є обчислення *середніх значень* різних величин, що зазнають індивідуальних змін. Так, досліджуючи рух сукупності молекул газу, немає потреби визначати швидкість і кінетичну енергію поступального руху кожної молекули окремо, статистичний метод дає змогу обчислити середнє значення цих величин. Швидкості окремих молекул можуть бути будь-якими, проте *середнє значення модуля швидкості* руху молекул – усталена величина. Щоб її визначити, треба додати значення швидкості руху всіх молекул і поділити цю суму на кількість молекул, $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_N}{N}$ (середнє значення величини позначають рискою над її літерним символом).

Надалі нам знадобиться середнє значення не самої швидкості, а квадрата швидкості. Від цієї величини залежить середня кінетична енергія молекул. А середня кінетична енергія молекул, як ми незабаром переконаємося, має виняткове значення в молекулярно-кінетичній теорії.

Отже, *середній квадрат швидкості руху молекул* дорівнює $\overline{v^2} = \dfrac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}$, де $v_1, v_2, \ldots, v_N$ — модулі швидкостей окремих молекул, N — їх кількість у газі.

Середня квадратична швидкість руху молекул $\overline{v}$ — це величина, яка визначається коренем квадратним із середнього квадрата швидкості руху молекул: $\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$.

Середня квадратична швидкість є характеристикою хаотичного невпорядкованого руху молекул, її ще називають *тепловою*.

У молекулярній фізиці також широко використовуються *закони теорії ймовірності*. Це звільняє від потреби знати точне значення тих чи інших фізичних величин: достатньо мати відомості про найімовірніші значення цих величин. Так, визначити, скільки молекул газу, що містяться в посудині, мають швидкість, наприклад, 300 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, неможливо. Ми можемо лише встановити, яка частина молекул має швидкість, що лежить, наприклад, в інтервалі (300 ± 10) $\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$, або іншому інтервалі.

Молекулярно-кінетична теорія ідеального газу, користуючись методами статистики, дає змогу теоретично вивести газові закони, пояснити властивості газів і процесів, що відбуваються в газах.

Тиск газу в молекулярно-кінетичній теорії. Газ чинить тиск на всі тіла, з якими контактує. Цим газ принципово відрізняється від рідин і твердих тіл. З курсу фізики 7 класу ми знаємо, що тиск газу на стінки посудини (чи будь-яку іншу поверхню) зумовлений ударами об неї молекул газу. У результаті удару, наприклад об стінку посудини, кожна молекула передає їй імпульс, а отже, діє на неї з певною (дуже малою) силою. Натомість стінка діє на молекулу з такою самою силою у протилежному напрямку. Коли кількість молекул у посудині мала, ці удари відбуваються зі значними (у молекулярному масштабі) інтервалами часу і сприймаються не як безперервна дія, а як низка послідовних, дуже малих дій. Коли кількість молекул у посудині велика, що реально (крім штучно створюваних умов високого вакууму), ці удари відбуватимуться безперервно. Нескінченно малі дії окремих молекул додаються, і результуюча дія сприймається як постійно діюча сила.

Отже, згідно з молекулярно-кінетичними уявленнями, тиск газу виникає в результаті ударів молекул об стінки посудини.

Це величина, яка характеризує стан великої кількості молекул, — тобто макроскопічна величина. У випадку однієї чи кількох молекул поняття тиску взагалі втрачає сенс.

За одиницю тиску в СІ беруть такий тиск, за якого на 1 м^2 поверхні діє сила в 1 Н. Цю одиницю називають паскалем: $1\ \text{Па} = 1\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Використовують і позасистемні одиниці — міліметр ртутного стовпчика (1 мм рт. ст. $\approx 133{,}3$ Па), атмосферу (1 атм $\approx 10^5$ Па). Вимірюють тиск газу, нижчий і вищий, ніж атмосферний, за допомогою манометрів, атмосферний — барометрами.

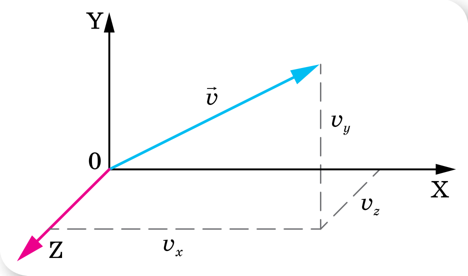
Нагадуємо, що тиск, p — це фізична величина, яка чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю площі поверхні перпендикулярно до цієї поверхні. Оскільки величезна кількість молекул газу рухається хаотично, то в середньому кількість ударів у будь-якому напрямку однакова, а отже, тиск на всі стінки посудини має бути однаковим, на що вказує закон Паскаля.

Виведення основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу. Використовуючи модель ідеального газу, німецький фізик Рудольф Клаузіус вивів рівняння, що встановлює зв'язок між тиском ідеального газу p, масою молекули m_0, концентрацією молекул n і середнім квадратом швидкості $\overline{v^2}$.

Точне виведення рівняння молекулярно-кінетичної теорії досить складне. Доведення майже кожного твердження у фізиці, виведення будь-якого рівняння можна виконати з різним ступенем точності й переконливості: дуже спрощено, більш-менш точно й з високою точністю, доступною сучасному стану розвитку науки. Ми обмежимося дуже спрощеним схематичним виведенням рівняння.

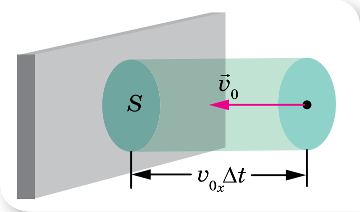
Нехай всередині посудини, площа стінки якої S, міститься ідеальний одноатомний газ з молекулами масою m_0 кожна. Згідно зі статистичними закономірностями, можна вважати, що всі молекули рухаються із середньою квадратичною швидкістю $\bar{v} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_N^2}{N}}$.

У декартовій системі координат вектор швидкості $\vec{v}$ має три складові: v_x, v_y, v_z (мал. 141). За визначенням $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$.



Мал. 141. Проекції вектора швидкості $\vec{v}$ на осі системи координат

Повна хаотичність руху дає змогу стверджувати, що рух у всіх напрямках відбувається з однаковою швидкістю, тому $\overline{v}_x = \overline{v}_y = \overline{v}_z$, а отже, $\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$, звідки $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$.



Мал. 142. До виведення основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Припустімо, що молекули газу рухаються від однієї стінки до іншої без взаємних зіткнень. Це спрощення внаслідок великої кількості молекул N і хаотичності їх руху не впливає на точність розрахунків. Під час зіткнень зі стінками посудини молекули ідеального газу взаємодіють з ними за законами механіки як абсолютно пружні тіла. Молекула діє на стінку силою $\vec{F}_1$, що за третім законом Ньютона дорівнює силі $\vec{F}_2$, з якою стінка посудини діє на молекулу і протилежна їй за напрямком.

Нехай молекула масою m_0 рухається зі швидкістю $\vec{v}_0$ перпендикулярно до стінки посудини, площа якої S (мал. 142). Пружно вдарившись об стінку, вона передає їй імпульс: $\vec{F}_1\Delta t = m_0\vec{v} - m_0\vec{v}_0$, де $\vec{v}$ — швидкість молекули після удару об стінку. Оскільки взаємодія пружна, модуль швидкості не змінюється, а напрямок руху змінюється на протилежний, отже $\vec{v} = -\vec{v}_0$, то $\vec{F}_1\Delta t = m_0\vec{v} - (-m_0\vec{v}) = 2m_0\vec{v}$.

Якщо швидкість руху молекули напрямлена під довільним кутом до стінки, то під час зіткнення молекули зі стінкою проекція її швидкості на вісь, перпендикулярну до поверхні стінки, змінює знак, $v_x = -v_{0x}$, а проекції швидкостей v_y та v_z на осі, паралельні поверхні стінки, лишаються без змін. Отже, зміна проекції імпульсу молекули дорівнює: $F_1\Delta t = 2m_0v_x$.

Щоб обчислити імпульс сили F, яка діє на стінку з боку всіх молекул, підрахуємо кількість зіткнень молекул зі стінкою за час Δt. За цей час стінки посудини досягнуть лише ті молекули, які містяться в об'ємі $V = Sv_x\Delta t$. Оскільки в цьому об'ємі половина молекул рухається до стінки, а половина від неї, то кількість молекул Z, які вдаряться об стінку за час Δt, дорівнює $Z = \frac{N}{2} = \frac{nV}{2}$, де $n = \frac{N}{V}$ — концентрація молекул. Підставивши значення об'єму V, отримаємо: $Z = \frac{n v_x \Delta t S}{2}$.

Усі ці молекули передадуть стінці імпульс, який згідно з другим законом Ньютона дорівнює імпульсу сили $F\Delta t = 2m_0 v_x Z = \frac{2m_0 v_x^2 n \Delta t S}{2}$. Звідки $F = m_0 n S v_x^2$.

Оскільки для великих сукупностей молекул діють закони статистики, слід брати середнє значення квадрата проекції швидкості $\overline{v_x^2}$. Врахувавши, що $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$, а тиск $p = \frac{F}{S}$, одержимо вираз ***основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів***:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}.$$

Отримавши основне рівняння МКТ газів, ми виконали основне завдання молекулярно-кінетичної теорії газів — встановили зв'язок між тиском (макроскопічним параметром) з такими мікроскопічними параметрами, як маса однієї молекули й середня квадратична швидкість руху молекул.

Це рівняння можна подати й у іншому вигляді. Поділимо і помножимо праву частину рівняння на 2: $p = \frac{2 \cdot n m_0 \overline{v^2}}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} n \bar{E}$, отже, тиск ідеального газу пропорційний середній кінетичній енергії хаотичного руху молекул.

Основне рівняння МКТ газів підтверджує такий факт: що більшими є маси молекул та їхні швидкості, а також кількість молекул в одиниці об'єму (концентрація), то більший тиск вони чинять на стінки посудини.

Парціальний тиск. Якщо газ є сумішшю кількох ідеальних газів, то молекули кожного типу газу чинять тиск на стінку посудини незалежно.

Парціальний тиск — це тиск, що його чинив би газ, який входить до складу суміші газів, коли б він сам за тієї самої температури займав увесь об'єм.

Згідно з принципом суперпозиції сил тиски газів, які утворюють суміш (парціальні тиски), додаються. Це твердження вперше сформулював у 1801 р. англійський фізик і хімік Джон Дальтон (1766–1844), тому його називають ***законом Дальтона***:

тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків складових газів,

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Закон Дальтона строго виконується для суміші ідеальних газів; наближено застосовується для реальних газів за температур і тисків далеких від *критичних*[1]. Так, атмосферний тиск складається із парціальних тисків азоту, кисню та інших газів, що містяться в атмосферному повітрі.

[1] Для кожної речовини існує свій критичний стан, який визначається критичною температурою, тиском та об'ємом.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Назвіть умови, за яких газ можна вважати ідеальним.
2. Які величини називають мікроскопічними та макроскопічними параметрами газу?
3. Чому в молекулярній фізиці використовують статистичні методи? У чому їх суть?
4. Який механізм виникнення тиску газу з погляду МКТ?
5. Які особливості основного рівняння ідеального газу й чому його називають основним?
6. Виведіть і поясніть фізичний зміст основного рівняння МКТ.
7. У чому полягає суть закону Дальтона?

ВПРАВА 29

1. Який тиск газу, якщо середня квадратична швидкість руху його молекул 500 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, а його густина становить 1,35 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$?
2. Чому дорівнює середня квадратична швидкість руху молекул газу, якщо, маючи масу 6 кг, він займає об’єм 5 м^3 за тиску 200 кПа?
3. Визначте концентрацію молекул кисню, якщо його тиск 0,2 МПа, а середня квадратична швидкість руху молекул дорівнює 700 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.
4. Визначте середню кінетичну енергію руху молекули одноатомного газу за тиску 20 кПа. Концентрація молекул цього газу за зазначеного тиску дорівнює $3 \cdot 10^{25}$ м^{-3}.
5. У закритій посудині міститься ідеальний газ. Як зміниться його тиск, якщо середня квадратична швидкість молекул збільшиться на 20 %?
6. На стінку площею S налітає потік молекул зі швидкістю v. Кількість молекул, що рухається в напрямку до стінки, дорівнює n_0. Маса кожної молекули m. Визначте силу й тиск, які діють на стінку, якщо молекули рухаються перпендикулярно до стінки. Удари об стінку абсолютно пружні. Яким буде значення тиску й сили тиску у випадку, коли стінка рухається назустріч молекулам зі швидкістю u?
7. Пластинку покривають золотом у вакуумі за допомогою напилювання. Атоми золота, що падають на пластинку, мають однакову енергію $4 \cdot 10^{-20}$ Дж і створюють тиск 0,15 Па. За який час товщина покриття зростає на $8 \cdot 10^{-6}$ м?
8. Обчисліть середню кількість зіткнень за одиницю часу молекул деякого газу, якщо середня довжина вільного пробігу молекули — 5 мкм, а середня квадратична швидкість — 500 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

§ 35 Термодинамічний і молекулярно-кінетичний зміст температури

Термодинамічна рівновага. Температура. Як уже зазначалося, у молекулярній фізиці використовують як термодинамічні, так і статистичні методи дослідження. Згідно з термодинамічним підходом, будь-яке *ма-*

кроскопічне тіло або *групу макроскопічних* тіл називають *термодинамічною системою*. Ідеальний газ є термодинамічною системою. Величини, які характеризують стан термодинамічної системи без урахування молекулярної будови тіл, — *об'єм, тиск, температуру* називають відповідно макроскопічними (або термодинамічними) параметрами.

Температура — це фізична величина, про яку ви знаєте з раннього дитинства як про ступінь нагрітості тіл (холодне, тепле, гаряче), характеристику теплої або холодної погоди в різні пори року, показник стану здоров'я тощо. Побутове поняття температури часто перешкоджає глибокому розумінню її фізичного змісту. Це одна з непростих фізичних величин, до розуміння якої людство йшло протягом багатьох століть.

Температура як термодинамічна величина характеризує тепловий стан системи, як молекулярно-кінетична величина — інтенсивність хаотичного руху молекул у цій системі.

Численні спостереження і досліди свідчать, що для будь-яких взаємодіючих макроскопічних тіл або групи тіл (термодинамічної системи) за незмінних зовнішніх умов раніше чи пізніше *настає стан теплової рівноваги.*

Тепловою, або **термодинамічною**, **рівновагою** називають такий стан системи, коли всі її макроскопічні параметри як завгодно довго лишаються незмінними.

Отже, коли між двома тілами встановлюється тепловий контакт і зовнішні умови не змінюються, тіла приходять до стану теплової рівноваги.

Термодинамічна (або **абсолютна температура**), T є єдиною функцією стану термодинамічної системи, яка характеризує напрямок самовільного теплообміну між тілами (системами).

Термодинамічна система може перебувати в різних станах теплової рівноваги. У кожному із цих станів температура має певне значення. Інші величини можуть мати у стані теплової рівноваги різні (але постійні) значення. Так, об'єми різних частин системи й тиски всередині їх, за наявності твердих перегородок, можуть бути різними. Якщо до кімнати ви внесете м'яч, що був наповнений стиснутим повітрям надворі, через деякий час температура повітря в ньому та кімнаті зрівняються. А тиск повітря в м'ячі все одно буде більшим, ніж у кімнаті.

У всіх частинах системи, що перебуває в стані теплової рівноваги, температура має одне й те саме значення.

Абсолютна температурна шкала. Термодинамічна температура відлічується за абсолютною термодинамічною шкалою (шкалою Кельвіна), яка є основною в системі СІ. Відповідно одиницею температури є кельвін: 1 K.

У 1848 р. видатний англійський фізик Вільям Томсон (лорд Кельвін) (1824–1907) запропонував точку 0 °C температурної шкали Цельсія змістити до 273,15 K, залишивши ціну поділки незмінною.

Перехід від шкали Цельсія до абсолютної температурної шкали такий: $T(\text{К}) = (t\ ^\circ\text{C} + 273{,}15)$ К, 1 °C = 1 К.

Температуру 0 К називають *абсолютним нулем температур,* за шкалою Цельсія йому відповідає −273,15 °C. Це температура, за якої має припинитися поступальний рух молекул. Однак доведено, що навіть за абсолютного нуля молекулярний рух не припиняється — молекули здійснюють коливальні рухи. Досягти абсолютного нуля неможливо — це один з основних законів природи. Тим більше неможливо дістати температуру, нижчу за абсолютний нуль. Що ближча температура охолоджуваного тіла до абсолютного нуля, то важче проходить подальше охолодження.

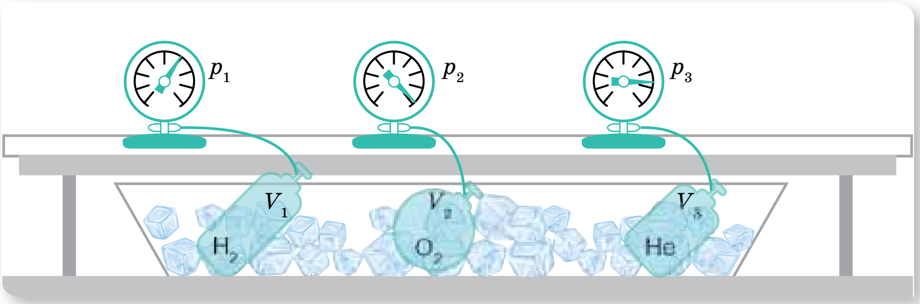
Температура й середня кінетична енергія поступального руху молекул газу. У стані теплової рівноваги макропараметри (тиск, об'єм, температура тощо) не змінюються як завгодно довго. Це означає, що в тілах не відбуваються хімічні реакції, агрегатні перетворення тощо. Однак це не означає, що всередині системи у стані теплової рівноваги не рухаються атоми й молекули: мікропроцеси в тілах не припиняються, оскільки ні на мить не припиняється тепловий рух молекул або атомів. Положення і швидкості руху молекул у стані теплової рівноваги безперервно змінюються, а макропараметри — сталі, бо вони визначаються поведінкою не окремих молекул, а їх усередненим результатом.

Якщо два тіла з різними температурами приведено в контакт, то їхні молекули внаслідок хаотичного руху стикаються, а отже, відбувається передавання енергії, яке триває доти, поки середні кінетичні енергії молекул зрівняються. Саме тоді й настає теплова рівновага.

Можна висловити *припущення,* що середня кінетична енергія молекул і температура однаково характеризують процес встановлення теплової рівноваги, тільки перша — мікроскопічно, а друга — макроскопічно. Експериментально встановити зв'язок середньої кінетичної енергії молекул з температурою дуже важко, бо середню кінетичну енергію молекули не можна виміряти безпосередньо. Спочатку треба з'ясувати зв'язок середньої кінетичної енергії з величинами, які можна виміряти. Зробимо це на прикладі ідеального газу.

Звернімося до такого досліду. Візьмемо кілька посудин, заповнених різними газами, наприклад, воднем, гелієм і киснем. Посудини мають певні об'єми й сполучені з манометрами. Це дає змогу виміряти тиск у кожній посудині. Маси газів відомі, а отже, відома кількість молекул у кожній посудині. Приведемо гази у стан теплової рівноваги. Для цього помістимо посудини в лід, що тане, і почекаємо, поки встановиться рівновага, і тиск газів перестане змінюватись (мал. 143, с. 178). Після цього можна стверджувати, що всі гази мають однакову температуру 0 °C. Тиск газів, їх об'єми й кількості молекул будуть різними.

За основним рівнянням МКТ, тиск ідеального газу $p = \frac{2}{3}n\overline{E}$. Ураховуючи, що $n = \frac{N}{V}$, можна записати $\overline{E} = \frac{3}{2}\frac{pV}{N}$. Отже, середню кінетичну енергію молекул можна визначити, якщо виміряти тиск і об'єм газу та обчислити кількість молекул, знаючи масу газу, сталу Авогадро та молярну масу газу: $N = \frac{m}{M} N_A$.



Мал. 178. Установка для досліду

Проведені вимірювання показали, що за однакової температури $\frac{p_{H_2} V_{H_2}}{N_{H_2}} = \frac{p_{He} V_{He}}{N_{He}} = \frac{p_{O_2} V_{O_2}}{N_{O_2}}$. Отже, однаковими є і значення $\bar{E}$ для всіх газів.

Звертаємо вашу увагу на той факт, що для тисків у тисячі атмосфер, коли густина газів стає досить значною, відношення $\frac{pV}{N}$ перестає бути точно визначеним, незалежним від об'ємів, що їх займають гази. Воно справджується для розріджених газів, які можна вважати ідеальними.

Якщо всі посудини з газами поставити в киплячу воду (+100 °C) за нормального атмосферного тиску, то значення відношення $\frac{pV}{N}$, як і раніше, для всіх газів буде однаковим, але збільшиться (порівняно з 0 °C). Завдяки цьому можна стверджувати, що величина $\frac{pV}{N}$ зростає з підвищенням температури, більше того, ні від чого, крім температури, не залежить.

Цей дослідний факт дозволяє розглядати величину $\frac{pV}{N}$ як температуру, що вимірюється в енергетичних одиницях — джоулях: $\left[\frac{pV}{N}\right] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$. Проте, по-перше, це незручні для практичного застосування одиниці. Так, температурі 100 °C відповідає дуже мала величина — порядку 10^{-21} Дж. А по-друге, і це головне, уже давно температуру вимірюють у градусах. Вважатимемо величину $\frac{pV}{N}$ прямо пропорційною температурі T, яку вимірюють у градусах (за шкалою Кельвіна), $\frac{pV}{N} \sim T$, або, переходячи до знака рівності, $\frac{pV}{N} = kT$.

Перепишемо формулу $\overline{E} = \frac{3}{2}\frac{pV}{N}$ у вигляді $\frac{pV}{N} = \frac{2}{3}\overline{E}$ і прирівняємо її праву частину до правої частини формули $\frac{pV}{N} = kT$. Отримаємо $\frac{2}{3}\overline{E} = kT$.

Звідси $\overline{E} = \frac{3}{2}kT$, тобто

середня кінетична енергія хаотичного руху молекул газу пропорційна абсолютній температурі.

Чим вища температура, тим швидше рухаються молекули. Отже, припущення про зв'язок температури й середньої кінетичної енергії руху молекул підтвердилось.

Стала Больцмана. Останнє співвідношення одержав австрійський фізик Больцман. Він показав, що середня кінетична енергія поступального руху молекул газу лінійно залежить від температури. Коефіцієнт пропорційності, що входить до формули, називається ***сталою Больцмана***, його значення $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Для вимірювання температури можна використати довільні одиниці енергії. Проте історично склалося так, що для вимірювання температури було запропоновано спеціальні одиниці — градуси. Причина цього в тому, що вимірювати температуру навчилися раніше, ніж було з'ясовано її фізичний зміст. Саме стала Больцмана є тим коефіцієнтом, який переводить одиниці енергії джоулі в градуси.

Стала Больцмана — це фундаментальна фізична стала, яка пов'язує температуру в енергетичних одиницях з температурою в кельвінах. Чисельно вона дорівнює зміні кінетичної енергії однієї молекули ідеального газу при зміні температури газу на 1 К.

Молекулярно-кінетичний зміст температури. Абсолютна температура (або просто температура) — це макроскопічний параметр, який характеризує внутрішній тепловий стан тіла й визначається рухом величезної кількості його структурних елементів. У цьому розумінні температура є статистичною величиною, а тому поняття температури має сенс лише для величезної кількості молекул. Не можна говорити про температуру однієї або кількох (небагатьох) молекул, про «гарячі» або «холодні» молекули.

Співвідношення між температурою й середньою кінетичною енергією руху молекул, яке було встановлено для ідеального газу, справджується для будь-яких речовин, рух атомів або молекул яких підпорядковується законам механіки Ньютона. Воно справджується для рідин і твердих тіл, у яких атоми можуть лише коливатись біля положень рівноваги у вузлах кристалічних ґраток.

Температура як термодинамічна величина характеризує тепловий стан системи, як молекулярно-кінетична величина — інтенсивність хаотичного руху молекул у цій системі.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які характерні ознаки стану теплової рівноваги? Наведіть приклади встановлення теплової рівноваги тіл, які оточують вас у повсякденному житті.
2. Якою фізичною величиною характеризується стан теплової рівноваги?
3. Поясніть принцип побудови температурних шкал Цельсія та Кельвіна. Запишіть формули, що виражають співвідношення між значеннями температури, вимірюваної за шкалами Цельсія та Кельвіна.
4. Як пов’язані об’єм, тиск і кількість молекул різних газів у стані теплової рівноваги?
5. Запишіть формулу, що показує, як залежить від температури середня кінетична енергія поступального руху молекул.
6. Температура газу збільшилася від 1 до 2 °С. Чи можна сказати, що середня кінетична енергія його частинок також збільшилась удвічі?
7. Запишіть і поясніть формулу, що показує залежність тиску газу від його температури та концентрації молекул.
8. Що називають абсолютним нулем температури? Який фізичний зміст цього поняття з погляду МКТ?
9. Який фізичний зміст сталої Больцмана? Чому вона дорівнює?

ВПРАВА 30

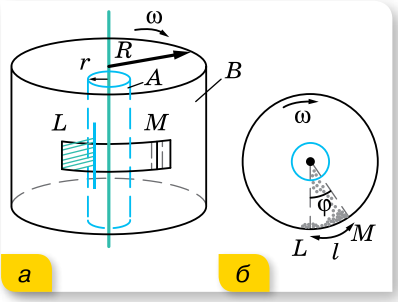
1. За якої температури середня квадратична швидкість руху молекул азоту дорівнює 830 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$?
2. На скільки відсотків збільшується середня кінетична енергія руху молекул газу в разі збільшення його температури від 7 до 35 °С?
3. У скільки разів середня квадратична швидкість руху молекул кисню менша за середню квадратичну швидкість руху молекул водню, якщо температури цих газів однакові?
4. Після підвищення температури ідеального газу на 150 К середня квадратична швидкість руху його молекул збільшилась від 400 до 500 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. На скільки градусів треба нагріти цей газ, щоб збільшити середню квадратичну швидкість його молекул від 500 до 600 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$?
5. У посудині обємом 3 дм^3 міститься гелій масою 4 мг, азот масою 70 мг і $5 \cdot 10^{21}$ молекул водню. Який тиск суміші, якщо її температура 27 °С?
6. Побудуйте графік залежності густини кисню: а) від тиску (за температури $T = \text{const} = 390$ К в інтервалі $0 \le p \le 400$ кПа через кожні 50 кПа); б) від температури (за $p = \text{const} = 400$ кПа в інтервалі $200 \le T \le 300$ К через кожні 20 К).

§ 36 Швидкості молекул

Швидкість руху молекул газу. Отримані в попередньому параграфі формули дають змогу обчислити середню квадратичну швидкість руху молекул. З формул $\overline{E} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ і $\overline{E} = \frac{3}{2}kT$ отримуємо: $\overline{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$.

Так, за цією формулою середня квадратична швидкість, наприклад, молекул азоту для $t = 0$ °C, становить $500\,\frac{м}{с}$, а молекул водню — $1800\,\frac{м}{с}$. Уперше такі розрахунки були виконані у другій половині XIX ст., і результат виявився настільки неочікуваним, що багато фізиків висловили сумнів щодо правильності молекулярно-кінетичної теорії. Адже відомо, що пахощі поширюються досить повільно — потрібні десятки секунд, щоб запах парфумів, розлитих в одному кутку кімнати, досяг іншого кутка. Наразі це легко пояснити великою кількістю зіткнень між молекулами.

Дослід Штерна. Експериментально швидкість теплового руху атомів уперше в 1920 р. визначив німецький вчений-фізик Отто Штерн (1888–1969). Для цього він використав прилад, схему якого зображено на малюнку 179, *а*.



Мал. 179. Дослід Штерна: *а* — схема установки для вимірювання швидкості руху молекул; *б* — зміщення пучка атомів під час обертання циліндрів

Уздовж спільної осі двох жорстко з'єднаних циліндрів A і B розміщений платиновий дріт, покритий шаром срібла. Внутрішній циліндр A має щілину. Дріт нагрівається електричним струмом до температури $t = 1300$ °C, за якої молекули срібла з його поверхні випаровуються. У такий спосіб у камері циліндрів, повітря з якої заздалегідь відкачали до тиску $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Па, утворювався газ із атомів Арґентуму. Оскільки у простір між циліндрами атоми Арґентуму потрапляли крізь щілину, то у випадку нерухомих циліндрів на зовнішньому циліндрі B навпроти щілини утворювалася срібна смужка. Її положення на малюнку 179, *а* і *б* позначено областю L.

Потім циліндри починали обертати з кутовою частотою ω, внаслідок чого срібна смужка змістилась в область M (мал. 179, *а* і *б*). Зміщення смужки пояснюється тим, що за час τ, поки атоми Арґентуму зі швидкістю v пролітають відстань $(R - r)$, зовнішній циліндр встигає повернутись на кут $\varphi = \omega\tau$. Відповідно, кожна точка поверхні зовнішнього циліндра зміщується на відстань $l = \omega R\tau$, де R — радіус зовнішнього циліндра, ωR — лінійна швидкість руху точок на його поверхні. Це й приводить до зміщення точок осідання атомів Арґентуму.

Оскільки смужка в області M ширша за розміри щілини в циліндрі A (розмита), це підтверджує той факт, що не всі атоми мають однакову швидкість. Тому в подальших розрахунках використаємо середнє значення швидкості $\bar{v}$.

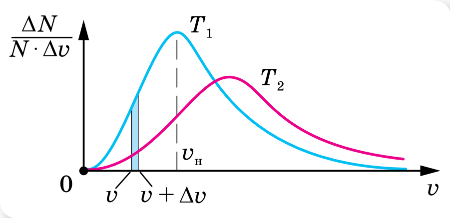
Отже, час τ, поки атоми Арґентуму зі швидкістю $\bar{v}$ пролітають відстань $(R - r)$, можна визначити так: $\tau = \frac{R - r}{\bar{v}} = \frac{l}{\omega R}$. Звідки $\bar{v} = \frac{\omega R(R - r)}{l}$.

Знаючи радіуси циліндрів R та r, кутову швидкість їх обертання ω та вимірявши відстань l між областями L і M (між точками найбільшого скупчення атомів), можна визначити швидкість руху молекул.

У досліді Отто Штерна було встановлено, що середня швидкість руху атомів срібла дорівнює 650 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Цей фундаментальний дослід є експериментальним підтвердженням існування атомів речовини та правильності молекулярно-кінетичної теорії в цілому.

Розподіл молекул за швидкостями. Рух молекул газу описується законами статистичної фізики. Середні значення швидкості й енергії молекул мають певне значення. Проте в кожний момент часу енергії й швидкості окремих молекул можуть значно відрізнятися від свого середнього значення. Можна говорити про розподіл молекул за швидкостями.

На основі молекулярно-кінетичної теорії в 1859 р. англійський фізик Джеймс Клерк Максвелл уперше встановив закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями. Це був перший статистичний закон у фізиці. Максвелл показав, що хаотичний рух окремих молекул підпорядкований певному статистичному закону. Через складність математичного виразу цього закону розглянемо лише його графічну форму (мал. 180).



Мал. 180. Графіки розподілу молекул за швидкостями для двох різних температур $T_2 > T_1$

По осі абсцис відкладена швидкість молекул v, а по осі ординат — функція $f(v) = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta v}$ (де N — загальна кількість молекул, ΔN — кількість молекул, що мають швидкості в інтервалі від v до $v + \Delta v$). Значення $f(v)$ показує, яка частка всіх молекул має швидкість в інтервалі $v + \Delta v$. Максимум на кривій розподілу відповідає ***найбільш імовірній*** швидкості $v_н$, тобто швидкості, яку має максимальна кількість молекул газу.

Розподіл молекул за швидкостями залежить від температури. З підвищенням температури максимум функції розподілу зміщується у бік більшої швидкості.

Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвелла) тривалий час залишався експериментально непідтвердженим.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Як можна визначити середню квадратичну швидкість руху молекул газу?
2. Побудуйте схему досліду Штерна та поясніть його сутність.
3. Чому в досліді Штерна смужка срібла: а) зміщена; б) розмита по краях; в) неоднорідна за товщиною?
4. Подумайте, де залишиться слід атомів, швидкості руху яких більші за середню швидкість, і як зміниться положення нальоту, якщо збільшити струм у дротині.
5. Які висновки можна зробити з розподілу Максвелла?

ВПРАВА 31

1. Який тиск на стінки посудини створював би ідеальний газ, концентрація молекул якого $1 \cdot 10^{20}$ м$^{-3}$, якщо їх середня квадратична швидкість $1\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$ і маса молекули $3 \cdot 10^{-27}$ кг?
2. Визначте середню квадратичну швидкість молекул кисню за нормальних умов.
3. За якої температури середня квадратична швидкість атомів гелію дорівнює $1{,}3\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$?
4. У скільки разів змінився б тиск у балоні, якби в результаті електричного розряду кисень O_2, що міститься в балоні, перетворився на озон O_3? Вважайте, що температура газу не змінилася.
5. Повітря складається в основному з кисню й азоту. Молекули якого з цих газів мають: а) більшу середню кінетичну енергію; б) більшу середню квадратичну швидкість?
6. У скільки разів середня квадратична швидкість молекул кисню більша за середню квадратичну швидкість пилинки масою 10^{-8} г, що розташована серед молекул кисню?
7. Визначте середню арифметичну швидкість молекул газу, якщо їх середня квадратична швидкість $1\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.
8. Використовуючи розподіл Максвелла за швидкостями, виведіть формулу для середньої квадратичної швидкості молекул.

§ 37 Рівняння стану ідеального газу. Об'єднаний газовий закон

Рівняння стану ідеального газу. Універсальна газова стала. Як уже зазначалося, ідеальний газ є найпростішою термодинамічною системою. Стан газу певної маси повністю визначений, якщо відомі його тиск, температура та об'єм. Ці величини називають *параметрами стану газу*. Якщо ці параметри змінюються, то в газі відбувається той або інший *процес*. У природі часто протікають процеси, у яких одночасно змінюються всі три величини, що характеризують стан газу. Рівняння, що зв'язує параметри стану цього газу (p, V, T), називають *рівнянням стану ідеального газу*.

Слід зазначити, що задовго до того, як рівняння стану ідеального газу було виведено на основі молекулярно-кінетичних уявлень, закономірності поведінки газів у різних умовах були досить добре досліджені експериментально. Саме тому рівняння стану ідеального газу можна розглядати як узагальнення експериментальних фактів, що знаходять своє пояснення в молекулярно-кінетичній теорії.

Нині рівняння стану ідеального газу легко можна вивести з основного рівняння МКТ. Урахувавши рівняння $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$ і співвідношення $p = \frac{2}{3}n\bar{E}$, одержимо ще один вираз основного рівняння МКТ газів:

$$p = nkT,$$

де p — тиск газу, n — концентрація молекул ідеального газу, k — стала

Больцмана, T — абсолютна температура газу. Далі, $p = nkT \rightarrow p = \frac{N}{V}kT \rightarrow$

$\rightarrow pV = NkT \rightarrow pV = \frac{m}{M}N_A kT$.

Добуток сталої Авогадро N_A на сталу Больцмана k є також сталою величиною, яку називають ***універсальною* (*молярною*) *газовою сталою*** й позначають $R = N_A k$. Підрахуємо значення універсальної газової сталої:

$$R = 6,02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 8,31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Отже, ми отримали з основного рівняння МКТ газів рівняння, яке містить тільки макроскопічні (термодинамічні) характеристики стану газу і яке називають рівнянням стану ідеального газу. Це рівняння ще називають ***рівнянням Менделєєва — Клапейрона***:

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Рівняння Менделєєва — Клапейрона дає змогу визначити один невідомий параметр стану ідеального газу, якщо інші параметри відомі, для газу будь-якого хімічного складу й довільної маси m. Єдина величина в цьому рівнянні, що залежить від виду газу, — це його молярна маса M.

Якщо врахувати, що густина газу $\rho = \frac{m}{V}$, то рівняння Менделєєва — Клапейрона матиме вигляд $p = \frac{\rho}{M} \rightarrow RT$. Або врахувавши, що $\nu = \frac{m}{M}$, отримуємо: $pV = \nu RT$.

Для суміші газів рівняння набуває вигляду: $pV = (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n)RT$, де ν_1, ν_2, … — кількості речовини кожного з газів суміші.

Для одного моля ($\nu = 1$ моль) довільного газу це співвідношення набуває вигляду $pV = RT$.

Отже, виведене на підставі молекулярно-кінетичних уявлень рівняння підтверджує ще один встановлений експериментально закон. Якщо в це рівняння підставити значення тиску й температури, що відповідають нормальним умовам ($T = 273,15$ К (0 °С), $p = 1$ атм $= 1,013 \cdot 10^5$ Па), то один моль будь-якого газу займає об’єм $V_0 = 0,0224$ м^3. Це твердження називають ***законом Авогадро***.

Лише за *тиску* в сотні атмосфер (коли виявляє себе об’єм молекул газу) і за температур, близьких до температур *зрідження* газу (внаслідок великої сили взаємодії молекул), відхилення від результатів розрахунків за рівнянням стану ідеального газу стають істотними.

Об’єднаний газовий закон. У природі часто відбуваються процеси, коли водночас змінюються всі три параметри стану газу, при цьому маса газу залишається незмінною (m = const). Якщо параметри на початку процесу, який відбувається з газом певної маси, позначити через p_1, V_1, T_1, а їх значення в кінці процесу — через p_2, V_2, T_2, то $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{m}{M}R$ і $\frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{m}{M}R$.

Оскільки праві частини обох виразів однакові, однакові і їхні ліві частини. Отже, для газу незмінної маси: $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$, або $\frac{pV}{T} = \text{const}$ — *під час переходу газу незмінної маси з одного стану в інший добуток його тиску на об'єм, поділений на термодинамічну температуру газу, є величиною сталою.*

Рівняння стану ідеального газу $\frac{pV}{T} = \text{const}$ виведене в 1834 р. французьким фізиком Бенуа Клапейроном (1799–1864), який протягом десяти років працював у Росії. У 1874 р. видатний російський учений Дмитро Менделєєв удосконалив формулу рівняння стану, ввівши макроскопічний параметр — масу газу. Саме тому рівняння $pV = \frac{m}{M}RT$ називають *рівнянням Менделєєва — Клапейрона*.

Співвідношення між значеннями тих чи інших параметрів на початку та в кінці процесу називається *газовим законом*. Рівняння Клапейрона $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ ще називають *об'єднаним газовим законом*.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що таке параметри стану системи? Які величини до них належать?
2. Виведіть рівняння Менделєєва — Клапейрона для довільної маси ідеального газу.
3. Виведіть рівняння Клапейрона. Як формулюється об'єднаний газовий закон?
4. Чому дорівнює універсальна газова стала в СІ?
5. Чому дорівнює об'єм одного моля будь-якого газу за нормальних умов?

Приклади розв'язування задач

Задача. У приміщенні об'ємом $V = 100$ м^3 після роботи обігрівача температура повітря[1] збільшилася від $t_1 = 17$ °C до $t_2 = 22$ °C. Яка маса Δm повітря, що вийшло з кімнати? Атмосферний тиск $p = 10^5$ Па.

Дано:
$V = 100$ м^3
$t_1 = 17$ °C
$t_2 = 22$ °C
$p = 10^5$ Па
$M = 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$

Δm — ?

Розв'язання:

Запишемо рівняння Менделєєва — Клапейрона для двох станів повітря:

1) для $t_1 = 17$ °C ($T_1 = 290$ K), $pV = \frac{m_1}{M}RT_1$;

2) для $t_2 = 22$ °C ($T_2 = 295$ K), $pV = \frac{m_2}{M}RT_2$.

Визначимо маси повітря в кімнаті в першому та другому станах:

$$m_1 = \frac{pVM}{RT_1} \text{ і } m_2 = \frac{pVM}{RT_2}.$$

[1] У цій і наступних задачах, якщо немає спеціальних застережень, повітря вважайте однорідним газом, молярна маса якого становить 0,029 кг/моль.

Маса повітря, що вийшло з кімнати: $\Delta m = m_1 - m_2 = \dfrac{pVM}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$.

Після підстановки числових значень отримаємо: $\Delta m = 2,1$ кг.
Відповідь: 2,1 кг.

ВПРАВА 32

1. Визначте густину водню за температури 127 °С і тиску 830 кПа.
2. Який тиск стиснутого повітря, що міститься в балоні ємністю 20 л за 12 °С, якщо маса цього повітря 2 кг?
3. Густина деякої газоподібної речовини за температури 10 °С й нормального атмосферного тиску дорівнює 2,5 $\frac{кг}{м^3}$. Визначте молярну масу цієї речовини.
4. Яка кількість речовини міститься в газі, якщо за температури 240 К і під тиском 200 кПа його об'єм дорівнює 40 л?
5. Газ за тиску 0,2 МПа і температури 15 °С має об'єм 5 л. Визначте об'єм цього газу за нормальних умов.
6. У балоні міститься газ, температура якого 15 °С. У скільки разів зменшиться тиск газу, якщо 40 % його вийде з балона, а температура при цьому зменшиться на 8 °С?
7. Пробірку, перевернуту догори дном, занурили у воду на деяку глибину. Яка концентрація повітря у пробірці на глибині 3 м? Температура води та повітря однакові й дорівнюють 20 °С. Атмосферний тиск 760 мм рт. ст.
8. Кулю із жорсткою оболонкою масою 11,6 г заповнили воднем. Об'єм водню — 10 л. Температура водню та повітря, що оточує кулю, — 0 °С. Визначте тиск водню в кулі, якщо результуюча піднімальна сила, яка діє на кулю, дорівнює нулю.
9. Повітряна куля об'ємом 2500 $м^3$ і масою оболонки 400 кг має внизу отвір, через який повітря в кулі нагрівається пальником. Визначте максимальну масу вантажу, який може підняти куля, якщо повітря в ній нагрівати до температури 77 °С. Температура навколишнього повітря 7 °С, його густина — 1,2 $\frac{кг}{м^3}$. Оболонку кулі вважайте нерозтяжною.

§ 38 Ізопроцеси

Ізопроцеси. За допомогою рівняння стану можна досліджувати ізопроцеси ідеального газу.

Процеси, які відбуваються за незмінного значення одного з параметрів газу сталої маси m і певного сорту μ, називають **ізопроцесами** (від грец. *ізос* — рівний, однаковий).

Оскільки жоден із параметрів газу не може бути строго фіксованим, то ізопроцес — це ідеалізована модель стану газу.

Закон Бойля — Маріотта. Графіки ізотермічного процесу. Розглянемо процес, що відбувається в газі за сталої температури. Процес зміни стану термодинамічної системи за сталої температури називають *ізотермічним* ($m = \text{const}$, $M = \text{const}$, $T = \text{const}$).

Для цих умов з рівняння Клапейрона $\frac{pV}{T} = \text{const}$ отримуємо $pV = \text{const}$ або $p_1V_1 = p_2V_2$ чи $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$. Це рівняння було отримано експериментально (до створення молекулярно-кінетичної теорії) англійським фізиком Робертом Бойлем (1662 р.) і незалежно французьким фізиком Едмом Маріоттом (1676 р.).

Закон Бойля — Маріотта можна сформулювати так:
для ідеального газу деякої маси (сталої кількості речовини) за сталої температури тиск газу змінюється обернено пропорційно до об'єму.

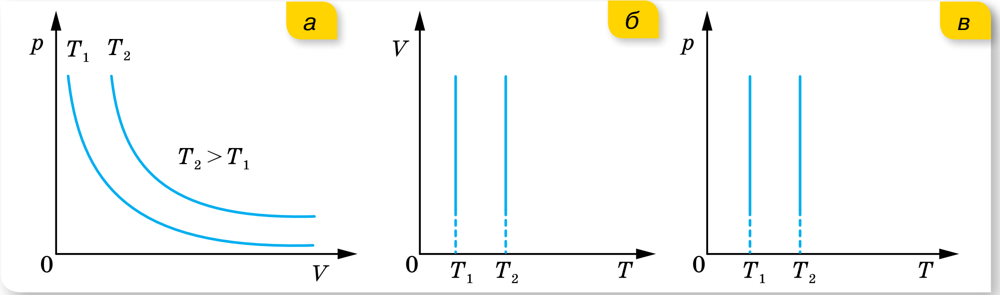
Цей закон, як і інші газові закони, є окремим випадком рівняння стану газу і виконується для будь-яких газів, які можна вважати ідеальними, а також для їх сумішей (наприклад, для повітря).

Часто закон Бойля — Маріотта записують так: $p = \frac{\text{const}}{V}$. Графічно залежність тиску газу сталої маси від об'єму за умови $T = \text{const}$ можна зобразити у вигляді гіперболи $\left(\text{порівняйте з } y = \frac{a}{x}\right)$, яка для цього процесу називається *ізотермою* (мал. 181, *а*).

Різним температурам відповідають різні ізотерми — що вищою є температура, то вище на координатній площині pV розташована гіпербола. Це корисно знати для розв'язування графічних задач.

На координатних площинах pT і VT ізотерми зображуються прямими, перпендикулярними до осі температур (мал. 181, *б* і *в*).

Ізотермічним можна вважати процес стиснення повітря компресором або розширення газу під поршнем насоса під час відкачування його з посудини. Процес має бути достатньо швидким, щоб не встиг відбутись теплообмін з навколишнім середовищем.



Мал. 181. Ізотерми: *а* — в координатах pV; *б* — в координатах VT; *в* — в координатах pT

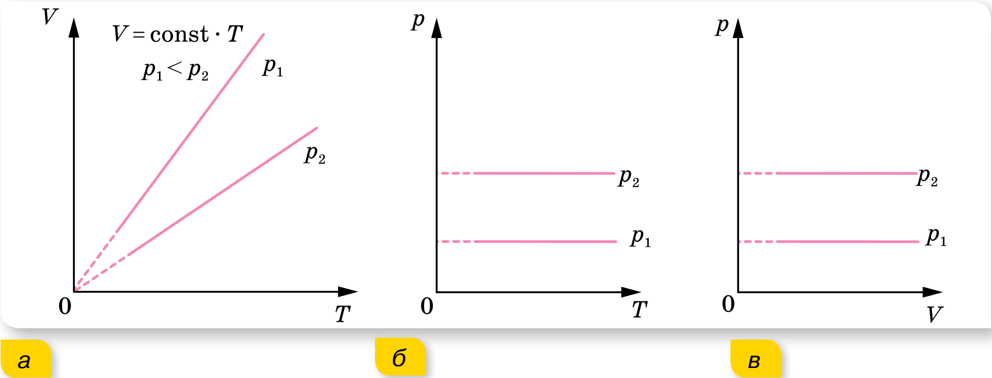
Закон Гей-Люссака. Графіки ізобарного процесу. Процес зміни стану термодинамічної системи за сталого тиску називають *ізобарним* (від грец. *барос* — вага) ($m = \text{const}$, $M = \text{const}$, $p = \text{const}$).

Відповідно з рівняння Клапейрона $\frac{pV}{T} = \text{const}$ для вказаних умов маємо: $\frac{V}{T} = \text{const}$ або $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Цей закон установив експериментально в 1802 р. французький учений Жозеф Луї Гей-Люссак.

Закон Гей-Люссака формулюється так:
для ідеального газу певної маси з незмінним тиском відношення об'єму до температури залишається сталим.

Графік залежності об'єму від температури за сталого тиску $V = \text{const} \cdot T$ є прямою лінією (порівняйте з $y = ax$), яку називають *ізобарою*. На малюнку 182, *а* зображено дві ізобари в координатах V, T для різних значень тиску p_1 і p_2, причому $p_1 < p_2$. На малюнку 182, *б* і *в* наведено графіки ізобарного процесу в координатах p, T і p, V.



Мал. 182. Ізобари

Закон Шарля. Графіки ізохорного процесу. Процес зміни стану термодинамічної системи за сталого об'єму називають ізохорним (від грец. *хорема* — місткість).

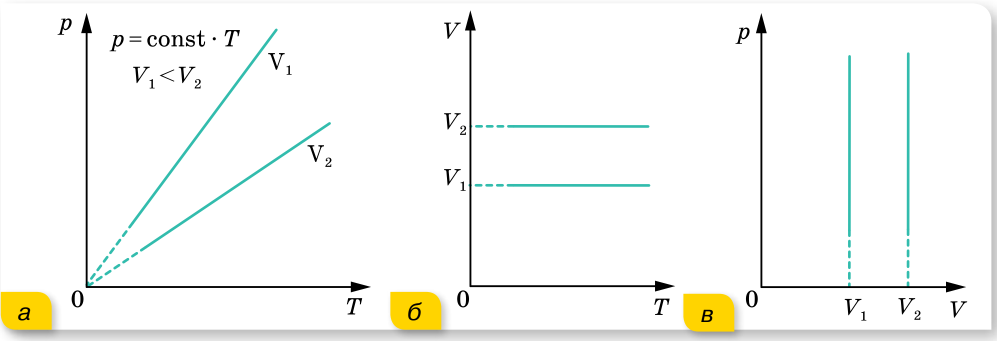
Якщо $m = \text{const}$, $M = \text{const}$, $V = \text{const}$, то з рівняння стану $\frac{pV}{T} = \text{const}$ випливає, що $\frac{p}{T} = \text{const}$ або $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$.

У 1787 р. французький фізик Жак Шарль експериментально встановив цей газовий закон, тому його називають ***законом Шарля***.

Для ідеального газу певної маси з незмінним об'ємом відношення тиску газу до температури залишається сталим.

Графіком залежності тиску від температури за сталого об'єму $p = \text{const} \cdot T$ є пряма лінія (порівняйте $y = ax$), яку називають *ізохорою*.

На малюнку 183, *а* в координатах p, T зображено дві ізохори для різних значень об'єму V_1 і V_2, причому $V_1 < V_2$. На малюнку 183, *б* і *в* наведено графіки процесу в координатах V, T і p, V.



Мал. 183. Ізохори

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Який процес називають ізотермічним? Яким законом описується цей процес? Зобразіть і поясніть графіки ізотермічного процесу.
2. Який процес називають ізобарним? Яким законом описують ізобарний процес? Зобразіть і поясніть графіки ізобарного процесу.
3. Який процес називають ізохорним? Як формулюють і записують цей закон? Зобразіть і поясніть графіки ізохорного процесу.

Експериментуємо

Визначте атмосферний тиск двома способами. Обладнання для першого досліду: дві скляні трубки, сполучені гумовою трубкою й закріплені в штативі, вода, лійка, корок, лінійка. Обладнання для другого досліду: висока мензурка (біля 40 см) з водою, пробірка, лінійка.

Приклади розв'язування задач

Отже, ви переконалися, що газові закони Бойля — Маріотта, Гей-Люссака і Шарля — це окремі випадки рівняння Менделєєва — Клапейрона. Газові закони та їх графічні ілюстрації дають змогу вивчати довільні термодинамічні процеси з ідеальним газом.

Задача 1. Унаслідок нагрівання газу в закритій посудині на 140 К тиск збільшився в 1,5 раза. Визначте початкову температуру газу.

Дано:
$\Delta T = 140$ К
$p_2 = 1{,}5\, p_1$

T_1 — ?

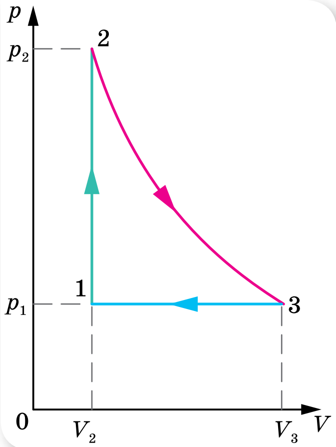
Розв'язання:

Оскільки посудина закрита, то маса газу та його об'єм залишаються незмінними, тому процес нагрівання можна вважати ізохорним: $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$.

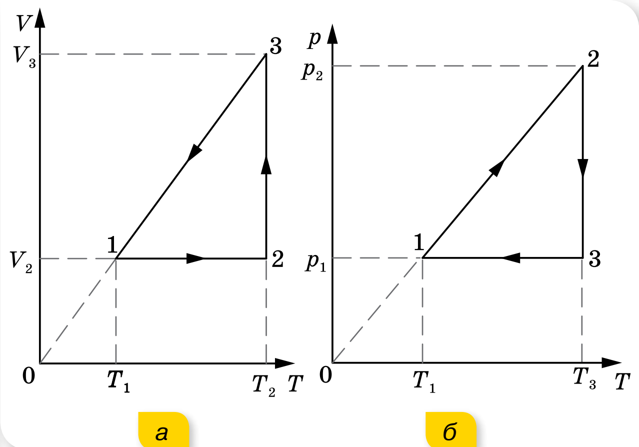
Оскільки $p_2 = 1{,}5p_1$, $T_2 = T_1 + \Delta T$, то $\frac{p_1}{T_1} = \frac{1,5p_1}{T_1 + \Delta T}$, звідки $T_1 = \frac{\Delta T}{0,5} = 280$ K.

Відповідь: 280 K.

Задача 2. На малюнку 184 у координатах p, V зображено замкнений газовий процес (цикл). Побудуйте цей цикл у координатах V, T і p, T.



Мал. 184



Мал. 185. Графік циклу в координатах V, T (*а*); у координатах p, T (*б*).

Розв'язання:

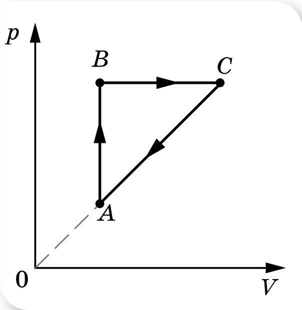
Проаналізуймо процеси, які відбуваються з газом. Перехід зі стану *1* у стан *2* відповідає ізохорному процесу, тиск збільшується від p_1 до p_2, зрозуміло, що температура також збільшується. Перехід зі стану *2* у стан *3* — ізотермічне розширення газу від V_2 до V_3, до того ж тиск зменшується від p_2 до p_1. Перехід зі стану *3* у стан *1* відповідає ізобарному стисканню від V_3 до V_2, причому $T_1 < T_3$.

Побудуємо цей цикл у координатах V, T (мал. 185, *а*). Лінія *1–2* зображує ізохорний процес, причому температура зростає від T_1 до T_2. Лінія *2–3* зображує ізотермічне розширення від V_2 до V_3. Лінія *3–1* — ізобарний процес. (Продовження цієї лінії має пройти через початок координат!)

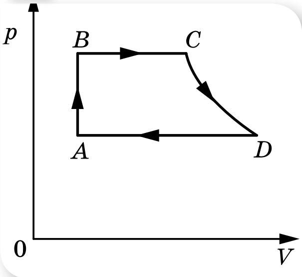
На малюнку 185, *б* цей процес побудовано в координатах p, T.

ВПРАВА 33

1. Після стискання газу його об'єм зменшився з 8 до 5 л, а тиск підвищився на 60 кПа. Визначте початковий тиск.
2. Унаслідок збільшення тиску в 1,5 раза об'єм газу зменшився на 30 мл. Визначте початковий об'єм.
3. Який об'єм займе газ за температури 77 °С, якщо при 27 °С його об'єм був 6 л?



а



б

Мал. 186

4. У гумовій кулі міститься 2 л повітря за температури 20 °C і нормального атмосферного тиску. Який об'єм займе повітря, якщо кулю занурити у воду на 10 м? Температура води 4 °C.

5. На малюнку 186 зображено замкнуті цикли. Ділянка CD на малюнку 186, *б* відповідає ізотермі. Накресліть ці діаграми в координатах pT і VT.

6. Пляшку, заповнену газом, щільно закрили корком, що має в поперечному перерізі площу 2,5 см^2. До якої температури треба нагріти газ, щоб корок вилетів із пляшки, коли сила тертя, що утримує корок, дорівнює 11,8 Н? Початкова температура 3 °C, атмосферний тиск — 10^5 Па.

7. У вузькій циліндричній трубці завдовжки L, закритій з одного кінця, міститься повітря, відділене від зовнішнього стовпчиком ртуті заввишки h. Положення трубки вертикальне, відкритим кінцем догори. Якою була довжина l стовпчика повітря в трубці, якщо після повороту її відкритим кінцем донизу із трубки вилилась половина ртуті? Густина ртуті — ρ, атмосферний тиск — p_0.

8. Посередині запаяної з обох кінців трубки завдовжки L = 1 м, з якої викачали повітря, міститься стовпчик ртуті завдовжки h = 20 см. Якщо трубку поставити вертикально, стовпчик ртуті опуститься на 10 см. Який тиск p був у трубці? Густина ртуті $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$.

9. Вертикальний циліндр із важким поршнем заповнено киснем, маса якого m = 10 г. Після збільшення температури на ΔT = 50 К поршень піднявся на висоту h = 7 см. Визначте масу поршня M, якщо тиск газу над ним p_0 = 0,1 МПа. Площа поршня: S = 100 см^2, молярна маса кисню: $\mu = 0{,}032\ \frac{кг}{моль}$.

10. Бульбашка повітря піднімається з дна водоймища з глибини H. Визначте залежність радіуса бульбашки r від глибини її занурення в даний момент часу, якщо її початковий об'єм дорівнював V. Силу поверхневого натягу не враховувати. Атмосферний тиск — p_0, густина води — ρ.

11. У трубці завдовжки L = 1,73 м, заповненій газом, міститься стовпчик ртуті завдовжки h = 30 мм. Коли трубка стоїть вертикально, ртуть ділить її на дві рівні частини. Тиск газу над ртуттю p = 8 кПа. На яку відстань зміститься стовпчик ртуті, якщо трубку покласти горизонтально? Густина ртуті: $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$.

12. Відкриту з обох боків скляну трубку завдовжки 60 см опускають у посудину зі ртуттю на $\frac{1}{3}$ довжини. Потім, закривши верхній кінець трубки, виймають її зі ртуті. Якої довжини стовпчик ртуті залишиться в трубці? Атмосферний тиск — 76 см рт. ст.

13. Відкриту пробірку з повітрям нагріли, потім герметично закрили й охолодили до температури t_2 = 7 °C. Тиск повітря у пробірці після цього зменшився в n = 1,5 раза. До якої температури t_1 була нагріта пробірка?

14. Запаяна з одного кінця трубка завдовжки l занурена у воду так, що над поверхнею води виступає п'ята її частина. Рівень води в трубці збігається з рівнем води в посудині. До якої температури треба нагріти повітря в трубці, щоб з неї вийшла вся вода? Атмосферний тиск — p_0, початкова температура — T_1. Густина води — ρ. Зміною рівня води в посудині знехтувати.

Перевірте себе (§ 32–38)

1. Маса молекули газу, який є складовою повітря, дорівнює $5{,}32 \cdot 10^{-26}$ кг. Який це газ?

А водень **В** азот
Б вуглекислий газ **Г** кисень

2. Обчисліть середню квадратичну швидкість атомів Гелію в атмосфері Юпітера. Температура атмосфери цієї планети становить −123 °С.

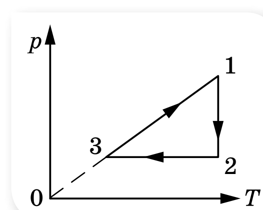
А $5{,}2 \cdot 10^{-19}\ \frac{м}{с}$ **Б** $7{,}2 \cdot 10^{-10}\ \frac{м}{с}$ **В** $967\ \frac{м}{с}$ **Г** $935\ \frac{км}{с}$

3. Який параметр x ідеального газу можна визначити за формулою $x = \frac{3p}{nm_0}$, де p — тиск газу, n — концентрація молекул, m_0 — маса молекули?

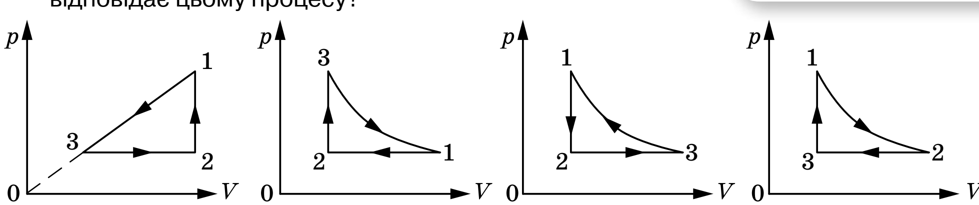
А середню квадратичну швидкість молекули
Б температуру
В об'єм
Г густину

4. З балона через неповністю закритий кран вийшло 20 % газу. Який тиск установився в балоні, якщо до витікання газу тиск становив 10^5 Па? Температура весь час залишалася незмінною.

А $2 \cdot 10^5$ Па
Б $5 \cdot 10^5$ Па
В $8 \cdot 10^5$ Па
Г $1{,}2 \cdot 10^6$ Па



5. На малюнку наведено графік зміни стану ідеального газу в координатах p, T. Який із графіків у координатах p, V відповідає цьому процесу?



А Б В Г

6. Визначте середню кінетичну енергію поступального руху молекул азоту за температури 300 K.

7. Яким є тиск газу, якщо середня квадратична швидкість його молекул дорівнює $500\ \frac{м}{с}$, а густина — $6\ \frac{кг}{м^3}$?

8. Газ стиснули ізотермічно з об'єму 12 л до об'єму 10 л. Його тиск збільшився на $6 \cdot 10^4$ Па. Яким був початковий тиск газу?

9. У воді на глибині 1 м перебуває куляста бульбашка повітря. На якій глибині ця бульбашка стиснеться в кульку вдвічі меншого радіуса? Атмосферний тиск нормальний.

10. Повітряна куля має об'єм 2500 м³. Маса оболонки кулі — 400 кг. До якої мінімальної температури слід нагріти повітря в кулі, щоб вона разом з вантажем масою 200 кг піднялась угору? Температура повітря зовні — 7 °С, його густина — $1{,}2\ \frac{кг}{м^3}$. Оболонку кулі вважайте нерозтяжною.

§ 39 Внутрішня енергія та робота ідеального газу

Внутрішня енергія. Ознайомимось із поняттям *внутрішньої енергії U ідеального газу*. У молекулярно-кінетичній теорії речовини внутрішня енергія макроскопічного тіла (термодинамічної системи) дорівнює сумі середньої кінетичної енергії теплового руху всіх молекул (атомів) і середньої потенціальної енергії їх взаємодії. Обчислити U через мікропараметри майже неможливо, тому використаємо макропараметри термодинамічної системи. (До того ж у практичних цілях важливіше знати не саму внутрішню енергію, а її зміну внаслідок зміни стану системи.) Середня кінетична енергія руху молекул пропорційна температурі, а середня потенціальна енергія взаємодії визначається відстанню між молекулами (тобто пропорційна об'єму тіла). Таким чином внутрішня енергія U є функцією макроскопічних параметрів, які можна виміряти — температури та об'єму: $U = f(T, V)$.

Обчислимо внутрішню енергію одноатомного ідеального газу. Оскільки молекули цього газу одна з одною не взаємодіють, то потенціальна енергія $E_п = 0$. Уся внутрішня енергія складається з кінетичної енергії руху $U = E_к$. За формулою Больцмана, середня енергія поступального руху одного атома $\bar{E}_0 = \frac{3}{2}kT$. А оскільки кількість атомів $N = \frac{m}{M}N_A$, то внутрішня енергія одноатомного ідеального газу $U = \frac{3}{2}kT\frac{m}{M}N_A$. Урахуємо, що $kN_A = R$.

Внутрішня енергія ідеального одноатомного газу пропорційна температурі й не залежить від об'єму та інших макропараметрів: $U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT$, де m — маса всього газу, M — молярна маса, R — універсальна газова стала, T — термодинамічна температура.

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу сталої маси $\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T$ відбувається тільки в разі зміни його температури T.

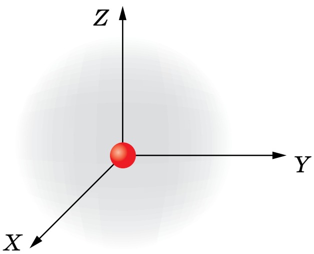
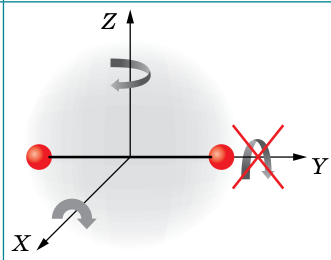
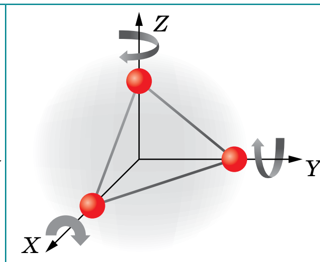
Ураховуючи молекулярну будову ідеальних газів, застосовують універсальну формулу для визначення внутрішньої енергії, обумовленої лише кінетичною енергією руху молекул:

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RT,$$

де i — кількість ступенів свободи молекули.

Формула для визначення внутрішньої енергії ідеального газу залежить від кількості атомів у молекулі речовини (табл. 3, с. 194).

Таблиця 3

Одноатомний газ	**Двохатомний газ**	**Багатоатомний газ (три і більше атомів)**
Молекули рухаються тільки поступально	Молекули рухаються поступально й обертаються	
		
Одноатомна молекула має 3 ступені свободи поступального руху	Двохатомна молекула має 5 ступенів свободи (3 поступального і 2 обертального рухів)	Багатоатомна молекула має 6 ступенів свободи (3 поступального і 3 обертального), крім CO_2, який має 5 ступенів свободи
Внутрішня енергія визначається енергією поступального руху: $U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT$	Внутрішня енергія визначається сумою енергій поступального й обертального рухів: $U = \frac{5}{2}\frac{m}{M}RT$	Внутрішня енергія у два рази більша, ніж одноатомного газу за тієї ж температури: $U = 3\frac{m}{M}RT$

У реальних газах, рідинах і твердих тілах середня потенціальна енергія взаємодії молекул не дорівнює нулю, тому їх внутрішня енергія залежить і від об’єму речовини, і від температури.

Перетворення внутрішньої енергії в механічну і навпаки. Як відомо, робота виконується, якщо тіло переміщується (коли всі його частини здійснюють рух під дією сили в одному напрямку). Внутрішня енергія — це енергія хаотичного руху молекул. Відповідно для того, щоб за рахунок внутрішньої енергії виконувалась робота, необхідно якимось чином досягти упорядкованого руху молекул. Для цього найбільш зручно використовувати циліндр із рухомим поршнем (мал. 187). Рухаючи поршень вниз або вгору, ми будемо стискати або розширювати газ, у результаті чого буде змінюватись його внутрішня енергія.

Пояснимо, чому змінюється внутрішня енергія газу, якщо змінюється його об’єм.

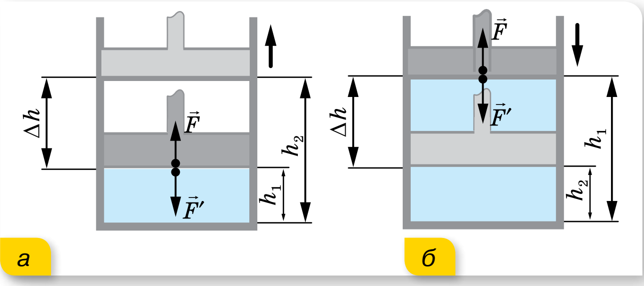
Під час руху поршня в циліндрі молекули газу внаслідок пружних зіткнень з рухомим поршнем змінюють свою кінетичну енергію. Якщо поршень рухається назустріч молекулам, він передає молекулам у момент зіткнень частину своєї механічної енергії. (Пригадайте, у механіці ми розглядали задачі на пружну взаємодію тіл і розв’язували їх, застосовуючи закони збереження імпульсу та енергії.) У результаті збільшується кінетична енергія руху молекул, а отже, і температура газу. Таким чином, механічна робота, яку виконує поршень, перетворюється у внутрішню енергію газу. Кажуть, що зовнішні сили виконують роботу A'.

Стиснутий газ, тиск якого більший за зовнішній, буде розширюватись. Молекули газу, що розширюється, зіткнувшись із поршнем, який віддаляється, зменшують свої швидкості, внаслідок чого газ охолоджується. Таким чином, газ виконує роботу A за рахунок зменшення своєї внутрішньої енергії.

Під час стискання або розширення змінюється й середня потенціальна енергія взаємодії молекул, оскільки при цьому змінюється середня відстань між ними.

Обчислення роботи газу. Виконання роботи в термодинаміці пов'язане зі зміною об'єму термодинамічної системи. Зручніше обчислити не A' — роботу сили $\vec{F}'$, що діє на газ з боку зовнішнього тіла (поршня), а A — роботу, яку виконує сам газ, діючи на поршень із силою $\vec{F}$. Згідно з третім законом Ньютона $\vec{F}' = -\vec{F}$.

Модуль сили, яка діє з боку газу на поршень, $F = pS$, де p — тиск газу, а S — площа поршня.



Мал. 187. До обчислення роботи газу під час: *а* — розширення; *б* — стискання

Нехай газ розширюється (мал. 187, *а*) і поршень пересувається в напрямку дії сили $\vec{F}$ на малу відстань $\Delta h = h_2 - h_1$. Якщо переміщення мале, то тиск газу можна вважати сталим ($p = \text{const}$). Робота газу $A = F\Delta h = pS(h_2 - h_1) = p(Sh_2 - Sh_1)$. Оскільки $Sh_1 = V_1$ — початковий об'єм газу, а $Sh_2 = V_2$ — кінцевий, роботу газу можна записати через зміну об'єму газу: $A = p\,\Delta V = p(V_2 - V_1)$.

Розширюючись, газ виконує додатну роботу, оскільки напрямок сили і напрямок переміщення поршня збігаються. Розширюючись, газ передає енергію навколишнім тілам.

Якщо газ стискається (мал. 187, *б*), тобто поршень пересувається у протилежному до сили $\vec{F}$ напрямку, то роботу газу визначають так само, але тепер $A < 0$, бо $V_1 > V_2$.

Робота A', яку виконують зовнішні сили над газом, відрізняється від роботи газу A лише знаком: $A' = -A$, оскільки $\vec{F}' = -\vec{F}$, а переміщення поршня є тим самим. *Робота зовнішніх сил*, що діють на газ, дорівнює $A' = -A = -p\Delta V$.

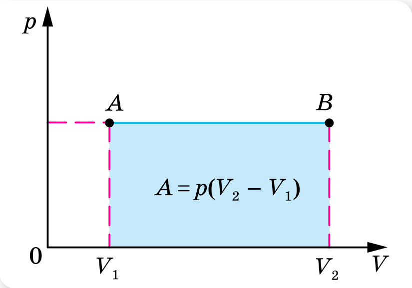
Під час стискання $V_1 > V_2$, тобто $\Delta V < 0$, і робота зовнішніх сил додатна, $A' > 0$, напрямки сили та переміщення збігаються. Виконуючи над газом додатну роботу, зовнішні тіла передають йому енергію. Під час розширення, навпаки, робота зовнішніх сил — від'ємна, адже тепер напрямки сили й переміщення є протилежними.

Робота ідеального газу під час ізобарного процесу:

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Отримані вирази для обчислення роботи правильні не тільки для стискування чи розширення газу в циліндрі, а й за *малої зміни об'єму* будь-якої термодинамічної системи. Якщо ж процес ізобарний, ці формули можна застосовувати і для більших змін об'єму.

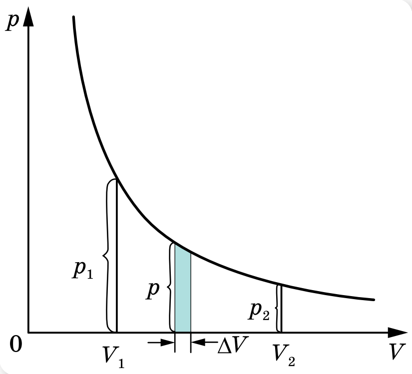
Графічний метод обчислення роботи. На малюнку 188 зображено *процес ізобарного розширення* газу в координатах p, V. Легко помітити, що для обчислення роботи газу достатньо визначити площу фігури під лінією графіка в цих координатах.



Мал. 188. Робота газу дорівнює площі прямокутника V_1ABV_2

Якщо *процес ізохорний*, робота термодинамічної системи $A = 0$, адже $V = \text{const}$.

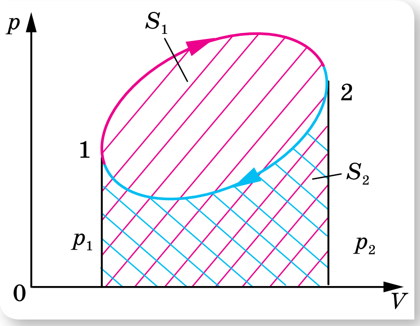
Робота дорівнює площі фігури під графіком і для інших процесів, якщо вони зображені в координатах p, V. Наприклад, розглянемо *графік ізотермічного процесу* (мал. 189). ΔV відмінне від нуля, отже газ виконує роботу. Але формулу $A = p\Delta V$ використовувати не можна, оскільки її виведено для сталого тиску, а в ізотермічному процесі тиск змінюється. Якщо ж взяти такий малий приріст об'єму ΔV, за якого зміною тиску можна знехтувати, то можна використовувати цю формулу. Таким чином, розбиваючи інтервал $V_2 - V_1$ на малі інтервали ΔV, можна на кожному з них обчислювати елементарну роботу ΔA. Повну роботу газу при ізотермічному процесі можна визначити як суму елементарних робіт ΔA. Це означає, що робота дорівнює площі фігури, обмеженої віссю абсцис, двома ординатами p_1 і p_2 та ізотермою.



Мал. 189. Графічне обчислення роботи газу в ізотермічному процесі

Можна довести, що робота газу за будь-якого процесу дорівнює площі фігури, обмеженої двома ординатами, віссю абсцис і графіком цього процесу в координатах p, V.

Обчислимо роботу газу, що виконується під час замкненого циклу (мал. 190). При переході *1* → *2* робота газу A_{1-2} дорівнює площі S_1 фігури,



Мал. 190. Обчислення роботи замкненого циклу

утвореної віссю абсцис, двома ординатами p_1 та p_2 та кривою *1–2*. Ця робота додатна, оскільки об'єм газу збільшується. При переході $2 \to 1$ робота газу A_{2-1} дорівнює площі S_2 фігури, утвореної віссю абсцис, двома ординатами p_1 і p_2 та кривою *2–1*. Ця робота від'ємна, оскільки об'єм газу зменшується. Таким чином, робота газу за цикл дорівнює: $A = A_{1-2} - A_{2-1} = S_1 - S_2$.

Фізичний зміст універсальної газової сталої. Зміна об'єму за сталого тиску супроводжується зміною температури тіла. Якщо в циліндрі під поршнем (мал. 187, с. 195) міститься $\nu = 1$ моль ідеального газу, то робота під час його ізобарного нагрівання $A_{\text{моль}} = p\Delta V_{\text{моль}}$. Згідно з рівнянням Менделєєва — Клапейрона $p\Delta V_{\text{моль}} = R\Delta T$ або $A_{\text{моль}} = R\Delta T$. З одержаної рівності видно, що за $\Delta T = 1$ K, $R = A_{\text{моль}}$. Отже, *фізичний зміст універсальної газової сталої* такий: універсальна газова стала R чисельно дорівнює роботі ізобарного розширення одного моля ідеального газу під час нагрівання його на 1 K.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що розуміють під внутрішньою енергією тіла або термодинамічної системи?
2. Чим відрізняється внутрішня енергія реального газу від внутрішньої енергії ідеального газу й від яких параметрів вона залежить?
3. Моль якого газу — водню чи гелію — за однакової температури має більшу внутрішню енергію? Поясніть чому.
4. Наведіть приклад процесу, в якому газ при стисканні нагрівається.
5. Чи виконується робота у процесі ізобарного стиснення або розширення газу?
6. Чому дорівнює робота газу під час ізохорного процесу?
7. Поясніть, як графічно визначають роботу: ізобарного розширення газу; ізотермічного розширення газу.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Ідеальний газ масою m, який мав температуру T, охолоджується ізохорно так, що його тиск зменшується в n разів. Потім газ розширюється під сталим тиском. У кінцевому стані температура газу дорівнює початковій. Визначте виконану газом роботу. Вважайте, що молярна маса газу відома й дорівнює M.

Дано:
m
T
n
M
A — ?

Розв'язання:

Для наочності побудуємо графік процесу в координатах p, V (мал. 191, с. 198). Суцільною лінією $1 \to 2 \to 3$ зображено процес в газі. Пунктирними лініями проведено ізотерми. За умовою кінцева температура дорівнює початковій, отже, точки *1* і *3* лежать на одній ізотермі.

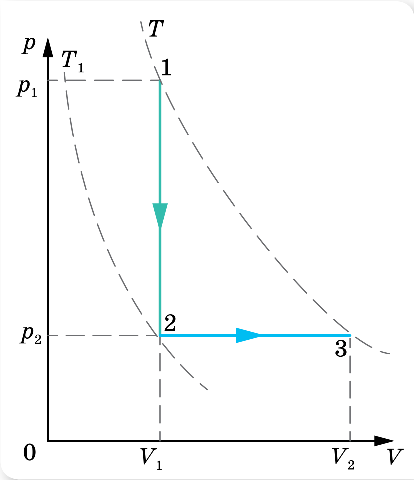
За умовою перехід зі стану *1* у стан *2* — ізохорне охолодження, $V = \text{const}$, отже, газ роботи не виконує; зі стану *2* у стан *3* — ізобарне розширення, отже,

$$A = p_2(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Температуру T_1 визначимо з рівняння ізохорного процесу: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T}{T_1} = n$, звідки $T_1 = \frac{T}{n}$. Тоді виконана газом робота

$$A = \frac{m}{M}RT\frac{n-1}{n}.$$

Відповідь: $A = \frac{m}{M}RT\frac{n-1}{n}$.



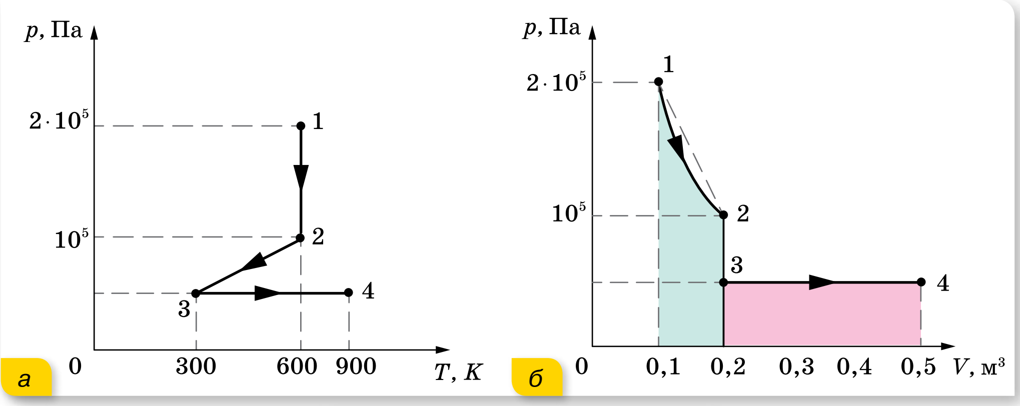
Мал. 191

Задача 2. 4 молі газу здійснюють процес, зображений на малюнку 192, *а*. На якій ділянці робота газу максимальна?

Розв'язання:

Накреслимо графік цього процесу в координатах p, V (мал. 192, *б*). Для цього визначимо об'єм газу в точках *1*, *2*, *3* і *4*.

$$V_1 = \nu\frac{RT_1}{p_1},\ V_1 = 0{,}1\ \text{м}^3,\ V_2 = 2\cdot V_1,\ V_2 = 0{,}2\ \text{м}^3,\ V_3 = V_2 \text{ і } V_4 = 0{,}5\ \text{м}^3.$$

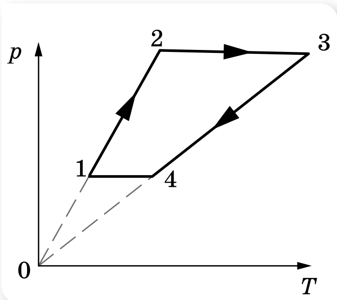


Мал. 192

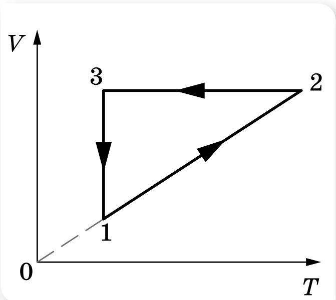
З малюнка 192, *б* видно, що на ділянці *2* → *3* робота не виконується, оскільки процес ізохорний. Отже, $A_{2-3} = 0$. На ділянці *3* → *4* (ізобарний процес) робота визначається площею відповідного прямокутника: $A_{3-4} = p_3(V_4 - V_3)$, $A_{3-4} = 15$ кДж. Ізотермічний процес відповідає ділянці *1* → *2*. Площа, обмежена ізотермою *1* → *2*, менша від площі трапеції 1–2–V_2–V_1. А площа трапеції дорівнює 15 кДж, тобто вона дорівнює площі прямокутника, що відповідає ділянці *3* → *4*. Таким чином, $A_{1-2} < A_{3-4}$; $A_{2-3} = 0$. Отже, робота газу найбільша на ділянці *3* → *4*.

ВПРАВА 34

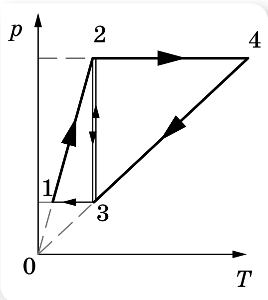
1. Визначте внутрішню енергію U гелію, що заповнює аеростат об'ємом $V = 60$ м³ за тиску $p = 100$ кПа.
2. У результаті зменшення об'єму одноатомного газу в 3,6 раза його тиск збільшився на 20 %. У скільки разів змінилася внутрішня енергія?
3. У циліндрі під поршнем міститься повітря. Під час досліду вдвічі збільшились і об'єм повітря, і його абсолютна температура, тиск газу при цьому не змінився (відбувалося протікання повітря внаслідок нещільного прилягання поршня до стінок циліндра). У скільки разів змінилася внутрішня енергія повітря (повітря вважати ідеальним газом)?
4. Який тиск одноатомного газу, що займає об'єм 2 л, якщо його внутрішня енергія дорівнює 300 Дж?
5. Обчисліть збільшення внутрішньої енергії 2 кг водню в результаті підвищення його температури на 10 К.
6. З одним молем гелію виконували дослід, під час якого середня квадратична швидкість руху атомів гелію збільшилась у 2 рази. За умовами досліду середня кінетична енергія атомів гелію залишалася пропорційною об'єму, який займає гелій. Визначте роботу, що виконує газ під час досліду. Вважайте гелій ідеальним газом, а значення середньої квадратичної швидкості руху молекул на початку досліду — 100 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.



Мал. 193



Мал. 194



Мал. 195

7. З 2 молями ідеального газу здійснюють замкнений цикл (мал. 193). Яку роботу виконує газ, якщо $\frac{p_2}{p_1} = 5$, $\frac{T_4}{T_1} = 2$ і $T_1 = 280$ К?
8. З певною кількістю ідеального газу здійснюють замкнений цикл $1 \to 2 \to 3 \to 1$ (мал. 194). Визначте, на яких стадіях процесу газ одержував, а на яких — віддавав енергію. Побудуйте графік процесу в координатах p, V.
9. З ідеальним газом проводять два цикли: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ і $3 \to 2 \to 4 \to 3$ (мал. 195). У якому з них газ виконує більшу роботу?
10. У горизонтальному циліндрі з поршнем міститься 0,1 моль гелію. Поршень утримується затворами й може ковзати без тертя вздовж стінок циліндра. Кулька масою 10 г, що летить горизонтально зі швидкістю 400 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, потрапляє в поршень і застряє в ньому. Температура гелію в момент зупинки поршня зростає до 64 К. Визначте масу поршня. Вважайте, що за час руху поршня газ не встигає обмінятись теплом з поршнем і циліндром.

§ 40 Перший закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки. У середині XIX ст. Джеймс Джоуль (1818 – 1889), Юліус фон Маєр (1814 – 1878) і Герман фон Гельмгольц (1821 – 1894), спираючись на проведені досліди, встановили закон, згідно з яким *кількість енергії в природі незмінна, вона лише переходить від одних тіл до інших або перетворюється з одного виду в інший*. Це твердження, як ми вже знаємо, називають *законом збереження і перетворення енергії*. Цей закон універсальний і може бути застосований до всіх явищ природи.

Закон збереження і перетворення енергії, поширений на теплові явища, називають *першим законом термодинаміки*. Перший закон термодинаміки має загальний характер і застосовується до будь-яких без винятку явищ природи: механічне переміщення з тертям, нагрівання тіл, проходження електричного струму, світлові явища, радіоактивні перетворення хімічних елементів тощо. Усі наведені приклади супроводжуються виконанням роботи чи теплообміном.

У загальному випадку під час переходу системи (газу) з одного стану в інший внутрішня енергія змінюється одночасно і за рахунок виконання роботи, і за рахунок передавання теплоти. Для такого випадку ***перший закон термодинаміки*** має вигляд:

$\Delta U = Q + A'$ — зміна внутрішньої енергії системи ΔU у випадку переходу її з одного стану в інший дорівнює сумі роботи зовнішніх сил A' і кількості теплоти Q, переданої системі.

Ураховуючи, що $A = -A'$, ***перший закон термодинаміки можна записати і в такому вигляді***:

$Q = \Delta U + A$ — передана системі кількість теплоти частково йде на збільшення її внутрішньої енергії і частково — на виконання системою роботи над зовнішніми тілами.

Історично встановлення цього закону було пов'язане зі спробами створення машини, яка б нескінченно довго виконувала роботу без надходження теплоти ззовні. У термодинаміці таку машину називають «вічним двигуном першого роду». Оскільки в цьому разі $Q = 0$, то $A = -\Delta U$, тобто робота може виконуватись лише за рахунок зменшення внутрішньої енергії. З першого закону термодинаміки випливає неможливість побудови «вічного двигуна першого роду» — оскільки неможливо нескінченно довго виконувати роботу за рахунок скінченної кількості внутрішньої енергії якоїсь системи.

Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів ідеального газу. З'ясуємо, якого вигляду набуває формула першого закону термодинаміки для різних ізопроцесів в ідеальному газі.

Якщо $T = \text{const}$ (*ізотермічний процес*), то внутрішня енергія системи не змінюється ($\Delta U = 0$). Уся передана газу кількість теплоти витрачається на виконання газом роботи над зовнішніми тілами. Отже, $Q = A$.

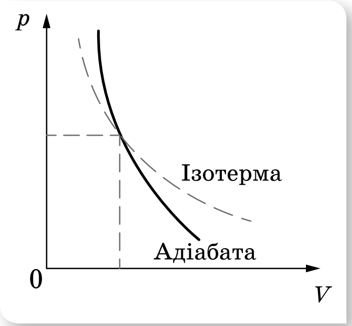
В *ізохорному процесі* об'єм газу не змінюється, отже, $A = 0$. Тоді згідно з першим законом термодинаміки $Q = \Delta U$ — вся підведена до газу кількість теплоти витрачається на збільшення його внутрішньої енергії.

В *ізобарному процесі* кількість теплоти Q, передана газу за сталого тиску, витрачається на зміну його внутрішньої енергії та на виконання ним роботи над зовнішніми тілами. Формула зберігає свій загальний вигляд $Q = \Delta U + A$.

Адіабатний процес. З першого закону термодинаміки випливає можливість процесу, в якому $Q = 0$. Цей процес має важливе практичне значення й називається *адіабатним процесом*.

Адіабатний процес — це процес, що відбувається в теплоізольованій системі (без теплообміну із зовнішніми тілами).

Перший закон термодинаміки для адіабатного процесу має вигляд $\Delta U = A'$, оскільки $Q = 0$, то *змінити внутрішню енергію системи можна лише за рахунок виконання над нею роботи*, а $\Delta U = -A$, тобто *в адіабатному процесі система може виконувати роботу над зовнішніми тілами тільки за рахунок своєї внутрішньої енергії.*



Мал. 196. Адіабата та ізотерма ідеального газу

Графік адіабатного процесу в координатах p і V зображено на малюнку 196. Для порівняння на цьому ж малюнку зображено ще й ізотерму для цієї самої маси ідеального газу.

За допомогою формули $p = nkT$ неважко пояснити, чому ізотерма пологіша від адіабати. При ізотермічному стисканні тиск газу зростає за рахунок збільшення концентрації молекул, а при адіабатному — ще й за рахунок збільшення температури.

Звичайно, неможливо оточити систему оболонкою, що абсолютно не пропускає тепло, але іноді можна вважати реальні процеси дуже близькими до адіабатних. Для цього вони мають здійснюватися так швидко, щоб за час процесу не відбулося теплообміну. Тому будь-який газ при швидкому стисканні нагрівається, а при швидкому розширенні — охолоджується. Це можна продемонструвати на такому досліді (мал. 197 на с. 202). Візьмемо скляний балон з вузькою шийкою, наллємо в нього трохи води й закупоримо пробкою, з'єднаною з насосом. За допомогою насоса будемо швидко накачувати повітря в балон. Вода в бутлі зникне, отже, температура повітря в бутлі підвищилась. Якщо нагнітати повітря в балон до такого тиску, що повітря виштовхне пробку, то можна помітити, що в бутлі утворюється туман. Це пояснюється тим, що повітря, швидко розширюючись, охолоджується.

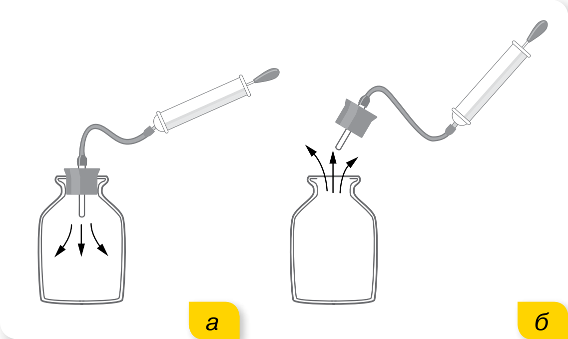
Коли працюють потужні компресори, які стискають повітря, температура повітря настільки підвищується, що доводиться спеціально охолоджувати циліндри. Адіабатичне охолодження газу під час їх розширення використовують у машинах для зрідження газів.

Нагрівання повітря від швидкого стискання застосовується в двигунах Дізеля.

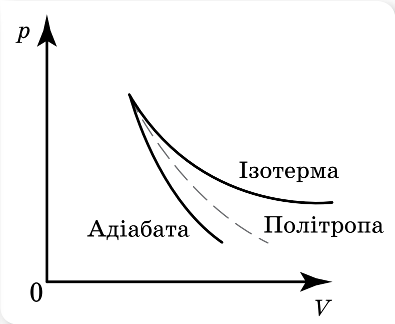
Політропний процес. У природі відбувається процес, що є ніби проміжним між ізотермічним й адіабатним. Такий процес називається ***політропним***.

Політропний процес — це термодинамічний процес, під час якого теплоємність газу залишається незмінною.

Відповідно до суті поняття теплоємності, як відношення кількості теплоти, що поглинається тілом при нескінченно малій зміні його температури, до цієї зміни $C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$, граничними випадками політропного процесу є ізотермічний і адіабатний процеси (мал. 198).



Мал. 197. Демонстрація адіабатного процесу



Мал. 198. Політропа, ізотерма та адіабата

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Як записують і формулюють перший закон термодинаміки?
2. Як записується перший закон термодинаміки для ізотермічного, ізохорного, ізобарного процесів?
3. За яких умов здійснюється адіабатний процес?
4. Наведіть приклади адіабатних і політропних процесів.
5. Який газ — одно- чи багатоатомний — охолоджується швидше під час адіабатного розширення? З’ясуйте причину.

Приклади розв'язування задач

Задача 1. 10 г кисню перебуває під тиском $3 \cdot 10^5$ Па за температури 10 °С. Після нагрівання за постійного тиску газ зайняв об'єм 10 л. Визначте кількість теплоти, яку одержав газ, зміну внутрішньої енергії та роботу, виконану газом під час розширення.

Дано:
$m = 10^{-2}$ кг
$T_1 = 283$ К
$p = 3 \cdot 10^5$ Па
$V_2 = 10^{-2}$ м^3

Q — ?
ΔU — ?
A — ?

Розв'язання:

З рівняння Менделєєва — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{M}RT_1$ визначаємо початковий об'єм газу:

$$V_1 = \frac{m}{M}R\frac{T_1}{p}, V_1 = \frac{10^{-2}\text{кг} \cdot 8,31\,\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} \cdot 283\,\text{К}}{32 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 3 \cdot 10^5\,\text{Па}} = 2,45 \cdot 10^{-3}\text{м}^3.$$

Робота розширення газу $A = p(V_2 - V_1)$,

$$A = 3 \cdot 10^5 \text{ Па } (10^{-2} \text{ м}^3 - 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) = 2,26 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Для визначення кількості теплоти, одержаної газом, потрібно спочатку визначити кінцеву температуру. Із закону Гей-Люссака $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ визначаємо: $T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1}$, $T_2 = 283\,\text{К}\,\frac{10^{-2}\text{ м}^3}{2,45 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3} = 1155\,\text{К}$.

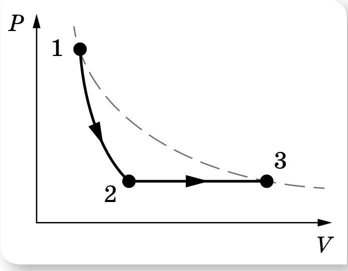
Тоді кількість одержаної газом теплоти $Q = cm(T_2 - T_1)$,

$$Q = 0,92 \cdot 10^3\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\,10^{-2}\text{ кг }(1155\text{ К} - 283\text{ К}) = 8,02 \cdot 10^3\text{ Дж}.$$

Зміну внутрішньої енергії визначимо з першого закону термодинаміки: $\Delta U = Q - A$, $\Delta U = 8,02 \cdot 10^3$ Дж $- 2,26 \cdot 10^3$ Дж $= 5,76$ Дж.

Відповідь: $8,02 \cdot 10^3$ Дж; 5,76 Дж; $2,26 \cdot 10^3$ Дж.

Задача 2. Ідеальний одноатомний газ розширюється спочатку адіабатно, а потім ізобарно (див. мал. 199, пунктирна лінія — це ізотерма). За весь процес *1–2–3* газом здійснена робота 5 кДж. Яку роботу виконав газ під час ізобарного розширення?



Мал. 199

Дано:
$A_{123} = 5$ кДж

A_{23} —?

Розв'язання:

Робота за весь процес:

$$A_{123} = A_{12} + A_{23},$$

де A_{12} — робота газу під час адіабатного розширення, A_{23} — робота газу під час ізобарного розширення.

Застосуємо перший закон термодинаміки до адіабатного процесу й визначимо роботу газу A_{12}: $A_{12} = -\Delta U_{12}$, де зміна внутрішньої енергії

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$, тоді, враховуючи, що $T_1 = T_3$ (за умовою задачі):

$$A_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

Під час ізобарного розширення робота газу $A_{23} = p_2(V_3 - V_2) = \nu R(T_3 - T_2)$.

$$A_{123} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \nu R(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

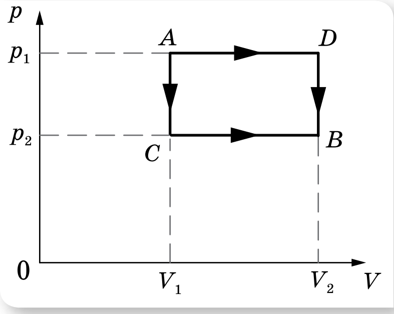
Звідси $(T_3 - T_2) = \frac{2}{5}\frac{A_{123}}{\nu R}$. Тоді $A_{23} = \nu R(T_3 - T_2) = \frac{2}{5}\frac{\nu R A_{123}}{\nu R} = \frac{2}{5}A_{123}$.

$A_{23} = 2$ кДж.

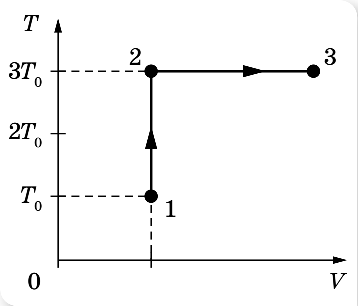
Відповідь: 2 кДж.

ВПРАВА 35

1. Яка частина кількості теплоти, наданої одноатомному газу в ізобарному процесі, витрачається на збільшення внутрішньої енергії, а яка частина — на виконання роботи?
2. Маса $m = 6{,}5$ г водню, температура якого становить $t = 27$ °C, розширюється вдвічі за $p = \text{const}$ за рахунок теплоти, яка надходить ззовні. Визначте роботу A розширення газу, зміну ΔU внутрішньої енергії газу та кількість теплоти Q, наданої газу.
3. У вертикально розташованому циліндрі, який має площу основи 1 дм^2, під поршнем масою 10 кг, що ковзає без тертя, міститься повітря. Під час ізобарного нагрівання повітря поршень піднявся на 20 см. Яку роботу виконало повітря, якщо зовнішній тиск дорівнює 100 кПа?



Мал. 200



Мал. 201

4. Певна маса кисню займає об'єм $V_1 = 3$ л за температури $t_1 = 27$ °C і тиску $p_1 = 820$ кПа (мал. 200). В іншому стані газ має параметри $V_2 = 4{,}5$ л і $p_2 = 600$ кПа. Визначте кількість теплоти Q, одержану газом, роботу A, виконану газом під час розширення, та зміну ΔU внутрішньої енергії газу під час переходу з першого стану в другий: а) шляхом ACB; б) шляхом ADB.
5. З одним молем одноатомного ідеального газу виконують процес *1–2–3* (мал. 201, де $T_0 = 100$ К). На ділянці 2–3 газу надають 2,5 кДж теплоти. Визначте відношення повної наданої кількості теплоти Q_{123} до роботи A_{123}, виконаної газом у ході процесу.
6. У посудині з невеликою тріщиною міститься повітря, яке може просочуватися крізь тріщину. Під час досліду тиск повітря в посудині зріс у 2 рази, а його абсолютна температура зменшилася в 4 рази за незмінного об'єму. У скільки разів змінилася внутрішня енергія повітря в посудині? (Повітря вважайте ідеальним газом.)

7. Тіло масою 1 кг вільно падає з висоти 2 м і потрапляє в циліндр на легкорухомий невагомий поршень. У результаті цього повітря, що перебуває в циліндрі під поршнем, дуже швидко стискається. Зміна температури повітря під час стискання становить 90 °С. Скільки повітря міститься під поршнем?
8. Для опалення в сильні морози звичайної квартири площею 63 м^2 на місяць потрібна приблизно 1 гігакалорія теплоти (1 кал ≈ 4,2 Дж). Така теплота отримується внаслідок згорання на теплоелектростанціях природного газу — метану з ККД перетворення енергії екзотермічної реакції в теплоту близько 50 %. Рівняння цієї хімічної реакції має вигляд: $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O + Q$, де $Q \approx 1{,}33 \cdot 10^{-18}$ Дж. Уявімо, що водяна пара, яка була одержана в результаті спалювання метану, сконденсувалася, замерзла на морозі й випала у вигляді снігу на даху будинку, що дорівнює за площею квартирі. Будемо вважати, що густина такого снігу — 100 $\frac{кг}{м^3}$. Якою буде товщина h шару снігу, що випав за місяць у результаті цього процесу?
9. У посудині об'ємом $V = 0{,}02$ м^3 із жорсткими стінками міститься одноатомний газ за атмосферного тиску. У кришці посудини є отвір площею S, заткнутий пробкою. Максимальна сила тертя спокою F пробки об краї отвору дорівнює 100 Н. Пробка вискакує, якщо газу передати кількість теплоти не менше 15 кДж. Визначте площу отвору S, вважаючи газ ідеальним.

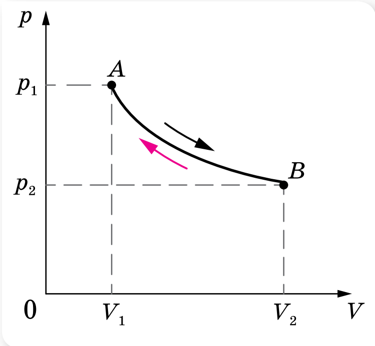
§ 41 Напрям теплових процесів. Другий і третій закони термодинаміки. Ентропія

Оборотні та необоротні процеси. Закон збереження і перетворення енергії стверджує, що кількість енергії за будь-яких її перетворень незмінна, але нічого не говорить про те, які енергетичні перетворення можливі. Однак багато процесів, цілком допустимих з погляду закону збереження енергії, ніколи не відбуваються насправді. Наприклад, нагріте тіло, поступово охолоджуючись, передає свою енергію холоднішим тілам, які його оточують. А от зворотний процес передавання теплоти від холодного тіла до гарячого самовільно відбуватися не може. Таких прикладів можна навести безліч.

На основі багатовікових спостережень за явищами природи в людини склалося уявлення про спрямованість процесів. Умовно їх можна поділити на два класи:

1) *природні*, які «самі по собі» прямують до рівноважного стану, що відповідає мінімальному значенню потенціальної енергії. Наприклад, перехід тепла від більш нагрітого тіла до менш нагрітого, вирівнювання тисків, падіння тіла тощо;
2) *штучні*, які «самі по собі» відбуватись не можуть. Наприклад, перетворення теплоти в роботу, створення різниці тисків, піднімання тіла тощо.

Поділ процесів на природні та штучні тісно пов'язаний у термодинаміці з поняттям про оборотні й необоротні процеси. Але до того ж потрібно мати на увазі, що поняття оборотного й необоротного процесів стосується винятково процесів, які відбуваються в ізольованій системі. Якщо ізольована система переходить зі стану A в стан B, а потім знову повертається у стан A (мал. 202), то при цьому потрібно розрізняти два випадки.



Мал. 202. Прямий і зворотний процеси

1) Система може повернутися зі стану B у стан A в результаті процесу, що не залишає ніяких змін у навколишньому середовищі; у цьому разі ми називаємо процес *оборотним*.
2) Повернення системи в стан A неможливе без того, щоб у навколишньому середовищі не відбулося якихось змін; тоді процес AB називають *необоротним*.

Усі процеси в природі необоротні, оскільки вони супроводжуються теплопровідністю, випромінюванням, тертям тощо.

Можна дати ще й таке визначення оборотного процесу: оборотним процесом називається процес, який допускає можливість такого повернення системи у вихідний стан, але при цьому система проходить через ті самі проміжні стани, що й у прямому процесі. Це можливо лише тоді, коли система проходить через *рівноважні стани*, тобто оборотний процес має бути рівноважним. Строго кажучи, рівноважними можуть бути лише ті процеси, які відбуваються нескінченно повільно.

Часто процеси, близькі до оборотних, створюють штучно. Якщо наприклад, газ, який міститься в циліндрі, стискається й розширюється швидко, то цей процес буде необоротним, бо система в прямому і зворотному напрямках проходить через різні стани. Якщо ж процес стискання й розширення проходить настільки повільно, що в будь-який момент часу параметри системи в усіх її точках будуть однаковими, можна вважати, що газ переходить від одного стану рівноваги до іншого. Такий процес можна наближено вважати оборотним.

Другий закон термодинаміки. Напрямок можливих енергетичних перетворень вказує ***другий закон термодинаміки***. Він підтверджує необоротність процесів у природі й був сформульований на основі дослідних фактів Рудольфом Клаузіусом у 1850 р.

Неможливо передати теплоту від більш холодної системи до більш гарячої, якщо не відбувається інших одночасних змін в обох системах або тілах, які їх оточують.

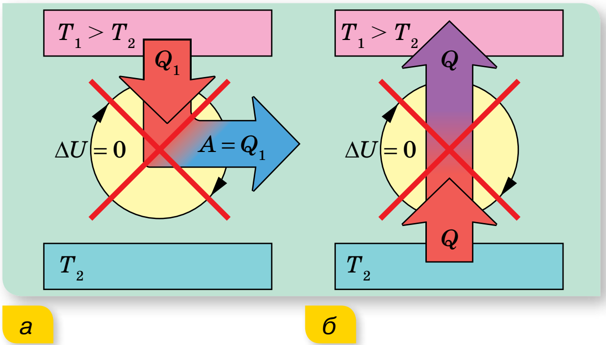
Є ще ряд формулювань другого закону.

Формулювання Анрі Пуанкаре: *неможливо привести в дію теплову машину за допомогою лише теплового резервуара.*

Формулювання Макса Планка: *неможливо побудувати періодично діючу машину, вся діяльність якої зводиться до підняття тягаря й охолодження теплового резервуара.*

Формулювання Вільяма Томсона (лорда Кельвіна): *неможливо здійснити такий періодичний процес, єдиним результатом якого буде виконання роботи за рахунок теплоти, відібраної в нагрівника.*

На малюнку 203 зображено схеми процесів, що забороняються другим законом, але які не забороняються першим законом термодинаміки.



Мал. 203. Схеми процесів, що відповідають двом формулюванням другого закону термодинаміки: *а* — В. Томсона; *б* — Р. Клаузіуса

Гіпотетичну теплову машину, у якій міг би відбуватися такий процес, називають ***«вічним двигуном другого роду»***. У земних умовах така машина могла б відбирати теплову енергію, наприклад, у Світового океану, і повністю перетворювати її на роботу. Маса води у Світовому океані дорівнює приблизно 10^{21} кг, і при її охолодженні на один градус виділилася б величезна кількість енергії (близько 10^{24} Дж), еквівалентна повному спалюванню 10^{17} кг вугілля. Енергії, яку щороку виробляють на Землі, приблизно в 10^4 раз менше. Тому *«вічний двигун другого роду»* був би для людства досить привабливим, і до цього часу є охочі, яких не полишає ідея його створення.

Поняття ентропії. Необхідність формулювання другого закону термодинаміки кожного разу по-новому, пристосовуючи його зміст до конкретного процесу, не могла задовольнити вчених. Тоді Клаузіусом у 1854 р. був введений у термодинаміку новий параметр, який назвали ентропія (від грец. *«ентропе»*, що означає — спрямована всередину, недоступна до подальшого перетворення).

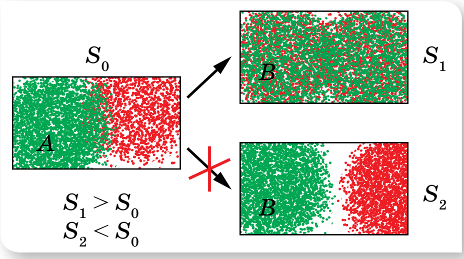
Прийнято вважати, що перехід системи з більш впорядкованого в менш впорядкований стан супроводжується збільшенням ентропії. Що більшою є ентропія, то більш невпорядкована (хаотична) система.

Виходячи з такого означення, зрозуміло, що ентропія зростає в результаті перетворення твердих речовин у рідину, рідин — у газ, а також під час розчинення речовин. У всіх цих випадках спостерігається зменшення порядку в розташуванні частинок системи. Навпаки, під час конденсації, кристалізації ентропія речовин зменшується.

Отже, ймовірність стану речовини (газу, рідини, кристалу) можна схарактеризувати як певну властивість системи, яка кількісно виражається ентропією.

Ентропією називають фізичну величину, що, як і внутрішня енергія, характеризує стан системи (тіла). Ентропію позначили літерою S, а її зміну — ΔS.

Ентропія, S — кількісна характеристика невпорядкованості системи; що більшою є хаотичність системи, то більше значення ентропії.



Мал. 204. Самочинно система може перейти зі стану з меншою ентропією до стану з більшою

Незважаючи на те, що це кількісна характеристика, ми розглянемо її лише на якісному рівні, оскільки використання формули, яка пов'язує ентропію з іншими параметрами, потребує знань з математики, що виходять за межі шкільної програми.

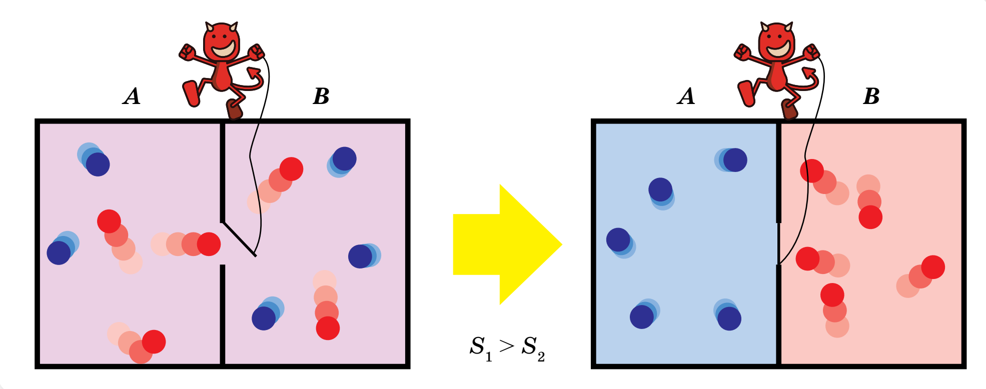
У загальному випадку цей термін визначає напрям процесу (мал. 204): якщо в системі в стані A ентропія менша, ніж у стані B, то система з A в B може перейти самочинно. Якщо ж A має більшу ентропію, ніж B, то система з A в B самочинно жодним способом перейти не може, навіть тоді, коли A і B мають однакові енергії.

Тепер ***другий закон термодинаміки*** можна сформулювати так:

у ізольованій макроскопічній системі ентропія залишається або незмінною, або зростає (у нерівноважних процесах), досягаючи максимуму при встановленні термодинамічної рівноваги (закон зростання ентропії).

Щоб підкреслити статистичну природу другого закону термодинаміки, Джеймс Максвелл у 1867 р. запропонував уявний експеримент з метою проілюструвати удаваний парадокс другого закону термодинаміки (мал. 205). Його головний персонаж — гіпотетична розумна істота мікроскопічного розміру (названа «демоном Максвелла»). Уявімо посудину, заповнену газом певної температури, посудину розділяє перегородка із заслінкою, яку «демон» відкриває, щоб пропускати швидкі частинки в один бік, а повільні — в інший. Отже, через деякий час в одній частині посудини сконцентруються швидкі частинки, а в іншій — повільні. Таким чином, всупереч другому закону термодинаміки, виходить, що «демон Максвелла» дозволяє нагріти праву частину посудини й охолодити ліву. Але для такого функціонування «демона Максвелла» якраз і необхідна передача йому енергії від стороннього джерела. За рахунок цієї енергії й проводиться поділ гарячих і холодних молекул у посудині, тобто перехід у стан з меншою ентропією.

Після розробки теорії термодинаміки, розглядалась гіпотеза про «теплову смерть Всесвіту». Коли Всесвіт самочинно досягне вирівнювання температури, настане так звана «теплова смерть». Це означає, що всі зорі погаснуть, уся матерія розпадеться, на частинки та випромінювання. Всесвіт стане рівномірно холодним, мертвим і порожнім. На початку 1900-х загальна теорія відносності Ейнштейна проголосила, що у Всесвіті може бути інший сценарій розвитку. Про це детальніше ми поговоримо в 11 класі.



Мал. 205. Уявний експеримент на другий закон термодинаміки

Третій закон термодинаміки. Як уже зазначалося, перший і другий закони термодинаміки були сформульовані як принципи неможливості створення «вічних двигунів першого і другого роду». Третій закон термодинаміки сформульовано як принцип неможливості досягнення абсолютного нуля температур. Розглядаючи максимально можливі теплоту й роботу хімічних реакцій, що здійснюються близько до абсолютного нуля температури, німецький фізик і фізикохімік Вальтер Нернст (1864 – 1941) відмітив, що поблизу абсолютного нуля температури значення всіх теплоємностей починає дорівнювати нулю й ентропії S усіх речовин, що перебувають у рівноважному стані, стають незмінними та рівними між собою. З вищезгаданого міркування випливає, що ані шляхом відведення тепла (тобто охолоджуванням тіла), ані шляхом здійснення якої-небудь роботи поблизу абсолютного нуля знизити температуру тіла неможливо. Цей висновок формулюється як ***третій закон термодинаміки***: *абсолютний нуль температури недосяжний.*

Із цього закону випливає, що в області абсолютного нуля не відбувається теплообміну системи з навколишнім середовищем і що низка функцій системи не залежить від температури. Отже, ще не досягнувши абсолютного нуля, система набуває такого стану, що його досягнення стає взагалі неможливим. Наприклад, для алмазу такий стан лежить у межах 40 К.

Отже, не можна створити машину, яка здатна взяти всю теплоту від тіла, тобто охолодити його до абсолютного нуля.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Який процес називають оборотним; необоротним?
2. У чому полягає фізичний зміст другого закону термодинаміки? Які існують формулювання цього закону?

3. Що таке ентропія? Як змінюється ентропія ізольованої системи для оборотних і необоротних процесів?
4. Чи спрацьовує правило незворотності термодинамічних процесів у системі, яка складається з трьох молекул газів?
5. Чи можна було б користуватися вітряними двигунами, якби температура атмосферного повітря була скрізь однаковою?
6. Чи може механічний рух твердого тіла перетворитися на тепловий невпорядкований рух його молекул без участі інших тіл?
7. Якщо доведено, що абсолютний нуль недосяжний, то чи існує максимальне значення абсолютної температури?

§ 42 Принцип дії теплових двигунів. Цикл Карно

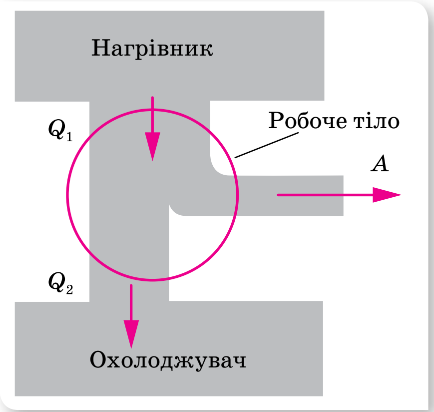
Принцип дії теплових двигунів. Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна. Запаси внутрішньої енергії в земній корі й океанах можна вважати практично не обмеженими. Але володіти запасами енергії ще недостатньо, необхідно вміти за рахунок енергії приводити в рух верстати, засоби транспорту, машини, обертати ротори генераторів електричного струму тощо. Людству потрібні двигуни, тобто пристрої, здатні виконувати роботу. Більша частина двигунів на землі — теплові двигуни, тобто пристрої, які перетворюють внутрішню енергію палива в механічну енергію.

Незважаючи на різноманітність видів теплових двигунів, усі вони мають спільний принцип дії. У роботі двигунів можна виокремити такі загальні ознаки:

1. У будь-якому тепловому двигуні відбувається перетворення енергії палива в механічну енергію. При цьому енергія палива спершу перетворюється у внутрішню енергію газу (чи пари), що має високу температуру.
2. Для роботи теплового двигуна потрібні нагрівник, охолоджувач і робоче тіло (газ чи пара). У процесі роботи теплового двигуна робоче тіло забирає від нагрівника певну кількість теплоти Q_1 і перетворює частину цієї теплоти в механічну енергію, а не перетворену частину теплоти Q_2 передає охолоджувачу. За законом перетворення і збереження енергії $Q_1 + Q_2 = A$.
3. Робота будь-якого теплового двигуна полягає в повторюванні циклів зміни стану робочого тіла. Кожний цикл складається з: 1) отримання енергії від нагрівника; 2) робочого ходу (розширення робочого тіла й перетворення частини отриманої ним енергії в механічну); 3) передавання невикористаної частини енергії охолоджувачу.

Схематично принцип дії теплової машини зображено на малюнку 206.

Необоротність теплових процесів у природі робить неможливим повне перетворення внутрішньої енергії робочого тіла в роботу. Корисна робо-



Мал. 206. Схема дії теплового двигуна

та, яку виконує двигун: $A = Q_1 - Q_2$, де Q_1 — кількість теплоти, яку отримало робоче тіло від нагрівника; Q_2 — кількість теплоти, віддана охолоджувачу.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) для будь-якої теплової машини дорівнює відношенню корисно використаної енергії до затраченої енергії: $\eta = \frac{A}{Q_1}$ або

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Цикл Карно. Принцип дії ідеального теплового двигуна. У 1824 р. французький інженер Саді Карно розробив цикл, вивчення якого відіграло вирішальну роль у розвитку теорії теплових машин. На основі цього циклу було з'ясовано, від чого залежить коефіцієнт корисної дії теплових машин. Такий цикл роботи теплового двигуна — найвигідніший. Його називають *циклом Карно*.

Розглянемо цикл Карно для ідеального газу. Газ, поміщений у теплопровідний циліндр із рухомим поршнем, приведемо в контакт із нагрівником, що має температуру T_1. При цьому газ, нагріваючись до T_1, ізотермічно розширюватиметься, переходячи зі стану *1* у стан *2* (мал. 207, *а*, на с. 212). У результаті газ отримає від нагрівника теплоту Q_1 та виконає супроти зовнішніх сил роботу $A_{12} = Q_2$.

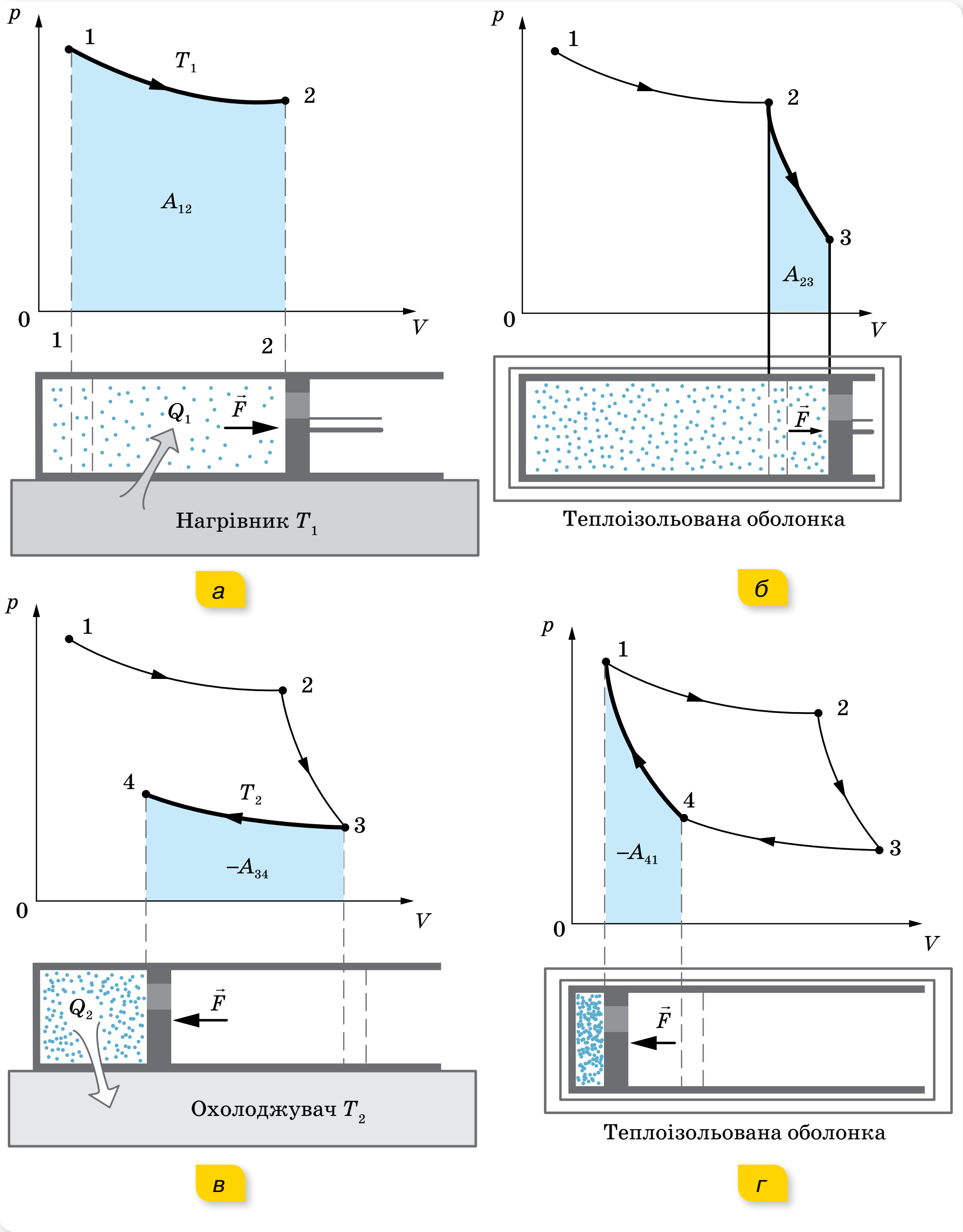
Після досягнення газом стану *2* перервемо контакт робочого тіла (газу) з нагрівником і помістимо циліндр у теплоізольовану адіабатну оболонку. Дамо газу можливість додатково адіабатно розширитись до стану *3*. При цьому: 1) газ виконає супроти зовнішніх сил роботу A_{23} за рахунок своєї внутрішньої енергії U; 2) температура газу знизиться від T_1 до T_2, оскільки його внутрішня енергія U зменшиться (мал. 207, *б*; с. 212).

Після досягнення газом стану *3* приведемо його в контакт з охолоджувачем, температура якого T_2 (мал. 207, *в*; с. 212). Газ ізотермічно стиснемо зовнішньою силою до стану *4*.

Знову помістимо циліндр у теплоізольовану оболонку, і газ, у результаті адіабатного стиснення, набуде вихідного стану (мал. 207, *г*; с. 212).

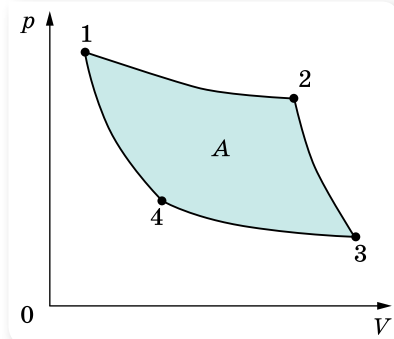
Цикл роботи ідеальної теплової машини складатиметься з двох ізотерм ($1 \to 2$, $3 \to 4$) і двох адіабат ($2 \to 3$, $4 \to 1$) (мал. 208 на с. 213).

Робота A_{23}, яку виконує під час адіабатного розширення газ, дорівнює роботі зовнішніх сил A_{41} над газом при адіабатному стисканні, оскільки в першому випадку температура газу зменшується від T_1 до T_2, а в другому — підвищується від T_2 до T_1. Тому робота, яку виконує газ, $A = A_{12} - A_{34}$, пропорційна площі фігури, обмеженої ізотермами й адіабатами (мал. 208, с. 213).



Мал. 207. Графічне зображення циклу ідеальної теплової машини

ККД оборотного циклу Карно залежить від температур нагрівника T_1 і холодильника T_2, $\eta_{max} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$, тут η_{max} — максимальне значення ККД теплової машини.



Мал. 208. Графік циклу Карно

Із цієї формули можна зробити висновок, що збільшити ККД можна, збільшуючи температуру T_1 нагрівника або зменшуючи температуру T_2 охолоджувача.

ККД теплової машини міг би дорівнювати одиниці, якби була можливість використати охолоджувач із температурою $T_2 = 0$ K. Але абсолютний нуль температури — недосяжний. Охолоджувачами для реальних теплових двигунів є переважно атмосферне повітря або вода за температури $T \approx 300$ K. Тому основний спосіб підвищення ККД теплових двигунів — це підвищення температури нагрівника. Але її не можна підняти вище температури плавлення тих матеріалів, з яких виготовляється тепловий двигун. Наприклад, температура нагрівника сучасної парової турбіни наближається до 850 K і максимально можливе значення ККД становить майже 65 %.

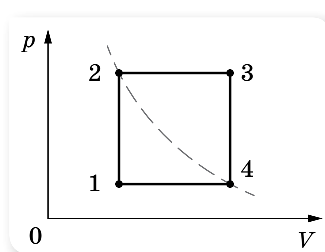
? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Яка роль у роботі теплового двигуна в нагрівника; охолоджувача?
2. Що називають робочим тілом?
3. За якою формулою визначають ККД ідеальної теплової машини (ККД машини Карно)?
4. Як краще підвищувати ККД ідеальної теплової машини: збільшуючи температуру нагрівника чи знижуючи температуру охолоджувача?

Приклади розв'язування задач

Задача. Один моль ідеального газу виконує замкнений процес, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Температура в точці *1* дорівнює T_1, а в точці *3* — T_3. Визначте роботу, виконану газом за цикл, якщо точки *2* і *4* лежать на одній ізотермі.

Розв'язання:



Мал. 209

Робота газу дорівнює площі прямокутника 1–2–3–4 (див. мал. 209):

$A = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1)$, $A = p_2V_4 - p_2V_1 - p_1V_4 + p_1V_1$.

Записуємо рівняння Менделєєва — Клапейрона для кожного стану газу (для 1 моля газу):

$p_1V_1 = RT_1$, $p_2V_2 = RT_2$, $p_3V_3 = RT_3$, $p_4V_4 = RT_4$.

Ураховуючи, що $p_1 = p_4$, $p_2 = p_3$, $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$, $T_2 = T_4 = T$.

Звідси $p_2V_4 = p_3V_3 = RT_3$, $p_2V_1 = p_2V_2 = RT_2 = RT_1$, $p_2V_4 = p_4V_4 = RT_4 = RT_1$, $p_1V_1 = RT_1$.

Підставляючи ці формули у формулу для визначення роботи, маємо:

$A = RT_3 - RT - RT + RT_1 = R(T_3 - 2T + T_1)$.

З ізохорного процесу випливає, що:

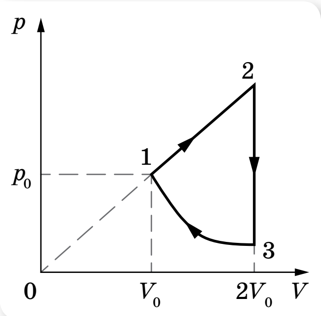
$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}=\frac{T}{T_1},\ \frac{p_3}{p_4}=\frac{T_3}{T},\ \frac{p_2}{p_1}=\frac{p_3}{p_4}\rightarrow\frac{T}{T_1}=\frac{T_3}{T}\rightarrow T=\sqrt{T_1T_3}.$$

$$A=R\left(T_3-2\sqrt{T_3T_1}+T_1\right),\ A=R\left(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1}\right)^2.$$

Відповідь: $A=R\left(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1}\right)^2.$

ВПРАВА 36

1. Температура нагрівника ідеальної теплової машини становить 117 °С, а охолоджувача — 27 °С. Кількість теплоти, що її дістає машина від нагрівника за 1 с, дорівнює 60 кДж. Обчисліть ККД машини, кількість теплоти, яку забирає охолоджувач за 1 с, і потужність машини.
2. В ідеальній тепловій машині за рахунок кожного кілоджоуля енергії, що її надає нагрівник, виконується робота 300 Дж. Визначте ККД машини й температуру нагрівника, якщо температура охолоджувача — 280 К.
3. Який ККД теплового двигуна, якщо робоче тіло, після отримання від нагрівача кількості теплоти 1,6 МДж, виконало роботу 400 кДж? Яка кількість теплоти передалася холодильнику?
4. Під час роботи електромотора потужністю 400 Вт його температура зросла на 10 К за 50 с безперервної роботи. Який ККД мотора? Теплоємність мотора — 500 $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.
5. У паровій турбіні витрачається 0,35 кг дизельного пального на 1 кВт · год. Температура пари, яка надходить у турбіну, дорівнює 250 °С, температура охолоджувача — 30 °С. Обчисліть фактичний ККД турбіни та порівняйте його з ККД ідеальної теплової машини, яка працює за тих самих температурних умов.
6. У скільки разів n зменшиться споживання електроенергії морозильником, що підтримує всередині температуру $t_0=-18$ °С, якщо винести його з кімнати, температура у якій $t_1=+27$ °С, на балкон, де температура $t_2=-3$ °С? Швидкість теплопередачі пропорційна різниці температур тіла та середовища.
7. Над одноатомним ідеальним газом проводиться циклічний процес, показаний на малюнку 210. На ділянці *1–2* газ здійснює роботу $A_{12}=1000$ Дж. Ділянка *3–1* — адіабата. Кількість теплоти, віддана газом охолоджувачу за цикл дорівнює $|Q_{\text{хол}}|=3370$ Дж. Кількість речовини газу в ході процесу не змінюється. Визначте ККД циклу.
8. Цикл теплової машини, робочою речовиною якої є ν молів ідеального одноатомного газу, складається з ізотермічного розширення, ізохоричного охолодження й адіабатичного стиснення. Робота, виконана газом в ізотермічному процесі, дорівнює A, а ККД теплової машини — η. Максимальна температура в цьому циклі дорівнює T_0. Визначте мінімальну температуру T в цьому циклічному процесі.



Мал. 210

9. Ідеальна теплова машина обмінюється теплотою з теплим тілом, а саме — з навколишнім середовищем, температура якого +25 °С, і холодним тілом з температурою −18 °С. У деякий момент машину запустили в зворотному напрямку, так що всі складові теплового балансу — робота і кількості теплоти — змінили свої знаки.

До того ж за рахунок роботи, виконаної двигуном теплової машини, від холодного тіла теплота стала відбиратися, а теплому тілу — надаватися. Яку роботу виконав двигун теплової машини, якщо кількість теплоти, надана теплому тілу, дорівнює 193 кДж? Відповідь округліть до цілого числа кДж.

Виконуємо навчальні проекти

1. Проблеми теплоенергетики: національні та локальні.
2. Визначення теплових втрат будівлі та порівняння з кількістю палива (газу, вугілля), яке витрачене неефективно. Проектування «розумного будинку».
3. Дорога забавка чи альтернатива: чи може сучасний електромобіль повністю замінити авто з двигуном внутрішнього згорання. (Порівняння енергоефективності автомобілів із двигуном внутрішнього згорання та електрокарів.)
4. Чому автомобільний парк України найстаріший в Європі: вплив законодавчо-економічних факторів на технологічне відставання автотранспортної мережі та забруднення довкілля країни.

Перевірте себе (§ 39–42)

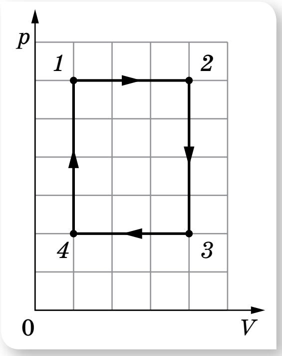
1. Як змінюється внутрішня енергія ідеального одноатомного газу за ізотермічного збільшення об'єму газу в 2 рази?

А не змінюється
Б збільшиться у 2 рази
В збільшиться у 3 рази
Г зменшиться у 2 рази

2. Під час ізобарного нагрівання 0,04 кг неону його температура змінилася на 20 °С. Яку кількість теплоти отримав газ?

А 222 Дж **Б** 332 Дж **В** 497 Дж **Г** 831 Дж

3. Замкнений цикл, який здійснюється над певною масою ідеального газу, складається із 4 процесів. Під час яких із цих процесів газ отримує тепло?

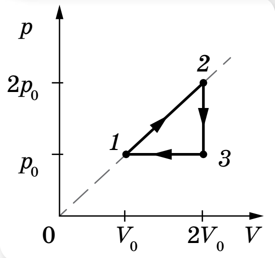


А $1 \to 2,\ 2 \to 3$
Б $4 \to 1,\ 1 \to 2$
В $1 \to 2,\ 3 \to 4$
Г $4 \to 1,\ 2 \to 3$

4. Оберіть правильне співвідношення між кількістю теплоти Q_1, яку отримало робоче тіло від нагрівника, кількістю теплоти Q_2, яку передано охолоджувачу, та корисною роботою A для теплової машини, ККД якої 25 %.

А $A = 0{,}75\, Q_1$
Б $Q_1 = 0{,}25\, Q_2$
В $Q_2 = 0{,}75\, Q_1$
Г $A = 0{,}25\,(Q_1 + Q_2)$

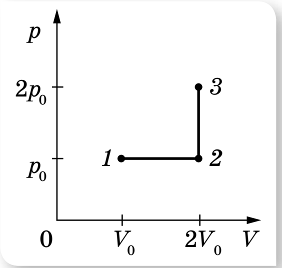
5. Теплова машина, робочим тілом якої є 1 моль ідеального одноатомного газу, здійснює цикл, зображений на малюнку. Яким є ККД цього циклу?



А 8 %
Б 12 %
В 18 %
Г 24 %

6. Визначте кількість теплоти, необхідну для переведення одного моля одноатомного ідеального газу зі стану *1* у стан *3* (див. малюнок на с. 216). У стані *1* температура газу $T_1 = 300$ К. Відповідь подайте у кілоджоулях.

7. У циліндрі, закритому рухомим поршнем, міститься газ, який може просочуватися крізь зазор навколо поршня. Під час ізотермічного стискання газу його об'єм зменшився вдвічі, а тиск газу зменшився у 3 рази. У скільки разів і як змінилася внутрішня енергія газу в циліндрі? (Газ вважайте ідеальним.)



8. У посудині об'ємом V = 0,02 м^3 з жорсткими стінками міститься одноатомний газ за атмосферного тиску. У кришці посудини є отвір площею $S = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2, заткнутий пробкою. Пробка вискакує, якщо газу передати кількість теплоти не менше 15 кДж. Визначте максимальну силу тертя спокою F пробки об краї отвору. Газ вважайте ідеальним.

9. Цикл теплової машини, робочим тілом якої є один моль ідеального одноатомного газу, складається з ізотермічного розширення, ізохоричного охолодження й адіабатичного стиснення. Під час ізохоричного процесу температура газу знижується на ΔT, а робота, виконана газом в ізотермічному процесі, дорівнює A. Визначте ККД теплової машини.

§ 43 Реальні гази

Реальні гази. Гази, з якими людина має справу на практиці, досить часто виявляють властивості, які не збігаються із властивостями ідеального газу. Тоді говорять про реальні гази. Це, наприклад, стиснуті гази в повітряних гальмах, відбійних молотках, компресорах тощо. За кімнатної температури й нормального атмосферного тиску більшість газів, як уже зазначалося, за своїми властивостями близькі до ідеальних. Проте за значного підвищення тиску суттєво починають проявляти себе сили міжмолекулярної взаємодії, і реальні гази поводять себе по-іншому порівняно з ідеальним. Щоб описати властивості реальних газів, потрібні інші рівняння, інша модель, ближча за властивостями до реального газу.

Рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса). Задовільною *моделлю реального газу* є така, у якій молекули газу мають власний об'єм, між молекулами діють сили притягання, а сили відштовхування проявляють себе, коли молекули майже дотикаються.

На підставі такої моделі реального газу голландський фізик Ян Ван-дер-Ваальс запропонував у 1873 р. рівняння стану реального газу. Треба зазначити, що для описання поведінки реальних газів розроблено значну кількість рівнянь. Рівняння Ван-дер-Ваальса, хоч і є простим, проте досить точне. Це рівняння Ван-дер-Ваальс вивів з рівняння Менделєєва — Клапейрона, увівши поправки на розмір молекул та їх взаємодію.

У рівняння Менделєєва — Клапейрона входить об'єм газу, який відповідає об'єму тієї посудини, у якій вміщено газ. Тобто молекули газу можуть рухатись у всьому наданому їм об'ємі. У реальному газі це не так. Наявність власного об'єму молекул і сил відштовхування зменшують фактичний об'єм, у якому вони можуть вільно рухатись. Об'єм, який може займати газ, буде на деяку величину b меншим, її називають *поправкою на об'єм молекул*. Теоретичні обчислення показують, що дана поправка в 4 рази більша за сумарний власний об'єм молекул газу. Це зумовлено тим, що сили відштовхування не дають можливості наблизитись молекулам впритул, а лише на відстань, що приблизно дорівнює діаметру молекули.

Дія сил притягання між молекулами приводить до появи в газі додаткового тиску, який називається *молекулярним*, або *внутрішнім, тиском*. У результаті притягання між молекулами газ ніби стискує сам себе. І хоч молекулярний тиск не фіксується манометром, його потрібно додавати до виміряного значення. Цей тиск пропорційний квадрату густини газу, $p_М \sim \rho^2$. Увівши коефіцієнт пропорційності a (*поправку на притягання між молекулами*), який залежить від природи газу, молекулярний тиск запишемо як $p_м = \dfrac{a\nu^2}{V^2}$.

Підставляючи описані поправки в рівняння стану ідеального газу, отримуємо ***рівняння стану реального газу*** (***рівняння Ван-дер-Ваальса***): $\left(p + \dfrac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$, тут a і b — сталі Ван-дер-Ваальса, які визначаються експериментально й мають різні значення для різних газів.

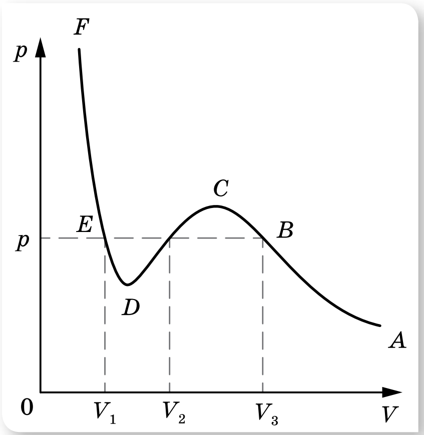
Рівняння Ван-дер-Ваальса добре описує поведінку реальних газів, проте воно теж не зовсім точне, особливо за низьких температур (коли гази дуже густі).

Графік рівняння Ван-дер-Ваальса. Перепишемо рівняння Ван-дер-Ваальса в такому вигляді:

$$pV^3 - (\nu bp + \nu RT)V^2 + \nu^2 aV - ab\nu^3 = 0.$$

Це алгебраїчне рівняння третього степеня відносно V. Алгебраїчне рівняння третього степеня з дійсними коефіцієнтами і вільним членом завжди має три розв'язки, але два з них можуть бути комплексними. Оскільки об'єм V є дійсною величиною, комплексні розв'язки не мають фізичного змісту, отже, існує або одне, або три значення V при одному значенні p.

Для T = const теоретично побудована крива залежності об'єму V реального газу від тиску p (ізотерма) є кубічною параболою, її вигляд наведено на малюнку 211.



Мал. 211. Графік рівняння Ван-дер-Ваальса

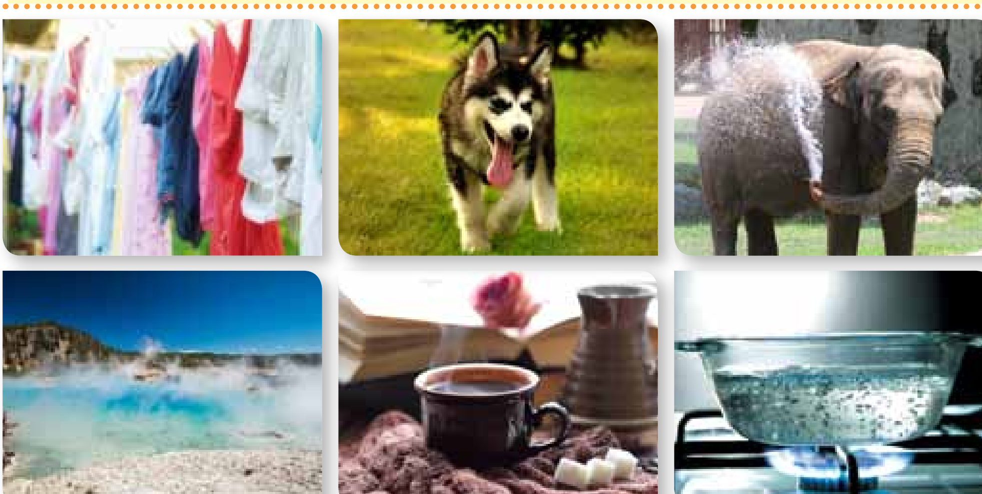
ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Чим відрізняються реальні гази від ідеальних?
2. Чим відрізняється модель реального газу від моделі ідеального газу?
3. Запишіть і поясніть рівняння Ван-дер-Ваальса. Який фізичний зміст мають поправки Ван-дер-Ваальса?

§ 44 Пароутворення та конденсація

Випаровування. Як відомо, речовина може переходити з рідкого стану в газоподібний і навпаки — з газоподібного в рідкий.

Пароутворення — фазовий перехід речовини з рідкого стану в газоподібний. Процес пароутворення може відбуватися з вільної поверхні рідини (випаровування) та всередині її об'єму (кипіння) (мал. 212).
Конденсація — перехід речовини з газоподібного стану в рідкий.



Мал. 212. Випаровування та кипіння

Розглянемо процес випаровування з погляду молекулярно-кінетичної теорії. Як відомо, потенціальна енергія молекул рідини зі збільшенням відстані між ними зростає. Отже, щоб молекула змогла віддалитись на більшу відстань і, взагалі, покинути рідину, необхідно виконати роботу за рахунок зменшення її кінетичної енергії. Серед молекул рідини, які хаотично рухаються в її поверхневому шарі, завжди є такі, кінетична енергія яких більша за роботу, необхідну для подолання протидії молекулярних сил.

Випаровування — це процес пароутворення, що відбувається за будь-якої температури тільки з вільної поверхні рідини, що межує з газоподібним середовищем або з вакуумом.

Молекули рідини, що покинули її, утворюють над її поверхнею *пару*.

Випаровування має такі властивості:

- Оскільки з рідини під час випаровування вилітають найшвидші молекули, середня швидкість руху молекул, що залишилися, зменшується, ось чому під час випаровування рідина охолоджується. Для підтримання температури такої рідини сталою необхідно підводити тепло.
- Інтенсивність випаровування залежить від площі вільної поверхні рідини: що більша поверхня, то більша кількість молекул випаровується за одиницю часу. (Наведіть самостійно приклади, які підтверджують цю властивість.)
- Випаровування відбувається за будь-якої температури. Саме тому над вільною поверхнею рідини завжди є пара цієї рідини. Що меншою є густина пари рідини над її поверхнею, то інтенсивніше випаровування. Якщо вітер над посудиною відносить з повітрям пару рідини, що утворилась, рідина випаровується швидше.
- З підвищенням температури інтенсивність випаровування рідини зростає (доведіть це самостійно і проілюструйте).
- Швидкість випаровування залежить також від природи речовини, яка випаровується. Зокрема, вода випаровується швидше, ніж олія, а ефір — швидше ніж вода. Це пояснюється різними силами взаємодії між молекулами цих речовин.

Охолодження рідини в результаті її випаровування спостерігається у природі й використовується на практиці. Завдяки тому, що $\frac{2}{3}$ поверхні Землі вкрито водоймами, підтримується тепловий баланс нашої планети. Після купання шкіра людини охолоджується через випаровування з поверхні тіла крапель води, при цьому повітря здається холоднішим, ніж вода. Під час перевезення продуктів харчування різними транспортними засобами у спеціальних пристроях випаровують рідкий аміак або рідкий двоокис вуглецю. У місцевостях із жарким кліматом воду намагаються зберігати в пористих глиняних посудинах. Вода, просочуючись крізь пори такої посудини, випаровується, і в результаті цього залишається холодною. Через властивість швидко випаровуватися й охолоджуватися деякі рідини (ефір) використовують як знеболювальний засіб.

Ненасичена та насичена пара. Молекули пари, рухаючись хаотично, можуть набути швидкості, напрямленої в бік рідини, і до неї повернутись — відбувається конденсація.

У відкритій посудині молекули, що випарувалися, розлітаються на всі боки й можуть не повернутися назад. У цих випадках випаровування переважає над конденсацією, і кількість рідини зменшується. Утворена в таких умовах пара називається ***ненасиченою***.

Накриємо посудину, що містить рідину та її пару. Через деякий час між рідиною та парою встановиться теплова рівновага. У цьому стані кількість молекул, що переходять у пару, за деякий час дорівнює кількості молекул, які повертаються в рідину (конденсуються) за такий самий час. Таку рівновагу називають *динамічною рівновагою* між процесами пароутворення та конденсації речовини. А таку систему називають *двофазною*.

Пару, що перебуває у тепловій динамічній рівновазі зі своєю рідиною, називають **насиченою**.

Ця назва відображає той факт, що в певному об'ємі за певної температури не може міститися більшої кількості пари. Насичена пара за певної температури має найбільшу густину й чинить найбільший тиск.

Процес кипіння. Особливим видом пароутворення є процес *кипіння*. Необхідною умовою кипіння є наявність в об'ємі рідини бульбашок розчиненого в ній газу або його молекул на стінках посудини, які відіграють таку саму роль, як пилинки або йони у процесі конденсації.

Під час нагрівання рідини вода випаровується з внутрішньої поверхні бульбашки в її середину. З підвищенням температури бульбашка заповнюється не тільки повітрям, розчиненим у воді, а й водяною парою. Зі збільшенням кількості водяної пари всередині бульбашок їх об'єм поступово збільшується, а відповідно, збільшується й виштовхувальна архімедова сила, що діє на бульбашку. Бульбашки відриваються від поверхні стінок і дна посудини й підіймаються до поверхні рідини. Якщо вода в посудині ще не прогріта повністю й верхні її шари залишаються холодними, бульбашки стискаються, створюючи характерний шум, який ми чуємо перед початком кипіння рідини. Якщо ж вода прогрілася повністю, а ми продовжуємо її нагрівати, процес пароутворення в середину бульбашок відбувається інтенсивніше. Кількість пари всередині бульбашок збільшується, відповідно підвищується й тиск пари. Унаслідок цього об'єм бульбашок збільшується, і за певної температури рідини бульбашки починають спливати на поверхню й лопаються, а водяна пара, що містилася в бульбашках, виходить назовні. Іноді при цьому можна спостерігати туман, який утворюється над посудиною: водяна пара змішується з холодним повітрям і конденсується у вигляді маленьких крапельок. Самої пари, звичайно, не видно. Під час кипіння температура рідини залишається сталою, оскільки вся теплота, що надається рідині, йде на внутрішнє випаровування в усьому об'ємі.

Кипіння — процес утворення пари не тільки на поверхні рідини, а й у її об'ємі, який відбувається при сталій (за даного тиску) температурі.

Щоб рідина у процесі пароутворення не змінювала своєї температури, їй треба надавати енергію. Питома теплота пароутворення (L, r) — це кількість теплоти, яку необхідно надати одиниці маси речовини в рівноважному ізобарично-ізотермічному процесі для перетворення її в пару за температури кипіння. Кількість теплоти, необхідна для *випаровування*, визначається за формулою: $Q = Lm$, де L — питома теплота пароутворення. Кількість теплоти, яка виділяється під час конденсації пари, визначається також за цією формулою.

Температура кипіння. Усі рідини мають сталу температуру кипіння, яка залежить від роду речовини та зовнішнього тиску. *Що більший зовнішній тиск, то вищою буде температура кипіння рідини, і навпаки.* Так, на висоті 5 км над рівнем моря, де тиск у 2 рази нижчий від атмосферного, температура кипіння води становить 83 °C. Отже, рідину можна закип'ятити, не нагріваючи її; достатньо *знизити тиск над рідиною, і вона закипить*. Цю властивість рідин широко використовують у різних технологічних процесах: у процесі нафтопереробки для роз'єднання нафтопродуктів, під час цукроваріння сироп кипить завдяки зниженому тиску при незначній температурі й цукор не пригорає тощо.

Для прискорення варіння вигадали «швидковарки» — посудини зі щільно припасованою кришкою, в якій за допомогою регульованого запобіжного клапана під час нагрівання досягається підвищений тиск і температура кипіння води сягає 120 °C. Оскільки швидкість хімічних реакцій під час приготування їжі подвоюється на кожні 10 °C, що перевищують 100 °C, то підвищення температури кипіння на 20 °C в 4 рази прискорює процес приготування їжі.

У парових котлах, де тиск сягає 15 атм ($1{,}5 \cdot 10^6$ Па), температура кипіння води майже 200 °C.

Перегріта рідина. Ретельно відполірувавши поверхню посудини та очистивши саму рідину, можна досягти практичної відсутності в ній центрів пароутворення. Це приводить до того, що кипіння не починається навіть за температур, вищих за температуру кипіння (чи зовнішніх тисках, нижчих від тиску насиченої пари за певної температури). Таку рідину називають *перегрітою*.

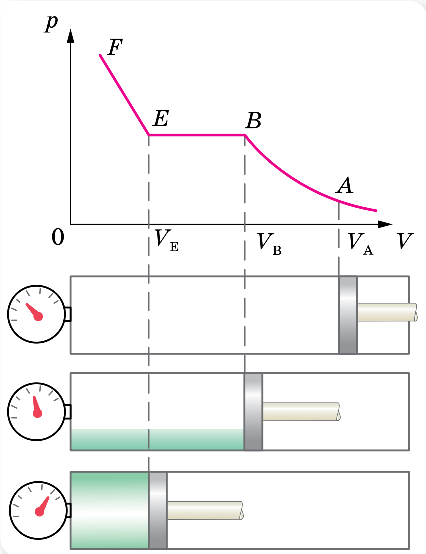
? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Як пояснити охолодження рідини під час її випаровування?
2. Від чого залежить температура кипіння рідини? Чому під час кипіння температура рідини не змінюється?
3. У каструлі-швидковарці вода кипить приблизно за температури 120 °C. Каструля герметично закрита кришкою, у якій є клапан, що випускає пару за тиску 90–110 кПа (понад атмосферний). Поясніть роботу каструлі.

§ 45 Властивості насиченої й ненасиченої пари. Вологість повітря

Властивості насиченої й ненасиченої пари. Ненасичена й насичена пари мають різні властивості. Дослідимо їх.

Розглянемо процес *ізотермічного стискання пари*. Нехай ненасичена пара міститься в термоізольованій посудині (для підтримки сталої темпера-



Мал. 213. Ізотермічний перехід ненасиченої пари в рідину

тури) з поршнем. Якщо ми стискатимемо поршнем ненасичену пару, її густина і тиск зростатимуть доти, поки пара не стане насиченою. Подальше зменшення об'єму не може збільшити ні густину, ні тиск насиченої пари, бо надлишок її перетворюватиметься на рідину. Згодом уся пара перетворюється на рідину, і поршень доторкнеться до її поверхні. Тепер уже зменшення об'єму залежатиме від стискання рідини, а оскільки рідини важко стискаються, то зменшення об'єму потребує значного збільшення тиску.

Залежність тиску ненасиченої й насиченої пари від об'єму зображено на малюнку 213. Якщо під поршнем міститься тільки ненасичена пара (точка A), то зменшення її об'єму спричиняє збільшення тиску за ізотермою AB (іншими словами, ненасичена пара підпорядковується закону Бойля — Маріотта для ідеального газу). У точці B пара стає насиченою.

Подальше ізотермічне стискання пари веде до того, що вона починає конденсуватись (відрізок BE). Пара в цей час є насиченою, тиск не змінюється. ***Густина й тиск насиченої пари за незмінної температури є сталими величинами*** (*ділянка BE*).

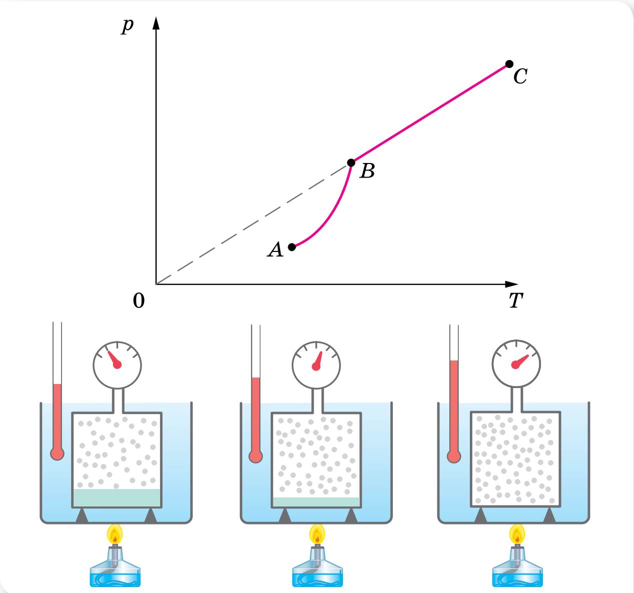
Коли вся пара сконденсується (точка E), подальше зменшення об'єму спричинить стискання рідини (*ділянка EF*).

Отже, для ненасиченої пари (як і для ідеального газу) виконується Закон Бойля — Маріотта, для насиченої пари цей закон не виконується: *тиск і густина насиченої пари не залежать від об'єму.*

З'ясуємо, як поводитиме себе насичена й ненасичена пара в *ізохорному процесі*. Для цього візьмемо герметично закриту посудину (для підтримки сталого об'єму), з'єднану з манометром. У посудині міститься тільки рідина та її пара (інших газів немає). Нагріваючи посудину, фіксуватимемо значення температури й тиску пари. Графічно цю залежність наведено на малюнку 214.

Під час нагрівання кількість рідини в закритій посудині зменшується, отже, густина і маса пари в посудині у результаті збільшується. Тиск насиченої пари зростає не тільки внаслідок збільшення температури, а й внаслідок збільшення густини пари. Тож залежність тиску насиченої пари від температури (ділянка AB) не підпорядковується закону Шарля.

Коли вся рідина випарується, пара за подальшого нагрівання стане вже ненасиченою і її тиск за сталого об'єму зростатиме прямо пропорційно абсолютній температурі (ділянка BC).

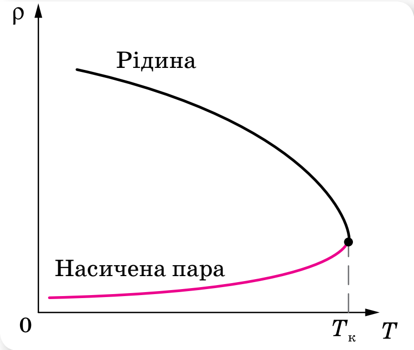


Мал. 214. Залежність тиску пари від температури

Робимо висновок: *закон Шарля до насиченої пари не застосовний.*

Зворотний перехід ненасиченої пари в насичену, а потім — у рідину, як і перехід рідини в насичену й ненасичену пару, може відбуватися двома шляхами — під час зміни об’єму пари та за зміни її температури. Якщо охолоджувати ненасичену пару за сталого тиску, вона стає насиченою, а потім конденсується в рідину (утворення туману, роси).

Як уже зазначалося, під час нагрівання густина насиченої пари зростає, а густина рідини зменшується (мал. 215). Тобто зі зростанням температури їх густини зближаються й за деякої температури $T_к$ (*критичної температури*) стають однаковими. У цей момент між рідиною та парою зникає межа поділу, пару й рідину не можна розрізнити.



Мал. 215. Залежність густини рідини та її пари від температури

Критична температура — це температура, за якої зникає відмінність фізичних властивостей рідини та її насиченої пари.

За критичної температури густина й тиск насиченої пари стають максимальними, а густина рідини, що перебуває в рівновазі з парою, — мінімальною.

Для кожної речовини існує своє певне значення критичної температури.

Тепер ми можемо дати відповідь на питання, чому одні речовини існують навколо нас і в рідкому, і в газоподібному станах, а інші — тільки в якомусь одному. Особливості газоподібного стану речовини визначаються значеннями температури, яку вона має. Якщо температура газу за атмосферного тиску вища за її критичне значення для цієї речовини, то газ залишається газом, і перетворити його на рідину не можна ні за яких тисків. Парою називають газоподібний стан речовини, для якої звичайні температури виявляються нижчими від критичної температури. Така речовина за звичайних умов може перебувати як у рідкому, так і в газоподібному станах.

Перенасичена пара. Спостереження показують, якщо пара не стискається поряд з рідиною, то пару можна охолодити до температури, нижчої від критичної, але конденсуватись у рідину вона не буде. Така пара називається *перенасиченою*. Пояснюється це тим, що для конденсації необхідні так звані центри конденсації, які б могли бути зародками краплинок рідини. Центрами конденсації, як правило, є пилинки або йони. Чиста пара конденсується лише після досягнення високого ступеня перенасичення.

Водяна пара в повітрі. З поверхні водойм, вологого ґрунту, листя рослин, легенів і шкіри людини і тварин в атмосферу Землі випаровується величезна кількість водяної пари $\left(10^{14}\ \frac{\text{т}}{\text{рік}}\right)$ і майже $\frac{1}{4}$ цієї води випадає у вигляді опадів на суходолі. Саме тому атмосферне повітря завжди вологе, тобто містить воду. Атмосферне повітря є сумішшю різних газів ($N_2 = 78\ \%$, $O_2 = 21\ \%$, інертних газів, водяної пари). Хоча водяної пари в атмосфері мало, порівняно з іншими складовими, її значення для життєдіяльності всього живого — надзвичайне.

Від наявності водяної пари в атмосфері залежить режим випаровування з поверхні суходолу, морів. Перехід водяної пари в рідкий і твердий стани ведуть до утворення туманів, хмар, опадів. Виділення теплоти конденсації, замерзання є внутрішнім джерелом енергії руху повітряних мас. Здатність водяної пари поглинати сонячне та інфрачервоне випромінювання Землі впливає на тепловий режим земної поверхні й атмосфери.

Від вмісту водяної пари в атмосфері залежить випаровування води організмом людини, що складається в середньому на $67{-}68\ \%$ з води. За одну добу (залежно від роду занять) з поверхні шкіри й легенів людини випаровується майже 2 кг води. Тривале перебування в теплому й вологому повітрі порушує теплообмін в організмі. Людина стає в'ялою, її працездатність знижується. Саме тому про вміст водяної пари в атмосфері (***вологість повітря***) щоденно повідомляють у прогнозах погоди.

Важливе значення має вологість для життєдіяльності тваринного та рослинного світу, для процесів сушіння виробів тощо. Контроль і підтримання необхідної вологості дуже важливі також для зберігання книжок, творів мистецтва, музичних інструментів, харчових продуктів, овочів, фруктів тощо.

Для підтримання необхідної вологості користуються приладами, які зволожують чи осушують повітря — *кондиціонерами*.

Вологість повітря. Вміст водяної пари в повітрі, тобто його вологість, можна схарактеризувати кількома величинами.

Так, ***абсолютна вологість повітря*** дорівнює вмісту водяної пари в грамах в одному кубічному метрі повітря (густина водяної пари). За значенням абсолютної вологості не можна судити про те, наскільки водяна пара в цих умовах близька до насичення. Саме тому ввели величину, яка показує, наскільки водяна пара за певної температури близька до насичення — *відносну вологість повітря*. Звернімо увагу на те, що атмосферний тиск дорівнює сумі тисків сухого повітря та водяної пари, що є в ньому. Тиск, який чинила б водяна пара, коли б не було інших газів, називають *парціальним тиском водяної пари*. Тепер дамо визначення.

Відносна вологість повітря — це фізична величина, що показує, наскільки водяна пара, що є в повітрі, близька до насичення, і вона вимірюється відношенням парціального тиску водяної пари p, що міститься в повітрі за певної температури, до тиску $p_н$ насиченої пари (за тієї самої температури), вираженого у відсотках, $\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\ \%$.

Оскільки, згідно з газовими законами, тиск прямо пропорційний концентрації молекул, отже і густині ρ, можна записати $\varphi = \frac{\rho}{\rho_н} \cdot 100\,\%$, де ρ — густина ненасиченої пари (*абсолютна вологість*), $\rho_н$ — густина насиченої водяної пари.

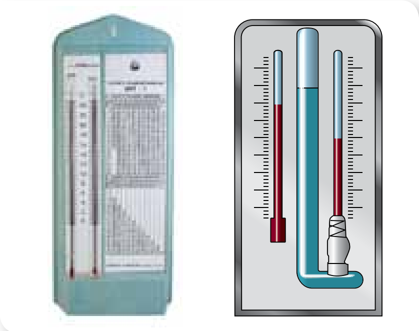
На основі експериментальних результатів складено таблиці залежності тиску насиченої водяної пари від температури. Якщо знижується температура ненасиченої пари, то її відносна вологість зростатиме без додаткового випаровування води. Знижуючи температуру повітря, можна довести пару, яка в ньому міститься, до стану насичення, що у природі приводить до утворення туману, випадання роси.

Температура, до якої треба ізобарно охолодити повітря певної вологості, щоб водяна пара стала насиченою, називається **точкою роси**.

Точка роси також є характеристикою вологості повітря, оскільки вона дає змогу визначити парціальний тиск водяної пари й відносну вологість.

Прилади для вимірювання вологості повітря. Вологість повітря вимірюють спеціальними приладами — психрометром, гігрометром тощо.

Гігрометр психрометричний (мал. 216, с. 226) складається з двох термометрів — сухого та вологого. Резервуар одного з них залишається сухим, він показує температуру повітря. Резервуар другого обмотаний шматком тканини, зануреної у воду. Вода випаровується, і завдяки цьому термометр охолоджується. Що меншою є відносна вологість повітря φ, то інтенсивніше випаровування й тим нижчу температуру показує



Мал. 216. Гігрометр психрометричний і його схематичне зображення

вологий термометр. За різницею температур термометрів і спеціальною таблицею можна визначити відносну вологість φ повітря. Найсприятливішою для організму людини є відносна вологість від 40 до 60 %.

Вимірюють вологість також за допомогою волосяного гігрометра, дія якого ґрунтується на властивості волосини людини змінювати свою довжину у вологому повітрі. Зі збільшенням вологості довжина волосини зростає, а зі зменшенням вологості волосина коротшає.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які властивості мають насичена та ненасичена пари?
2. Яку температуру називають критичною?
3. Що розуміють під вологістю повітря?
4. Відносна вологість повітря 70 %. Що це означає?
5. За допомогою яких приладів визначають вологість повітря?
6. Які суб'єктивні відчуття вологості повітря в людини?
7. Сухий термометр психрометра показує 16 °С, а вологий — 8 °С. Відносна вологість, виміряна волосяним гігрометром, дорівнює 30 %. Чи правильні показання гігрометра?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Із посудини об'ємом 0,005 м³ відкачали повітря і налили в неї 1 г води. Визначте тиск пари в посудині за температури 20 °С. Який буде тиск пари, якщо: 1) збільшити температуру до 100 °С; 2) посудину сполучити з іншою посудиною такого самого об'єму й температури, з якої відкачано повітря?

Дано:

$V = 0{,}005$ м³
$m = 1 \cdot 10^{-3}$ кг
$t_1 = 20$ °С
$t_2 = 100$ °С

p_1 — ?
p_2 — ?
p_3 — ?

Розв'язання:

Спочатку визначимо, яку мінімальну кількість води необхідно випарувати для насичення даного об'єму. З рівняння Менделєєва — Клапейрона: $m = \dfrac{p_н V \mu}{RT}$, де $p_н$ — тиск насиченої пари.

За $T_1 = 293$ К $\quad m_1 = 9 \cdot 10^{-5}$ кг.
За $T_2 = 373$ К $\quad m_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ кг.

Маса налитої води $m = 1 \cdot 10^{-3}$ кг, тобто за температури $T_1 = 293$ К пара буде насиченою; її тиск знайдемо з *таблиці* (див. форзац): $p_1 = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па.

Тиск пари за температури T_2 знаходимо за рівнянням Менделєєва — Клапейрона:

$$p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V} \approx 3{,}4 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Якщо посудину з парою сполучити з іншою такою самою посудиною, то об'єм, що його займає пара, збільшиться вдвічі. Отже, удвічі збільшиться й мінімальна маса води, потрібна для насичення цього об'єму. Проте вона все ще буде меншою від маси налитої води. Тому пара буде насиченою і її тиск такий: $p_3 = p_1 = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па.

Відповідь: $p_1 = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па, $p_3 = p_1 = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па.

Задача 2. У кімнаті за температури 20 °C відносна вологість повітря становить 20 %. Скільки води треба додатково випаровувати для збільшення вологості до 50 %, якщо об'єм кімнати — 40 м³?

Дано:
$t = 20$ °C
$\varphi_1 = 20$ %
$\varphi_2 = 50$ %
$V = 40$ м³
Δm — ?

Розв'язання:

За відносної вологості φ_1 густина пари $\rho_1 = \varphi_1\rho_н$, а за φ_2: $\rho_2 = \varphi_2\rho_н$, де $\rho_н$ — густина насиченої пари за $t = 20$ °C.

Відповідно до маси водяної пари $m_1 = \varphi_1\rho_н V$ і $m_2 = \varphi_2\rho_н V$. Додатково треба випаровувати масу води $\Delta m = m_2 - m_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)\rho_н V$.

З таблиці знаходимо: $\rho_н = 1{,}73 \cdot 10^{-2} \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Після підстановки даних отримаємо:

$$\Delta m = (0{,}5 - 0{,}2) \cdot 1{,}73 \cdot 10^{-2} \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 40 \text{ м}^3 = 0{,}208 \text{ кг.}$$

Відповідь: $\Delta m = 0{,}208$ кг.

ВПРАВА 37

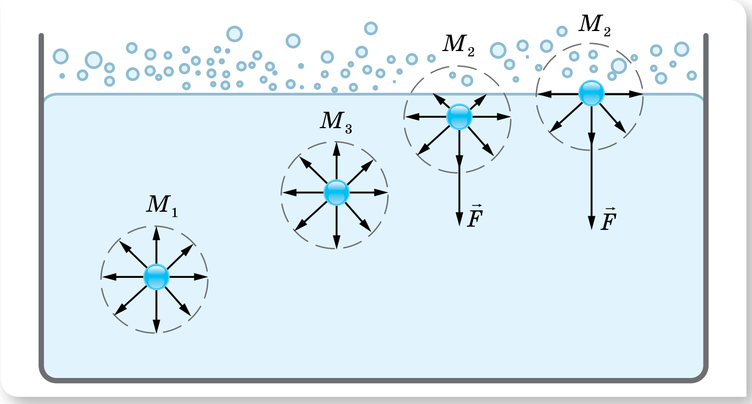
1. Густина водяної пари за 25 °C дорівнює 23 $\frac{\text{г}}{\text{м}^3}$. Насичена ця пара чи ненасичена?
2. У циліндричній посудині під поршнем, площа якого 10 см², міститься вода за температури 20 °C, причому поршень торкається поверхні води. Скільки води випарується, якщо підняти поршень на 15 см?
3. Тиск насиченої пари ефіру за 0 °C дорівнює 24,7 кПа, а за 40 °C — 123 кПа. Порівняйте значення густини пари за цих температур.
4. Визначте відносну вологість повітря в кімнаті за 18 °C, якщо за 10 °C утворюється роса.
5. Відносна вологість у кімнаті за температури 16 °C становить 65 %. Як зміниться відносна вологість після зниження температури повітря на 4 K, якщо парціальний тиск водяної пари залишиться таким самим?
6. Відносна вологість повітря ввечері за 16 °C дорівнює 55 %. Чи випаде роса, якщо вночі температура зменшиться до 8 °C?
7. Для осушення повітря, яке заповнює балон місткістю 10 л, до балона ввели шматок хлориду кальцію, що увібрав 0,13 г води. Якою була відносна вологість повітря в балоні, якщо його температура дорівнює 20 °C?

8. Визначте відносну вологість суміші двох об'ємів повітря: V_1 = 2 м^3 з відносною вологістю 30 % та V_2 = 3 м^3 з відносною вологістю 40 %. Об'єм суміші дорівнює V = 5 м^3. Температуру вважайте сталою.
9. У балоні місткістю 0,01 м^3 є сухе повітря за температури 0 °С і тиску p_0 = 10^5 Па. Чому дорівнюватиме тиск вологого повітря в балоні, якщо в нього налити m = 3 г води й нагріти балон до t_1 = 100 °С?
10. Людина в окулярах заходить з вулиці, де температура повітря t_1 = 5 °С, у теплу кімнату, де температура повітря t_2 = 25 °С. За якої максимальної вологості повітря в кімнаті окуляри людини не запотівають?
11. Узимку в кімнаті температура повітря t_1 = 20 °С за відносної вологості φ_1 = 30 %, а надворі за температури t_2 = −10 °С, відносна вологість повітря φ_2 = 90 %. Визначте кількість водяної пари в 1 м^3 повітря в кімнаті та надворі. Яке з них містить більше вологи?

§ 46 Рідини. Властивості поверхні рідин

Явище поверхневого натягу. Найхарактернішою властивістю рідини, є те, що на межі з газом рідина утворює *вільну поверхню*. З'ясуємо, чим відрізняються дії молекулярних сил всередині рідини та на її поверхні.

На кожну молекулу рідини діють сили притягання сусідніх молекул (мал. 217). Ці сили для молекули M_1, що міститься всередині рідини, взаємно скомпенсовані, тобто середнє значення рівнодійної сил притягання близьке до нуля. Випадкові зміни величини і напрямку цієї рівнодійної змушують молекулу здійснювати лише хаотичний рух всередині рідини.



Мал. 217. Сили міжмолекулярної взаємодії молекул рідини

Рівнодійна ж сил притягання F, що діє на молекули, які містяться на поверхні рідини, відмінна від нуля, адже над поверхнею рідини її молекул значно менше, ніж усередині. Таким чином, рівнодійна сил притягання, що діють на молекули, які розміщенні в поверхневому шарі товщиною, яка дорівнює радіусу міжмолекулярної взаємодії, напрямлена вниз (усередину рідини). Унаслідок цього молекули поверхневого шару чинять молекулярний тиск на рідину, стягуючи її поверхню до мінімуму. Це явище називають *явищем поверхневого натягу*. Рівнодійну сил притягання, які діють між молекулами на поверхні рідини, називають ***силою поверхневого натягу*** $F_н$.

Завдяки явищу поверхневого натягу вільна поверхня води поводить себе як пружна плівка, на ній можуть утримуватися легкі (навіть металеві) предмети й рухатися комахи-водомірки (мал. 218).

Мал. 218. Комаха-водомірка на поверхні води

Явище поверхневого натягу з позицій молекулярно-кінетичної теорії пояснюється таким чином. Оскільки молекули рідини, розміщені в її поверхневому шарі, втягуються всередину рідини, їх потенціальна енергія більша, ніж у молекул всередині рідини. До такого висновку можна дійти, врахувавши, що потенціальна енергія взаємодії молекул від'ємна і що молекули в поверхневому шарі рідини взаємодіють з меншою кількістю молекул, ніж усередині. За рахунок цієї додаткової потенціальної енергії молекул поверхневого шару може бути виконана робота, пов'язана зі зменшенням вільної поверхні рідини. Або, навпаки, для того, щоб вивести молекулу M_1 (мал. 217) із середини рідини на її поверхню, треба подолати протидію молекулярних сил, тобто виконати роботу, яка потрібна для збільшення енергії поверхневого шару рідини. Неважко зрозуміти, що до того ж зміна енергії прямо пропорційна зміні площі вільної поверхні рідини: $\Delta E \sim \Delta S$. І оскільки зміна енергії визначається роботою: $\Delta E = A$, то $A \sim \Delta S$.

Робота молекулярних сил залежить від роду рідини й умов над поверхнею рідини. Тому, переходячи до знака рівності, введемо коефіцієнт пропорційності σ, що описує ці залежності. Його називають коефіцієнтом поверхневого натягу.

Коефіцієнт поверхневого натягу σ — це фізична величина, яка описує залежність роботи молекулярних сил у результаті зміни площі вільної поверхні рідини від роду рідини й зовнішніх умов та вимірюється роботою молекулярних сил, необхідною для зменшення площі вільної поверхні рідини на одиницю: $\sigma = \dfrac{A}{\Delta S}$.

Одиниця коефіцієнта поверхневого натягу в СІ — джоуль на метр у квадраті: $1\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.

Цей коефіцієнт визначено для багатьох однорідних рідин і занесено до таблиць. З підвищенням температури коефіцієнт σ зменшується через збільшення середньої відстані між молекулами на поверхні рідини.

За критичної температури $T_{кр}$ поверхневий натяг зникає, оскільки немає різниці між рідиною та її парою.

Коефіцієнт поверхневого натягу може бути виражений і через силу поверхневого натягу та довжину межі вільної поверхні: $\sigma = \frac{F_н}{l}$.

Силою поверхневого натягу називають силу, яка діє вздовж поверхні рідини перпендикулярно до лінії, що обмежує цю поверхню, і прагне скоротити площу вільної поверхні до мінімуму.

З формули $\sigma = \frac{F_н}{l}$ видно, що одиницею коефіцієнта поверхневого натягу може бути ньютон на метр: $1 \frac{Н}{м}$.

Вивчаючи основи механіки, ми дізналися, що будь-яка механічна система у вільному стані намагається зайняти таке положення, у якому її потенціальна енергія мінімальна. Така ж закономірність спостерігається і в молекулярній фізиці. Під дією сил поверхневого натягу поверхневий шар рідини намагається скоротити площу своєї поверхні до мінімального для даного об'єму рідини розміру. Рідина, що перебуває у вільному стані й не взаємодіє з опорою чи посудиною (наприклад, у стані невагомості), набуває форму кулі, бо куляста форма має мінімальну площу поверхні для заданого об'єму.

Поверхнево-активні речовини. На значення коефіцієнта σ також впливає наявність домішок у самій рідині. Речовини, які послаблюють поверхневий натяг рідин, називають *поверхнево-активними*. Найвідомішими поверхнево-активними речовинами для води є мило та миючі засоби. Зокрема, мило зменшує коефіцієнт поверхневого натягу води з $72 \cdot 10^{-3}$ до $45 \cdot 10^{-3}\ \frac{Н}{м}$. У процесі прання білизни значення σ зменшується як через нагрівання рідини, так і завдяки додаванню мийних засобів, це сприяє легшому проникненню розчину в тканину. З молекулярної точки зору вплив поверхнево-активних речовин пояснюється тим, що сили притягання між молекулами самої рідини більші за сили притягання між молекулами поверхнево-активної речовини. Тому молекули рідини, розміщені в поверхневому шарі, з більшою силою втягуються всередину рідини, ніж молекули домішок. Унаслідок цього молекули рідини переходять з поверхневого шару в глибину, а молекули поверхнево-активної речовини витісняються на поверхню.

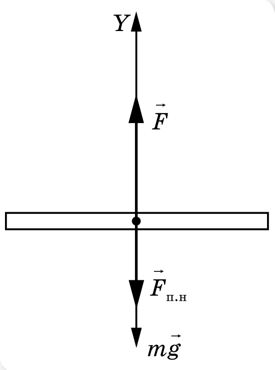
? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які властивості має поверхневий шар рідини? Що таке сила поверхневого натягу?
2. Від чого залежить коефіцієнт поверхневого натягу? У яких одиницях вимірюється коефіцієнт поверхневого натягу в СІ?
3. Як зміниться сила поверхневого натягу води після розчинення в ній мила?

Експериментуємо

Покладіть на поверхню води сірник і доторкніться до води шматком мила з одного боку поблизу сірника. Поясніть явище, що спостерігається при цьому. Визначте силу, яка приводить сірник у рух, якщо довжина сірника становить 4 см.

Приклади розв'язування задач



Мал. 219. Сили, що діють на кільце

Задача 1. Тонке алюмінієве кільце радіусом 7,8 см лежить на поверхні мильного розчину. З яким зусиллям можна відірвати кільце від розчину? Температуру розчину вважати кімнатною. Маса кільця — 4 г.

Дано:
$R = 7{,}8 \cdot 10^{-2}$ м
$m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг
$\sigma = 4 \cdot 10^{-2}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$

F — ?

Розв'язання:

Сили, що діють на кільце, показано на малюнку 219.

Оскільки кільце дотикається до мильного розчину і із зовнішнього, і із внутрішнього боку, то сила поверхневого натягу $F_{п.н} = 2\sigma l$, де $l = 2\pi R$.

Сила, яку необхідно прикласти, щоб відірвати кільце, дорівнює $F = mg + 2\sigma l = mg + 4\pi\sigma R$.

Після підстановки даних отримуємо: $F = 0{,}11$ Н.

Відповідь: 0,11 Н.

Задача 2. Яку роботу необхідно виконати, щоб розділити сферичну краплину радіусом R на дві однакові краплини?

Дано:
R
σ

A — ?

Розв'язання:

Для розділення краплини слід виконати роботу для збільшення площі поверхні ΔS, оскільки площа поверхні великої краплини S менша, ніж сума площ отриманих краплин $2S_0$; $A = \sigma\Delta S = \sigma(2S_0 - S) = \sigma(2 \cdot 4\pi \cdot r^2 - 4\pi R^2)$, де r — радіус маленьких краплин.

Об'єм великої краплини дорівнює сумі об'ємів маленьких краплин: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi r^3$. Звідси виразимо радіус маленьких краплин: $r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$, тоді $A = \sigma 4\pi R^2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - 1\right)$.

Відповідь: $4\sigma\pi R^2\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - 1\right)$.

ВПРАВА 38

1. Яку роботу треба виконати, щоб надути мильну бульбашку радіусом 4 см? Коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину дорівнює 40 $\frac{\text{мН}}{\text{м}}$.
2. З крапельниці накапали однакові маси води, спочатку холодної за температури 8 °С, а потім гарячої — за температури 80 °С. Як і у скільки разів відрізняється коефіцієнт поверхневого натягу холодної й гарячої води, якщо в першому випадку утворилося 40, а в другому — 48 крапель? Вважайте, що густина холодної води така сама як густина гарячої води.
3. Кільце, внутрішній діаметр якого 25 мм, а зовнішній 26 мм, підвішене горизонтально до пружини й дотикається до поверхні рідини. Жорсткість пружини $9{,}8 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Під час опускання поверхні рідини, кільце відривається від неї в момент, коли видовження пружини становить 5,3 мм. Визначте поверхневий натяг рідини.
4. Дві мильні бульбашки радіусами 2 та 3 см зливаються в одну. Визначте енергію, що виділяється в цьому процесі, якщо коефіцієнт поверхневого натягу — 0,045 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.
5. Крапля ртуті масою m = 1 г розбивається на n = 100 однакових крапель. Визначте, наскільки зростає при цьому енергія поверхневого шару ртуті. Коефіцієнт поверхневого натягу ртуті $\sigma = 0{,}5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, густина ртуті — $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

§ 47 Змочування. Капілярні явища

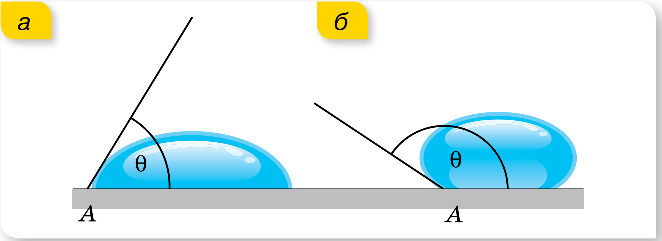
Змочування. Крайовий кут. Розглянемо явища, що виникають на межі дотику поверхонь рідини і твердого тіла. У повсякденному житті можна спостерігати, що крапля води може розпливатись (наприклад, по чистій поверхні скла (мал. 220, *а*)), але може і не розпливатись і мати при цьому форму майже правильної кулі (наприклад, краплі роси) (мал. 220, *б*). У першому випадку кажуть, що вода змочує поверхню, у другому — не змочує.

Мал. 220. Явище змочування (*а*); незмочування (*б*)

Як саме поводитиме себе рідина на поверхні твердого тіла, залежить від сил взаємодії молекул рідини з молекулами твердого тіла. Якщо взаємодія молекул рідини між собою менша, ніж їх взаємодія з молекулами контактного твердого тіла, то маємо випадок ***змочування***, а коли ця взаємодія більша, — ***незмочування***. Характеристикою явища змочування є крайовий кут θ (мал. 221).

Крайовий кут (кут змочування) θ — це кут, утворений плоскою поверхнею твердого тіла та площиною, дотичною до поверхні рідини, яка межує з твердим тілом.

Значення косинуса крайового кута (cos θ) визначає ступінь змочування: для змочувальних рідин cos θ додатний, для незмочувальних — від'ємний, а для ідеально змочуваних поверхонь $\cos\theta = 1$.

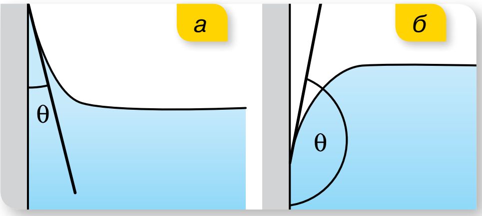


Мал. 221. Крайовий кут: *а* — гострий для змочувальних рідин; *б* — тупий для незмочувальних

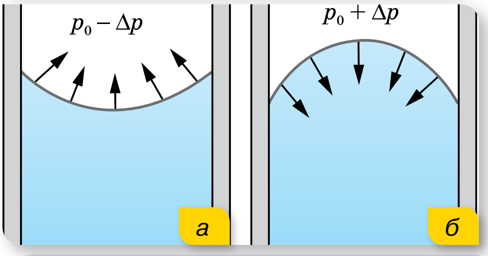
Явище змочування відіграє важливу роль у побуті й техніці. Якби вода не змочувала тіло людини, то марним було б купання. Добре змочування потрібне під час фарбування і прання, паяння, збагачення руд цінних порід і в інших технічних процесах.

Оскільки крайовий кут утворюється і за вертикального положення твердої поверхні, це приводить до підняття змочувальної рідини або опускання незмочувальної біля країв посудини (мал. 222).

Особливо чітко це явище спостерігається у вузьких трубках (капілярах), де викривляється вся вільна поверхня. Явища підняття (опускання) рідини в капілярах називаються *капілярними*.



Мал. 222. Підняття змочувальної рідини (*а*) й опускання незмочувальної (*б*)



Мал. 223. Кривизна меніска зумовлює появу додаткового тиску $\pm\Delta p$ (знак «+» — для опуклого меніска, знак «–» — для увігнутого)

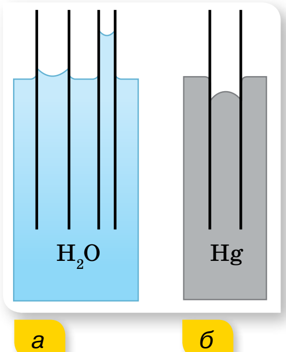
Формула Лапласа для капілярного тиску. Змочувальна рідина у капілярі піднімається по стінці, утворюється увігнута поверхня рідини (увігнутий меніск) (мал. 223, *а*). Незмочувальна рідина опускається в капілярі, утворюючи опуклий меніск (мал. 223, *б*). Оскільки площа поверхні меніска більша, ніж площа внутрішнього перерізу капіляра, то молекулярні сили прагнуть випрямити викривлену поверхню рідини, і цим створюється додатковий тиск Δp, який для змочування (увігнутий меніск) напрямлений від рідини (мал. 223, *а*; с. 233), а для незмочування (опуклий меніск) — всередину рідини (мал. 223, *б*; с. 233). Величину цього тиску визначив французький учений П'єр Симон де Лаплас, тому його часто називають ***лапласівським тиском***.

Якщо поверхня сферична, то додатковий тиск визначається за формулою $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{R}$.

Для тонкостінної порожньої сфери (бульбашки), що має дві поверхні — зовнішню і внутрішню, лапласівський тиск дорівнює $\Delta p = 2\dfrac{2\sigma}{R} = \dfrac{4\sigma}{R}$.

Якщо в змочувальну рідину опустити капіляр, рідина втягнеться в нього і її рівень розміститься на висоті h над рівнем рідини поза капіляром (мал. 224, *а*).

Це пояснюється тим, що лапласівський тиск Δp в капілярі напрямлений угору, і рідина втягується доти, поки цей тиск не зрівноважиться гідростатичним тиском стовпа рідини $\rho g h$. Установимо, як можна визначити висоту підняття рівня рідини в капілярі.



Мал. 224.
а — підняття змочувальної і *б* — опускання незмочувальної рідини в капілярі

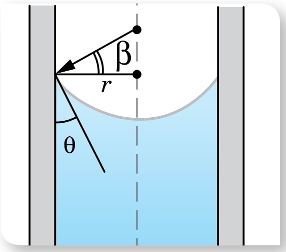
Рівновага встановлюється за умови $\Delta p = \rho g h$, або для сферичного меніска $\dfrac{2\sigma}{R} = \rho g h$.

Для випадку змочування радіус сферичної поверхні R (меніска) дорівнює внутрішньому радіусу капіляра r (мал. 225). Тоді $\dfrac{2\sigma}{r} = \rho g h$, звідки

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Для неповного змочування ($\theta \neq 0$) радіус меніска $R = \dfrac{r}{\cos\theta}$, тоді $h = \dfrac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta$.

Якщо рідина не змочує капіляр, то в цьому разі рівень рідини в ньому буде нижчим від рівня рідини в посудині (мал. 225, б). Глибина опускання рівня рідини визначається тими самими формулами.



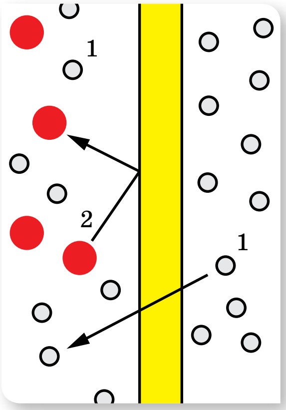
Мал. 225. Зв'язок між радіусом меніска, радіусом капіляра та крайовим кутом

Капілярні явища мають велике значення в природі й техніці. Завдяки цим явищам відбувається проникнення вологи з ґрунту в стебла й листки рослин. Саме в капілярах відбуваються основні процеси, пов'язані з диханням і живленням організмів. У тілі кожної людини приблизно $160 \cdot 10^9$ капілярів, загальна довжина яких сягає 60 – 80 тис. км.

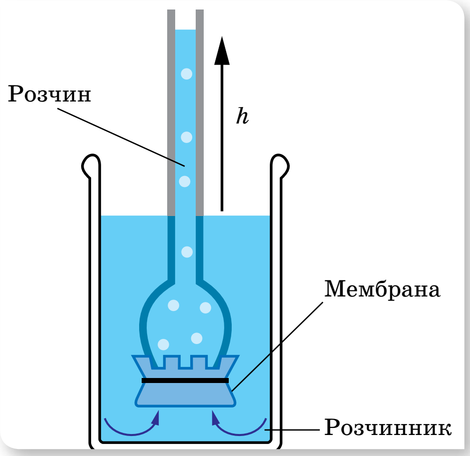
У будівництві враховують можливість підняття вологи по капілярних порах будівельних матеріалів. Для захисту фундаменту і стін від дії ґрунтових вод і вологи застосовують гідроізоляційні матеріали — толь, смоли тощо.

Завдяки капілярному підняттю вдається фарбувати тканини. Часто капілярні явища використовують і в побуті. Висушувальна дія рушників, серветок, гігроскопічної вати, марлі, промокального паперу ґрунтується на капілярних явищах.

Осмотичний тиск. Якщо розчин (наприклад, цукру у воді) і розчинник (воду) розділити перетинкою, яка пропускає молекули води й не пропускає молекули цукру, то концентрація розчину вирівнюватиметься тільки внаслідок переміщення молекул води (мал. 226). Молекули води можуть рухатись із розчину в розчинник і в зворотному напрямку — з води в розчин. З більшою швидкістю відбувається дифузія в розчин, де концентрація води є меншою. Унаслідок цього об'єм розчину поступово зростає, а концентрація цукру в ньому зменшується. Сила, яка обумовлює рух розчинника через напівпроникну мембрану, називається ***осмотичним тиском***.



Мал. 226. Осмос



Мал. 227. До визначення осмотичного тиску

Для визначення величини осмотичного тиску розглянемо дослід (мал. 227). Якщо розчин вмістити в посудину, яка вгорі переходить у вузьку вертикальну трубку, а знизу закрита напівпроникною мембраною, то внаслідок осмосу об'єм розчину збільшується. Але з підняттям рівня рідини в трубці виникне надлишковий тиск, що спричинить збільшення швидкості переміщення молекул води з розчину в розчинник, тобто протидіє осмосу. Коли гідростатичний тиск досягне певного значення, осмос припиниться, встановиться рівновага. Тиск стовпа й виражає величину осмотичного тиску.

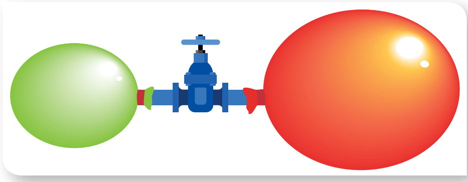
Осмотичний тиск крові, лімфи і тканинної рідини має велике значення в регуляції обміну води між кров'ю і тканинами. Зміна осмотичного тиску рідини, що оточує клітини, веде до порушень водного обміну в них.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Розкрийте фізичну сутність явищ змочування та незмочування.
2. Чому плями жиру на одязі не вдається змити водою?
3. Поясніть, у якому випадку рідина в капілярі піднімається, а в якому — опускається.
4. Виведіть формулу, за якою визначають висоту піднімання чи опускання рідини в капілярі.
5. Наведіть приклади врахування й використання капілярних явищ у повсякденному житті.

Експериментуємо

Дві повітряні кульки, надуті до різного розміру, надіті на трубку з краном (мал. 228). Чи будуть змінюватися розміри кульок, якщо відкрити кран? А якщо будуть змінюватися, то як саме?



Мал. 228

ВПРАВА 39

1. У капілярній трубці, радіус якої 0,5 мм, рідина піднялася на висоту 11 мм. Визначте густину цієї рідини, якщо її коефіцієнт поверхневого натягу становить 0,022 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.
2. Ртутний барометр має діаметр трубки 3 мм. Яку поправку в показання барометра треба внести, якщо врахувати капілярне опускання ртуті?
3. У двох капілярних трубках різного діаметра, занурених у воду, встановилася різниця рівнів 2,6 см. Коли ці самі трубки занурили в спирт, то різниця рівнів становила 1 см. Знаючи коефіцієнт поверхневого натягу води, визначте коефіцієнт поверхневого натягу спирту.
4. Вода піднімається в капілярній трубці на висоту 62 мм, а сірководень — на 21 мм. Визначте коефіцієнт поверхневого натягу сірководню, якщо його густина 1260 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Визначте також діаметр капілярної трубки.
5. У рідину, що добре змочує скло, вертикально опущені дві скляні трубки: перша діаметром 1 мм, друга діаметром 1,55 мм. Рідина піднялась у першій трубці вище, ніж у другій, на 5 мм. Визначте коефіцієнт поверхневого натягу рідини, якщо її густина 800 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.
6. У посудину з рідиною опущено капіляр, внутрішній радіус якого 2 мм. Визначте коефіцієнт поверхневого натягу рідини, якщо маса рідини, що піднялась у капіляр, — 0,09 г.
7. У результаті плавлення вертикально підвішеного свинцевого дроту діаметром d = 1 мм утворилось n = 20 крапель свинцю. Наскільки покоротшав дріт? Коефіцієнт поверхневого натягу рідкого свинцю σ = 0,47 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, густина свинцю $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.
8. Яким має бути внутрішній діаметр капіляра, щоб у разі повного змочування вода в ньому піднімалась на 2 см? Задачу розв'яжіть для випадків, коли капіляр перебуває: а) на Землі; б) на Місяці.
9. Відкриту з обох кінців капілярну трубку радіусом 1 мм наповнено водою і встановлено вертикально. Якої висоти стовпчик води утримується в капілярі? Товщину стінок капіляра вважайте дуже малою.

10. Змочуваний водою кубик масою 20 г плаває на поверхні води. Ребро кубика має довжину 3 см. На якій відстані від поверхні води міститься нижня грань кубика? Коефіцієнт поверхневого натягу води — 0,073 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

11. Який радіус поперечного перерізу повинен мати алюмінієвий дріт, щоб його шматок завдовжки 2 см, натертий парафіном, міг перебувати у воді у вертикальному положенні, занурившись рівно наполовину?

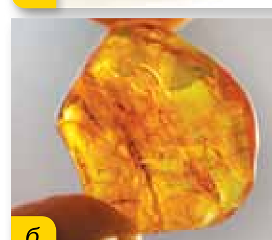
§ 48 Кристали й аморфні тверді тіла

Будова і властивості кристалічних тіл. Анізотропність. Твердими називають такі тіла, які зберігають власний об'єм і форму. Причиною такої стійкості є характер руху і взаємодії молекул: вони можуть лише коливатися навколо положення рівноваги, перейти в інше положення рівноваги молекула не може. Енергія й амплітуда коливань молекул тим більша, що вищою є температура тіла.

За впорядкованістю самих положень рівноваги тверді тіла поділяють на *кристалічні й аморфні* (мал. 229).

Кристали — це тверді тіла, у яких атоми або молекули розміщені впорядковано й утворюють періодично повторювану внутрішню структуру.


а


б

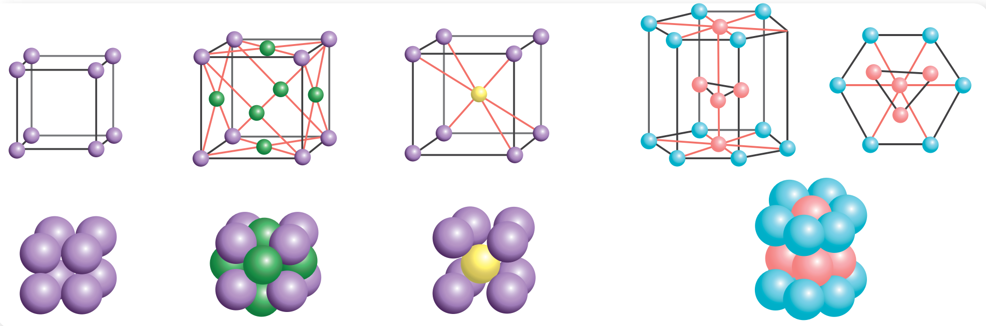
Мал. 229.
а — кристал;
б — аморфне тіло

Періодична повторюваність структури зберігається в усіх напрямках у межах усього кристала. Говорять, що кристал має *далекий порядок* у розташуванні молекул. Можна виділити маленький об'єм (елементарну комірку), повторенням якої можна побудувати весь кристал, як будинок із цеглин. Іноді весь шматок твердої речовини являє собою один кристал. Такими є, наприклад, окремий шматочок цукру в цукровому піску, шматочок солі, гірського кришталю тощо. Такі кристалічні тіла називають *монокристалами*.

Елементарна комірка може мати форму куба, паралелепіпеда, призми тощо (мал. 230, с. 238).

З такою будовою кристалічних тіл пов'язана ***анізотропія*** їхніх властивостей, тобто *неоднаковість фізичних властивостей у різних напрямках*.

Анізотропію виявляють механічні, теплові, електромагнітні й оптичні властивості кристалів, якщо за упорядкованого розміщення атомів, молекул або йонів сили взаємодії між ними й міжатомні відстані є неоднаковими в різних напрямках.



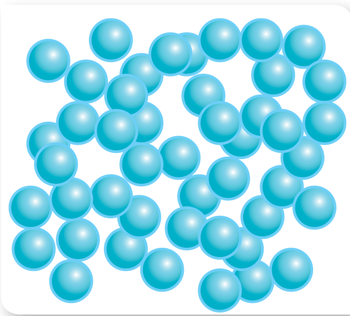
Мал. 230. Типи кристалічних ґраток

Утворення та використання кристалів. Кристали утворюються в природних умовах і штучно. За припущеннями вчених у природних умовах багато кристалів утворилося внаслідок охолодження рідкої речовини земної кори — магми, що є розплавом різних речовин. Багато мінералів виникли з перенасичених водних розчинів. Першим серед них потрібно назвати кам'яну сіль NaCl. Товщина пластів кам'яної солі, що утворилися під час випаровування води солоних озер, досягає в деяких родовищах кількох сотень метрів.

Штучні кристали можна виростити з розплаву шляхом кристалізації, з розчину та газу. Останнім часом швидкими темпами розвивається технологія вирощування монокристалів усіма відомими способами на космічних орбітальних станціях. Невагомість і космічний вакуум дають змогу вирощувати монокристали небачених раніше розмірів і хімічної чистоти.

Монокристали знайшли широке застосування в сучасній фізиці й техніці. Усі напівпровідникові прилади (діоди, транзистори) є кристалами зі спеціально введеними домішками. Виникла нова галузь електроніки — молекулярна електроніка. Монокристали є основною деталлю таких сучасних приладів, як квантові підсилювачі та генератори (мазери й лазери).

Будова та властивості аморфних тіл. Ізотропність. Аморфні тіла за своєю будовою нагадують дуже густі рідини. В аморфних тілах існує лише *ближній порядок* у розташуванні частинок речовини (мал. 231). Прикладами аморфних тіл є шматки затверділої смоли, янтар, вироби зі скла.



Мал. 231. Схема розташування молекул в аморфному тілі

Аморфні тіла, не маючи далекого порядку в структурі, значно відрізняються від кристалічних тіл своїми властивостями. Аморфні тіла ***ізотропні***, тобто їх *фізичні властивості однакові в усіх напрямках*. Так, вони не мають певної температури плавлення й питомої теплоти плавлення, — з підвищенням температури вони поступово перетворюються на рідину. Аморфні тіла *пластичні*, тобто вони не відновлюють форму після припинення дії деформуючої сили.

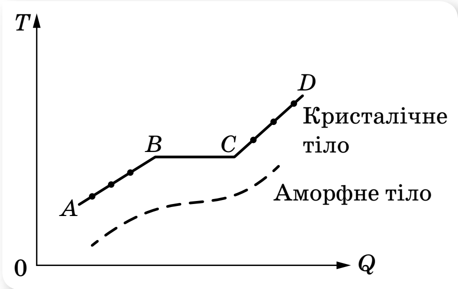
Аморфний стан нестійкий: через деякий час аморфна речовина переходить у кристалічний стан. Але часто цей час буває дуже тривалим (роки й десятиліття). До таких речовин належить скло. Будучи спочатку прозорим, протягом багатьох років воно мутніє: у ньому утворюються дрібні кристалики силікатів.

Плавлення кристалів та аморфних тіл. Значна відмінність кристалічних тіл від аморфних виявляється в процесах плавлення і тверднення. Досліди показують, що кристалічні тіла плавляться і тверднуть за певної для кожної речовини температури, яку називають *температурою плавлення*. Під час нагрівання кристалічного тіла інтенсивність коливального руху молекул у кристалі підвищується, а з досягненням температури плавлення коливання стають такими інтенсивними, що молекули (атоми) вже не можуть утриматися у вузлах ґратки, остання руйнується — відбувається плавлення.

Графік залежності температури T кристалічного й аморфного тіл від наданої кількості теплоти зображено на малюнку 232. Ділянка AB графіка відповідає твердому стану кристалічної речовини й показує, що під час нагрівання температура кристалічного тіла змінюється.

Точка B відповідає температурі плавлення $T_{пл}$, з досягненням якої під час нагрівання кристалічне тіло плавиться. Ділянка BC графіка відповідає процесу плавлення кристалічного тіла, під час якого воно існує частково в рідкому, частково у твердому стані. Температура кристалічного тіла при цьому не змінюється. Уся кількість теплоти витрачається тільки на збільшення потенціальної енергії молекул тіла, а їхня кінетична енергія не змінюється. Тому не змінюється і температура.

Збільшення потенціальної енергії молекул приводить до руйнування кристалічної ґратки тіла, тобто до зміни агрегатного стану речовини. Точка C відповідає повному переходу кристалічного тіла в рідину під час плавлення. Ділянка CD графіка відповідає рідкому стану речовини й показує, що під час нагрівання температура рідини змінюється.



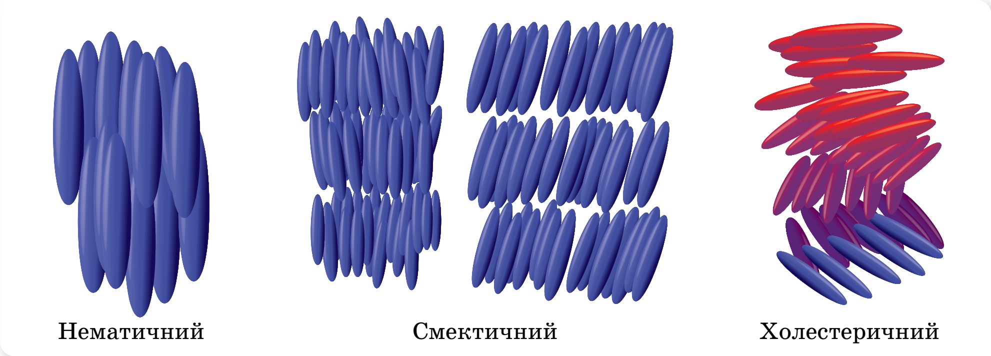
Мал. 232. Графік залежності температури T кристалічного й аморфного тіл від наданої кількості теплоти Q

Аморфні тіла не мають певної температури плавлення або тверднення. У процесі плавлення (або тверднення) температура аморфних тіл безперервно змінюється (мал. 232).

Рідкі кристали. Наприкінці XIX ст. були відкриті речовини, внутрішня структура яких у рідкому стані мала властивості, характерні як для рідин (велика текучість, здатність перебувати в краплеподібному стані, злиття краплин при зіткненні), так і для твердих тіл (анізотропія). Такий стан речовин було названо мезоморфним, що означає — стан із проміжною структурою, а самі речовини пізніше почали називати рідкими кристалами. Рідкі кристали довгий час не застосовувалися в техніці. Починаючи із середини 60-х років XX ст. інтерес до рідких кристалів неймовірно зріс у зв'язку з успішним використанням їх в оптико- й мікроелектроніці, у різних індикаторних пристроях і т. д. За останні десятиліття було створено основи фізики рідких кристалів, одержано нові типи рідких кристалів, вивчено їхні властивості, які все ширше застосовуються в науці й техніці.

Молекули рідких кристалів мають витягнуту паличкоподібну форму. Саме така форма й визначає їх взаємне розташування всередині речовини — вони розташовані пліч-о-пліч одна до одної в певному порядку (мал. 233). Тому вони можуть рухатися лише вздовж своєї осі, повертатися на певний кут, але при цьому не можуть змінити напрямок свого розташування (на відміну від молекул рідини, які можуть рухатися в усіх напрямках). Нині загальноприйнятою є класифікація рідких кристалів на три основні стани: нематичний, смектичний і холестеричний.

Ефективно використовуються рідкі кристали в медицині. Вони дуже чуттєві до змін температури (десяті долі градуса) і до того ж змінюють своє забарвлення. Тому рідкі кристали дозволяють одержати картину розподілу температур на тілі людини, а отже, локалізувати запалення. Як системи відображення інформації рідкі кристали використовуються в наручних годинниках, вимірювальних приладах автомобілів. За допомогою рідких кристалів виявляють пари шкідливих хімічних сполук і небезпечні для здоров'я людини випромінювання.



Мал. 233. Рідкі кристали: схематичне зображення розташування молекул

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Чим відрізняються кристалічні тіла від аморфних? Як візуально можна відрізнити кристал від аморфного тіла?
2. Що таке анізотропія? Ізотропність?

3. Якщо тілу властива анізотропія, то чи означає це, що воно обов'язково кристалічне?
4. У чому полягає відмінність у процесах плавлення кристалічних та аморфних тіл?
5. Чим обумовлено широке використання рідких кристалів?

§ 49 Механічні й теплові властивості твердих тіл

Механічна напруга. Механічні властивості матеріалів — це здатність матеріалів протистояти деформуванню та руйнуванню, пружно й пластично деформуватися під дією зовнішніх механічних сил.

Фізичною величиною, що характеризує дію внутрішніх сил, які виникають у деформованому тілі, є **механічна напруга** σ. Механічна напруга дорівнює відношенню модуля сили пружності $F_{пр}$ до площі S поперечного перерізу тіла:

$$\sigma = \frac{F_{пр}}{S}.$$

Вимірюється σ в ньютонах на метр у квадраті, або паскалях: $1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1$ Па.

Величина, яка характеризує здатність матеріалів протидіяти деформації одностороннього розтягу (стиску), називається ***модулем Юнга*** (***модулем пружності***).

Модуль Юнга E дорівнює відношенню механічної напруги σ до відносного видовження ε, спричиненого цією напругою в напрямку її дії:

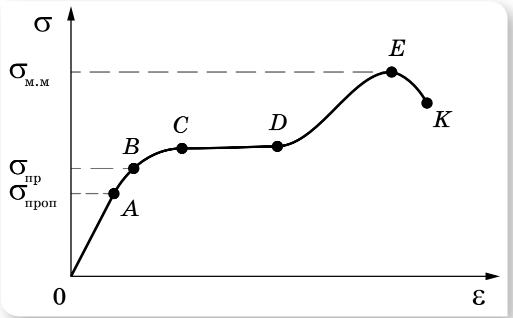
$$E = \frac{\sigma}{|\varepsilon|}.$$

Тут *відносне видовження* $|\varepsilon| = \frac{|\Delta l|}{l_0} = \frac{|l - l_0|}{l_0}$, де l_0 — початкова довжина стержня, l — довжина деформованого стержня.

Діаграма розтягу. На малюнку 234, що на с. 242, показано залежність механічної напруги від відносного видовження під час розтягування.

Ділянка OA відповідає пружній деформації — тіло повністю відновлює свої розміри після зняття зовнішнього навантаження. $\sigma_{проп}$ — межа пропорційності — максимальне значення механічної напруги, для якого виконується закон Гука.

Для деформації розтягу закон Гука можна сформулювати так: у межах пропорційності механічна напруга σ прямо пропорційна відносному видовженню ε: $\sigma = E|\varepsilon|$.



Мал. 234. Діаграма розтягування

На ділянці AB закон Гука не виконується, але деформація ще залишається пружною. Максимальна напруга, за якої ще не виникає помітна залишкова деформація, називається *межею пружності* $\sigma_{пр}$.

Якщо продовжувати розтягувати тіло, то в ньому виникає *залишкова деформація* (ділянка BC) — деформація, у результаті якої тіло залишається деформованим після припинення дії зовнішньої сили. Таку деформацію ще називають *пластичною*.

Подальше видовження тіла відбувається майже без збільшення напруги в ньому, тому кажуть, що «матеріал тече». Ділянка CD — текучість матеріалу.

Зі збільшенням деформації крива напруг починає трохи підніматися й досягає максимуму в точці E. Потім напруга швидко спадає, і тіло руйнується (точка K). Отже, розрив настає після того, як напруга досягне максимального значення $\sigma_{м.м}$, що називається *межею міцності*.

Дослідження поведінки тіла під зовнішніми механічними навантаженнями і їх діаграми розтягу досить важливі у практичному використанні матеріалів для різних цілей.

Модуль Юнга. Встановимо зв'язок між величинами, що входять до закону Гука, записаного у вигляді $F_{пр} = k|x|$ та $\sigma = E|\varepsilon|$.

Прирівняємо $\sigma = \dfrac{F_{пр}}{S}$ та $\sigma = E\left|\dfrac{\Delta l}{l_0}\right|$. Отримуємо: $\dfrac{F_{пр}}{S} = E\left|\dfrac{\Delta l}{l_0}\right|$, або $F_{пр} = \dfrac{ES}{l_0}|\Delta l|$.

Ураховуючи, що $|x| = |\Delta l|$, легко бачити, що $k = \dfrac{ES}{l_0}$.

Модуль Юнга E, на відміну від жорсткості тіла, не залежить від розмірів тіла, і його значення наведено в таблицях. Для сталі модуль Юнга приблизно дорівнює $2{,}1 \cdot 10^{11}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Чому приблизно? Та тому, що марок сталей дуже багато. Відповідно і модуль Юнга пружинної сталі більший за модуль Юнга сталі, з якої штампують цвяхи.

Свинець — м'який метал, але й він має пружність, а його модуль Юнга в 15 разів менший, ніж модуль Юнга сталі. Усі інші метали мають модуль Юнга більший, ніж у свинцю, але менший, ніж у сталі.

Мал. 235. Конструкції

Іншою важливою характеристикою конструкційного матеріалу є межа міцності. Межа міцності в різних матеріалів також сильно відрізняється. У сталі межа міцності найбільша. Тому сталь — основний конструкційний матеріал. При проектуванні будь-яких конструкцій (мал. 235) ураховується межа міцності, і можливі напруги мають бути в кілька разів (зазвичай у 10 разів) меншими від межі міцності. Існує спеціальний розділ у прикладній науці — опір матеріалів. Його вивчають у всіх технічних вузах, що готують фахівців з конструювання та експлуатації машин і механізмів.

Цікаво відзначити, що сталевий дріт, підвішений за один кінець, розтягується під дією власної ваги. Обрив від власної ваги відбудеться, якщо довжина сталевого дроту перевищуватиме 4,2 км. Дріт зі свинцю обірветься під дією власної ваги за довжини всього в 120 м. Усі машини та механічні конструкції — вежі, мости, арочні конструкції — розраховуються так, щоб напруги в жодному місці конструкції не перевищували межі пружності.

Теплове розширення твердих тіл. Як відомо, під час нагрівання збільшується швидкість теплового руху молекул і їхня середня кінетична енергія. Це приводить до збільшення середньої відстані між молекулами. Отже, речовини, нагріваючись, розширюються. Ступінь теплового розширення тіла залежить від речовини, з якої його виготовлено. Таким чином тіла, виготовлені з різних речовин, під час нагрівання на 1 °С розширюються неоднаково. Існують фізичні величини, які характеризують об’ємне та лінійне розширення тіл. Так, якщо за початкової температури t_0 об’єм тіла V_0, то внаслідок нагрівання до температури t об’єм тіла збільшується до V. Тобто зі зміною температури на $\Delta t = t - t_0$ об’єм тіла змінюється на $\Delta V = V - V_0$. Відношення ΔV тіла до його початкового об'єму V_0 прямо пропорційне зміні температури Δt: $\frac{\Delta V}{V_0} \sim \Delta t$. Щоб пропорційний вираз став рівністю, потрібно ввести коефіцієнт пропорційності b, який називається коефіцієнтом об'ємного розширення: $\frac{\Delta V}{V_0} = b\Delta t$.

Коефіцієнт об'ємного розширення b показує зміну об'єму тіла внаслідок зміни його температури на 1 °C, за умови, що початковий об'єм тіла становив 1 м^3.

Аналогічні міркування застосовують щодо лінійного розширення тіл, яке притаманне лише твердим тілам й означає зміну довжини тіла: $\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\Delta t$, де α — коефіцієнт лінійного розширення.

Коефіцієнт лінійного розширення α показує зміну довжини тіла внаслідок зміни його температури на 1 °C, за умови, що початкова довжина тіла становила 1 м.

Коефіцієнти об'ємного та лінійного розширення вимірюються в однакових одиницях: $1\ \frac{1}{°C}$. Для аморфних тіл і кристалів кубічної форми справджується рівність $b = 3\alpha$.

Наприклад, коефіцієнт лінійного розширення сталі становить $0{,}000012\ \frac{1}{°C}$. Це означає, що нагрівання стального стержня завдовжки 1 м на 1 °C спричинить його видовження на 0,000012 м. Тобто внаслідок такого нагрівання довжина стержня стане 1,000012 м. На перший погляд здається, що таке незначне видовження особливо ні на що не впливає. Однак, якщо в інженерній та будівельній справах не враховувати теплового розширення, то будівлі, мости, лінії електропередач, колії залізниці зазнають руйнування (мал. 236).

Мал. 236. Теплове розширення конструкцій

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Як досліджують матеріал на розтяг? Як оцінюють значення навантаження та деформації зразка під час дослідження на розтяг?
2. З якою метою використовують діаграму розтягу матеріалу?
3. У чому відмінність крихких матеріалів від пластичних?
4. Чому розрахунок на міцність проводять за допустимими напругами, а не за межею міцності?
5. Від чого, окрім температури, залежить зміна розмірів тіл під час їхнього нагрівання або охолодження?

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Довжина сталевого дроту площею поперечного перерізу 3 мм^2 під дією сили $4 \cdot 10^4$ Н становить 2 м. Визначте абсолютне видовження дроту в разі збільшення сили розтягування на 10^4 Н.

Дано:
$S = 3 \cdot 10^{-6}$ м^2
$l_1 = 2$ м
$F = 4 \cdot 10^4$ Н
$\Delta F = 10^4$ Н

Δl_2 — ?

Розв'язання:

Модуль Юнга для сталі визначаємо за таблицею (див. форзаци), $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Визначимо початкову довжину дроту l_0.

Прирівнюючи праві частини формул $\sigma = \frac{F}{S}$, $\sigma = E\frac{l_1 - l_0}{l_0}$, визначаємо $l_0 = \frac{SEl_1}{F + SE}$.

Для більшої розтягуючої сили $\frac{F + \Delta F}{S} = E\frac{\Delta l_2}{l_0}$, звідки $\Delta l_2 = \frac{(F + \Delta F)l_0}{SE}$.

Підставляючи вираз для l_0, отримуємо: $\Delta l_2 = \frac{(F + \Delta F)l_1}{F + SE}$.

Обчислення: $\Delta l_2 = \frac{(4 \cdot 10^4\text{ Н} + 10^4\text{ Н}) \cdot 2\text{ м}}{4 \cdot 10^4\text{ Н} + 3 \cdot 10^{-6}\text{ м}^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}\text{ Па}} \approx 0{,}16$ м.

Відповідь: $\approx 0{,}16$ м.

Задача 2. На скільки збільшиться об'єм цільного залізного куба, якщо надати йому 296,4 кДж енергії у вигляді теплоти?

Дано:
$\Delta Q = 296{,}4$ Дж
$c = 460\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$
$\rho = 7800\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\text{ К}^{-1}$

ΔV — ?

Розв'язання:

Зміну об'єму залізного куба визначаємо з формули: $\Delta V = V_0 b \Delta T$.

Зміну температури ΔT визначаємо з формули для кількості теплоти, яку отримало тіло:

$\Delta Q = cm\Delta T = c\rho V_0 \Delta T$, звідки $\Delta T = \frac{\Delta Q}{c\rho V_0}$. Підставляючи одержане значення ΔT у вираз для ΔV і враховуючи, що $b \approx 3\alpha$, маємо: $\Delta V = \frac{b}{c\rho}\Delta Q = \frac{3\alpha}{c\rho}\Delta Q$.

Підставляючи числові значення, знаходимо:

$$\Delta V=\frac{3\cdot 12\cdot 10^{-6}\ \text{К}^{-1}\cdot 2{,}96\cdot 10^{5}\text{Дж}}{460\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\cdot 7800\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^{3}}}\approx 3\cdot 10^{-6}\ \text{м}^{3}.$$

Відповідь: $3\cdot 10^{-6}$ м³.

ВПРАВА 40

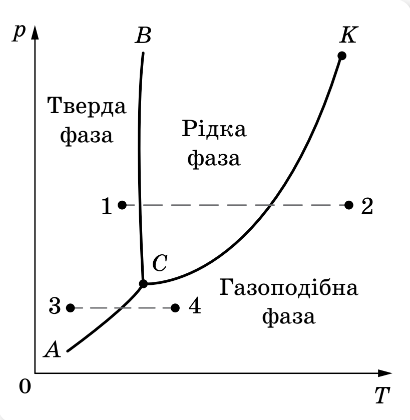
1. Два дроти, діаметри яких відрізняються в три рази, розтягують однаковими силами. Порівняйте напруги, які виникають у дротах.
2. Балка завдовжки 5 м та площею поперечного перерізу 100 см² під дією сил по 10 кН, прикладених до її кінців, стиснулася на 1 см. Визначте відносне стискання та механічну напругу в балці.
3. Визначте напругу, яка виникає в сталевому тросі, відносне видовження якого дорівнює 0,001.
4. У скільки разів абсолютне видовження мідного дроту більше, ніж сталевого (такої самої довжини й такого самого поперечного перерізу), коли на них діють однакові розтягуючі сили?
5. Які сили треба прикласти до кінців сталевого дроту завдовжки 4 м з поперечним перерізом 0,5 мм², щоб видовжити його на 2 мм?
6. У скільки разів відносне видовження риболовної жилки діаметром 0,2 мм більше, ніж жилки діаметром 0,4 мм, якщо до їх кінців прикласти однакову силу?
7. До дроту було причеплено вантаж. Потім дріт зігнули навпіл і причепили той самий вантаж. Порівняйте абсолютне та відносне видовження дроту в обох випадках.
8. Довжина газопроводу Новопсков — Ужгород становить близько1500 км. На скільки довшим став би газопровід за сезонних змін температури повітря від –30 до +30 °С, за умови, що стальні труби газопроводу прокладені не в ґрунті, а в повітрі?
9. Залізнична цистерна вміщує 90 м³ бензину. Якою буде різниця в об'ємі бензину, якщо його залили в Одесі за температури 10 °С, а розвантажили в Рівному за температури 0 °С?
10. На скільки °С потрібно нагріти воду в чайнику, щоб її об'єм збільшився з 1 л до 1,02 л?
11. Годинник з металевим маятником поспішає на 8 с за добу за температури 3 °С і відстає на 7 с протягом доби за температури 23 °С. Визначте середній коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу маятника та температуру, за якої годинник буде йти правильно.

§ 50 Діаграма стану речовини

Фазові переходи речовини з погляду молекулярно-кінетичної теорії. Як ми вже показали раніше, агрегатний стан речовини з точки зору молекулярно-кінетичної теорії речовини визначається співвідношенням між складовими повної (внутрішньої) енергії: середньою потенціальною енергією взаємодії молекул та їхньою середньою кінетичною енергією. Нагрівання речовини супроводжується не просто зміною її внутрішньої енергії, а змінює співвідношення між її складовими. Допоки кількісне співвідношення між середньої кінетичною енергією руху молекул і середньою потенціальною енергією їх взаємодії залишається у визначених межах, підведення тепла до речовини не змінює її фазового стану. З подальшим нагріванням збільшується середня кінетична енергія руху молекул і відповідно відстані між ними, що приводить до зменшення потенціальної енергії взаємодії. З досягненням певної температури створюються умови, коли кількісні співвідношення між складовими внутрішньої енергії вже не задовольняють умовам рівноважного стану, і речовина переходить у нову фазу. Для цієї фази кількісні співвідношення між складовими внутрішньої енергії вже будуть іншими. При цьому рівновага між фазами є динамічною: у результаті безперервного хаотичного руху молекул відбувається їх обмін.

Фазові переходи в термодинаміці. Кожний з однорідних станів речовини — твердий, рідкий та газоподібний — у термодинаміці повністю описується макропараметрами: тиском, температурою та об'ємом за відповідної маси. Як свідчать експериментальні дослідження, ці параметри не можуть змінюватись довільно. Зміна одного з них спричинює відповідну зміну інших параметрів. В аналітичному вигляді залежність між макропараметрами встановлено лише для газів.

Проте в термодинаміці доведено, що рівновага між двома фазами описується функціональною залежністю між тиском і температурою. Кожному фазовому переходу (рідина ↔ пара, тверде тіло ↔ рідина, тверде тіло ↔ пара) відповідає своя функціональна залежність, яка для кожної речовини визначається експериментальним шляхом. Якщо ці залежності графічно зобразити в координатах T, p, отримаємо відповідні три криві: випаровування, плавлення та сублімації (мал. 237).



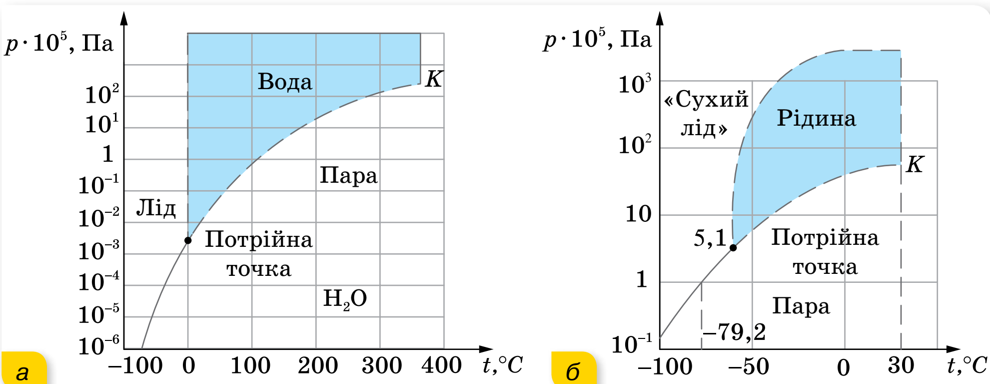
Мал. 237. Діаграма стану речовини

Лінії фазової рівноваги між твердою, рідкою та газоподібною фазами називають *лініями фазових переходів*, а отриману діаграму — *діаграмою стану речовини* (або *фазовою діаграмою*).

На діаграмі крива CK — це вже відома вам залежність тиску насиченої пари від температури, де K — критична точка, вище якої крива не може підніматися. Крива CK називається кривою випаровування. Крива BC — це крива плавлення, а крива AC — крива сублімації. Ці криві розбивають координатну площину на відповідні області: твердої, рідкої та газоподібної фази.

Будь-яка точка на кривих CK, BC, AC визначає динамічну рівновагу двох фаз, за якої з однієї фази в іншу переходить однакова кількість молекул. Будь-яка точка області відповідає однофазному стану речовини. Точці C відповідають єдині для певної речовини пара значень p і T, за яких всі три фази речовини можуть перебувати в рівновазі. Цю точку називають *потрійною.*

Діаграма стану дозволяє визначити, які переходи буде зазнавати речовина в певних процесах (мал. 237, с. 247). Наприклад, якщо взяти речовину в стані, що відповідає точці *1*, та ізобарно нагрівати цю речовину, то вона буде зазнавати таких переходів: тверде тіло — рідина — пара (штрихова лінія *1–2* на діаграмі). Якщо ж взяти ту саму речовину, але у стані, що відповідає точці *3*, і знову ізобарно нагрівати речовину, то вона зазнає іншого переходу: з твердого стану в газоподібний, без рідкої фази (штрихова лінія *3–4* на діаграмі).



Мал. 238. Діаграма стану води (*а*), та вуглекислоти (*б*)

Для прикладу розглянемо діаграми стану води (мал. 238, *а*) та вуглекислоти (мал. 238, *б*). Для води у потрійній точці тиск $p = 610$ Па, а температура $T = 0$ °C. Тому за нормального атмосферного тиску (близько 10^5 Па) перехід із твердої фази в газоподібну відбувається через рідку.

Мал. 239. «Сухий лід»

Для вуглекислоти значення тиску в потрійній точці $p = 5{,}1 \cdot 10^5$ Па, тому за атмосферного тиску для неї можливий перехід тверде тіло — газ. Вуглекислоту у твердому стані називають «сухим льодом» (за схожість її зовнішнього вигляду із звичайним льодом (мал. 239)).

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

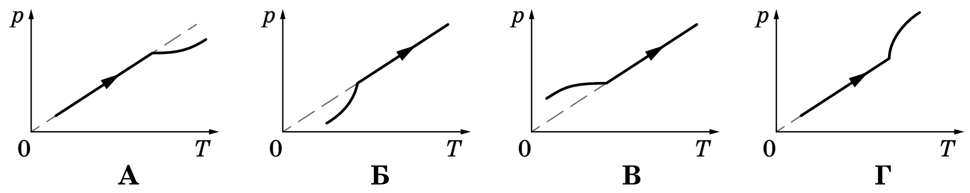
1. У якій точці закінчується крива випаровування на діаграмі *p*, *T* (мал. 237, с. 247)?
2. Як називається точка, у якій закінчується крива сублімації?
3. Чому «сухий лід» не плавиться за нормальних умов?

ВПРАВА 41

1. Сталеву деталь, розігріту до температури 800 °C, загартовують, опускаючи в моторну оливу за температури 10 °C. Олива при цьому нагрівається до температури 40 °C. Визначте масу сталевої деталі, якщо після занурення в моторну оливу, вона охолола на 20 °C. Маса моторної оливи — 2 кг, її питома теплоємність — $1{,}9\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.
2. У скляну посудину, масою 120 г і температурою 20 °C, налили гарячу воду, маса якої 200 г і температура 100 °C. Через 5 хв температура посудини з водою стала дорівнювати 40 °C. Яка кількість теплоти втрачається за одиницю часу? Процес втрати тепла вважайте сталим. Питома теплоємність посудини — $840\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.
3. У залізному калориметрі масою 0,1 кг є 0,5 кг води за температури 15 °C. У калориметр кладуть свинець й алюміній загальною масою 0,15 кг за температури 100 °C. Унаслідок цього температура води піднімається до 17 °C. Визначте маси свинцю й алюмінію.
4. Крізь воду, що має температуру 10 °C, пропускають водяну пару температурою 100 °C. Скільки відсотків становить маса води, яка утворилася з пари, від маси усієї води в посудині в момент, коли її температура дорівнює 50 °C?
5. Водяну стоградусну пару впустили в калориметр, де міститься шматок льоду, маса якого 5 кг, а температура –50 °C. Визначте масу впущеної пари, якщо шматок льоду розплавився.
6. У суміш, що складається з 20 л води і 10 кг льоду за температури 0 °C, вливають свинець за температури плавлення. Уся суміш набуває температури 100 °C і 200 г води при цьому перетворюється в пару. Визначте, скільки було влито свинцю.
7. У теплоізольованій посудині міститься 500 г води і 54,4 г льоду за температури 0 °C. У посудину подають суху насичену пару масою 6,6 г за температури 100 °C. Якою буде температура після встановлення теплової рівноваги?
8. У посудину з водою за температури 20 °C вмістили 100 г льоду за температури –8 °C. Яка температура встановиться в посудині? Теплоємність посудини з водою — $1{,}67\,\frac{\text{кДж}}{\text{К}}$.
9. Розжарений алюмінієвий куб кладуть на лід, температура якого –20 °C, при цьому куб повністю заглиблюється в лід. Визначте початкову температуру куба. Зміною об'єму куба внаслідок його охолодження знехтуйте.

Перевірте себе (§ 43–50)

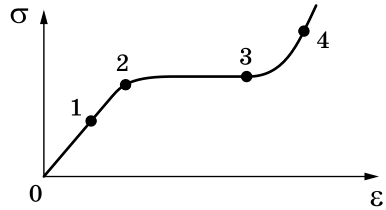
1. Який графік залежності тиску від температури всередині герметичної посудини, у якій міститься краплина води та насичена пара, відповідає процесу її нагрівання? Після випаровування краплини нагрівання продовжують.



2. На яку висоту піднімається спирт за 20 °С у скляній капілярній трубці, внутрішній діаметр якої 0,55 мм? Змочування вважайте повним.

А 0,25 см
Б 0,5 см
В 1 см
Г 2 см

3. На графіку залежності механічної напруги від відносного видовження вкажіть точку, що відповідає межі пропорційності.



А 1
Б 2
В 3
Г 4

4. Скільки води за 0 °С було в калориметрі, якщо після того, як туди впустили 10 г водяної пари за 100 °С, температура піднялася до 40 °С?

А 15 г
Б 72 г
В 137 г
Г 152 г

5. За температури 0 °С довжина алюмінієвого дроту становила 2000 м. Визначте довжину дроту за температури 200 °С.

А 2004,8 м
Б 1990,4 м
В 2009,6 м
Г 2008,5 м

6. Відносна вологість повітря ввечері за температури 16 °С дорівнює 69 %. Визначте температуру (у градусах Цельсія), за якої вночі почне випадати роса.

7. Звичайна швацька голка має довжину 3,5 см і масу 0,1 г. Чи достатньо поверхневого натягу води для того, щоб утримувати голку на поверхні?

8. На скільки кельвінів потрібно нагріти алюмінієвий дріт площею поперечного перерізу $2 \cdot 10^{-5}$ м, щоб він видовжився на стільки ж, на скільки він видовжується під дією сили 1610 Н? (модуль Юнга — $7 \cdot 10^{10}$ Па, $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$)

9. У посудині лежить шматок льоду. Температура льоду $t_1 = 0$ °С. Якщо надати йому кількість теплоти $Q = 50$ кДж, то $\frac{3}{4}$ льоду розтане. Яку кількість теплоти q потрібно після цього надати вмісту посудини додатково, щоб увесь лід розтанув й утворена вода нагрілася до температури $t_2 = 20$ °С? Тепловими втратами на нагрівання посудини знехтуйте.

Розділ 4

ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ

У цьому розділі розглянемо три групи питань:

- *електричний заряд, закон збереження зарядів, закон Кулона;*
- *електричне поле і його властивості, основні характеристики електричного поля — напруженість, різниця потенціалів, напруга;*
- *речовина в електричному полі, електроємність, енергія електричного поля.*

Усі ці групи питань є об'єктом вивчення у електростатиці — розділі електродинаміки, у якому вивчають властивості та взаємодії нерухомих (відносно інерціальної системи відліку) заряджених частинок і тіл.

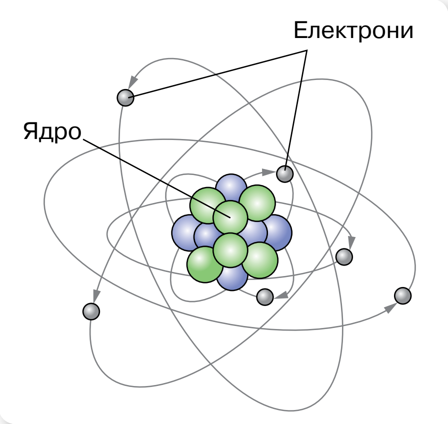
§ 51 Закон Кулона

Електричний заряд. У 9 класі ми вивчали електромагнітні явища. Узагальнимо відомі нам факти.

Основною характеристикою електромагнітної взаємодії є *електричний заряд*.

Електричний заряд q — це фізична величина, яка кількісно характеризує електромагнітну взаємодію.

Бувають частинки без електричного заряду, але не існує електричного заряду без частинки. У 1911 р. була створена *планетарна модель атома* (мал. 240). Її автор — англійський фізик Ернест Резерфорд показав, що в центрі атома розташоване ядро, навколо якого обертаються електрони.



Мал. 240. Планетарна модель атома

Подальші дослідження довели, що атомне ядро складається з позитивно заряджених протонів та електронейтральних нейтронів. Електричний заряд протона за величиною дорівнює заряду електрона, але протилежний за знаком. У цілому атом електронейтральний, оскільки кількість протонів у ядрі дорівнює кількості електронів в атомі. Кількість протонів у ядрі визначає хімічні властивості атома та його місце в періодичній системі хімічних елементів.

Електричний заряд дискретний: існує *елементарний електричний заряд*, що дорівнює за абсолютним значенням заряду електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Одиниця електричного заряду — кулон: 1 Кл.

Чітке визначення одиниці електричного заряду буде встановлено згодом. Зараз зазначимо, що числове значення електричного заряду 1 Кл дорівнює сумі зарядів $6{,}25 \cdot 10^{18}$ електронів.

Наявність електричного заряду q у макротіл пояснюється нерівномірним перерозподілом позитивних і негативних дискретних елементарних зарядів. Електричний заряд $q = ne$, де n — кількість елементарних нескомпенсованих електричних зарядів.

Як відомо, однойменно заряджені тіла відштовхуються, різнойменно заряджені — притягаються. Наелектризувати тіло можна тертям або дотиком до електрично зарядженого тіла.

Явище нерівномірного перерозподілу позитивних і негативних електричних зарядів у макротілах називається **електризацією (електростатичною індукцією).**

Існують й інші способи електризації тіл. Наприклад, метал можна зробити позитивно зарядженим, якщо його освітити відповідним світловим потоком. У результаті взаємодії світла з металом відбувається виривання електронів з поверхні металу. Втрачаючи електрони, метал стає позитивно зарядженим. Але за будь-якого способу електризації тіл електричні заряди не виникають і не зникають, а лише перерозподіляються між усіма тілами, які беруть участь у тому чи іншому процесі. Це твердження називають ***законом збереження електричного заряду***. Математично він формулюється так.

Алгебраїчна сума електричних зарядів тіл, що утворюють замкнену систему за будь-яких взаємодій, залишається сталою:

$$q_1 + q_2 + ... + q_3 = \mathrm{const}.$$

Закон Кулона. В електростатиці, як і в будь-якому розділі фізики, використовують певні моделі. Однією з моделей електростатики є *точковий електричний заряд*.

Точкові електричні заряди — це заряджені тіла, розміри яких малі порівняно з відстанню між ними.

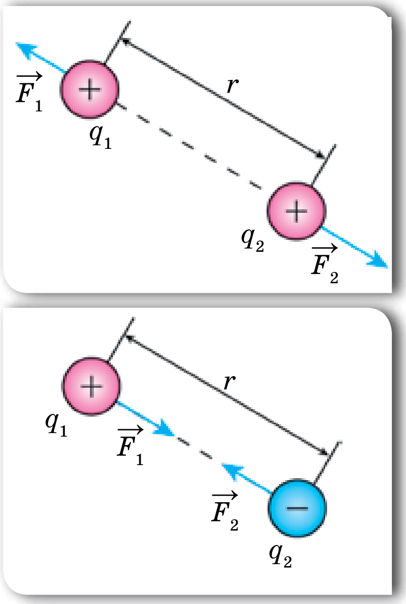
Інколи для спрощення вживають тільки термін «заряд». Слід пам'ятати, що цим терміном можуть називати як точкове електрично заряджене тіло, так і значення електричного заряду на ньому.

Кількісно взаємодію точкових електричних зарядів описує закон, експериментально встановлений Шарлем Кулоном у 1785 р.

Закон Кулона формулюється так: сила взаємодії F двох точкових зарядів q_1 і q_2 прямо пропорційна добутку абсолютних величин їх зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між ними, напрямлена вздовж прямої, що сполучає заряди, і відповідає притяганню для різнойменних зарядів та відштовхуванню — для однойменних (мал. 241).

Модуль цієї сили: $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}$,

де ε_0 — електрична стала (її величина



Мал. 241. Сили взаємодії між точковими електричними зарядами

і розмірність залежать від вибраної системи одиниць), ε — відносна діелектрична проникність середовища.

Відносна діелектрична проникність середовища ε показує, у скільки разів сила взаємодії електричних зарядів у цьому середовищі менша, ніж у вакуумі. Її числове значення для багатьох речовин визначене дослідним шляхом і занесене до таблиць. Відповідно для вакууму $\varepsilon = 1$.

Установлено, що два точкові заряди по 1 Кл на відстані 1 м один від одного у вакуумі взаємодіють із силою $9 \cdot 10^9$ Н. Із закону Кулона можна визначити електричну сталу:

$$\varepsilon_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2 F} = \frac{1\ \text{Кл}^2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1\ \text{м}^2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \text{Н}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

У фізиці, як ви знаєте, потрібно враховувати межі виконання законів. Правильність закону Кулона підтверджена численними перевірками. Установлено, що він діє між зарядженими частинками, відстань між якими може становити від 10^{-15} м до десятків кілометрів.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Як на досліді можна виявити електромагнітну взаємодію?
2. Сформулюйте й поясніть закон збереження електричного заряду.
3. У скільки разів зміниться сила взаємодії між двома точковими зарядами, якщо відстань між ними збільшити у два рази, а значення електричного заряду одного з них збільшити в три рази?
4. Чим подібні й чим відрізняються закон всесвітнього тяжіння та закон Кулона?

Приклади розв'язування задач

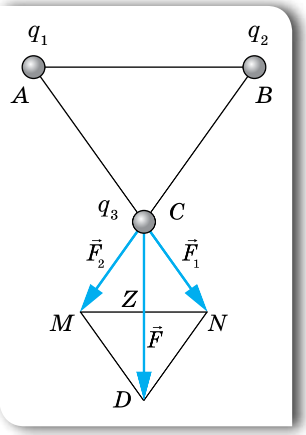
Задача. Однойменні точкові заряди, модулі яких $q_1 = q_2 = q_3 = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл, розміщені у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $a = 20$ см. Визначте силу, що діє в повітрі на один із цих зарядів з боку двох інших.

Дано:
$q_1 = q_2 = q_3 = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл
$a = 20$ см $= 0{,}2$ м

F — ?

Розв'язання:

Виконаємо схематичний малюнок до задачі (мал. 242).



Мал. 242

Визначимо силу, що діє на точковий заряд q_3, який перебуває в точці C. Заряди q_1 (у точці A) і q_2 (у точці B) діють на заряд q_3 із силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

Рівнодійну цих сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ визначимо за правилом паралелограма.

Напрямок результуючої сили $\vec{F}$, що діє на заряд q_3, зображено на малюнку 242. Обчислимо її модуль F, використовуючи модулі векторів F_1, F_2, які дорівнюють довжинам відрізків, що зображують ці вектори. Легко довести, що $F_1 = F_2$, $\angle DCM = 30°$, оскільки $\angle MCN = \angle ACB = 60°$. Тоді $\frac{F}{2} = F_1 \cos 30^{\circ}$, у ΔCNZ сторона $CZ = \frac{F}{2}$. За законом Кулона модуль сили $F_1 = k\frac{q_1 q_3}{(AC)^2}$.

$$F_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\text{Кл} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\text{Кл}}{(0,2)^2\ \text{м}^2} = 0,225\ \text{Н};$$

$$F = 0,225\ \text{Н} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ 2 \approx 0,39\ \text{Н}.$$

Відповідь: 0,39 Н.

ВПРАВА 42

1. Дві однакові металеві кульки зарядили так, що заряд однієї з них у 5 разів більший, ніж заряд іншої. Кульки доторкнули одну до одної та розсунули на ту саму відстань. Як змінилася (за модулем) сила взаємодії, якщо кульки мали однойменні заряди; різнойменні заряди?
2. У вершинах правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a, розташували один за одним заряди $+q$, $+q$, $+q$, $-q$, $-q$, $-q$. Визначте силу, що діє на заряд $+q$, який міститься в центрі шестикутника.
3. Дві маленькі кульки масою m підвішені поряд на тонких шовкових нитках завдовжки $l = 2$ м. Після того, як кульки зарядили однаковими за величиною й однойменними зарядами $q_1 = q_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, вони розташувались на відстані $r = 16$ см одна від одної. Визначте натяг ниток.
4. Два позитивно заряджені тіла, заряди яких 1,67 і 3,33 нКл, закріплено на відстані 20 см один від одного. У якій точці на прямій, що сполучає ці тіла, необхідно розмістити третє тіло із зарядом –0,67 нКл, щоб воно було в рівновазі? Масами тіл знехтуйте.
5. Побудуйте графік залежності сили взаємодії між двома точковими зарядами від відстані між ними, $F = f(r)$, в інтервалі $2 \le r \le 10$ см через кожні 2 см. Заряди $q_1 = 20$ нКл і $q_2 = 30$ нКл.

§ 52 Електричне поле

Електричне поле. Електромагнітна взаємодія між електрично зарядженими тілами відбувається через *електромагнітне поле*. Вирішальними у становленні теорії електромагнітного поля були дослідження Майкла Фарадея (1791–1867) та Джеймса Максвелла (1831–1879). Якщо в певній системі відліку електрично заряджені тіла нерухомі, то поле, що існує навколо них, називають ***електричним*** (***електростатичним***).

Електричне поле має певні властивості, які можна дослідити. Для дослідження електричного поля використовують ще одну модель — так званий *пробний електричний заряд*.

Пробний електричний заряд — позитивно заряджене тіло, поле якого не змінює поле, у яке він внесений.

Напруженість електричного поля. Головна властивість електричного поля — здатність діяти на внесені в нього електричні заряди з деякою силою. Нехай електричне поле створюється точковим зарядом q[1]. Тут і надалі, якщо немає спеціальних застережень вважатимемо електричне поле однорідним. Будемо по черзі поміщати в одну і ту саму точку поля пробні заряди різної величини: q_1, q_2,... — і щоразу вимірювати силу, що діє на пробний заряд, F_1, F_2, ... Виявляється, що відношення сили до заряду в даній точці поля завжди є сталою величиною: $\frac{F_1}{q_1} = \frac{F_2}{q_2} = \ldots = \text{const}$.

В іншій точці поля (або в електричному полі іншого зарядженого тіла) це відношення також виконується, але його значення може бути іншим. Отже, відношення $\frac{F}{q}$ залежить тільки від вибраної точки поля і є характеристикою силової дії поля. Силова характеристика електричного поля називається ***напруженістю*** поля й позначається буквою E.

Напруженість електричного поля E — це фізична величина, яка є силовою характеристикою поля й визначається відношенням сили $\vec{F}$, яка діє в даній точці поля на пробний заряд q, до величини цього заряду: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$.

Якщо пробний заряд дорівнює одиниці, то можна дати й таке визначення напруженості електричного поля в деякій точці: напруженість електричного поля в даній точці дорівнює *силі*, що діє на одиничний *пробний заряд*, розміщений у цій точці.

Одиниця напруженості електричного поля — ньютон на кулон: $1\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Як далі буде з'ясовано, одиницею напруженості є також вольт на метр: $1\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Увівши таку характеристику, ми можемо говорити не про силу, з якою один точковий заряд діє на інший, а про силу, з якою на точковий заряд діє поле в тій точці, де він розміщений. За допомогою сучасних приладів можна проводити вимірювання напруженості поля. І, відповідно, можна розрахувати дію поля в даній точці на будь-яке заряджене тіло за формулою $\vec{F} = \vec{E}q$.

Якщо електричне поле створене одним точковим зарядом q, то за законом Кулона на пробний заряд q_0 у точці на відстані r з боку поля, ство-

[1] Тут і надалі, описуючи поведінку заряду в електричному полі, будемо мати на увазі саме позитивний заряд q.

рюваного зарядом q, діє сила, модуль якої $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{\varepsilon r^2}$.

Тоді напруженість поля точкового заряду q на відстані r від нього: $E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}$.

З формули видно, що напруженість електричного поля точкового заряду зменшується пропорційно квадрату відстані від заряду.

Принцип суперпозиції. Принцип суперпозиції застосовується, коли електричне поле створено не одним зарядженим тілом, а кількома. Оскільки напруженість, як і сила, векторна величина, то вектор напруженості результуючого поля дорівнює векторній сумі напруженостей електричних полів, створених кожним із цих зарядів окремо. У цьому й полягає *принцип суперпозиції* (*накладання*) *електричних полів*.

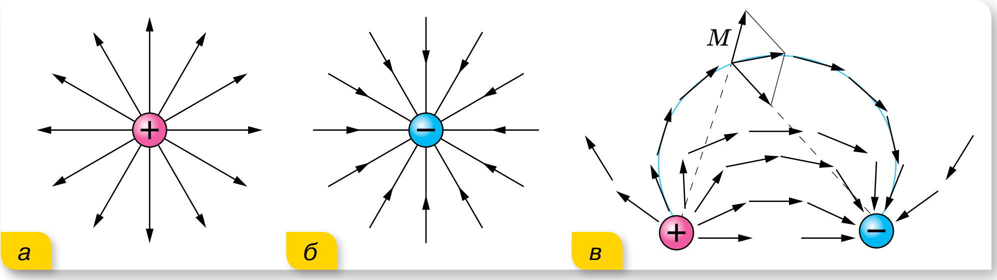
Напруженість поля, створеного системою нерухомих зарядів, дорівнює векторній сумі напруженостей електричних полів, створених кожним із цих зарядів окремо:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n.$$

Цим пояснюється те, що напруженість електричного поля навколо тіла, до складу якого входять і позитивно, і негативно заряджені частинки, може дорівнювати нулю, і тіло в цілому буде електронейтральним.

Графічне зображення електричних полів. Щоб задати електричне поле, треба вказати напрямок і значення сили, що діє на пробний заряд, коли його розмістити в тій чи іншій точці поля. Це можна зробити графічним способом, запропонованим Фарадеєм, за допомогою *силових ліній* (*ліній напруженості електричного поля*).

Напрямок силових ліній збігається з напрямком вектора напруженості. У випадку точкових зарядів силові лінії напрямлені від позитивного заряду й закінчуються в нескінченості (мал. 243, *а*), або починаються в нескінченості та йдуть до негативного заряду (мал. 243, *б*).

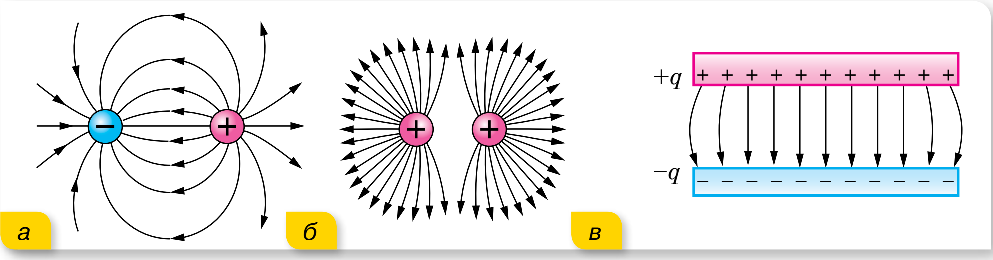


Мал. 243. Лінії напруженості точкових зарядів (*а, б*), диполя (*в*)

Складніше провести лінії напруженості, коли поле створено кількома зарядами, наприклад двома. Така система з двох зарядів називається *диполем*. Провести лінію так, щоб вектори напруженості в кожній точці збігалися з нею, здебільшого не можна. Тому лінії напруженості проводять так, щоб вектори напруженості були напрямлені по дотичній (мал. 243, *в*; с. 257).

Отже, **лінією напруженості** називається така лінія, у кожній точці якої вектор напруженості поля напрямлений по дотичній.

На малюнку 244 зображено ще кілька прикладів електричних полів.



Мал. 244. Графічне зображення електричних полів: *а* — однакових за значенням різнойменних зарядів; *б* — однакових за значенням однойменних зарядів; *в* — двох пластин, заряджених різнойменними зарядами однакової величини

Зображуючи електричне поле графічно, потрібно пам'ятати, що лінії напруженості ніде не перетинаються одна з одною, не перериваються між зарядами, починаються на позитивному заряді (або в нескінченності) і закінчуються на негативному заряді (або в нескінченності).

Поле, напруженість якого в усіх точках однакова за модулем і напрямком, називають *однорідним електростатичним полем*. Прикладом такого поля є поле всередині простору між зарядженими пластинами (мал. 244, *в*) (біля країв пластин поле неоднорідне).

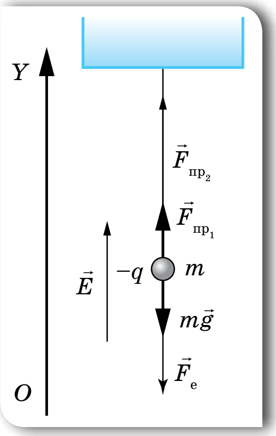
? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Назвіть основні властивості електричного поля.
2. Що називають напруженістю електричного поля? Як вона визначається? Який напрямок має вектор напруженості?
3. У чому полягає принцип суперпозиції?
4. Для чого служать лінії напруженості електричного поля?
5. Яке електричне поле називають однорідним?

Приклади розв'язування задач

Задача. На діелектричній нитці висить кулька масою m. Уся ця система перебуває в однорідному електростатичному полі, напруженість якого

$\vec{E}$ напрямлена вертикально вгору. Визначте силу пружності нитки, коли кулька не заряджена та коли їй надають негативний заряд $-q$.



Мал. 245

Дано:	Розв'язання:
m E $-q$	На незаряджену кульку діє сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила пружності $\vec{F}_{пр_1}$. Якщо кульку зарядити, виникне ще й електрична сила $\vec{F}_е$ (мал. 245), у результаті чого сила пружності зміниться — $\vec{F}_{пр_2}$.
F — ?	

Спроектуємо ці сили на вісь OY. Оскільки і в першому, і в другому випадках кулька перебуває в рівновазі, сума проекцій сил, що діють на неї, дорівнює нулю.

У першому випадку $F_{пр_1} - mg = 0$, тобто $F_{пр_1} = mg$.

У другому випадку $F_{пр_2} - mg - F_е = 0$, тобто $F_{пр_2} = mg + F_е = mg + qE$.

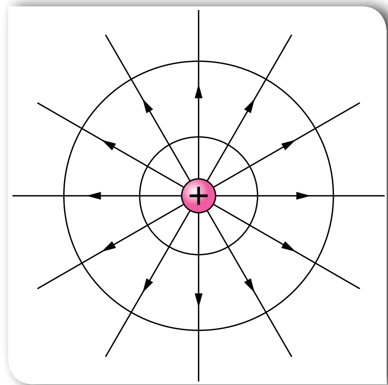
Відповідь: $F_{пр_1} = mg$; $F_{пр_2} = mg + qE$.

ВПРАВА 43

1. Два заряди, один з яких за модулем у 4 рази більший за другий, розташували на відстані a один від одного. У якій точці поля напруженість дорівнює нулеві, якщо заряди однойменні; різнойменні?
2. В однорідному полі, напруженість якого 40 $\frac{кВт}{м}$, розташували заряд 27 нКл. Визначте напруженість результуючого поля на відстані 9 см від заряду в точках: а) розташованих на силовій лінії однорідного поля, яка проходить через заряд; б) розташованих на прямій, яка проходить через заряд перпендикулярно до силових ліній.
3. В основі рівностороннього трикутника зі стороною a розташовано заряди по $+q$ кожний, а у вершині — заряд $-q$. Визначте напруженість поля в центрі трикутника.
4. У двох протилежних вершинах квадрата зі стороною 30 см розташовано заряди 0,2 мкКл кожний. Визначте напруженість поля у двох інших вершинах квадрата.
5. На який кут відхилиться у вакуумі заряджена неметалева кулька, підвішена на шовковій нитці, якщо її помістити в горизонтальне однорідне електричне поле, напруженість якого $1 \cdot 10^5$ $\frac{Н}{Кл}$? Заряд кульки — 4,9 нКл, маса — 0,4 г.
6. Заряджену металеву кульку, підвішену на ізолюючій нитці, внесли в однорідне горизонтально напрямлене поле, від чого нитка утворила з вертикаллю кут 45°. На скільки зменшиться кут відхилення нитки, якщо з кульки стече десята частка її заряду?
7*. В однорідному електричному полі, силові лінії якого горизонтальні, на тонкій нерозтяжній нитці завдовжки $l = 35$ см висить кулька масою $m = 15$ г, заряд якої $q = 3$ мкКл. Визначте період коливань кульки, якщо напруженість електричного поля $E = 40$ $\frac{кВт}{м}$.

§ 53 Електричне поле заряджених поверхонь

Потік напруженості електричного поля. Теорема Остроградського — Гаусса. Розглянемо поле точкового позитивного заряду. Кількість силових ліній N можна зобразити довільно, оскільки поле існує в усіх точках простору навколо заряду. Оточимо уявно заряд сферами, центр яких збігається з точковим зарядом (мал. 246). Як видно, кількість ліній напруженості, що перетинають першу і другу сфери, однакова. Яку б кількість сфер ми не побудували, кількість ліній напруженості, що їх перетинають, залишається однаковою.



Мал. 246. Ілюстрація до введення поняття потоку напруженості електричного поля

Модуль напруженості поля, створюваного точковим зарядом q, у довільній точці сфери радіусом r становить $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}$.

Перепишемо цю формулу в такому вигляді: $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Площа сфери $S = 4\pi r^2$, отже, дана формула набуває вигляду $ES = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

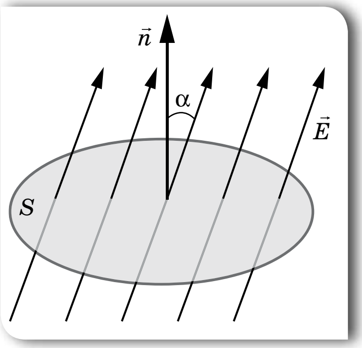
Оскільки площа сфери збільшується, як квадрат радіуса, а напруженість поля в точках на сфері зменшується, як квадрат радіуса, добуток ES залишається однаковим для всіх сфер.

Раніше ми встановили, що однаковою для всіх сфер буде кількість ліній напруженості, що їх перетинають, N. Отже, з точністю до деякої сталої можна прирівняти: $ES = N$ або $N = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Як видно з останньої формули, кількість ліній напруженості, що виходять з точкового заряду, пропорційна величині цього заряду.

У розглянутому нами випадку поверхня сфери площею S, усередині якої міститься точковий заряд, є замкнутою поверхнею, перпендикулярною до ліній напруженості. Для цього випадку ми й отримали $N = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Такий самий результат можна отримати й для довільної системи зарядів: якщо оточити довільну систему зарядів замкненою поверхнею (не обов'язково сферою), то кількість силових ліній, що перетинають цю поверхню, визначається сумарним зарядом системи, $N = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Це твердження називають ***теоремою Остроградського — Гаусса***.

Сукупність ліній напруженості, що перетинають площину, перпендикулярну до ліній напруженості і площа якої S, називають **потоком вектора напруженості,** $N = ES$.

Якщо поверхня не перпендикулярна до напрямку вектора напруженості електричного поля, то формула записується так: $N = ES\cos\alpha$, де α — кут між напрямком вектора напруженості $\vec{E}$ і нормаллю до поверхні (мал. 247).



Мал. 247. Обчислення потоку вектора напруженості

Теорему Остроградського — Гаусса формулюють так:

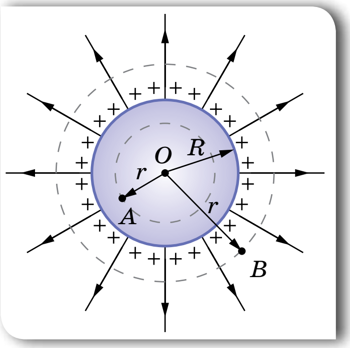
Потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює $N = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum q_i$, де $\sum q_i$ — алгебраїчна сума зарядів, що перебувають усередині цієї поверхні.

Приклади застосування теореми Остроградського — Гаусса. Теорема Остроградського — Гаусса полегшує знаходження значень вектора E, коли площу поверхні, що охоплює заряд, легко обчислити за формулами геометрії. Наприклад, обчислимо напруженість поля, створюваного рівномірно зарядженою сферою. Але перед цим введемо поняття густини електричного заряду.

Густина електричного заряду — фізична величина, що характеризує розподіл електричного заряду в просторі.

Користуються поняттями:

- *лінійної густини* τ, якщо електричний заряд q розподілений уздовж лінії завдовжки l, $\tau = \frac{q}{l}$;
- *поверхневої густини* σ, якщо заряд q розподілений по поверхні площею S, $\sigma = \frac{q}{S}$;
- *об'ємної густини* ρ, якщо електричний заряд q розподілений по всьому об'єму V, $\rho = \frac{q}{V}$.



Мал. 248. Електричне поле зарядженої сфери

Якщо на поверхні сфери радіусом R (мал. 248) рівномірно розподілено заряд q, то поверхнева густина заряду дорівнює: $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}$.

Розглянемо всередині сфери будь-яку точку A на відстані r від її центра, тобто точку, для якої $r < R$. Із центра O проведемо допоміжну поверхню, теж у вигляді сфери радіусом r, й обчислимо потік ліній напруженості N крізь цю поверхню, $N = \dfrac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Оскільки всередині допоміжної поверхні радіуса r електричних зарядів немає, $q = 0$, то і напруженість поля $E = \dfrac{N}{S}$ також дорівнює нулю.

Отже, *всередині зарядженої провідної сфери* (*чи іншого провідника будь-якої форми, на якому електричний заряд завжди розміщується тільки на поверхні*) *електричного поля немає.*

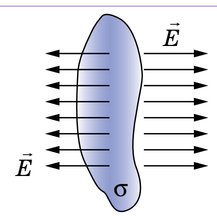
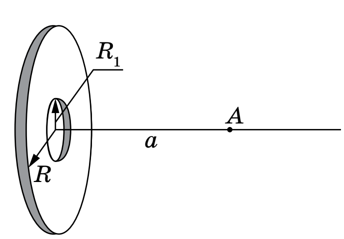
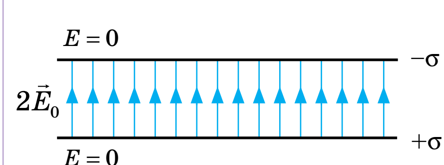
Обчислимо напруженість для точок, які містяться біля самої поверхні сфери, тобто для яких можна вважати, що $r = R$. Тоді $E = \dfrac{N}{S} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$.

Оскільки $q = 4\pi R^2 \sigma$, то $E = \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ за умови, що $r = R$.

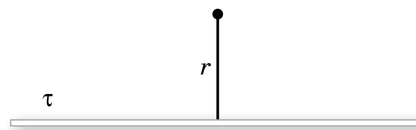
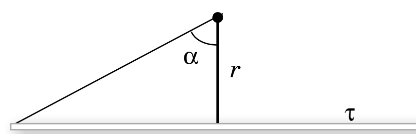
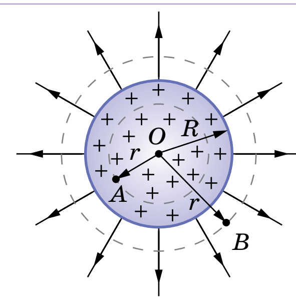
Для точок, що значно віддалені від поверхні зарядженої сфери (точка B на малюнку 248, с. 261), маємо: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, або $E = \dfrac{R^2 \sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$.

За допомогою теореми Остроградського — Гаусса можна обчислити напруженість електричного поля довільних заряджених тіл. У таблиці 4 наведено формули для визначення напруженості електричного поля в деяких практично цікавих випадках.

Таблиця 4

Рівномірно заряджена нескінченна площина	$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$, тут σ — поверхнева густина електричного заряду	
Диск радіусом R	Напруженість поля в точці, що лежить на перпендикулярі, проведеному із центра диска, на відстані r від нього: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}\left(1 - \dfrac{R_1}{\sqrt{R^2 + R_1^2}}\right)$	
Дві рівномірно різнойменно заряджені нескінченні пластини	$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Електричне поле зосереджене між пластинами, у просторі поза пластинами $E = 0$	

Закінчення таблиці 4

Нескінченно довга заряджена нитка	$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$ тут τ — лінійна густина заряду, r — відстань від нитки	
Заряджена нитка визначеної довжини	Напруженість поля в точці, що лежить на перпендикулярі, проведеному із середини нитки на відстані r від нитки, $$E = \frac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$ тут α — кут між напрямком нормалі до нитки та радіус-вектором, проведеним з точки до кінця нитки	
Однорідно заряджена куля радіусом R	Для $r \le R$ напруженість $E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon}$, де ρ — об'ємна густина заряду. Для $r >> R$ напруженість E визначається формулою напруженості точкового заряду	

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що називають потоком напруженості електричного поля?
2. У чому суть теореми Остроградського — Гаусса?
3. За якою формулою визначається напруженість рівномірно зарядженої нескінченної площини?
4. Чим відрізняють картини силових ліній полів між двома парами точкових зарядів q і $-q$ та $2q$ і $-q$? Намалюйте їх.

Приклади розв'язування задач

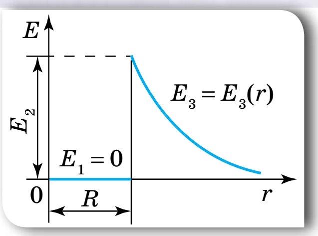
Задача. На суцільній металевій сфері радіусом R = 20 см рівномірно розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma = 10^{-9}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Визначте напруженість електричного поля в точках: на відстанях $r_1 = 16$ см від центра сфери; на поверхні сфери та на відстані $r_2 = 36$ см від центра сфери. Побудуйте графіки залежності $E = E(r)$.

Дано:
$R = 0{,}2$ м
$\sigma = 10^{-9}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$
$r_1 = 0{,}16$ м
$r_2 = 0{,}36$ м
E_1, E_2, E_3 — ?

Розв'язання:

Усередині сфери напруженість поля дорівнює нулю: $E_1 = 0$ (для $r = r_1$).

Заряджена сфера створює навколо себе поле, напруженість якого визначається за формулою точкового заряду.



Мал. 249

Для $r = R$ $\quad E_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\dfrac{q}{R^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\dfrac{4\pi R^2\sigma}{R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_o},\qquad E_2 = 113\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}.$

Для $r = r_2$ $\quad E_3 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\dfrac{q}{r_2^2} = \dfrac{R^2\sigma}{\varepsilon\varepsilon_o r_2^2},\qquad E_3 = 34{,}5\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}.$

Графік наведено на малюнку 249.

Відповідь: 0 В; 113 $\dfrac{\text{В}}{\text{м}}$; 34,5 $\dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

ВПРАВА 44

1. Металевій кулі, радіусом 24 см, надано заряд 6,26 нКл. Визначте напруженість електричного поля в центрі кулі, на відстані від центра, що дорівнює половині радіуса, і на відстані 24 см від поверхні кулі.
2. Побудуйте графіки залежності напруженості електричного поля від відстані $E = f(r)$ для точкового заряду і для зарядженої провідної кулі радіусом R.
3. Чому дорівнює напруженість $\vec{E}$ поля в центрі рівномірно зарядженого дротяного кільця?
4. З якою силою електричне поле зарядженої нескінченної площини діє на одиницю довжини зарядженої нескінченно довгої нитки, що розташована в цьому полі? Лінійна густина заряду на нитці — 3 $\dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}}$, а поверхнева густина заряду на площині — 20 $\dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$.
5. Покажіть, що електричне поле, яке створене ниткою скінченної довжини, у граничних випадках переходить в електричне поле: а) нескінченно довгої зарядженої нитки; б) точкового заряду.
6. Визначте напруженість електричного поля в точці A, що розташована на відстані $r = 5$ см від зарядженого диска вздовж нормалі, установленої в його центрі. За якого граничного значення радіуса R диска поле в точці A не буде відрізнятись більше ніж на 2 % від поля нескінченної площини? Яка напруженість поля в точці A, якщо радіус диска дорівнює $R = 10r$? У скільки разів напруженість, обчислена в цьому випадку, відрізняється від напруженості поля нескінченної площини?
7. Мильна бульбашка, що висить на кінці тонкої трубочки, стягується під дією сил поверхневого натягу. Чи можна утримати бульбашку від повного стягування, якщо надати їй великого електричного заряду? Якщо так, то бульбашка якого діаметра залишиться? (До того ж потрібно враховувати, що в полі напруженістю 3 $\dfrac{\text{МВ}}{\text{м}}$ настає пробій повітря.)

§ 54 Провідники та діелектрики в електричному полі

Електростатична індукція. Будь-яке тіло, розміщене в електричному полі, електризується. Проте процес електризації для різних речовин буде різним.

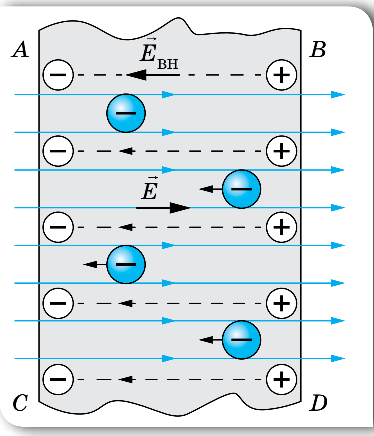
Електричні характеристики електронейтрального тіла залежать від рухливості заряджених частинок в ньому, яка, своєю чергою, визначається будовою атомів речовини та їх взаємним розміщенням.

За концентрацією вільних заряджених частинок у речовині всі речовини поділяють на три основні класи: *провідники*, *діелектрики* та *напівпровідники*. До провідників належать речовини, які містять заряджені частинки, що здатні рухатись впорядковано по всьому об'єму тіла під дією електричного поля, — так звані *вільні заряди*. Провідниками є всі метали, водні розчини солей, кислот, лугів, розплави солей, йонізовані гази.

Розглянемо поведінку в електричному полі тільки твердих металевих провідників. У металах носіями вільних зарядів є вільні електрони. Їх називають *електронами провідності*. Вільні електрони беруть участь у тепловому русі й можуть переміщуватися по шматку металу в будь-якому напрямку.

Помістимо незаряджений металевий провідник в однорідне електростатичне поле.

Під дією поля в ньому виникне впорядкований рух вільних електронів у напрямку, протилежному напрямку напруженості $\vec{E}$ цього поля (мал. 250). Електрони накопичуватимуться на одному боці провідника й утворять там надлишковий негативний заряд, а їх недостача на іншому боці провідника спричинить утворення там надлишкового позитивного заряду, тобто в провіднику відбудеться розподіл зарядів. Ці нескомпенсовані різнойменні заряди з'являються на провіднику лише під дією зовнішнього електричного поля, тобто такі заряди є індукованими, наведеними. А в цілому провідник залишається незарядженим. У цьому переконуємося, виймаючи провідник з електричного поля.



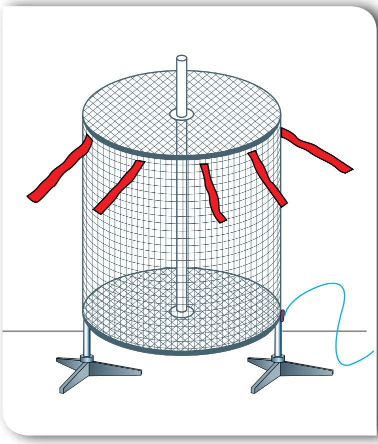
Мал. 250. Провідник у зовнішньому електричному полі

Вид електризації, за якого під дією зовнішніх електричних полів відбувається перерозподіл зарядів між частинами певного тіла, називають ***електростатичною індукцією***.

Нескомпенсовані електричні заряди, що з'явилися на протилежних частинах провідника, створюють усередині провідника своє власне електричне поле напруженістю $\vec{E}_{вн}$. Напрямки зовнішнього і внутрішнього полів — протилежні (мал. 250, с. 265).

У результаті переміщення вільних носіїв заряду й накопичення їх на протилежних частинах провідника напруженість $\vec{E}_{вн}$ внутрішнього поля збільшується і, нарешті, зрівнюється за модулем з напруженістю $\vec{E}$ зовнішнього поля. Це приводить до того, що напруженість результуючого поля всередині провідника дорівнює нулю. До того ж на провіднику встановлюється рівновага зарядів.

Електростатичний захист. За умови рівноваги зарядів на провіднику весь нескомпенсований заряд розміщується тільки на зовнішній поверхні провідника, а всередині нього електричного поля немає (мал. 251). Це явище використовують для створення *електростатичного захисту* — захисту від дії електричного поля. На відміну від гравітаційного поля, від електричного поля можна захиститися, якщо оточити провідник, наприклад, мідною сіткою. На практиці це використовують для захисту від потужного електричного поля радіолокаторів та радіостанцій, випромінювання яких може зашкодити здоров'ю людини; для запобігання дії електричного поля на чутливі прилади.



Мал. 251. Електричне поле сконцентроване ззовні

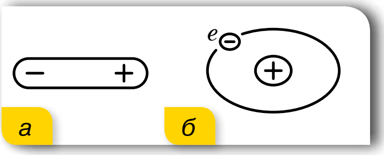
Види діелектриків. ***Діелектриками***, або ізоляторами, називають такі тіла, крізь які електричні заряди не можуть переходити від зарядженого тіла до незарядженого. Ця властивість діелектриків зумовлена тим, що в них за певних умов відсутні вільні носії заряду. Якщо умови змінюються, наприклад, під час нагрівання, у діелектрику можуть виникнути вільні носії заряду й він почне проводити електрику. Отже, поділ речовин на провідники й діелектрики є умовним.

До діелектриків належать усі гази за нормальних умов, рідини (гас, спирти, ацетон, дистильована вода та ін.), тверді тіла (скло, пластмаси, сухе дерево, папір, гума тощо).

У діелектриках електричні заряди не можуть переміщуватися під дією електричного поля по всьому об'єму тіла так, як вільні заряди провідника.

Діелектрики поділяють на два види (мал. 252):

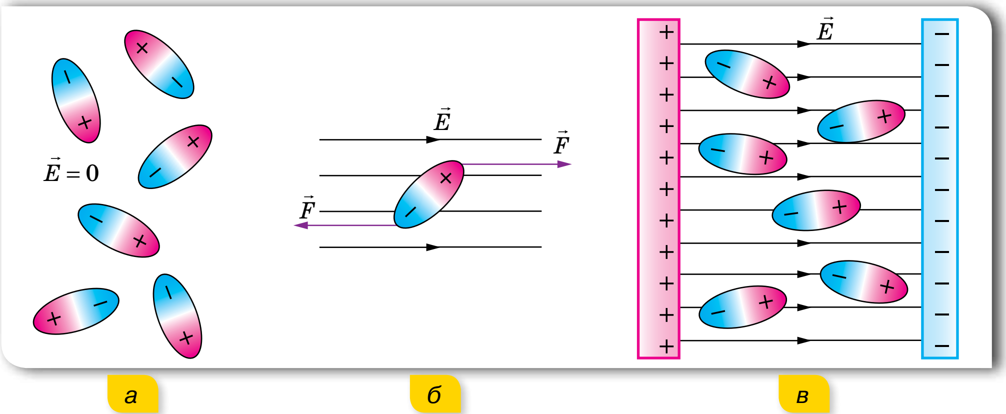
- *полярні,* що складаються з молекул, у яких центри розподілу позитивних і негативних зарядів не збігаються (вода, спирти та ін.);
- *неполярні,* що складаються з атомів або молекул, у яких центри розподілу позитивних і негативних зарядів збігаються (бензол, інертні гази, поліетилен та ін.).



Мал. 252. Види діелектриків:
а — полярні;
б — неполярні

Поляризація діелектриків. Усередині діелектрика електричне поле може існувати. Притягання незарядженого тіла (діелектрика) до зарядженого тіла пояснюється тим, що в електричному полі відбувається *поляризація діелектрика*, тобто зміщення в протилежні боки різнойменних зарядів, що входять до складу атомів і молекул таких речовин, але тут зміщення відбувається в межах кожного атома або молекули.

Молекули полярних діелектриків — це електричні диполі, що мають постійний дипольний момент унаслідок асиметрії центра мас позитивних і негативних зарядів (мал. 253, *а*).

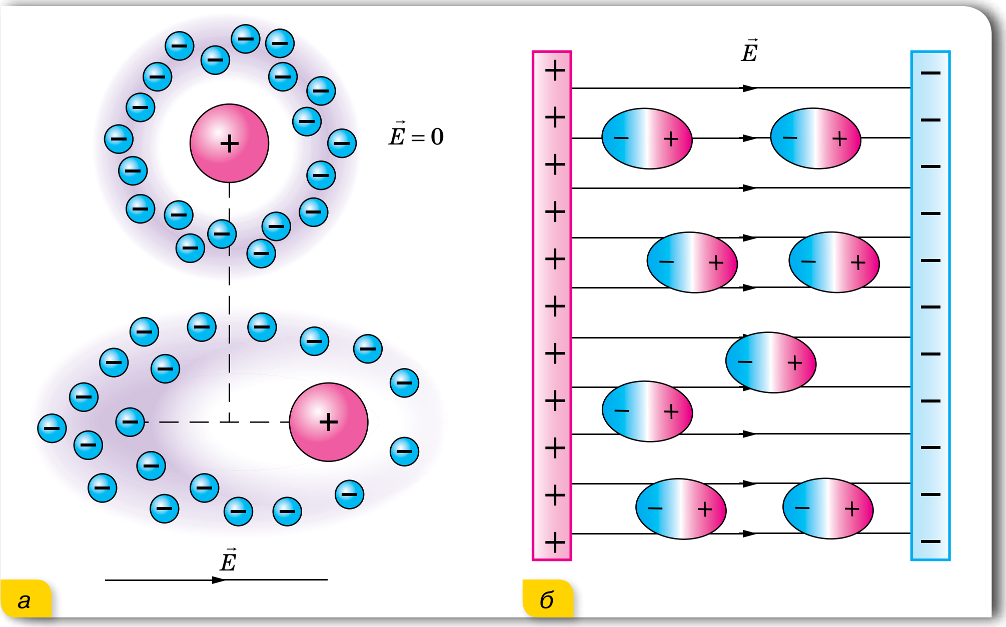


Мал. 253. Поляризація полярного діелектрика

Якщо полярний діелектрик помістити в електричне поле, то ці диполі починають повертатися своїми позитивно зарядженими кінцями до негативно зарядженої пластини, а негативно зарядженими — до позитивно зарядженої пластини (мал. 253, *б*). У результаті на поверхні діелектрика біля позитивної пластини виникає досить тонкий шар негативних зарядів, а біля негативної — позитивних, які й створюють зустрічне поле (мал. 253, *в*). (Усередині діелектрика позитивні й негативні заряди сусідніх диполів компенсують дію один одного.) Однак на відміну від провідників це поле вже не здатне повністю скомпенсувати зовнішнє, а лише послаблює його в ε разів.

Молекули неполярних діелектриків, якщо відсутнє зовнішнє електричне поле, дипольного моменту не мають (мал. 254, *а*; с. 268). Якщо ж неполярний діелектрик помістити в електричне поле, його молекули деформуються, у результаті чого утворюються диполі, які поводять себе, як і диполі полярного діелектрика. (У полярних діелектриках також відбувається поляризація молекул, унаслідок чого в електричному полі дипольний момент кожної молекули дещо збільшується (мал. 254, *б*; с. 268).

Але поляризація неполярних діелектриків пояснюється лише виникненням дипольного моменту в молекулі внаслідок її деформації в зовнішньому електричному полі. Залежно від хімічного зв'язку вона може бути результатом деформації електронних оболонок окремих атомів та йонів (електронна поляризація) або наслідком зміщення позитивних і негативних йонів у різні боки вздовж силових ліній зовнішнього електричного поля (йонна поляризація). Наведений дипольний момент зростає зі збільшенням напруженості електричного поля.



Мал. 254. Деформація та орієнтація молекул неполярного діелектрика в електричному полі

Таким чином, у діелектриках, як і в провідниках, спостерігається індукція електричних зарядів. Однак, якщо в електричному полі розділити діелектрик на дві частини, то ми не одержимо різнойменно заряджених тіл. У цьому полягає відмінність індукції в діелектриках від індукції в провідниках.

Діелектрична проникність речовини. Для характеристики електричних властивостей діелектриків уведено особливу величину, яку називають ***діелектричною проникністю***. Це фізична стала, яка показує, у скільки разів модуль напруженості електричного поля всередині діелектрика $E_{\text{вн}}$ менший від модуля напруженості E_0 у вакуумі:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E_{\text{вн}}}.$$

Діелектрична проникність визначена для всіх діелектриків і занесена до таблиць. Для дистильованої води $\varepsilon = 81$, а для гасу $\varepsilon = 2$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що відбувається у разі внесення провідника в електричне поле?
2. Як зарядити два тіла різнойменно, не доторкуючись до них зарядженим тілом?
3. Укажіть схожість і відмінності процесів електризації провідника та поляризації діелектрика.
4. У якому агрегатному стані — рідкому, твердому чи газоподібному — діелектрична проникність діелектрика буде найбільшою?

§ 55 Електрети і сегнетоелектрики. Рідкі кристали в електричному полі

Електрети. Серед твердих діелектриків існує група речовин, які можуть тривалий час зберігати наелектризований стан (бути поляризованими) і за відсутності зовнішнього електричного поля. Ці речовини дістали назву *електретів*. Подібні властивості має ряд органічних (парафін, бджолиний віск, нейлон, ебоніт тощо) і неорганічних (сірка, борне скло та інші) речовин.

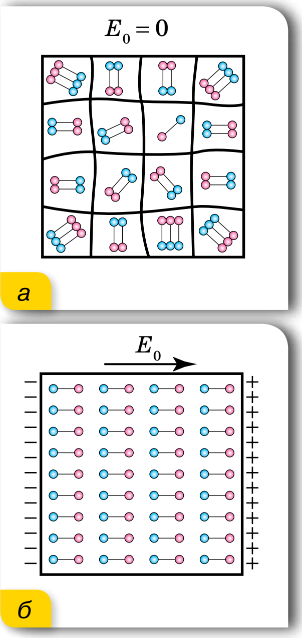
Така властивість електретів зумовлена тим, що виникає залишкова поляризація, оскільки на процеси поляризації та деполяризації потрібен різний час. Прискорити процес деполяризації можна шляхом підвищення температури діелектрика. Час збереження поляризації без помітного її зменшення в різних електретів різний. У деяких електретів він може сягати кількох десятків років.

Електрети знайшли застосування в техніці як джерела постійного електричного поля, зокрема в електрографії.

Сегнетоелектрики. Діелектрична проникність деяких діелектриків за певної температури набуває великих значень. Спочатку таку властивість було виявлено у кристалів сегнетової солі, і тому всі діелектрики цього типу дістали назву — сегнетоелектрики. Термін «сегнетоелектрика» ввів у науку Ігор Васильович Курчатов у 30-х роках минулого століття.

Діелектрична проникність сегнетової солі може перевищувати діелектричну проникність вакууму в декілька тисяч разів. Вона помітно змінюється зі зміною напруженості зовнішнього електричного поля.

Аномально велика діелектрична проникність сегнетоелектриків зумовлена виникненням у цих речовин у певному інтервалі температур вираженої спонтанної (самодовільної) поляризації. Навіть за відсутності зовнішнього електричного поля окремі ділянки кристала сегнетоелектрика (домени) виявляються поляризованими, але в різних напрямках (мал. 255, *а*; с. 270). Тому в цілому весь кристал сегнетоелектрика поводить себе так, ніби він зовсім не поляризований. Під дією електричного поля відбувається зміна напрямку поляризації (зміна орієнтації) доменів — вони повертаються в напрямку цього поля (мал. 255, *б*). Сегнетоелектрик частково зберігає свою поляризацію і тоді, коли його видалити з поля. Виявляється, що домени є в сегнетоелектриках лише в певному інтервалі температур, і саме за цих температур у них зберігаються сегнетоелектричні властивості. Наприклад, сегнетова сіль має ці властивості лише за температур від −15 до 22,5 °C.



Мал. 255. Схема доменної структури сегнетоелектрика: *а* — якщо електричне поле відсутнє; *б* — у сильному електричному полі

Сегнетоелектрики використовуються для виготовлення генераторів і приймачів ультразвукових хвиль та інших радіотехнічних пристроїв.

П'єзоелектричний ефект. Вивчення властивостей твердих діелектриків показало, що деякі з них поляризуються не лише за допомогою електричного поля, а й у процесі деформації внаслідок механічної дії на них.

Прямий п'єзоелектричний ефект — явище поляризації діелектрика під час механічної дії на нього.

Цей ефект мають кристали кварцу й усі сегнетоелектрики. Щоб його спостерігати, з кристала вирізають прямокутний паралелепіпед, грані якого мають бути орієнтовані певним чином відносно кристала. Дві його протилежні грані покривають металевими пластинами з відводами для підключення до електричного кола.

При здавлюванні паралелепіпеда одна його грань заряджається позитивно, а друга — негативно. Якщо стискання замінити розтягом паралелепіпеда, то знаки на його гранях зміняться на протилежні.

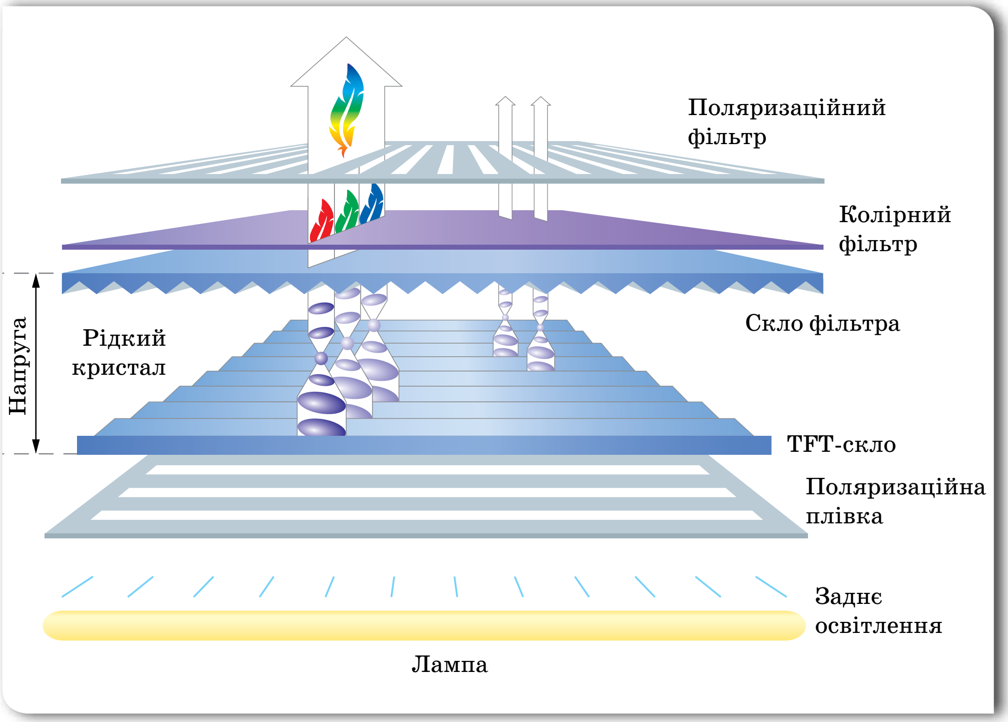
Прямий п'єзоелектричний ефект можна пояснити так. Усі п'єзокристали не мають центра симетрії і складаються з позитивних і негативних йонів, які утворюють ніби дві самостійні підґратки, вставлені одна в одну. Коли п'єзокристал стискують (розтягують), ці підґратки зсуваються одна відносно одної, й одна поверхня кристала заряджається позитивно, а друга — негативно.

У п'єзокристалів спостерігається і зворотне явище — деформація поляризованого кристала.

Зворотний п'єзоелектричний ефект — деформація кристалів унаслідок його поляризації в зовнішньому електричному полі.

Якщо пластинку, вирізану з п'єзокристала, помістити в електричне поле, що постійно змінюється, то вона пульсуватиме в такт змінам поля. Цей ефект використовується для добування ультразвуку в радіотехнічних пристроях.

Рідкокристалічні дисплеї. Поєднуючи властивості рідин і твердих тіл (текучість, анізотропія), рідкі кристали проявляють специфічні ефекти, багато з яких не спостерігаються в рідинах і твердих тілах.



Мал. 256. Схема отримання зображення в рідкокристалічному дисплеї

Найпопулярніше поле для використання рідких кристалів — *рідкокристалічні дисплеї*. Рідкокристалічний дисплей (англ. *liquid crystal display*, LCD) — це електричний пристрій візуального відображення інформації, принцип дії якого ґрунтується на явищі поляризації світлового потоку. (З явищем поляризації ви детально ознайомитесь у розділі «Оптика».)

Рідкокристалічна панель освітлюється джерелом світла (залежно від того, де воно розташоване, рідкокристалічні панелі працюють на відбиванні або на проходженні світла).

Для отримання кольорового зображення використовують три фільтри (мал. 256), що виділяють з білого світла джерела три основні кольори (синій, зелений, червоний). Завдяки комбінуванню трьох основних кольорів для кожної точки (пікселя) екрана з'являється можливість відтворити будь-який колір.

Рідкокристалічні дисплеї споживають невелику кількість енергії, тому вони знайшли широке застосування в годинниках, мобільних телефонах, у комп'ютерних моніторах, телевізорах тощо.

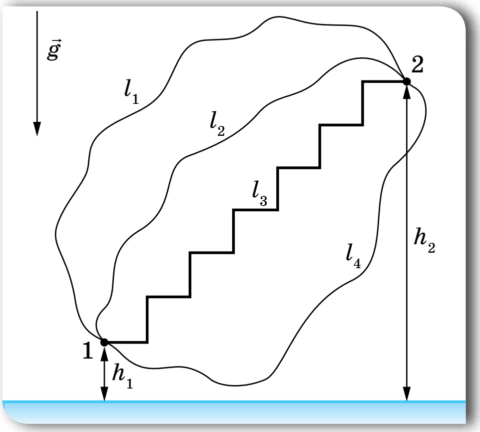
ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Які діелектрики називають електретами? Сегнетоелектриками?
2. У чому суть п'єзоелектричного ефекту?
3. Наведіть практичні приклади використання сегнетоелектриків, електретів, рідких кристалів.

§ 56 Робота по переміщенню заряду в електричному полі

Обчислення роботи електричного поля по переміщенню заряду. Ми вже вказували на подібність законів взаємодії електрично заряджених тіл (закон Кулона) та масивних тіл (закон всесвітнього тяжіння). В обох випадках $F \sim \frac{1}{r^2}$. Відповідно і наслідки із законів мають бути схожими.

У курсі механіки ми з'ясували, що сила всесвітнього тяжіння є *консервативною силою*, оскільки її робота по переміщенню тіла масою m у просторі не залежить від траєкторії руху тіла, а визначається лише його початковим і кінцевим положеннями. Робота по переміщенню тіла замкненою траєкторією дорівнює нулю. Робота сили земного тяжіння (біля поверхні Землі) $A = mg(h_1 - h_2)$ (позначення дивіться на малюнку 257); у всесвітньому масштабі робота гравітаційної сили $A = GM_З m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Нагадуємо, силове поле, у якому робота не залежить від форми траєкторії, називається *потенціальним*.



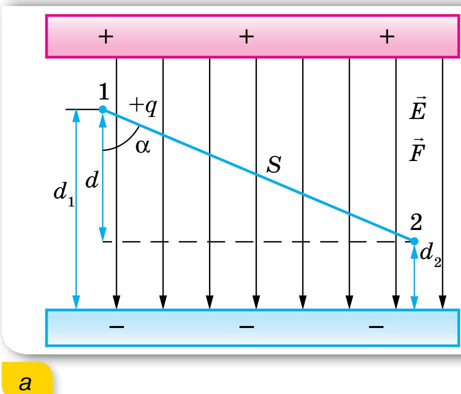
Мал. 257. До визначення роботи сили тяжіння

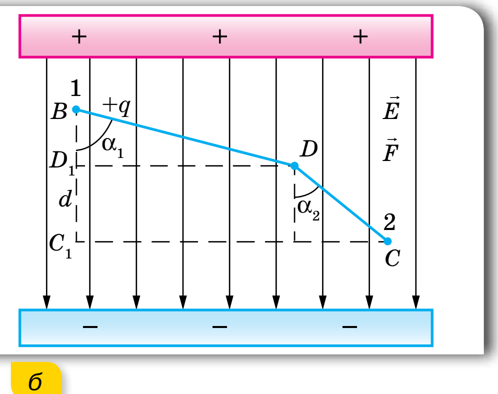
У кожній точці поля тіло має певну потенціальну енергію відносно вибраного нульового рівня. Значення потенціальної енергії тіла в даній точці простору визначається роботою поля по переміщенню тіла із цієї точки на нульовий рівень. Робота сили тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії тіла $A = -(E_{п_2} - E_{п_1})$.

Ці висновки отримано із закону всесвітнього тяжіння Ньютона, подібні висновки мають бути отримані і для електростатичних сил, що діють в електричному полі.

Розглянемо рух точкового заряду в однорідному електричному полі. Нехай однорідне поле створюють великі металеві пластини, що мають заряди протилежних знаків. Це поле діє на точкове тіло сталою силою $\vec{F} = q\vec{E}$, подібно до того, як поле тяжіння діє зі сталою силою $\vec{F} = m\vec{g}$ на тіло поблизу поверхні Землі.

Нехай пластини розміщені горизонтально. Обчислимо роботу, яку виконує електростатичне поле, переміщуючи позитивний заряд q із точки *1*, розташованої на відстані d_1 від негативно зарядженої пластини, у точку *2*, віддалену на відстань d_2, по прямолінійній траєкторії (мал. 258, *а*).



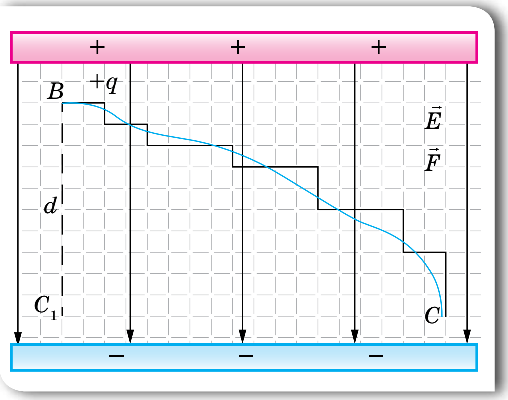


Мал. 258. Переміщення позитивного заряду в однорідному електричному полі: *а* — по прямолінійній траєкторії; *б* — по ламаній

Як відомо з курсу механіки, робота по переміщенню тіла визначається формулою $A = Fs\cos\alpha$, де α — кут між векторами сили та переміщення.

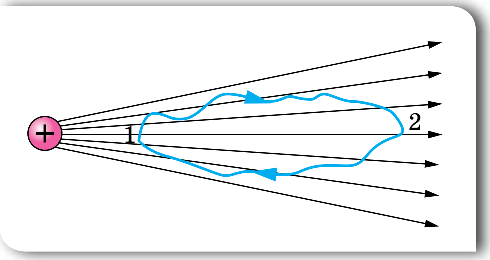
Відповідно електричне поле на ділянці *1–2* виконує роботу $A = Fd$, де $d = s\cos\alpha$. З урахуванням того, що $F = qE$, отримуємо $A = qEd = qE(d_1 - d_2)$. Ця робота не залежить від форми траєкторії, подібно до того, як не залежить від форми траєкторії робота сили тяжіння. Доведемо це. Нехай тепер позитивний заряд q переміщується з точки *1* у точку *2* ламаною BDC (мал. 258, *б*). Тоді поле виконує роботу $A = qE\,(BD\cos\alpha_1 + DC\cos\alpha_2) = qE(BD_1 + D_1C_1) = qEd$.

Такого самого висновку ми дійдемо за будь-якого вигляду траєкторії руху точкового заряду, адже будь-яку криву можна замінити переміщенням по ламаній траєкторії з достатньо малими сходинками (мал. 259).



Мал. 259. Криволінійну траєкторію можна замінити траєкторією у вигляді ламаної лінії, з якою завгодно точністю, якщо взяти достатньо малі сходинки

Ми довели, що в однорідному електричному полі робота електростатичних сил не залежить від форми траєкторії. Відповідно робота по переміщенню заряду замкненою траєкторією дорівнює нулю.



Мал. 260. Робота по переміщенню заряду в неоднорідному полі

Можна довести, що цей висновок справджується і для неоднорідних полів, наприклад, для поля точкового заряду (мал. 260). У цьому випадку роботу по переміщенню позитивного заряду q_0 з точки *1*, яка лежить на відстані r_1 від заряду q, що створює поле, у точку *2*, яка лежить на відстані r_2, визначають за формулою $A = q_0\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}\right)$ незалежно від форми траєкторії.

Отже, *електростатичні сили взаємодії між нерухомими точковими зарядами є консервативними*. А поле консервативних сил є потенціальним. Відповідно електричне поле так само, як і гравітаційне поле, — потенціальне. І робота сил електричного поля може бути визначена через зміну потенціальної енергії точкового заряду в цьому полі.

Потенціальна енергія взаємодії точкових зарядів. Подібно до того, як будь-яке тіло, що взаємодіє із Землею за законом всесвітнього тяжіння, на різних відстанях від її центра має різну потенціальну енергію, електричний заряд q на різній відстані від іншого заряду q_0 має різну потенціальну енергію[1] — W. Якщо заряд q переміщується в електричному полі з точки *1*, де його потенціальна енергія була W_1, у точку *2*, де його енергія стала W_2, робота сил поля $A = W_1 - W_2 = -(W_2 - W_1) = -\Delta W$. Як видно з формули, A та ΔW мають протилежні знаки. Це пояснюється тим, що якщо заряд q переміщується під дією сил поля (тобто робота поля A позитивна), то його потенціальна енергія зменшується, приріст енергії ΔW — від'ємний. Якщо ж заряд переміщується проти сил поля (A — негативна), то потенціальна енергія заряду зменшується. (Таке ж співвідношення між потенціальною енергією та роботою сили тяжіння.)

Як відомо, значення потенціальної енергії залежить від вибору нульового рівня. В електростатиці[2] умовились потенціальну енергію заряду, розміщеного в точці, нескінченно віддаленій від зарядженого тіла, що створює поле, вважати за нуль, $W_\infty = 0$. Тоді в разі переміщення заряду q з точки *1* у нескінченність робота поля $A = W_1 - W_\infty = W_1$. Тобто, потенціальна енергія заряду q, розміщеного в якій-небудь точці поля, чисельно дорівнює роботі, яку виконують сили поля, переміщуючи цей заряд із вка-

[1] Оскільки літерою E позначається напруженість електричного поля, то енергію в електродинаміці прийнято позначати літерою W.

[2] В електротехніці, на відміну від електростатики, за нуль часто вважають потенціальну енергію заряду, розміщеного на Землі.

заної точки в нескінченність: $W = qEd$, де d — відстань від джерела поля до точки, у якій перебуває заряд q.

Якщо поле створене позитивним зарядом, то значення потенціальної енергії іншого позитивного заряду, розміщеного в деякій точці цього поля, буде додатне, якщо ж поле створене негативним зарядом, то значення потенціальної енергії позитивного заряду — від'ємне. Для негативного заряду, розміщеного в електричному полі, все буде навпаки. (Подумайте чому.) Коли поле створено відразу кількома зарядами, потенціальна енергія заряду q, розміщеного в якій-небудь точці такого поля, дорівнює алгебраїчній сумі енергій, зумовлених полем кожного заряду в цій точці.

ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Як обчислюється робота по переміщенню зарядженого тіла в однорідному електричному полі?
2. У тексті параграфа показано, що робота переміщення заряду з точки *1* у точку *2* дорівнює qEd. Якою буде робота, якщо цей самий заряд переміщується з точки *2* в точку *1*?
3. Чи завжди робота сил електричного поля вздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю? Наведіть приклад.

ВПРАВА 45

1. Електрон зі швидкістю $1{,}8 \cdot 10^4\ \frac{м}{с}$ влітає в однорідне електричне поле напруженістю $3\ \frac{мН}{Кл}$ і рухається проти ліній поля. З яким прискоренням рухається електрон і якою буде його швидкість, коли він пройде відстань 7,1 см? Скільки часу необхідно для набуття цієї швидкості? Рух електрона відбувається у вакуумі.
2. Кулька масою 40 мг, що має позитивний заряд $q = 1$ нКл, рухається зі швидкістю $10\ \frac{см}{с}$. На яку відстань може наблизитись кулька до позитивного точкового заряду $q_0 = 1{,}33$ нКл?
3. Яка робота виконується у разі перенесення точкового заряду 20 нКл із нескінченності в точку, що лежить на відстані 1 см від поверхні кулі радіусом 1 см з поверхневою густиною заряду $10\ \frac{мкКл}{м^2}$?
4. Дві кульки із зарядами 6,66 нКл та 13,33 нКл перебувають на відстані 40 см одна від одної. Яку роботу необхідно виконати, щоб зменшити відстань між ними до 25 см?
5. Точкові заряди $q_1 = -17$ нКл та $q_2 = 20$ нКл перебувають від точкового заряду $q_3 = 30$ нКл відповідно на відстанях $l_1 = 2$ см та $l_2 = 5$ см. Яку мінімальну роботу проти електричних сил необхідно виконати, щоб поміняти заряди q_1 та q_2 місцями?

§ 57 Потенціал електричного поля

Потенціал. Еквіпотенціальні поверхні. У механіці взаємодію тіл характеризують силою або потенціальною енергією. Електричне поле, що здійснює взаємодію між електрично зарядженими тілами, також характеризують двома величинами. Напруженість електричного поля — це *силова* характеристика. Тепер введемо *енергетичну* характеристику — *потенціал.* За допомогою цієї величини можна буде порівнювати між собою будь-які точки електричного поля. Отже, потенціал як характеристика поля не має залежати від значення заряду, що міститься в цих точках. Поділимо обидві частини формули $A = W_1 - W_2$ на заряд q. Отримаємо $\frac{A}{q} = \frac{W_1}{q} - \frac{W_2}{q}$. Відношення $\frac{W}{q}$ не залежить від значення заряду і приймається за енергетичну характеристику, яку називають *потенціалом* поля в даній точці. Позначають потенціал літерою φ.

Потенціал електричного поля φ — скалярна енергетична характеристика поля, що визначається відношенням потенціальної енергії W позитивного заряду q в даній точці поля до величини цього заряду, $\varphi = \frac{W}{q}$.

Одиниця потенціалу — вольт: $1\ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = 1$ В.

Подібно до потенціальної енергії значення потенціалу в даній точці залежить від вибору нульового рівня для відліку потенціалу. Найчастіше в електродинаміці за нульовий рівень беруть потенціал точки, що лежить у нескінченності, а в електротехніці — на поверхні Землі.

Із введенням потенціалу формулу для визначення роботи по переміщенню заряду між точками *1* і *2* можна записати у вигляді $\frac{A}{q} = \varphi_1 - \varphi_2$. Оскільки під час переміщення позитивного заряду в напрямку вектора напруженості електричне поле виконує позитивну роботу $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$, то потенціал φ_1 більший за потенціал φ_2. Таким чином, напруженість електричного поля напрямлена в бік зменшення потенціалу.

Якщо заряд переміщати з певної точки поля в нескінченність, робота $A = q(\varphi - \varphi_\infty)$. Оскільки $\varphi_\infty = 0$, то $A = q\varphi$. Таким чином, величина потенціалу φ певної точки поля визначається роботою, яку виконує електричне поле, переміщуючи одиничний позитивний заряд із цієї точки у нескінченність, $\varphi = \frac{A}{q}$.

Якщо електричне поле створюється точковим зарядом q, то в точці, що лежить на відстані r від нього, потенціал обчислюють за формулою

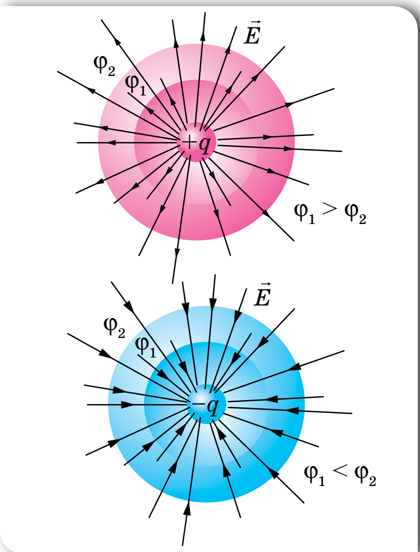
$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. За цією формулою розраховують і потенціал поля зарядженої кулі. У цьому разі r — це відстань від центра кулі до вибраної точки поля. Із цієї формули видно, що на однакових відстанях від точкового заряду, що створює поле, потенціал однаковий. Усі ці точки лежать на поверхні сфери, описаної радіусом r навколо точкового заряду. Таку сферу називають *еквіпотенціальною поверхнею*.

Еквіпотенціальні поверхні — геометричне місце точок в електричному полі, які мають однаковий потенціал (мал. 261), — один з методів наочного зображення електричних полів.

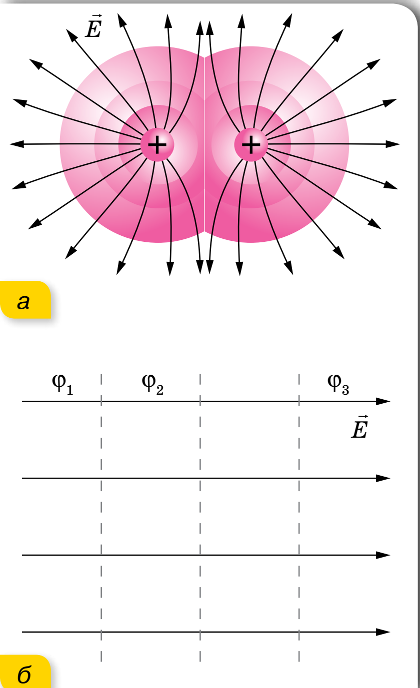
Силові лінії завжди перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь. Це означає, що робота сил поля по переміщенню заряду по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю.

У разі накладання електричних полів, створених кількома зарядами, потенціал електричного поля дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, створених окремими зарядами, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. Еквіпотенціальні поверхні таких систем мають складну форму. Наприклад, для системи із двох однакових за значенням однойменних зарядів еквіпотенціальні поверхні мають вигляд, зображений на малюнку 262, *а*. Еквіпотенціальні поверхні однорідного поля є площинами (мал. 262, *б*).

Різниця потенціалів. Практичне значення має не сам потенціал у точці, а зміна (різниця) потенціалу $\varphi_1 - \varphi_2$, яка не залежить від вибору нульового рівня відліку потенціалу. Різницю потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ ще називають *напругою* й позначають латинською літерою U. Тоді формула для роботи по переміщенню заряду набуває вигляду $\dfrac{A}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 = U$.



Мал. 261. Еквіпотенціальні поверхні електричних полів, створених точковими зарядами різних знаків



Мал. 262. Еквіпотенціальні поверхні: *а* — поля двох однакових зарядів; *б* — однорідного поля

Напруга U — це фізична величина, яка визначається роботою електричного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду між двома точками поля, $U = \dfrac{A}{q}$.

Одиниця різниці потенціалів (напруги), як і потенціалу, — вольт: $1\ \text{В} = 1\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$.

Оскільки робота сил поля по переміщенню заряду залежить лише від різниці потенціалів, то в разі переміщення заряду з однієї еквіпотенціальної поверхні на другу (потенціали яких відповідно φ_1 та φ_2) виконана полем робота не залежить від траєкторії цього руху.

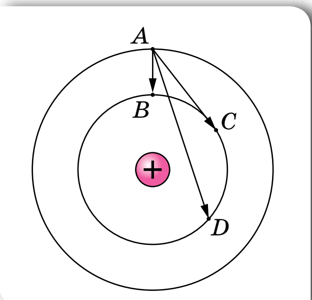
Зв'язок напруженості електричного поля з напругою. З формул $A = Eqd$ та $A = qU$ можна встановити зв'язок між напруженістю та напругою електричного поля: $Ed = U$. Із цієї формули випливає:

- що менше змінюється потенціал на відстані d, то меншою є напруженість електричного поля;
- якщо потенціал не змінюється, то напруженість дорівнює нулю;
- напруженість електричного поля напрямлена в бік зменшення потенціалу.

Оскільки $E = \dfrac{U}{d}$, то саме із цієї формули й виводиться ще одна одиниця напруженості — вольт на метр: $1\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Що називають потенціалом електричного поля? Яка формула відображає зміст цього поняття?
2. Що називають різницею потенціалів між двома точками поля? Яка формула відображає зміст цього поняття?
3. Які поверхні називають еквіпотенціальними?
4. Яка формула задає зв'язок між напруженістю й різницею потенціалів в однорідному електричному полі?
5. Порівняйте роботи, виконані полем під час переміщення заряду з точки A в точки B, C і D (мал. 263).
6. Проаналізуйте формули законів усесвітнього тяжіння і Кулона, які подібні за формою, хоча й описують явища різної природи, та з'ясуйте:
   а) Яка фізична величина в законі всесвітнього тяжіння є аналогом заряду в законі електростатики Кулона?
   б) Яка величина в полі тяжіння відіграє роль, подібну до напруженості електричного поля? Запишіть формулу для обчислення цієї величини.
   в) Який вигляд має формула потенціалу φ гравітаційного поля, якщо потенціал електричного поля $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$?



Мал. 263

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Електричне поле створене точковим зарядом $5 \cdot 10^{-7}$ Кл, вміщеним у середовище з діелектричною проникністю, $\varepsilon = 2$. Визначте різницю електричних потенціалів точок, віддалених від заряду відповідно на 5 см і 0,2 м. Яка робота виконується по переміщенню електричного заряду $0{,}3 \cdot 10^{-7}$ Кл між цими точками?

Дано:
$q = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл
$q_0 = 0{,}3 \cdot 10^{-7}$ Кл
$\varepsilon = 2$
$r_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 0{,}2$ м

U — ? A — ?

Розв'язання:

Використовуючи формулу $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, визначимо різницю електричних потенціалів точок *1* і *2* електричного поля:

$$U = \varphi_B + \varphi_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Роботу по переміщенню заряду в електричному полі визначимо за формулою $A = q_0U$.

Підставляючи числові значення, отримаємо:

$$U = \frac{5 \cdot 10^{-7}\,\text{Кл}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-2}\,\text{м}} - \frac{1}{0{,}2\,\text{м}}\right) \approx 34\,\text{кВ}.$$

$A \approx 0{,}3 \cdot 10^{-7}$ Кл $\cdot\, 34 \cdot 10^3$ В $\approx 10^{-3}$ Дж $= 1$ мДж.

Відповідь: 34 кВ; 1 мДж.

Задача 2. Із 60 маленьких сферичних крапель ртуті, радіуси яких 0,1 мм, 20 штук мають заряди $q_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ Кл, а 40 штук — $q_2 = -0{,}8 \cdot 10^{-12}$ Кл кожна. Визначте потенціал великої краплі, яка утворюється після злиття в одну всіх маленьких крапель.

Дано:
$q_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ Кл
$q_2 = -0{,}8 \cdot 10^{-12}$ Кл
$r = 1 \cdot 10^{-4}$ м
$n_1 = 20$
$n_2 = 40$

φ — ?

Розв'язання:

Потенціал великої сферичної краплі $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$, де Q — її заряд, R — радіус.

У процесі зливання крапель виконується закон збереження електричного заряду: $Q = n_1q_1 + n_2q_2$.

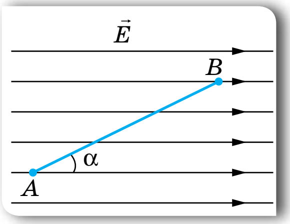
Об'єм утвореної краплини становить $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = (n_1 + n_2)\dfrac{4}{3}\pi r^3$, звідки $R = r\sqrt[3]{n_1 + n_2}$.

Тоді $\varphi = \dfrac{n_1q_1 + n_2q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r\sqrt[3]{n_1 + n_2}}$. Після підстановки числових значень отримуємо: $\varphi \approx 184$ В.

Відповідь: $\varphi \approx 184$ В.

ВПРАВА 46

1. На відстані 5 см від поверхні кулі потенціал електричного поля дорівнює 1,2 кВ, а на відстані 10 см він дорівнює 900 В. Визначте радіус кулі, її заряд і потенціал.
2. Сто однакових заряджених крапельок, зливаючись, утворюють одну. Яким буде потенціал утвореної краплі, якщо потенціал кожної крапельки дорівнює 3 В?
3. Точки A і B лежать на відстані 10 см одна від одної й розташовані в однорідному полі, напруженість якого 60 $\frac{кВ}{м}$. Визначте різницю потенціалів між цими точками. Розгляньте випадки, коли точки A і B лежать: а) на одній лінії напруженості; б) на прямій, перпендикулярній до ліній напруженості; в) на прямій, напрямленій під кутом 45° до ліній напруженості.
4. Визначте напругу між точками A і B (мал. 264), якщо $|AB| = 8$ см, $\alpha = 30°$ і напруженість поля становить 50 $\frac{кВ}{м}$.
5. Яку швидкість набуває електрон, прискорюючись у полі з різницею потенціалів 200 В?



Мал. 264

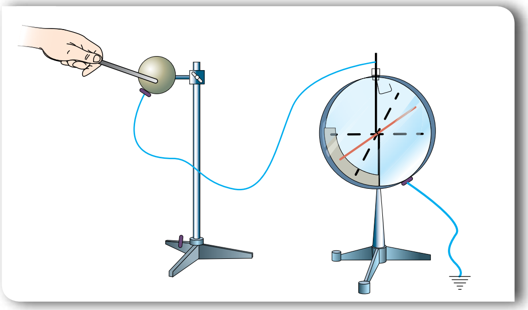
§ 58 Електроємність

Електроємність провідників різної форми. Ми вже дізналися, що в провіднику, вміщеному в електричне поле, відбувається перерозподіл зарядів доти, поки зовнішнє поле всередині провідника не скомпенсується власним полем розділених зарядів. Усі заряди розміщуються на зовнішній поверхні провідника, яка є еквіпотенціальною. Потенціал будь-якої точки цієї поверхні вважається потенціалом усього провідника.

З'ясуємо, як змінюватиметься потенціал провідника при зміні його заряду. Візьмемо провідник (наприклад, металеву кулю), ізольований від Землі та інших провідників, і, не змінюючи його положення відносно інших провідників, будемо його електризувати (збільшувати заряд) (мал. 265). За допомогою електрометра[1] вимірюватимемо відповідні значення потенціалу провідника. У скільки разів збільшується заряд кулі, у стільки ж зростає її потенціал, тобто заряд провідника прямо пропорційний потенціалу, $q \sim \varphi$. Уводячи коефіцієнт пропорційності, отримуємо, $q = C\varphi$, де C — коефіцієнт пропорційності, сталий для умов даного досліду. Якщо ми замінимо провідник іншим (наприклад, кулею більших розмірів) або змінимо зовнішні умови досліду, то значення коефіцієнта

[1] *Електрометр*, або *електростатичний вольтметр* — прилад для вимірювання потенціалу зарядженого провідника відносно Землі або відносно іншого зарядженого провідника.

C буде іншим. Цей коефіцієнт пропорційності називають *ємністю* (або *електроємністю*)[1] провідника.



Мал. 265. Дослід із дослідження залежності потенціалу провідника від зміни його заряду

Електроємність C — скалярна фізична величина, що характеризує здатність провідників накопичувати й утримувати певний електричний заряд. Вона вимірюється відношенням заряду q, який надали відокремленому провідникові, до його потенціалу φ, $C = \dfrac{q}{\varphi}$.

Одиниця електроємності — фарад: 1 Ф.

Електроємність провідника правильної форми можна розрахувати. Наприклад, обчислимо ємність окремої провідної кулі радіусом r. Потенціал зарядженої кулі $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, підставляючи цей вираз у формулу для ємності, отримуємо: $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r$.

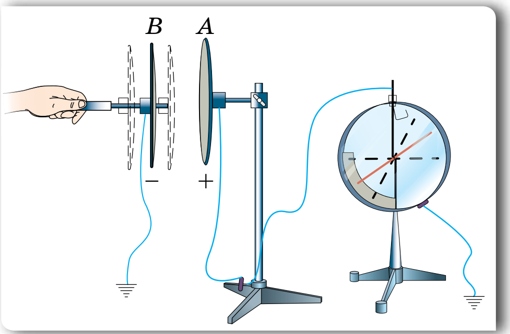
Слід зазначити, що ємність 1 Ф є дуже великою. Так, за допомогою останньої формули можна показати, що у вакуумі електроємність в 1 Ф має куля радіусом $9 \cdot 10^9$ м (що у 23 рази більше за відстань від Землі до Місяця). Ємність Землі, радіус якої $6{,}4 \cdot 10^6$ м, дорівнює $7 \cdot 10^{-4}$ Ф.

Тому на практиці найчастіше використовують мікро- та піко- фаради: 1 мкФ = 10^{-6} Ф, 1 пФ = 10^{-12} Ф.

Досліди показують, що ємність провідника залежить від його розмірів і форми. Проте не залежить від матеріалу, агрегатного стану, форми та розмірів порожнини всередині провідника (поясніть самостійно чому). З'ясуємо умови, від яких залежить електроємність провідника.

Оскільки провідник електризується через вплив, електроємність провідника має залежати від розміщення поблизу нього інших провідників і від навколишнього середовища. Покажемо це на досліді. Візьмемо два металевих диски, закріплених на підставках з діелектрика (мал. 266, с. 281). Диск A з'єднаємо з електрометром, корпус якого

[1] Цей термін було введено в XVII ст., коли ще не було обґрунтовано сучасні положення електродинаміки, а здатність провідника накопичувати електричний заряд пояснювали тим, що заряд можна «вливати» й «виливати» з нього.



Мал. 266. Дослід з визначення залежності електроємності провідників від відстані між ними

заземлений, а диск B відсунемо від диска A. Наелектризуємо диск A, надавши йому заряд, який надалі не змінюватиметься. Відмітивши значення потенціалу диска A за показами електрометра, почнемо наближати до нього диск B, одночасно спостерігаючи за стрілкою приладу. Виявляється, що потенціал диска A при цьому зменшується.

Ще різкіше зменшення потенціалу диска A можна спостерігати, якщо заземлити диск B, який наближається[1]. Взявши до уваги, що заряд на диску A при цьому не змінюється, робимо висновок, що зменшення потенціалу зумовлене збільшенням електроємності системи дисків. Замінивши повітря між дисками іншим діелектриком, знову відмітимо збільшення електроємності системи дисків.

Результати дослідів можна пояснити так. Коли диск B потрапляє в поле диска A, він електризується через вплив і створює своє поле. Якщо з'єднати диск B із землею, на ньому залишаться лише заряди протилежного знака порівняно із зарядами на диску A. Це підсилює поле диска B, яке ще більше зменшує потенціал диска A. Якщо внести між диски діелектрик, то він поляризується. Поляризаційні заряди, розміщені поблизу поверхні диска A, компенсують частину його заряду, отже, електроємність диска зростає.

Конденсатор. Електроємність плоского конденсатора. Розглянута система провідників слугує основою для пристроїв, які називаються *конденсаторами*. Конденсатори широко використовуються в радіотехніці як пристрої для накопичування й утримання електричного заряду.

Найпростіший конденсатор складається з двох або більше різнойменно заряджених і розділених діелектриком провідників, які називають *обкладками* конденсатора. Останні мають однакові за абсолютним значенням різнойменні заряди й розміщені одна відносно одної так, що поле в цій системі сконцентроване в обмеженому просторі між обкладками. Діелектрик між обкладками відіграє подвійну роль: по-перше, він збільшує електроємність, по-друге — не дає зарядам нейтралізуватись. Тому діелектрична проникність і електрична міцність на пробій (пробій діелектрика означає, що він стає провідним) мають бути досить великими. Щоб захистити конденсатор від механічних зовнішніх дій, його вставляють у корпус.

Накопичення зарядів на обкладках конденсатора називається його заряджанням. Щоб зарядити конденсатор, його обкладки приєднують до полюсів джерела напруги, наприклад, до полюсів батареї акумуляторів. Можна також сполучити одну обкладку з полюсом батареї, другий полюс якої заземлено, а другу обкладку конденсатора теж заземлити. Тоді на заземленій обкладці залишиться заряд, протилежний за знаком, а за

[1] Заземлення провідників — це з'єднання їх із землею (дуже довгим провідником) за допомогою металевих листів, закопаних у землю, водопровідних труб тощо.

модулем він дорівнюватиме заряду другої обкладки. Такий самий за модулем заряд піде в землю.

Під зарядом конденсатора розуміють абсолютне значення заряду однієї з обкладок. Він прямо пропорційний різниці потенціалів (напрузі) між обкладками конденсатора. У такому разі ємність конденсатора (на відмінну від відокремленого провідника) визначається за формулою $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \dfrac{q}{U}$.

За формою обкладок конденсатори бувають плоскі, циліндричні й сферичні. Як діелектрик у них використовують парафіновий папір, слюду, повітря, пластмаси, кераміку тощо. Типовий плоский конденсатор складається з двох металевих пластин площею S, простір між якими розділений діелектриком товщиною d.

Виведемо формулу для ємності плоского конденсатора. Ураховуючи, що $C = \dfrac{q}{U}$, підставимо в цю формулу вираз $U = Ed$, де E — напруженість поля, створюваного двома пластинами, $E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$.

У результаті отримаємо: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$.

Таким чином, електроємність плоского конденсатора прямо пропорційна площі перекривання пластин і відносній діелектричній проникності діелектрика й обернено пропорційна відстані між пластинами. З формули випливає, що, зменшуючи товщину діелектрика між пластинами або збільшуючи площу перекривання пластин, можна дістати конденсатор більшої ємності.

Відповідно можна вивести формули для ємності конденсаторів інших форм. Так, ємність сферичного конденсатора обчислюється за формулою $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r R}{R - r}$, де r та R — радіуси внутрішньої та зовнішньої сфер (у випадку відокремленої кулі, коли $R = \infty$, маємо: $C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r$).

З'єднання конденсаторів. У багатьох випадках, щоб створити потрібну електроємність, конденсатори з'єднують у групу, яка називається *батареєю*.

Послідовним називається таке з'єднання конденсаторів, за якого негативно заряджена обкладка попереднього конденсатора з'єднана з позитивно зарядженою обкладкою наступного. У разі послідовного з'єднання на всіх обкладках конденсаторів будуть однакові за модулем заряди, відповідно однаковими будуть і потенціали обкладок, з'єднаних між собою провідниками.

Урахувавши це, виведемо формулу для обчислення електроємності батареї послідовно з'єднаних конденсаторів. Напруга на батареї $U_б$ дорівнює сумі напруг на послідовно з'єднаних конденсаторах, дійсно $(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + ... + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \varphi_1 - \varphi_n$ або $U_1 + U_2 + ... + U_n = U_б$. Використавши співвідношення $q = CU$, дістанемо $\dfrac{q}{C_1} + \dfrac{q}{C_2} + ... + \dfrac{q}{C_n} = \dfrac{q}{C}$. Скоротивши на q, матимемо $\dfrac{1}{C_б} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + ... + \dfrac{1}{C_n}$. Отже, для послідовного з'єднання електроємність батареї менша за найменшу з електроємностей окремих конденсаторів.

Паралельним називається з'єднання конденсаторів, за якого всі позитивно заряджені обкладки приєднані до одного дроту, а негативно заряджені — до іншого. У цьому разі напруги на всіх конденсаторах однакові й дорівнюють U, а заряд на батареї дорівнює сумі зарядів на окремих конденсаторах, $q_б = q_1 + q_2 + ... + q_n$, звідки $C_бU = C_1U + C_2U + ... + C_nU$. Після скорочення отримуємо формулу для обчислення електроємності батареї паралельно з'єднаних конденсаторів, $C_б = C_1 + C_2 + ... + C_n$. Для паралельного з'єднання електроємність батареї більша, ніж найбільша з електроємностей окремих конденсаторів.

Енергія зарядженого конденсатора. Як і будь-яка система заряджених тіл, конденсатор має енергію. Для того щоб зарядити конденсатор, потрібно виконати роботу, що витрачається на розділення позитивних і негативних зарядів. Згідно із законом збереження енергії ця робота дорівнює енергії конденсатора $A = W_{ел}$.

Як відомо, робота сил електричного поля по переміщенню заряду на певну відстань дорівнює $A = qU$, якщо напруга постійна ($U = \text{const}$). У випадку заряджання конденсатора напруга на його обкладках зростає від нуля до U, і, обчислюючи роботу поля, у цьому разі потрібно використовувати її середнє значення $A = qU_{ср} = q\dfrac{U}{2}$. Відповідно енергія зарядженого конденсатора $W_{ел} = q\dfrac{U}{2}$. Оскільки $q = CU$, то матимемо ще дві формули для обчислення енергії конденсатора: $W_{ел} = \dfrac{CU^2}{2}$ та $W_{ел} = \dfrac{q^2}{2C}$.

? ЗНАЮ, ВМІЮ, РОЗУМІЮ

1. Дайте визначення електроємності. У яких одиницях її вимірюють?
2. Між якими величинами у визначенні електроємності двох провідників $C = \dfrac{q}{U}$ існує функціональна залежність? Яка саме? Що є функцією, а що — аргументом?
3. Що таке конденсатор?
4. Виведіть формулу електроємності плоского конденсатора.
5. Які існують види конденсаторів?
6. Для чого конденсатори з'єднують у батареї?
7. Чого досягають, з'єднуючи конденсатори паралельно? Послідовно?

Приклади розв'язування задач

Задача. Три конденсатори ємностями $C_1 = 0{,}2$ мкФ, $C_2 = C_3 = 0{,}4$ мкФ з'єднані між собою, як показано на малюнку 267, і приєднані до джерела постійного струму $U_{AB} = 250$ В. Визначте загальний електричний заряд, заряд і різницю потенціалів на кожному з конденсаторів.

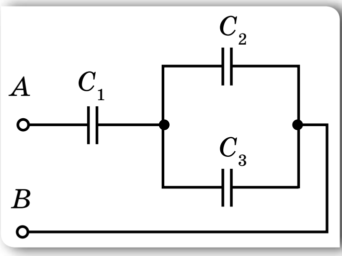
Дано:
$C_1 = 0{,}2$ мкФ
$C_2 = C_3 = 0{,}4$ мкФ
$U_{AB} = 250$ В

q — ?; q_1 — ?
q_2 — ?; q_3 — ?
U_1 — ?; U_2 — ?;
U_3 — ?

Розв'язання:

Загальний заряд визначимо за формулою $q = CU_AB$, де C — ємність батареї конденсаторів, яку визначимо з формули змішаного з'єднання:

$$C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + 2C_2}.$$



Мал. 267

Заряд, накопичений батареєю $q = \dfrac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}U_{AB}$.

Підставимо числові значення:

$$q = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф} \cdot 250\ \text{В}}{0{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф} + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф}} \approx 4 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

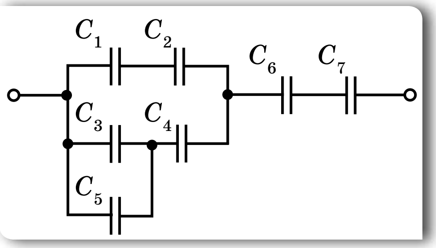
Заряд першого конденсатора такий же, як і загальний заряд, $q_1 = q$, а заряди на двох інших конденсаторах $q_2 = q_3 = \dfrac{q}{2}$. Отже, заряди на окремих конденсаторах: $q_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ Кл, $q_2 = q_3 = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл.

Знаючи ємність і заряд кожного конденсатора, можемо визначити різницю потенціалів на їх обкладках.

$$U_1 = \frac{4 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}}{0{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф}} = 200\ \text{В};\quad U_2 = U_3 = \frac{2 \cdot 10^{-5}\ \text{Кл}}{0{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф}} = 50\ \text{В}.$$

Відповідь: $q = q_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ Кл; $q_2 = q_3 = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл; $U_1 = 200$ В; $U_2 = U_3 = 50$ В.

ВПРАВА 47



Мал. 268

1. Дві кулі, електроємності яких $C_1 = 2$ пФ і $C_2 = 3$ пФ та відповідні заряди $q_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл і $q_2 = 1 \cdot 10^{-7}$ Кл, з'єднали між собою. Визначте заряди на кулях після їх з'єднання.
2. Три конденсатори ємностями 1, 2 і 3 мкФ з'єднані послідовно й під'єднані до джерела струму напругою 220 В. Які заряди та напруги на кожному конденсаторі?
3. Визначте ємність системи конденсаторів (мал. 268).
4. Конденсатор ємністю C_1 зарядили до напруги $U_1 = 500$ В. Коли цей конденсатор паралельно приєднали до незарядженого конденсатора ємністю $C_2 = 4$ мкФ, вольтметр показав $U_2 = 100$ В. Визначте ємність C_1.
5. До повітряного конденсатора, зарядженого до напруги 210 В, приєднали паралельно такий самий незаряджений конденсатор, але зі скляним діелектриком. Яку діелектричну проникність має скло, якщо на затискачах батареї встановилася напруга 30 В?
6. У яких межах може змінюватись ємність системи, що складається з двох конденсаторів, якщо ємність одного з них постійна і дорівнює 3,33 нФ, а ємність другого змінюється від 22,2 до 555,5 пФ?

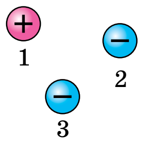
7. Відстань між пластинами плоского конденсатора, діелектриком якого є пропарафінений папір, дорівнює 2 мм, а напруга між пластинами становить 200 В. Визначте густину енергії поля.
8. В імпульсному фотоспалаху лампа живиться від конденсатора ємністю 800 мкФ, зарядженого до напруги 300 В. Визначте енергію та середню потужність спалаху, якщо тривалість розряджання становить 2,4 мс.
9. Визначте роботу, яку необхідно виконати, щоб збільшити відстань між пластинами плоского повітряного конденсатора на 0,4 мм. Площа кожної пластини дорівнює $2\pi \cdot 10^4$ мм^2, заряд — 200 нКл.
10. Плоский конденсатор ємністю $C = 60 \cdot 10^{-12}$ Ф зарядили в повітрі до потенціалу $U = 400$ В. Після занурення конденсатора в рідкий діелектрик до половини висоти його пластин енергія конденсатора зменшилась на $\Delta W = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Дж. Визначте діелектричну проникність діелектрика.
11. Відстань між пластинами плоского повітряного конденсатора, приєднаного до джерела струму напругою 180 В, збільшують від 5 до 12 мм. Площа пластин конденсатора — 175 см^2. Визначте роботу по розсуванню пластин у двох випадках: 1) конденсатор перед розсуванням пластин відімкнений від джерела; 2) конденсатор у процесі розсування пластин весь час під'єднаний до джерела.

Виконуємо навчальні проекти / готуємо повідомлення

- Елекростатичні явища в природі й техніці.
- Електростатичний захист.
- Блискавка.
- Види конденсаторів.
- З історії досліджень електростатики.

Перевірте себе (§ 51–58)

1. На малюнку зображено розташування у просторі трьох тіл з однаковими за величиною зарядами. Укажіть правильний характер взаємодії між тілами.

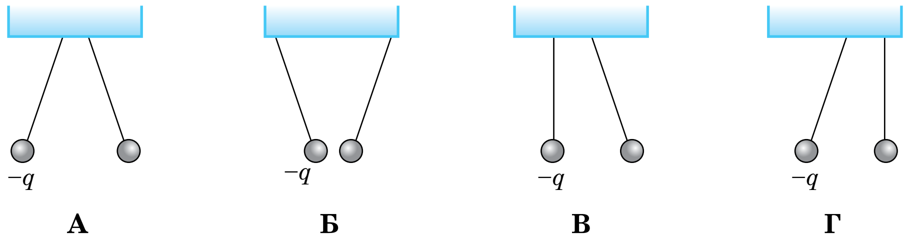


А тіла 2 і 3 притягуються до тіла 1
Б тіла 1 і 2 — притягуються, тіла 2 і 3 — відштовхуються, тіла 1 і 3 — притягуються
В тіла 1 і 2 — відштовхуються, тіла 2 і 3 — відштовхуються, тіла 1 і 3 — притягуються
Г тіла 1 і 2 — притягуються, тіла 2 і 3 — притягуються, тіла 1 і 3 — відштовхуються

2. Укажіть правильне продовження речення: «Електростатичне поле створюють заряди, які у вибраній системі відліку…»

А рухомі
Б рухаються з прискоренням
В нерухомі
Г обертаються

3. Дві однакові легенькі кульки підвішено на нитках так, як показано на малюнку. Заряд однієї кульки $-q$. Який з малюнків відповідає характеру взаємодії, якщо інша кулька має заряд $+q$?

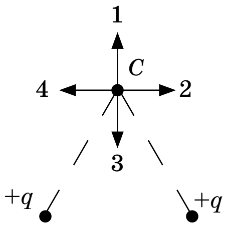


4. У скільки разів зміниться ємність плоского конденсатора, якщо зменшити відстань між його пластинами у 2 рази?

А зменшиться в 4 рази
Б зменшиться у 2 рази
В збільшиться у 2 рази
Г збільшиться в 4 рази

5. Який напрямок має вектор напруженості електричного поля двох однакових точкових зарядів у точці C?

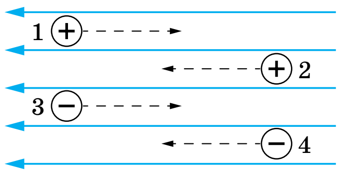
А 1
Б 2
В 3
Г 4



6. Від краплини води із зарядом $+q$ відділили краплину з електричним зарядом $-q$. Яким став заряд краплини?

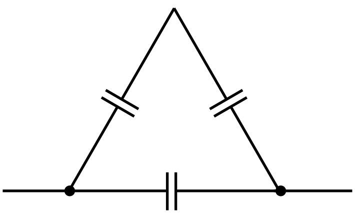
А $+2q$
Б $+q$
В $-q$
Г $-2q$

7. Чотири заряджені точкові тіла рухаються в однорідному електричному полі так, як показано на малюнку. Яке твердження є правильним?



А тіла 2 і 4 переміщаються під дією сил електричного поля
Б тіла 1 і 4 переміщаються під дією сторонніх сил
В під час переміщення тіл 2 і 3 виконується від'ємна робота
Г під час переміщення тіл 1 і 4 виконується додатна робота

8. Визначте електричну ємність батареї конденсаторів, з'єднаних так, як показано на малюнку. Ємність кожного конденсатора — 600 мкФ.



9. Два заряджені тіла, електричні заряди яких відповідно $6 \cdot 10^{-7}$ і $-2 \cdot 10^{-7}$ Кл, розташовані в гасі на відстані 0,4 м один від одного. Визначте напруженість поля в точці, розташованій на середині прямої, що сполучає заряджені тіла.

10. Електричні потенціали двох ізольованих провідників +110 і −110 В. Яку роботу виконує електричне поле під час переміщення заряду $5 \cdot 10^{-4}$ Кл з одного провідника на інший? Провідники перебувають у повітрі.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ РОБОТИ

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ТІЛА В РІВНОПРИСКОРЕНОМУ РУСІ

Прилади та матеріали: вимірювальна стрічка; секундомір; жолоб; набір кульок однакового розміру та різної маси; штатив з муфтою та лапкою; металевий циліндр.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Закріпіть жолоб за допомогою штатива в похилому положенні під невеликим кутом α_1 до горизонту. Біля нижнього кінця жолоба покладіть у нього металевий циліндр.
2. Пустіть по жолобу металеву кульку, одночасно увімкнувши секундомір, і вимкніть його в момент дотику кульки до циліндра. Виміряйте час руху кульки t.
3. Вимірювальною стрічкою виміряйте переміщення кульки s.
4. Повторіть дослід п'ять разів, змінюючи величину переміщення s. Величина переміщення змінюється в разі зміни положення циліндра в жолобі.
5. Визначте прискорення кульки для кожного з дослідів.
6. Обчисліть середнє значення прискорення a_c як середнє арифметичне всіх прискорень, обчислених у кожному з дослідів.
7. Для кожного з дослідів визначте відносну похибку вимірювання прискорення за допомогою формули: $\varepsilon_a = \varepsilon_s + 2\varepsilon_t$, де відносні похибки визначення переміщення s та часу t обчислюються відповідно за формулами: $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta s}{s}$ і $\varepsilon_t = \dfrac{\Delta t}{t}$.

   У цих формулах $\Delta t = \pm 0{,}1c$ — абсолютна похибка вимірювання часу, а $\Delta s = \pm 0{,}0005$ м — абсолютна похибка вимірювання модуля переміщення.
8. Обчисліть абсолютну похибку вимірювання прискорення за формулою $\Delta a = \varepsilon_a \cdot a_c$.
9. Кінцеве значення прискорення подайте у вигляді $a_c \pm \Delta a$.

Додаткове завдання:

Визначте прискорення, змінивши кут нахилу жолоба на кут α_2, а потім повторіть досліди з кулькою іншої маси. Зробіть розрахунки, запишіть значення прискорення у вигляді $ac \pm \Delta a$ для кожного випадку, проаналізуйте отримані результати та зробіть висновки про залежність прискорення від кута нахилу жолоба та маси кульки.

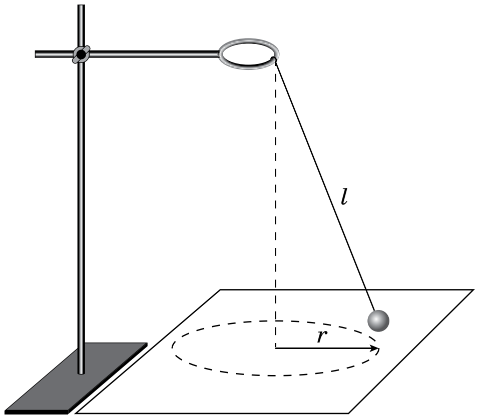
ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТІЛА ПО КОЛУ

Прилади та матеріали: кулька, підвішена на нитці; штатив з кільцем і муфтами; секундомір або годинник із секундною стрілкою; вимірювальна стрічка; аркуш паперу з накресленим колом (радіус 15 см).

Вказівки щодо виконання роботи

1. Закріпіть кульку на нитці завдовжки 45 см та прикріпіть нитку до кільця штатива.
2. Рухаючи нитку біля точки підвісу, доможіться обертання кульки по колу радіусом r, яке намальовано на аркуші паперу.

3. Виміряйте час t, за який кулька здійснює N обертів (наприклад, $N = 15$). Дослід повторіть п'ять разів.
4. Обчисліть період T обертання кульки.
5. Обчисліть середнє значення кутової та лінійної швидкостей руху кульки, а також доцентрового прискорення.



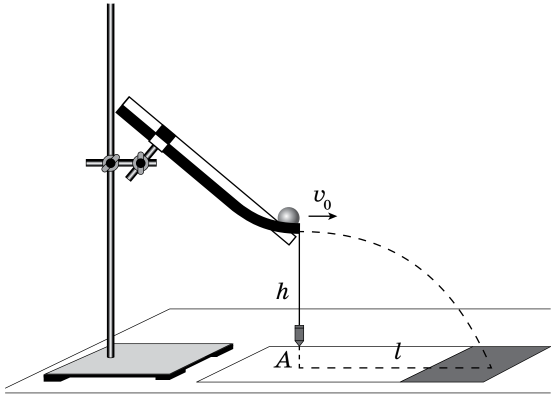
Додаткове завдання:

1. З'ясуйте, чи зміниться період обертання кульки, якщо рахувати не 15, а 30 обертів.
2. З'ясуйте, чи зміниться період обертання, якщо радіус обертання зменшити у 2 рази (довжину нитки залишити незмінною).
3. З'ясуйте, як зміниться модуль кутової та лінійної швидкостей кульки та її доцентрового прискорення, якщо радіус обертання збільшити у 2 рази.

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТІЛА, КИНУТОГО ГОРИЗОНТАЛЬНО

Прилади та матеріали: лінійка з міліметровими поділками; штатив з муфтою та лапкою; металевий жолоб для пускання кульок; кулька; папір; висок; клейка стрічка (скотч); копіювальний папір.

Вказівки щодо виконання роботи

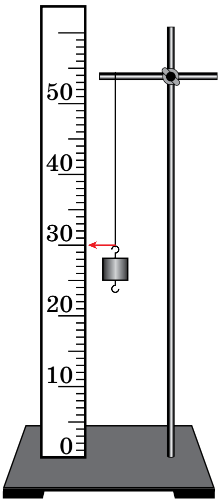


1. За допомогою штатива закріпіть жолоб. Загнутий кінець жолоба має бути розташований горизонтально на висоті h = 3 см від поверхні стола.
2. Зафіксуйте клейкою стрічкою на столі довгу смужку паперу. У місці можливого падіння кульки покладіть копіювальний папір. За допомогою виска визначте точку A, від якої виміряйте дальність польоту l.
3. Змінюючи висоту жолоба (h_2 = 12 см, h_3 = 27 см, h_4 = 48 см), виміряйте відповідні дальності польоту l_2, l_3, l_4. У кожному випадку дослід повторюйте п'ять разів, пускаючи кульку з того самого місця жолоба й вимірюючи щоразу дальність польоту l. Обчисліть середнє значення дальності польоту для кожного випадку.
4. Доведіть, що під час руху тіла в полі земного тяжіння виконується співвідношення $l_1 : l_2 : l_3 : l_4 = 1 : 2 : 3 : 4$.
5. Використовуючи дані досліду, у якому кулька летіла з висоти h_4 = 48 см, обчисліть середнє значення початкової швидкості за формулою: $v_{0c} = l_c\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$.
6. Обчисліть відносну похибку вимірювання швидкості за формулою: $\varepsilon_v = \varepsilon_l + \dfrac{1}{2}\varepsilon_g + \dfrac{1}{2}\varepsilon_h = \dfrac{\Delta l}{l} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta h}{h}$, де $\Delta l = \Delta h$ = 1 мм, Δg = 0,02 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$ за g = 10 $\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.
7. Обчисліть абсолютну похибку вимірювання швидкості $\Delta v_0 = v_{0c} \cdot \varepsilon_v$.
8. Результат вимірювання запишіть у вигляді $v_0 = (v_{0c} \pm \Delta v)\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

ВИМІРЮВАННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРУЖНОСТІ

Прилади та матеріали: гумова смужка довжиною 20 – 30 см із дротяною петелькою на одному кінці; набір важків по 100 г; динамометр; лінійка; штангенциркуль; штатив.

Вказівки щодо виконання роботи



1. Гумовий шнур, із петлею на нижньому кінці, закріпіть у штативі. Поряд закріпіть лінійку у вертикальному положенні.
2. Підвісьте один тягарець. Номер поділки шкали лінійки, навпроти якої розміщено гачок тягарця, вважайте за початок відліку видовження гумового шнура. За значення сили пружності $F_{\text{пр}}$ будемо приймати вагу тягарців $\left(g = 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.
3. Підвішуйте до гумового шнура по одному тягарцю й вимірюйте видовження шнура.
4. За результатами вимірювань побудуйте графік залежності сили пружності від видовження гумового шнура. Під час побудови графіка за результатами вимірювання експериментальні точки можуть не лежати на одній прямій, що відповідає формулі $F_{\text{пр}} = k|x|$. Це пов'язано з похибками вимірювань. У цьому випадку графік потрібно будувати так, щоб приблизно однакова кількість точок була по різні боки від прямої.
5. За тангенсом кута нахилу графіка визначте середнє значення коефіцієнта пружності k_c.

6. Обчисліть відносну похибку непрямих вимірювань (скориставшись даними першого досліду): $\varepsilon_k = \varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_x = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta x}{x}$, де $\Delta m = 0{,}002$ кг, $\Delta x = 1$ мм, $\Delta g = 0{,}02\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ за $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.
7. Визначте $\Delta k = \varepsilon_k k_\text{с}$ і результат вимірювань запишіть у вигляді: $k = (k_\text{с} \pm \Delta k)\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОВАГИ ТІЛ ПІД ДІЄЮ КІЛЬКОХ СИЛ

Прилади та матеріали: лінійка; динамометр; штатив з муфтою; важіль; набір тягарців масою по 100 г.

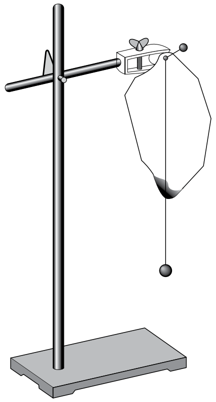
Вказівки щодо виконання роботи

1. Встановіть важіль на штативі і зрівноважте його в горизонтальному положенні за допомогою пересувних гайок, розміщених на його кінцях.
2. Підвісьте тягарець у певній точці одного з пліч важеля.
3. Підвісьте тягарці до однієї або декількох точок іншого плеча важеля так, щоб важіль залишився в рівновазі. Виміряйте лінійкою довжини плечей (l_1, l_2, ...) сил (ваги тягарців $P = F_m = mg$), прикладених до плечей важеля.
4. Повторіть дослід три рази, змінюючи положення й кількість тягарців.
5. Визначте значення всіх моментів сил, що діють на важіль; суму моментів сил $M_\text{за}$, що обертають важіль за годинниковою стрілкою, та суму моментів сил $M_\text{проти}$, що обертають важіль проти годинникової стрілки.
6. Порівняйте відношення $\frac{M_\text{за}}{M_\text{проти}}$ з одиницею та зробіть висновок.

ВИЗНАЧЕННЯ ЦЕНТРА ТЯЖІННЯ ПЛАСКИХ ФІГУР

Прилади та матеріали: фігури, вирізані з картону; лінійка; висок; шпилька; дерев'яний корок; штатив з муфтою та затискачем.

Вказівки щодо виконання роботи



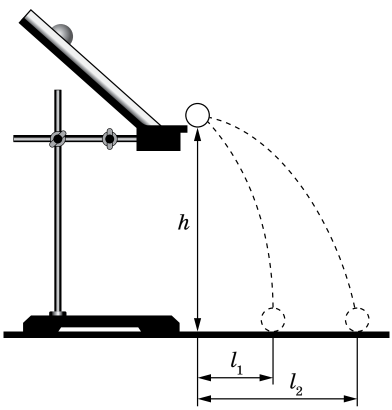
1. Виріжте з картону три фігури: центрально-симетричну (круг, квадрат або ромб); таку, що має форму нерівностороннього трикутника, і фігуру неправильної форми.
2. Закріпіть у затискачі штатива дерев'яний корок. Проколіть одну з фігур шпилькою і встроміть її в корок. Злегка похитуючи фігуру, переконайтеся, що вона перебуває у стані стійкої рівноваги.
3. На шпильку надіньте петельку нитки виска.
4. По лінії виска поставте мітки. Зніміть фігуру зі штатива й наведіть лінію відвісу олівцем під лінійку.
5. Повторіть дослід двічі, проколовши фігуру в інших місцях. Визначте центр тяжіння фігури (точку перетину проведених прямих).
6. Визначте центр тяжіння для двох інших фігур.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОГО УДАРУ ДВОХ ТІЛ

Прилади та матеріали: лінійка з міліметровими поділками; штатив з муфтою та лапкою; жолоб для пускання кульок; металеві кульки різної маси; лоток з піском; терези.

Вказівки щодо виконання роботи

1. За допомогою штатива закріпіть жолоб. Загнутий кінець жолоба має бути розташовано горизонтально. На стіл, у місці можливого падіння кульки, покладіть лоток з піском.
2. За допомогою терезів виміряйте маси кульок m_1 та m_2.
3. Пустіть кульку більшої маси вільно котитися по жолобу. Повторіть дослід п'ять разів, пускаючи кульку з того самого місця жолоба.



4. Виміряйте висоту h і дальність польоту l. Обчисліть середнє значення початкової швидкості кульки за формулою: $v_0 = l_c\sqrt{\frac{g}{2h}}$ та імпульс кульки: $p_1 = m_1 v_0$.
5. На краю жолоба розташуйте кульку меншої маси. Запустіть кульку більшої маси так само, як у першому досліді. Після зіткнення обидві кульки впадуть у лоток з піском. Вимірявши дальність польоту кульок l_1 і l_2 та висоту падіння, визначте швидкості кульок після удару: $u_1 = l_1\sqrt{\frac{g}{2h}}$, $u_2 = l_2\sqrt{\frac{g}{2h}}$.
6. Перевірте виконання закону збереження імпульсу під час пружного удару:
$$m_1 v_0 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$
Для цього порівняйте відношення $\frac{m_1 v_0}{m_1 u_1 + m_2 u_2}$ з одиницею.

ВИМІРЮВАННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НИТЯНОГО МАЯТНИКА

Прилади та матеріали: штатив, кулька на нитці, секундомір, мірна стрічка.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Виміряйте мірною стрічкою (3 рази) довжину нитки (від місця кріплення до центра кульки) l. Визначте середнє значення l_c.

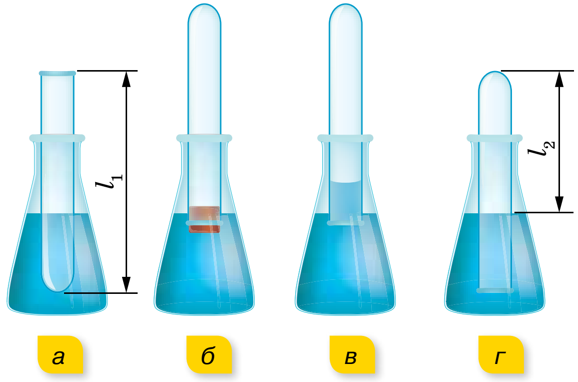
2. Відхиліть маятник від положення рівноваги на кут $\alpha < 10°$ і відпустіть. Пропустіть 1–2 коливання та ввімкніть секундомір. Відрахуйте 20–30 коливань і вимкніть секундомір. Визначте час цих коливань.
3. Проведіть вимірювання, описані в пункті 2, три рази й визначте середнє значення періоду коливань T_c.
4. За формулою періоду нитяного маятника визначте середнє значення прискорення вільного падіння, підставляючи обчислені значення l_c і T_c.

ДОСЛІДЖЕННЯ ІЗОПРОЦЕСУ

Прилади та матеріали: скляний циліндр висотою 60 см і діаметром 40–50 мм; скляна трубка довжиною 60 см і діаметром 8–10 мм, закрита з одного кінця; лінійка; склянка; пластилін; холодна й гаряча вода; термометр.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Скляну трубку опустіть відкритим кінцем догори на 3–5 хв у циліндричну посудину з гарячою водою (мал. 269, *а*). Виміряйте довжину скляної трубки l_1 і температуру води T_1 у циліндричній посудині. У цьому випадку об'єм повітря V_1 дорівнює об'єму скляної трубки, а температура повітря — температурі гарячої води.



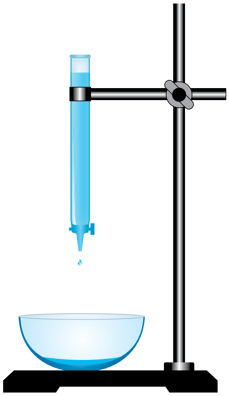
Мал. 269

2. Щоб під час зміни фізичних властивостей повітря його кількість не змінилась, відкритий кінець скляної трубки, що міститься в гарячій воді, закрийте пластиліном. Опустіть у склянку з водою кімнатної температури (мал. 269, *б*) трубку закритим кінцем униз і зніміть під водою пластилін (мал. 269, *в*). Щоб тиск повітря в трубці знову дорівнював атмосферному, потрібно збільшувати глибину занурення трубки в склянку доти, поки рівні води в трубці та склянці не будуть збігатися (мал. 269, *г*). Виміряйте довжину l_2 повітряного стовпа в трубці й температуру навколишнього повітря T_2, результати вимірювань запишіть у таблицю.
3. Обчисліть відношення $\frac{l_1}{l_2}$ і $\frac{T_1}{T_2}$.

ВИМІРЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ РІДИНИ

Прилади та матеріали: бюретка звичайна з краном; лійка хімічна; терези навчальні з набором важків; посудина з дистильованою водою; штангенциркуль; склянка.

Вказівки щодо виконання роботи



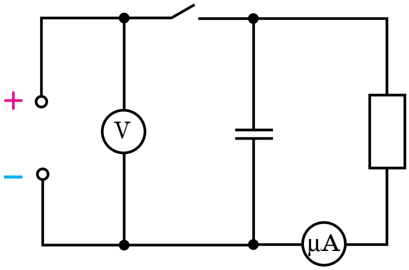
1. За допомогою штангенциркуля виміряйте діаметр отвору бюретки.
2. Підставивте під отвір бюретки посудину з водою і, поступово відкриваючи кран, доможіться повільного відривання крапель від бюретки, щоб краплі падали одна за одною через 1–2 с.
3. Зважте порожню склянку з точністю до десятих часток грама. Поставте її під краплі, що рівномірно падають, і відрахуйте 50–100 крапель.
4. Зважте склянку знову й визначте масу води.
5. Повторіть дослід для інших кількостей крапель, визначаючи щоразу їхню масу.
6. Користуючись даними та формулою $\sigma = \frac{mg}{n\pi d}$, визначте поверхневий натяг для кожного окремого вимірювання. Знайдіть середнє значення σ_c.

ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОЄМНОСТІ КОНДЕНСАТОРА

Прилади та матеріали: конденсатор електролітичний (10–30 В, 2000 мкф), мікроамперметр (0–100 мкА або 0–200 мкА), вольтметр (0–6 В), резистор (50–100 кОм), джерело постійного струму (4 В), ключ, з’єднувальні провідники, секундомір.

Вказівки щодо виконання роботи

1. Складіть електричне коло за схемою.



2. Замкнувши коло, зарядіть конденсатор до напруги джерела U.
3. Розімкніть коло. Вимірюйте силу струму в колі в різні моменти часу в процесі розряджання конденсатора через резистор і мікроамперметр.
4. Побудуйте графік залежності сили струму в колі від часу й обчисліть площу фігури, обмеженої осями та графіком залежності. Ця площа відповідатиме заряду q, який пройшов через мікроамперметр за час розряджання конденсатора.
5. Обчисліть електроємність конденсатора як відношення заряду q конденсатора до напруги U на його обкладках.

Предметний покажчик

Відповіді до вправ

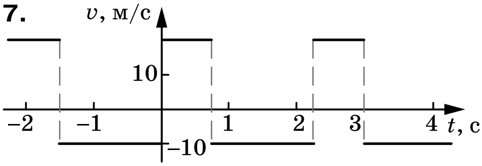
Вправа 1

2. 4 м, 2 м. **3.** т. A (20 м, 20 м); т. B (60 м,–10 м); 40 м; –30 м; 50 м. **4.** 5 м, 4 м, –3 м. **6.** 5 м. **7.** $x_2 = 10{,}7$; $y_2 = 5$.

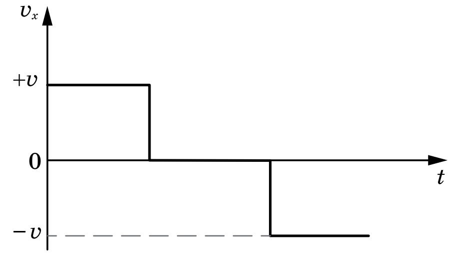
Вправа 2

1. . **2.** 30 с; 150 м; 60 м. **4.** 12 м/с, праворуч; 1,5 м/с, ліворуч; 20 с, –30 м

7.



8.



9. 54 км/год, 36 км/год. **10.** ≈ 19 км/год. **11.** 7 м/с; 11,4 м/с; 9 м/с.

Вправа 3

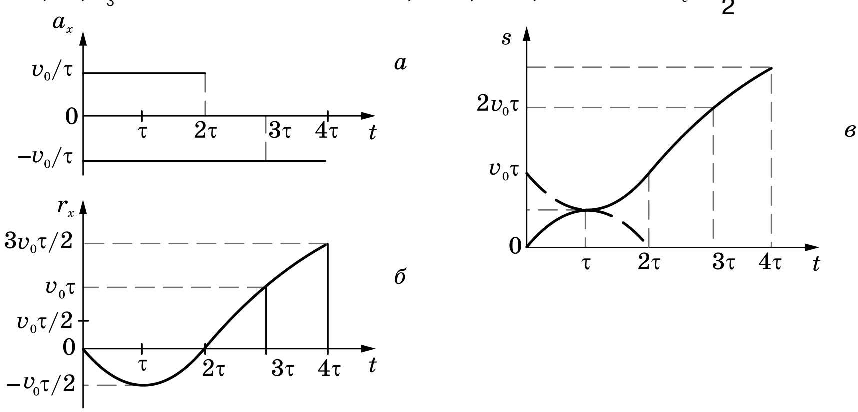
1. 14 м/с. **2.** 40 с. **3.** в $\dfrac{n+1}{n-1}$ раз; у 3 рази; у 1,2 рази. **4.** 71°. **5.** а) 20 м/с, 90 с; б) 20 с, 30 с.

6. 7,5 км/год; 17,5 км/год. **7.** 3 км/год. **8.** 600 м/с. **9.** $x = 4t + 8$; $x = 9t + 5$; $x = 5t + 5$. **10.** $\dfrac{v}{\sin\alpha}$.

Вправа 4

1. 2 м/с, 8 м/с. **2.** 90 см. **3.** у $\sqrt{2}$ рази. **4.** a = 10 м/с²; v_4 = 40 м/с; v_{10} = 100 м/с; s_4 = 15 м; s_5 = 45 м; $s_2 + s_3$ = 40 м. **5.** 200 м/с; 20 м/с². **6.** $a = \dfrac{2(n-1)s}{(n+1)t^2} = 0{,}24$ м/с². **7.** $(2+\sqrt{2})t_0$.

9. а) $v_{1x} = 10 + 0{,}8t$ — прискорений; б) $v_{2x} = 2 - 2t$ — сповільнений, через 1 с прискорений; в) $v_{3x} = -4 + 4t$ — сповільнений, через 1 с прискорений; г) $v_{4x} = -1 - 12t$ — прискорений. **10.** 8 м/с, 0,8 м/с², –1,6 м/с², 15 с, 4 м/с. **11.** 2,6 м/с. **12.** До моменту t_1 рух рівномірний, далі до моменту t_2 — рівносповільнений у напрямку руху, і до моменту t_3 — рівноприскорений, але у зворотному напрямку . **13.** $v_{1x} = 1{,}25t$; $v_{2x} = 5 + 5t$; $v_{3x} = 20 - 4t$; $x_1 = 0{,}625t^2$; $x_2 = 5t = 2{,}5t^2$; $x_3 = 20t - 2t^2$. **14.** –. **15.** 10 с; 40 м; 45 м; 120 м. **16.** $v_c = \dfrac{v}{2}$

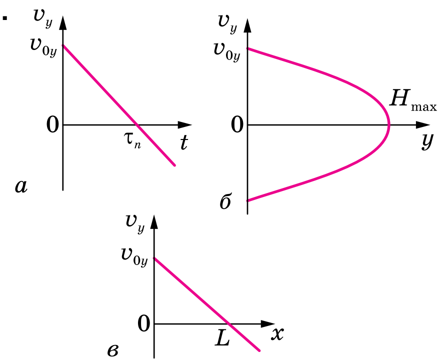


Вправа 5

1. 0,45 с; 0,05 с; 24 м/с. **2.** 28 м. **3.** 35 м. **4.** $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$.

5. $\Delta t = t_1 - t_2 = \dfrac{v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + 2gh} - \sqrt{v_2^2 + 2gh}}{g}$. **6.** $l = \dfrac{5}{3}h = 200$ м. **7.** 20 м. **8.** 10,13 м.

9.



10. $\frac{h_1}{h_2} = \mathrm{tg}^2\,\alpha$. **11.** $s = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha \cdot t^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} \approx 156$ м. **12.** 7,35 м; 2,45 с; 39,2 м.

Вправа 6

1. 50 с. **2.** зменшується у 2 рази. **3.** 1: 20. **4.** 1 км/с^2. **5.** а) 1 : 2; б) 2 : 1). **6.** 230 м/с. **7.** 1,5 м/с. **8.** 1, 8 м. **9.** 400 м/с; 0,003 с; –133 000 м/с^2.

Вправа 7

1. $\varepsilon = 0{,}21$ рад/с^2; 240. **2.** $\varepsilon = 2$ рад/с^2; $\omega_0 = 5$ рад/с, $\omega = 25$ рад/с. **3.** 16; $\omega = 20$ рад/с. **4.** $n = 90$; $\varepsilon = 0{,}14$ рад/с^2. **5.** а) 2с; б) 2,8 с. **6.** 6,1 м. **7.** –9,4 рад/с^2.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Б. **2.** А. **3.** Г. **4.** А. **5.** Б. **6.** 3 м/с^2. **7.** 64 см. **8.** 4 м. **9.** 1,8 м. **10.** 8 м.

Вправа 9

1. 0,02 Н. **2.** 2,1 · 10^4 Н; 0,82 м. **3.** 2 · 10^2 Н. **4.** $m_3 > m_2 > m_1$. **5.** . **6.** 64 Н.

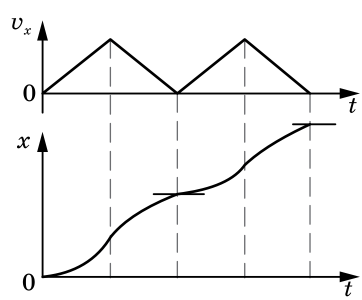
Вправа 10

1. 3,8 м/с^2. **2.** 4,4 м/с^2. **3.** У точці віддаленій на 6 земних радіусів від центра Місяця. **4.** $g = \frac{4}{3}\pi G\rho R = 8{,}8$ м/с^2. **5.** 5,5 · 10^3 кг/м^3. **6.** $h = 2{,}16R$.

Вправа 12

1. 6 см. **2.** 0,04. **3.** 35 кН. **4.** 740 Н. **5.** 5,9 м/с^2. **6.** ≈ 800 кг. **7.** $x = \frac{m}{k\rho_1}(\rho_1 g + \rho_1 a - \rho_2 g)$.

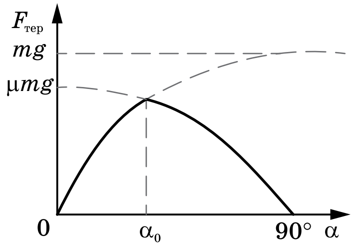
8. 8 кН. **9.** В обох випадках не зміниться. **10.** Рух тіла не періодичний — воно весь час віддаляється від початкового положення, при цьому швидкість руху тіла то зростає, то спадає до нуля.



11. 220 Н; 20 Н. **12.** 3,3 м/с^2. **13.** 0,84. **14.** 1,2 м/с^2. **15.** 14 м/с; 3 с. **16.** 3,92 м/с^2. **17.** $F = mg\frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}} \approx 73{,}5$ Н. **18.** $t = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin\alpha - \mathrm{tg}\,\beta\cos\alpha)\sin\alpha}} \approx 1{,}4$ с.

19. $t_2 = t_1\sqrt{\frac{l}{gt_1^2\sin\alpha - l}} \approx 4$ с; $\mu = \frac{2l}{gt_1^2\cos\alpha} - \mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}36$.

20.



21. 15 кН. **22.** 1,5 Н. **23.** 3,8 м/с; 1,4 с. **24.** 3,6 Н. **25.** 15 м; ≈11°. **26.** 2,2 м/с. **27.** $\omega = \sqrt{\dfrac{2g \cdot \operatorname{tg}\alpha}{d}} \approx 13$ об/с. **28.** 0,2. **29.** 2 м/с^2, 2,4 Н. **30.** 32 кН; 16 кН; 8 кН. **32.** 10 г.

33. $a = \dfrac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g$; $T = \dfrac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2}$.

34. $a_1 = 2\dfrac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $a_2 = \dfrac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $T = \dfrac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$.

35. $T = \dfrac{m_1 m_2 g(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 2{,}3$ Н. **36.** $a = \dfrac{1-\mu}{1+\mu} g \approx 5{,}27$ м/с^2. **37.** 140 м/с. **38.** 2,6 кН; 3-разове перевантаження. **39.** 720 Н; 480 Н; 480 Н; 720 Н. **40.** 700 Н. **41.** 20 м/с. **42.** У 0,0034 разів; 1 год. 25 хв. **43.** 20 Н; 0,04. **44.** 3 с. **45.** 4. **46.** 720 Н; 480 Н; 480 Н; 720 Н. **47.** 700 Н. **48.** 9 Н. **49.** $a > 3$ м/с^2; не зміниться. **50.** 0,2.

Вправа 13

1. 9,8 м/с^2. **2.** 8,8 м/с^2 відносно ліфта та 9,8 м/с^2 відносно Землі. **3.** 1 м/с^2. **4.** Відносно неінерціальної системи відліку тіло нерухоме $a = 0$, $N = mg\cos\alpha$; відносно інерціальної системи відліку (Землі) $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, $N = mg\cos\alpha$. **5.** $b = (a + g)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. **6.** $b = a\cos\alpha - g\sin\alpha$. **7.** 10,8 м/с^2. **8.** $h = \dfrac{2}{3}R$.

Вправа 14

1. На відстані 0,5 м від центра круга. **2.** На відстані $\dfrac{8l}{3}$ від центра кулі масою m. **3.** 490 Н, 294 Н. **5.** На відстані 0,2 м від середини дошки ближче до хлопчика. **6.** 3 кН; 1,6 кН. **7.** Не може. Максимальна висота, на яку підніметься людина 2,4 м. **8.** $h = 2r \cdot \operatorname{ctg}\alpha$. **9.** $F = \dfrac{mg\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$.

Вправа 15

1. 10 кг · м^2. **2.** 0,2. **3.** 0,06 Н·м. **4.** 4,5 Н · м. **5.** $m = \dfrac{2(FR - M)}{\varepsilon R^2} = 7{,}36$ кг. **6.** 2,35 рад/с^2. **7.** 100 Н · м.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Б. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Б. **5.** Г. **6.** 0,28. **7.** 80%. **8.** 0,84. **9.** 6 с. **10.** 0,25 кг.

Вправа 16

1. 16 (кг · м)/с; 48 (кг · м)/с. **2.** 2 (кг · м)/с. **3.** 1 м/с у напрямку руху більшого тіла. **4.** на 0,04 м/с. **5.** а) 3 м/с; б) –0,5 м/с. **6.** 0,21 Н·м. **7.** $v + 2u$. **8.** 12 000 м. **9.** 300 кг.

Вправа 18

1. 1,4 кДж. **2.** 60 м. **3.** 2 кДж; 66 %. **4.** 5085 Дж. **5.** 9,8 Дж. **6.** 1274 кДж, 77 %.

Вправа 19

1. $4 \cdot 10^{10}$ Дж. **2.** 200 кДж; 1000 кг. **3.** –200 кДж. **4.** 240 кДж; –30 кДж; 210 кДж. **5.** 10 м/с. **6.** 47 кДж. **7.** 26 кДж. **8.** 700 кДж. **9.** –16 Дж; 4 Дж; –12 Дж; 12 Дж. **10.** 0,3 Дж. **11.** 2 Дж. **12.** 5,5 м. **13.** 40 %. **14.** 0,55 м. **15.** 0,2 м. **16.** 1 кДж. **17.** 0,05. **18.** 10 м. **19.** 14 м/с; 3 с. **20.** 2,5 м. **21.** 0,3 м. **22.** а) 0,17 Н · с; б) $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ Дж. **23.** 105 Дж. Якщо маса візка з людиною набагато більша від маси каменя, то вся робота, яку виконує людина, витрачається на те, щоб надати каменю кінетичної енергії. **24.** 15°. **25.** 0,16 м; 58,8 Дж. **26.** 1,8 кДж. **27.** а) $5 \cdot 10^{-3}$ м; 0,08 м; б) 0,02 м. **28.** 1,99 Дж. **29.** 500 м.

Вправа 20

2. $\nu_2 = \dfrac{12J\nu_1}{12J + ml^2} = 0,61$ с$^{-1}$. **3.** $\omega = \dfrac{2m_1 v}{(m_2 + 2m_1)R} = 0,445$ рад/с. **4.** $\varphi = \dfrac{4\pi m_2}{m_1 + 2m_2} = \dfrac{2\pi}{3}$. **6.** 24 Дж. **7.** $A = 3,2\pi^3 R^5 \rho\nu^2 = 34,1$ Дж. **8.** а) зменшилась у 2 рази, б) зменшилась у 8 раз. **9.** Вантаж 4,4 м/с, обруч 3,13 м/с. **10.** 0,72 м. **11.** $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$.

Вправа 21

1. $3,6 \cdot 10^3$ Па; $1,8 \cdot 10^3$ Па. **2.** 41 м. **3.** 11 см. **4.** $9,4 \cdot 10^{-3}$ м^3. **5.** $7,25 \cdot 10^3$ кг/м^3. **6.** 7,8 Дж. **7.** 0,06 км. **8.** 3,5 см. **9.** 24 кПа. **10.** 20 кН. **11.** 0,05 м. **12.** 1,12 с. **13.** 4,37 см^2.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Б. **3.** Б. **4.** Г. **5.** В. **6.** Б. **7.** А. **8.** 0,04. **9.** 2 м/с. **10.** 77 м^3.

Вправа 22

1. 1,4 см; –1,4 см. **2.** $x = 0,1 \sin 5\pi t$; 1,36 м/с. **3.** $x = 0,2 \cos \dfrac{\pi}{2} t$.

4. $x = 5 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (м). **5.** $v_x = -\pi \sin 20\pi t$; $a_x = -20\pi^2 \cos 20\pi t$; 0,25 м; –2,7 м/с; –100 м/с^2. **6.** а) $x = 5,5 \cdot 10^{-2} \cos\left(\dfrac{\pi}{3} t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $x = 0,1 \cos 20\pi t$. **7.** $x = 0,2 \cos \dfrac{\pi}{2} t$. **8.** 35 мм; 0.

Вправа 23

1. 2,8 Дж; 3,8 м/с. **2.** 150 мДж; 50 мДж. **3.** $\dfrac{T}{8}; \dfrac{3T}{8}; \dfrac{5T}{8}; \dfrac{7T}{8}$. **4.** $x = 0,1 \cos 10\pi t$; $F = -10 \cos 10t$; 10 Н; –5 Н. **5.** $x = 4 \cdot 10^{-2} \sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **6.** 0,314 с.

Вправа 24

1. 2 с;0,5 Гц; ω с$^{-1}$. **2.** 9 : 1. **3.** 18 см; 50 см. **4.** Відставатимуть у всіх випадках. **5.** Зменшиться у 2 рази. **6.** 2,5 с. **7.** 9,81 м/с^2.

Вправа 25

1. 2,4 м/с. **2.** 15 м/с; 5 м/с. **3.** 5,1 км/с. **4.** 105 м.. **5.** $v_0 = v + \dfrac{gh}{2\upsilon} = 349,8$ м/с. **6.** 420 м.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Г. **2.** В. **3.** Б. **4.** В. **5.** А. **6.** Г. **7.** Б. **9.** 8,2 см/с; $1,49 \cdot 10^{-3}$ Н; $2,21 \cdot 10^{-5}$ Дж. **10.** 84 м.

Вправа 26

1. $0,714 \cdot c$. **2.** $1,3 \cdot c$; $0,93 \cdot c$. **3.** $0,994 \cdot c$. **4.** $0,662 \cdot c$. **5.** $2,6 \cdot 10^8$ м/с. **6.** У 7,1 рази.

Вправа 27

1. $2,22 \cdot 10^8$ м/с. **2.** $v = \dfrac{c}{k}\sqrt{k^2 - 1}$. **3.** 0,95 c. **4.** 86,6 %. **5.** 99,6 %. **6.** $8,2 \cdot 10^{-14}$ Дж. **7.** $1,29 \cdot 10^{-20}$ Н · с; 0,66 МеВ.

Вправа 28

1. $5 \cdot 10^{12}$. **2.** $1,2 \cdot 10^{20}$. **3.** $1,1 \cdot 10^{22}$; $3 \cdot 10^{23}$; $1,9 \cdot 10^{23}$. **4.** 0,89; 1,56. **5.** $4,66 \cdot 10^{-26}$ кг; $5,3 \cdot 10^{-26}$ кг; $3 \cdot 10^{-26}$ кг. **6.** $\dfrac{N_A}{M}$; $\dfrac{N_A\rho}{M}$; $\dfrac{N_A m}{M}$; $\dfrac{N_A \rho V}{M}$. **7.** $6,9 \cdot 10^{10}$ м; більше у 180 разів. **8.** $3,9 \cdot 10^{18}$. **9.** Біля 10^6. **10.** $d = \sqrt[3]{\dfrac{M}{2N_A\rho}}$. **11.** 72,4 %; 27,6 %.

Вправа 29

1. 0,11 МПа. **2.** 710 м/с. **3.** $2,3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **4.** 10^{-21} Дж. **5.** Збільшиться на 44%. **6.** $F = 2n_0 mv^2 S$, $p = 2n_0 mv^2$, $F = 2n_0 m(v + u)^2 S$, $p = 2n_0 m(v + u)^2$. **7.** 508 с. **8.** $9,2 \cdot 10^7$ с$^{-1}$.

Вправа 30

1. 774 К. **2.** На 10%. **3.** У 4 рази. **4.** На 183 К. **5.** 9,8 кПа.

Вправа 31

1. 0,1 Па. **6.** $1{,}37 \cdot 10^7$. **7.** 921 м/с.

Вправа 32

1. 0,5 кг/м^3. **2.** 8,2 Мпа. **3.** 0,058 кг/моль. **4.** 4 моль. **5.** 9,5 л. **6.** У 1,7 разів. **7.** $3{,}2 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$. **8.** $1{,}5 \cdot 10^5$ Па. **9.** 200 кг.

Вправа 33

1. 100 кПа. **2.** 90 мл. **3.** 7л. **4.** 0,92 л. **6.** 127 °С. **7.** $l = \dfrac{(p_0 - \frac{1}{2}\rho gh)(L - \frac{1}{2}h)}{p_0 + \rho gh}$. **8.** 50 кПа.

9. 85 кг. **10.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{3(p_0 + \rho gH)V}{4\pi(p_0 + \rho gh)}}$. **11.** 17 см. **12.** 12,3 см. **13.** 147 °С. **14.** $\dfrac{(5p_0 + 4\rho gl)T_1}{p_0}$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

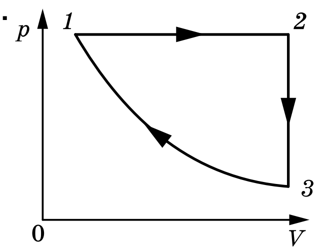
1. Г. **2.** В. **3.** А. **4.** В. **5.** Г. **10.** 350 К.

Вправа 34

1. 9 МДж. **2.** Зменшилася в 3 рази. **3.** Збільшилася у 2 рази. **4.** $p = \dfrac{2U}{3V} =$ 100 кПа.

5. 200 кДж. **7.** 18600 Дж.

8.



9. Оскільки робота в циклі визначається площею фігури, яка зображує цикл у координатах p, V, то з малюнку до умови задачі видно, що в циклі 3→2→4→3 газ виконує більшу роботу. **10.** 90 г.

Вправа 35

1. 0,6; 0,4. **2.** $A = 8{,}1$ кДж; $\Delta W = 20{,}2$ кДж; $Q = 28{,}3$ кДж. **3.** 200 Дж. **4.** а) $Q = 1{,}55$ кДж, $A = 0{,}92$ кДж, $\Delta W = 0{,}63$ кДж; б) $Q = 1{,}88$ кДж, $A = 1{,}25$ кДж, $\Delta W = 0{,}63$ кДж. **5.** 2. **6.** збільшилась в 2 рази. **7.** 0,5 кг. **8.** 6,3 см. **9.** $2 \cdot 10^{-4}$ м^2.

Вправа 36

1. 23 %; 46 кДж; 14 кВт. **2.** 30 %; 400 К. **3.** 25 %, $1{,}2 \cdot 10^6$ Дж. 4. 75%. **6.** $n = 2$. **7.** 0,16.

8. $T = T_0 - \dfrac{2}{3}\dfrac{A(1-\eta)}{\nu R}$. **9.** 28 кДж.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. А. **2.** Г. **3.** Б. **4.** В. **7.** Зменшилася в 6 разів. **8.** 100 Н. **9.** $\dfrac{A - \frac{3}{2}\nu R\Delta T}{A}$.

Вправа 37

1. Насичена. **2.** 2,6 мг. **3.** При 40 °С у 4,34 разів більше. **4.** 59%. **5.** Збільшиться на 19 %. **6.** Не випаде. **7.** 75%. **8.** 36%. **9.** $1{,}88 \cdot 10^5$ Па. **10.** 30%. **11.** 5,2 г/м^3; 2,2 г/м^3; у сухому більше.

Вправа 38

1. 1,6 мДж. **2.** Зменшиться в 1,2 разів. **3.** 0,032 Н/м. **4.** 261 мкДж. **5.** $1{,}44 \cdot 10^{-8}$ Дж.

Вправа 39

1. 820 кг/м^3. **2.** 5,1 мм. **3.** 22 мН/м. **4.** 0,031 Н/м; 0,29 мм. **5.** 0,029 Н/м. **6.** 0,07 Н/м. **7.** 34 см. **8.** а) 1,5 мм; б) 8,8 мм. **9.** 3 см. **10.** 0,023 м. **11.** 0,34 мм.

Вправа 40

1. У дротині більшого діаметра в 9 разів менший. **2.** –0,002; 1 МПа. **3.** 200 МПа. **4.** У 1,67 рази. **5.** 50 Н. **6.** У 4 рази. **7.** Абсолютне видовження зменшилось в 4 рази, а відносне – в 2 рази.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Б. **2.** Г. **3.** А. **4.** Г. **6.** 10 °С. **9.** 33,6 кДж.

Вправа 42

1. Збільшилась у 1,8 раза; зменшилась у 1,25 раза. **2.** $\frac{q^2}{\pi\varepsilon_o a^2}$. **3.** $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н. **4.** 0,12 м.

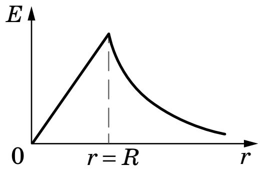
Вправа 43

1. На прямій, яка з'єднує заряди, на відстані $1/3a$ від меншого і $2/3a$ від більшого; на тій самій прямій на відстані a від меншого і $2a$ від більшого. **2.** 70 кВ/м; 10 кВ/м; 50 кВ/м; 50 кВ/м. **3.** $\frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$. **4.** $E_1 = E_2 = 2{,}8 \cdot 10^4$ Н/Кл. **5.** На 7°. **6.** 3°.

7. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 - \left(\frac{qE}{m}\right)^2}}} = 1{,}56$ с.

Вправа 44

1. 0; 0; 245 Н/Кл. **2.**



3. $E = 0$. **4.** 3,4 Н/м. **6.** $R = 2{,}5$ м; $E = 113$ кВ/м; у 1,1 раза. **7.** Так. $d = 4{,}5$ мм.

Вправа 45

1. $5{,}3 \cdot 10^8$ м/с²; $2 \cdot 10^4$ м/с; $0{,}4 \cdot 10^{-5}$ с. **2.** 6 см. **3.** 113 мкДж. **4.** 1,2 мкДж.

5. $A = \frac{q_3(q_2 - q_1)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} = 0{,}3$ мДж.

Вправа 46

1. 0,1 м; $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Кл; 1,8 кВ. **2.** 65 В. **3.** а) ± 6 кВ; б) 0; в) ± 4,2 кВ. **4.** 3,5 кВ. **5.** $8{,}4 \cdot 10^6$ м/с.

Вправа 47

1. $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Кл; $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ Кл. **2.** $12 \cdot 10^{-4}$ Кл; 120 В; 60 В; 40 В. **4.** $C_1 = \frac{C_2 U_2}{U_1 + U_2} = 1$ мкФ.

5. 6. **6.** Від 10 до 170 нФ для паралельного з'єднання та від 2,23 до 3,27 нФ за послідовного. **7.** 93 мДж/м³. **8.** 36 Дж; 15 кВт. **9.** $1{,}44 \cdot 10^{-5}$ Дж. **10.** $\varepsilon = \frac{CU^2 + 2\Delta W}{CU^2 - 2\Delta W} \approx 1{,}7$.

11. 705 нДж; 293 нДж. **12.** $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

ЗМІСТ

Розділ 3. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Розділ 4. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ