

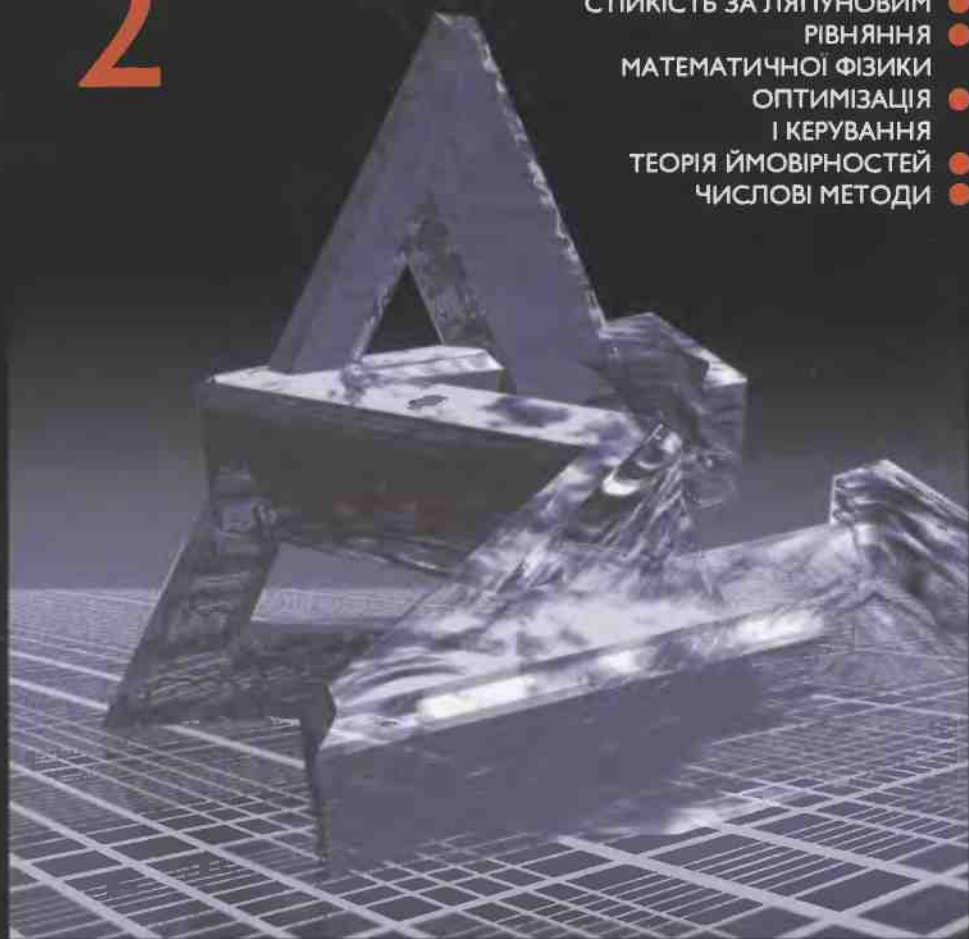
ВИЦЦА

П. П. ОВЧИННИКОВ
В. М. МИХАЙЛЕНКО

МАТЕМАТИКА

Частина
2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ●
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ●
РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ●
СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ●
РІВНЯННЯ ●
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ●
ОПТИМІЗАЦІЯ ●
І КЕРУВАННЯ ●
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ●
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ●



ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина

2



 «Техніка»

Навчальне видання

Овчинников Петро Пилипович
Михайленко Віктор Мефодійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У двох частинах

Частина 2

Диференціальні рівняння
Операційне числення
Ряди та їх застосування
Стійкість за Ляпуновим
Рівняння математичної фізики
Оптимізація і керування
Теорія ймовірностей
Числові методи

3-тє видання, виправлене

Редактор *Л. В. Магда*
Оформлення художника *В. О. Гурлева*
Художній редактор *С. В. Антенков*
Коректори *О. В. Боброва, І. В. Іванюць,*
Н. М. Мірошніченко

Підписано до друку 09.09.2004. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Папір офсетний. Гарнітура Антиква. Друк офсетний.
Умов. друк. арк.46.03. Обл.-вид. арк. 43.88.
Тираж 1 000 прим. Зам. № 4-457.

Видавництво "Техніка". 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України
суб'єктів видавничої справи № 357 від 12.03.2001.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
09117 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

ВИЩА МАТЕМАТИКА

П. П. ОВЧИННИКОВ
В. М. МИХАЙЛЕНКО

У двох частинах

Частина **2**

За загальною редакцією
П. П. Овчинникова

Переклали з російської
Є. В. Бондарчук,
Ю. Ю. Костиця,
Л. П. Оніщенко

3-тє видання,
виправлене

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ●
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ●
РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ●
СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯГУНОВИМ ●
РІВНЯННЯ ●
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ●
ОПТИМІЗАЦІЯ ●
І КЕРУВАННЯ ●
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ●
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ●

Затверджено Міністерством
освіти і науки України
як підручник для студентів
вищих технічних навчальних закладів

Київ
"Техніка"
2004

ББК 22.11я73
О35
УДК 51 (07)

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України,
лист № 1/12-2 від 02.01.2002 р.

Перекладено за виданням:
Овчинников П. Ф., Лисицын Б. М., Михайленко В. М. Высшая математика. —
К.: Вища шк., 1989. — 679 с.

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. В. Новиков
(Одеський національний політехнічний університет),
д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю. Й. Черський
(Одеська державна академія будівництва і архітектури)

Овчинников П. П., Михайленко В. М.

О35 Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг. ред. П. П. Овчинникова; Пер. з рос. Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Костриці, Л. П. Оніщенко. — 3-тє вид., випр. — К.: Техніка, 2004. — 792 с.: іл.

ISBN 966-575-050-X (повне зібрання)

ISBN 966-575-100-X (ч. 2)

Викладено основні розділи вищої математики. Особливістю підручника є компактність викладу матеріалу, що досягається паралельним висвітленням окремих питань. Узагальнено досвід застосування дидактичних методів і прийомів з метою активізації розумової діяльності студентів. Теоретичний матеріал ілюструють приклади і вправи.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

ББК 22.11я73

ISBN 966-575-050-X (повне зібрання)

ISBN 966-575-100-X (ч. 2)

© П. П. Овчинников,
В. М. Михайленко 2004
© Переклад українською мовою
Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Костриці,
Л. П. Оніщенко, 1997

ПЕРЕДМОВА

Даний підручник відповідає програмі курсу вищої математики. Основою його підготовки стало видання за загальною редакцією П. П. Овчинникова "Высшая математика", що вийшло у світ у 1989 р. російською мовою.

У першій главі вводяться означення рівнянь як звичайних, так і з частинними похідними, наводяться розв'язки звичайних рівнянь (загальний і частинний розв'язки, загальний і частинний інтеграл, інтегральні криві). Формулюються теореми існування і єдиності розв'язку звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються рівняння першого порядку як розв'язані, так і не розв'язані відносно похідної. Рівняння вищих порядків подано рівняннями, що розв'язуються в квадратурах, загальною теорією лінійних рівнянь n -го порядку, фундаментальною системою розв'язків нормальної системи диференціальних рівнянь.

У другій главі розглянуто інтегральне перетворення Лапласа: область визначення, єдиність зображення — оригінал, безпосереднє відшукування зображень, властивості і теореми (лінійності, подібності, зміщення в аргументі оригіналу і зображення, диференціювання і інтегрування оригіналу і зображення, про згортку, зображення періодичного оригіналу). Застосування операційного методу ілюструється на прикладі розв'язання диференціальних рівнянь з постійними і змінними коефіцієнтами. Тут же наведено деякі відомості про інтегральні рівняння і можливість їх розв'язання операційним методом.

Третя глава викладена нестандартно: використано паралельний метод подання матеріалу про ряди числові і функціональні з комплексною і дійсною змінними. Викладено відомості про ряди Лорана. Ряди Фур'є виділені з функціональних рядів в окремий параграф.

Четверта глава присвячена рівнянням математичної фізики. Наводиться виведення рівнянь механіки суцільного середовища. Далі розглядаються стандартні поняття — канонічні форми і класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, характеристичне рівняння, розв'язання задачі Коші для рівняння коливань струни методом Д'Аламбера, розв'язання задачі Діріхле в колі методом Фур'є, операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У п'ятій главі наведено означення стійкості, нестійкості, асимптотичної та неасимптотичної стійкості розв'язків як для нормальної системи диференціальних рівнянь, так і для одного рівняння n -го порядку.

Шосту главу побудовано так, що значна частина матеріалу з математичної статистики викладається паралельно з відомостями з теорії ймовірностей.

Сьома глава містить класифікацію задач оптимізації, математичне програмування — лінійне і нелінійне, а також варіаційне числення. Викладено застосування варіаційного числення в задачах керування, принцип максимуму Понтрягіна, принцип динамічного програмування.

У восьмій главі наведено опис числових методів і елементи теорії похибок.

Для розвитку самостійного мислення і поглибленої роботи студентів пояснення розв'язання деяких прикладів свідомо скорочено.

У видання книги українською мовою внесено такі зміни.

У третій главі більш детально викладено відомості про тригонометричні ряди в просторі Гільберта.

У четвертій главі розглянуто виведення рівняння коливань струни і методом аналогій — рівняння коливань тіла з відповідними початковими і граничними умовами. Дано виведення поширення теплоти в однорідному стержні, методом аналогій побудовано рівняння поширення теплоти в довільному тілі. Наведено загальноприйняті чотири види граничних умов.

У главу 5 внесено зміни та виправлення, пов'язані з поняттям фокуса і центра. Уточнено деякі назви у викладі питання про стійкість гіроскопічних систем.

Глави 6, 7, 8 перероблено як за змістом, так і за формою подання матеріалу. Зокрема, у главу 6 включено новий § 15 "Додаткові відомості з математичної статистики".

У главі 7 дано новий виклад понять опуклої множини, опуклих n -вимірних функцій, задач опуклого програмування. Внесено зміни у питання умовного екстремуму функцій зі скінченним числом змінних. Виключено з глави 7 "Числові методи пошуку екстремуму" (метод Ейлера, Ньютона, найшвидшого покоординатного спуску). Ці методи розглядаються в більш загальному вигляді в главі 8. Доповнено виклад варіаційного числення, більш повно описано достатні умови екстремуму функціонала.

У третьому виданні підручника враховано зауваження та рекомендації, запропоновані рецензентами — докторами фіз-мат. наук, професорами Новиковим В. В. і Черським Ю. Й.

Автори висловлюють щире подяку співробітникам кафедри вищої математики Одеської державної морської академії за допомогу в підготовці до друку цього підручника.

Глава 1

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1. Означення

Диференціальними називаються рівняння, в яких невідомими є функції однієї або кількох змінних, причому ці функції до рівнянь входять неодмінно разом із похідними або диференціалами від них.

Приклади. 1. $2x + \frac{dy}{dx} = 0$, де x — незалежна змінна; $y(x)$ — невідома функція.

2. $ax + by + c \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, де x, y — незалежні змінні; $z = f(x, y)$ — невідома функція двох змінних.

3. $7 \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 9x = 0$, де $x(t)$ — невідома функція; t — незалежна змінна.

Перше і третє рівняння прийнято називати звичайними, а друге — з частинними похідними.

Якщо у диференціальному рівнянні невідомою є функція кількох змінних, тобто невідома функція входить до рівняння разом зі своїми частинними похідними, то рівняння називається **рівнянням з частинними похідними**.

Якщо до рівняння входять невідомі функції лише однієї змінної, то рівняння називається **звичайним**.

Якщо невідомих функцій однієї змінної декілька, то йдеться про систему звичайних диференціальних рівнянь, у протилежному разі — про одне рівняння.

Приклади. 4. Приклад системи двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y; \\ \dot{y} = 5x - 7y. \end{cases}$$

Тут невідомими є дві функції x, y однієї змінної t , похідна по якій позначена точкою.

5. Приклад одного звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Далі розглядатимемо лише звичайні диференціальні рівняння або системи звичайних диференціальних рівнянь.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, що входить до рівняння. Так, у прикладах 1, 2 рівняння має перший порядок, у прикладі 3 – другий, у прикладі 4 наведено систему двох рівнянь першого порядку, у прикладі 5 – звичайне диференціальне рівняння третього порядку.

Спочатку розглянемо диференціальне рівняння першого порядку у загальному вигляді

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.1)$$

Це рівняння першого порядку, записане у **неявній** формі.

Рівняння, розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

його називають рівнянням першого порядку в **явній** формі.

Приклади. 6. $\frac{dy}{dx} + e^y = 2$ – неявне рівняння першого порядку.

7. $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3y$ – явне рівняння першого порядку.

Запишемо диференціальне рівняння n -го порядку у неявній формі:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.3)$$

Явною формою рівняння n -го порядку є рівняння, розв'язане відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.4)$$

Нехай у функціях F і f змінна x визначена на множині $G \subset R$. Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти таку диференційовну в G функцію $y = \varphi(x)$, підставлення якої в рівняння перетворює його у тотожність для всіх $x \in G$. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою**.

Приклади. 8. $\frac{dy}{dx} = 2x$ – рівняння першого порядку з невідомою функцією y і незалежною змінною x . Його розв'язок має вигляд:

$$dy = 2x dx; y = 2 \int x dx; y = x^2 + C.$$

Отже, розв'язком диференціального рівняння першого порядку є нескінченна множина функцій, що відрізняються у даному прикладі на сталу C . Інтегральними кривими у цьому разі є параболі. Отже, розв'язком рівняння (1.2) є функція

$$y = \varphi(x, C). \quad (1.5)$$

9. Розглянемо вільне падіння матеріальної точки. Згідно з другим законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{w}$, взявши за вісь X вертикаль, а за її додатний напрям – напрям угору по вертикалі, після проектування рівняння $\vec{F} = m\vec{w}$ на вісь X дістанемо:

$$\frac{dv}{dt} = -g; \frac{d^2x}{dt^2} = -g.$$

де v – швидкість; x – змінна координата матеріальної точки, що падає з прискоренням g . Рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$ з невідомою функцією x і незалежною змінною t є диференціальним рівнянням другого порядку. Інтегруючи його, знаходимо:

$$v = -gt + C_1; \frac{dx}{dt} = -gt + C_1; x = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Отже, розв'язок диференціального рівняння другого порядку залежить від двох довільних сталих: C_1 і C_2 . Розв'язком рівняння

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1.6)$$

є функція, що містить дві довільні сталі:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \quad (1.7)$$

Можна припустити, що розв'язком рівняння (1.3) або (1.4) буде функція, що містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (1.8)$$

Дійсно, щоб у рівнянні (1.4) від похідної $y^{(n)}$ перейти до самої функції y , потрібно n інтегрувань, що дає в результаті n довільних сталих.

Розв'язки (1.5), (1.7), (1.8) називаються **загальними розв'язками диференціальних рівнянь** (1.2), (1.6), (1.4). Особливістю загальних розв'язків є явна залежність функції y від x . Проте можуть бути і такі рівняння, розв'язки яких вдається записати лише у неявній формі, тобто у вигляді:

$$\psi(x, y, C) = 0; \quad (1.5a)$$

$$\psi(x, y, C_1, C_2) = 0; \quad (1.7a)$$

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (1.8a)$$

Неявна форма запису загального розв'язку диференціального рівняння дістала назву **загального інтеграла**.

1.2. Загальний і частинний інтегралі. Загальні і частинні розв'язки. Інтегральні криві

Розглянемо деяку функцію $y = \varphi(x, C)$, де C — деякий параметр або довільна стала. Знайдемо диференціальне рівняння, яке ця функція задовольняє. Для цього візьмемо похідну від функції y по x :

$$y' = \varphi'_x(x, C).$$

Якщо в цій операції буде виключено C , тобто

$$y' = \lambda(x),$$

то це і буде диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, а $y = \varphi(x, C)$ є його розв'язком. Очевидно, що в цьому випадку залежність y від C лінійна, тобто

$$y = \varphi(x) + C.$$

Припустимо, що в $\varphi'_x(x, C)$ міститься C . Тоді вираз

$$y' = \varphi'_x(x, C)$$

не можна назвати диференціальним рівнянням (в силу невизначеності C) доти, доки з виразу

$$y' = \varphi'_x(x, C)$$

не виключимо C . Для цього розв'яжемо функцію $y = \varphi(x, C)$ відносно C :

$$C = \psi(x, y).$$

Це можливо, якщо функція $\varphi(x, C)$ має відмінну від нуля похідну по C (за теоремою про існування неявно заданої функції, див. ч. 1, гл. 4, § 19), тобто

$$\varphi'_C(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial C} \neq 0. \quad (1.9)$$

Нехай ця умова виконується, тоді, підставивши $C = \psi(x, y)$ у вираз $y' = \varphi'_x(x, C)$, дістанемо

$$y' = \varphi'_x[x, \psi(x, y)] \quad (1.10)$$

— шукане диференціальне рівняння, розв'язком якого є

$$y = \varphi(x, C). \quad (1.11)$$

Отже, функція, що залежить від однієї довільної сталої $y = \varphi(x, C)$, є загальним розв'язком диференціального рівняння, коли виконується умова (1.9). Слово "загальний" означає, що всі частинні функції, що задовольняють рівняння (1.10), можна здобути з функції $y = \varphi(x, C)$, надаючи C певних значень.

Приклади. Знайти диференціальні рівняння, які задовольняють функції.

1. $y = x^2 + C.$

Розв'язання. $y' = 2x.$

2. $y = Cx^3.$

Розв'язання. $y' = 3Cx^2.$ Цей вираз не може називатися диференціальним рівнянням, поки не буде виключено C . Із рівняння $y = Cx^3$ знаходимо $C = \frac{y}{x^3}$. Тоді

$$y' = \frac{3y}{x} - \text{шукане диференціальне рівняння.}$$

Нехай дано неявну функцію однієї змінної

$$\psi(x, y, C) = 0, \quad (1.12)$$

що містить одну сталу. Знайдемо диференціальне рівняння, для якого ця неявна функція буде розв'язком. Для цього здиференціюємо (1.12):

$$\psi'_x(x, y, C) + y'\psi'_y(x, y, C) = 0. \quad (1.13)$$

Розв'язуючи $\psi(x, y, C) = 0$ відносно $C = \lambda(x, y)$ і підставляючи його в рівняння (1.13), дістанемо шукане диференціальне рівняння

$$\psi'_x[x, y, \lambda(x, y)] + y'\psi'_y[x, y, \lambda(x, y)] = 0. \quad (1.14)$$

Розв'язок диференціального рівняння першого порядку, записаний у вигляді $\psi(x, y, C) = 0$ і залежний від довільної сталої, є **загальним інтегралом**.

Приклад. Дано функцію $x^y + Cyx = 0$. Знайти рівняння, розв'язком якого є ця функція.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (x^y + Cyx)' &= 0; \\ yx^{y-1} + x^y y' \ln|x| + Cy'x + Cy &= 0; \end{aligned}$$

$$y' = -\frac{y(x^{y-1} + C)}{x^y \ln|x| + Cx}.$$

але

$$C = -\frac{xy}{xy},$$

тоді

$$y' = -\frac{(1-y)y}{x(y \ln|x| - 1)}$$

є шуканим диференціальним рівнянням.

Розглянемо тепер неявну функцію від однієї змінної і n довільних сталих

$$\psi(x, y, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n) = 0. \quad (1.15)$$

Знайдемо диференціальне рівняння, для якого ця функція буде розв'язком. Припустимо, що $\psi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)$ має похідні по x, y n -го порядку. Диференціюючи (1.15) n разів, маємо

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + y' \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} y' + y'' \frac{\partial \psi}{\partial y} + (y')^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0;$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Розглянемо сумісно вирази (1.15) і (1.16). Нехай у цих виразах C_1, C_2, \dots, C_n є невідомими. Тоді (1.15) і (1.16) утворюють систему із $n+1$ рівнянь, з яких (вважатимемо) можна виключити n довільних сталих. У результаті дістанемо рівняння n -го порядку

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.17)$$

Вираз (1.15) є загальним інтегралом рівняння (1.17). Функція (1.15) тоді називається загальним інтегралом рівняння (1.17), коли після її n -кратного диференціювання утворюється система скінченних рівнянь (1.15), (1.16), що допускає існування єдиного розв'язку для сталих C_1, C_2, \dots, C_n . Якщо (1.15) можна розв'язати відносно $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, то дістанемо загальний розв'язок рівняння (1.17).

Повернемось тепер до рівняння (1.2) і його розв'язку $y = \varphi(x, C)$. Якщо задати значення функції при конкретному значенні аргументу,

тобто задати x_0, y_0 , то за розв'язком $y = \varphi(x, C)$ маємо $y_0 = \varphi(x_0, C)$. Із останнього рівняння можна знайти $C = \psi(x_0, y_0)$ і підставити в $y = \varphi(x, C)$. Дістанемо $y = \varphi[x, \psi(x_0, y_0)]$ — єдину інтегральну криву, або частинний розв'язок диференціального рівняння.

Частинним інтегралом, або частинним розв'язком, диференціального рівняння називається загальний інтеграл, або загальний розв'язок, для яких вказані конкретні значення довільних сталих. Для визначення довільних сталих необхідно задати стільки умов, скільки є сталих. Ці умови включають задання значень функції та її похідних у певній точці. Так, для рівняння n -го порядку необхідно задати

$$y(x_0) = y|_{x=x_0} = y_0; y'(x_0) = y'|_{x=x_0} = y'_0; \dots;$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.18)$$

Числа $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ називаються початковими значеннями для задачі (1.17), а рівності (1.18) — початковими умовами.

Приклад. Дано сім'ю кіл на площині

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (1.19)$$

Розв'язком якого рівняння є ця сім'я?

Розв'язання. Диференціюючи, виключимо три довільні сталі a, b, r з (1.19):

1) диференціюючи (1.19) один раз, дістанемо

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0,$$

або

$$(x-a) + (y-b)y' = 0;$$

2) візьмемо другу похідну: $1 + y''(y-b) + (y')^2 = 0$, знайдемо

$$y-b = -\frac{1+(y')^2}{y''}; \quad (1.20)$$

3) знаходимо третю похідну:

$$y''(y-b) + y''y' + 2y'y'' = 0. \quad (1.21)$$

Згідно з (1.20) замінимо $y-b$. Маємо

$$y'' \left[1 + (y')^2 \right] - 3y'(y'')^2 = 0. \quad (1.22)$$

Сім'я (1.19) є розв'язком рівняння (1.22).

ВПРАВИ. 1. З'ясувати, чи є функція розв'язком диференціального рівняння. Як що так, то який цей розв'язок: частинний чи загальний?

а) $y = \frac{1}{x}$; $y'' = x^2 + y^2$. *Відповідь.* Ні.

б) $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$; $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$; $(C_1, C_2 = \text{const})$. *Відповідь.* Так, загальний.

в) $y = xe^x$; $y'' - 2y' + y = 0$. *Відповідь.* Так, частинний.

г) $e = x^2 e^x$; $y'' - 2y' + y = 0$. *Відповідь.* Ні.

2. Знайти диференціальне рівняння, що відповідає заданій сім'ї кривих:

а) $y^2 = 2Cx$. *Відповідь.* $2xy' - y = 0$.

б) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. *Відповідь.* $y'' - y' - 2y = 0$.

в) $y = (C_1 + C_2)e^x + C_3$ ($C_1, C_2, C_3 = \text{const}$). *Відповідь.* $y''' - 2y'' + y' = 0$.

1.3. Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціальних рівнянь першого і n -го порядку

Далі розглядатимемо рівняння, розв'язані відносно старшої похідної. Розглянемо рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y).$$

Нехай функція $f(x, y)$ визначена у деякій відкритій області D площини xOy (рис. 1.1), а функція $y = \varphi(x)$ – розв'язок рівняння (1.2). Тоді область визначення функції $y = \varphi(x)$ має належати області D і бути в ній диференційовною. Нехай в D задано точку M з координатами x_0, y_0 таку, що $y(x_0) = y_0$. Ставимо таку задачу: знайти умови, що накладаються на функцію $f(x, y)$, за яких рівняння (1.2) має розв'язок, що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Така задача називається **задачею Коші**. Розв'язок цієї задачі визначається такими двома **теоремами Коші**.

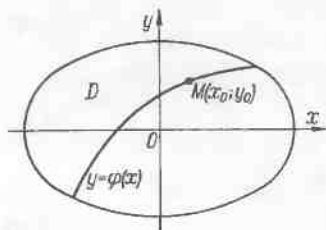


Рис. 1.1

Теорема 1. Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в області D разом із своєю частинною похідною $\frac{\partial f}{\partial y}$

по незалежній функції y , то для будь-якої точки $M(x_0, y_0)$, що належить області D у деякому околі точки M , існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2), який задовольняє початкову умову $y|_{x=x_0} = y_0 = \varphi(x_0)$.

по незалежній функції y , то для будь-якої точки $M(x_0, y_0)$, що належить області D у деякому околі точки M , існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2), який задовольняє початкову умову

$$y|_{x=x_0} = y_0 = \varphi(x_0).$$

З геометричної точки зору в теоремі твердиться, що при виконанні умов теореми через кожну внутрішню точку області D проходить єдина інтегральна крива.

Сформулюємо тепер теорему Коші для рівняння n -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.23)$$

з початковими умовами

$$y|_{x=x_0} = y_0; y'|_{x=x_0} = y'_0; \dots; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.24)$$

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, що залежить від $n+1$ змінних: $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, визначена і неперервна в деякій $(n+1)$ -вимірній відкритій області D разом із своїми похідними за невідомою функцією і її $(n-1)$ похідними $\frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial y'}; \dots; \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для будь-якої точки $M(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, що належить області D у деякому околі точки M , існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.23), що задовольняє початкові умови (1.24), причому

$$y_0 = \varphi(x_0); y'_0 = \varphi'(x_0); \dots; y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0).$$

Під словами "єдиний розв'язок" розуміють наступне: якщо існують два розв'язки рівняння, що збігаються в одній точці, то розв'язки збігаються на спільній частині їх області визначення. З теореми випливає, що функція $y = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ тоді буде загальним розв'язком диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

коли за заданими початковими умовами

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

сталі C_1, C_2, \dots, C_n визначаються єдиним способом, тобто система рівнянь

$$\begin{cases} \psi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0; \\ \psi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y'_0; \\ \dots \\ \psi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (1.25)$$

має єдиний розв'язок.

Умови, що накладаються в теоремах Коші на праві частини рівнянь (1.2) і (1.23), є достатніми як для існування, так і для єдиності розв'язків рівнянь. Для існування розв'язку досить вимоги обмеженості похідних $f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ у відкритій області D . Теорема Коші приймаємо без доведення.

1.4. Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної

Нехай дано рівняння (1.2). Виберемо конкретну точку $M_0(x_0, y_0)$ з області D визначення $f(x, y)$ і обчислимо значення $f(x_0, y_0)$. Число $f(x_0, y_0)$, згідно з (1.2), є кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої рівняння (1.2). Побудуємо у даній точці (x_0, y_0) напрямлену дотичну у вигляді невеликого відрізка. Виконавши побудову для всіх точок області D , дістанемо так зване поле напрямів (рис. 1.2).

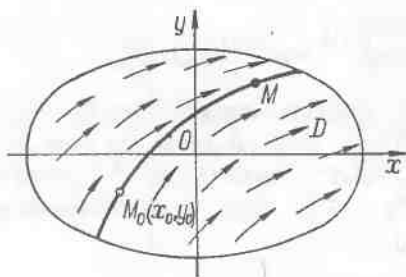


Рис. 1.2

Отже, геометрично рівняння (1.2) задає поле напрямів дотичних до розв'язку цього рівняння, тобто до інтегральної кривої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. На такому геометричному тлумаченні

рівняння (1.2) ґрунтуються наближені методи розв'язування рівняння (1.2). Один із таких методів називається **методом ізоклін**. **Ізокліною поля напрямів** називається геометричне місце точок, в яких напрям поля однаковий. Рівнянням ізокліни є:

$$y' = \text{const}; f(x, y) = \text{const} \quad (1.26)$$

Метод ізоклін наближеного розв'язування диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, у загальному вигляді можна подати таким чином.

Нехай дано диференціальне рівняння (1.2) з початковою умовою $y|_{x=x_0} = y_0$. Припустимо, що рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, графік якого зображено на рис. 1.2 у вигляді кривої M_0M . Розіб'ємо криву на n частин і кожен частину кривої замінимо відрізком дотичної у певних точках кривих. Інтегральну криву тепер можна замінити ламаною, що утворюється з відрізків дотичних. Відрізки дотичних у методі ізоклін дістають з рівняння (1.26).

Приклад. Дано рівняння $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ і початкова умова $y(x_0) = 0$. Побудуємо ізокліни, поклавши, що $\frac{dy}{dx}$ дорівнює $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}$. Дістанемо рівняння ізоклін – ліній з однаковим нахилом дотичних (рис. 1.3, а):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 0; y' = 0; \text{tg} \alpha_0 = 0; \alpha_0 = 0; \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; y' = \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \alpha_1 = 30^\circ; \end{aligned}$$

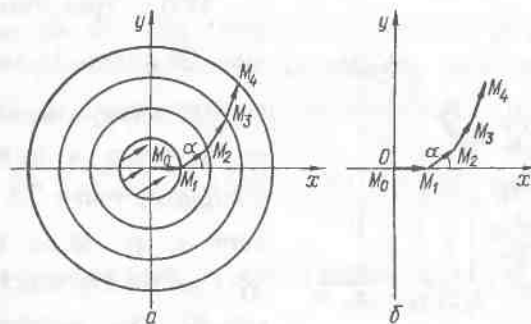


Рис. 1.3

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}; y' = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{2}; \alpha_2 = 35^\circ;$$

$$x^2 + y^2 = 1; y' = 1; \operatorname{tg} \alpha_3 = 1; \alpha_3 = 45^\circ;$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{3}; y' = \sqrt{3}; \operatorname{tg} \alpha_4 = \sqrt{3}; \alpha_4 = 60^\circ.$$

У відомій точці $M_0(0, 0)$ інтегральної кривої кут α_0 , утворений дотичною з віссю Ox , дорівнює 0. Проведемо з точки M_0 відрізок дотичної до перетину із найближчою ізокліною. Із точки перетину відрізка дотичної з ізокліною M_1 проведемо відрізок дотичної під кутом $\alpha_1 = 30^\circ$ до перетину з наступною ізокліною M_2 і т. д. В результаті дістанемо ламану (рис. 1.3, б), яка наближено зображає розв'язок даного рівняння. Ця ламана тим точніше зобразить розв'язок, чим густіше будуть розташовані ізокліни.

1.5. Метод ламаних Ейлера

Поле напрямів використовується також і у **методі ламаних Ейлера**. Це метод наближеного розв'язування рівнянь, що викладається нижче.

Нехай дано рівняння (1.2) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Знайти наближений розв'язок рівняння (1.2). Побудуємо у системі прямокутних координат точку $M_0(x_0, y_0)$. Розіб'ємо $[x_0, x]$ точками x_0, x_1, x_2, \dots на n частин (можна рівних між собою, рис. 1.4). За заданою точкою $M_0(x_0, y_0)$ і рівнянням (1.2) знаходимо y'_0 . На осі Ox ліворуч від початку координат O побудуємо відрізок $Op = 1$. На осі Oy відкладаємо $y'_0 = ON_0$ у масштабі Op ; з'єднуємо точки p і N_0 . Тоді із трикутника OpN_0 маємо $\frac{y'_0}{1} = \operatorname{tg} \alpha$. Із точки M_0 проведемо пряму, паралельну pN_0 , до перетину з прямою $x = x_1$. Дістанемо точку M_1 з координатами x_1, y_1 . За x_1, y_1 знаходимо y'_1 і на осі Oy відкладаємо в масштабі Op відрізок $ON_1 = y'_1$. Точку N_1 сполучимо з точкою p ,

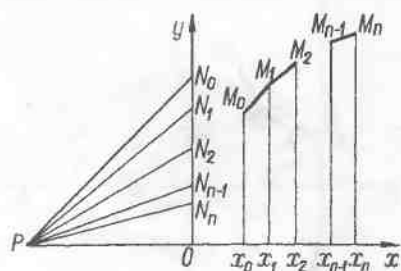


Рис. 1.4

дістанемо відрізок pN_1 . Із M_1 проведемо пряму, паралельну pN_1 , до перетину з прямою $x = x_2$ і т. д. Побудована ламана наближено зображує інтегральну криву.

Здійснені графічні побудови в аналітичній формі можна подати таким чином. Введемо позначення різниць:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \Delta x_1 = h_1; y_1 - y_0 = \Delta y_1; \\ x_2 - x_1 &= \Delta x_2 = h_2; y_2 - y_1 = \Delta y_2; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n = h_n; y_n - y_{n-1} = \Delta y_n.$$

Як правило, $h_1 = h_2 = h_3 = \dots = h_n = h$. Величина h називається **кроком процесу**. Приріст невідомої функції $y = \varphi(x)$, що є розв'язком заданого рівняння, можна пов'язати з приростом аргументу формулою

$$\Delta y_i \approx y'_i \Delta x_i \quad (\Delta y_i \approx y'_i h_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.28)$$

або

$$\begin{aligned} y_i - y_{i-1} &\approx y'_{i-1} \Delta x_i \quad (y_i - y_{i-1} \approx y'_{i-1} h_i); \\ y_i &\approx y_{i-1} + y'_{i-1} \Delta x_i \quad (y_i \approx y_{i-1} + y'_{i-1} h_i); \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$y_n \approx y'_{n-1} \Delta x_n + y_{n-1}. \quad (1.30)$$

Остання формула дає змогу обчислити значення функції за приростом Δx_i , попереднім значенням функції і її похідної. Замінивши в (1.28) і (1.30) y'_{i-1} на $f(x_{i-1}, y_{i-1})$, дістанемо

$$\Delta y_i = h f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad y_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

ВПРАВИ. 1. Методом ізоклін розв'язати рівняння $y' = 1 + y^2$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

2. Методом ламаних Ейлера розв'язати рівняння $y' = y$; $y(0) = 1$. Знайти $y(1)$, прийнявши $h = 0,1$.

Розглянемо рівняння першого порядку, розв'язане відносно першої похідної:

$$y' = f(x, y); \quad x' = q(y, x), \quad (2.1)$$

де невідомою є функція $y(x)$ (або $x(y)$), а відомою функція $f(x, y)$ (або $q(y, x)$). Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, $x' = \frac{dx}{dy}$, і припускаючи, що можна подати $f(x, y)$ або $q(y, x)$ у вигляді $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, рівняння (2.1) запишемо у симетричній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (2.2)$$

Із останнього рівняння легко дістати різні типи диференціальних рівнянь першого порядку, що допускають розв'язування в інтегралах (інтегровні типи диференціальних рівнянь).

2.1. Рівняння з відокремленими змінними

Якщо в рівнянні (2.2) $P(x, y)$ не залежить від y , а $Q(x, y)$ не залежить від x , то дістанемо рівняння

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) називається **рівнянням з відокремленими змінними**. Для розв'язання рівняння (2.3) візьмемо від обох його частин інтеграл:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

Після обчислення інтегралів дістанемо розв'язок рівняння (2.3) у вигляді загального інтеграла. Усі подальші методи розв'язування рівнянь (2.2) і (2.1) базуються на зведенні цих рівнянь до рівняння (2.3) з відокремленими змінними.

2.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо в рівнянні (2.2) $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ можна подати у вигляді $P(x, y) = N(x)R(y)$ і $Q(x, y) = M(x)K(y)$, то рівняння (2.2) запишемо у вигляді

$$N(x)R(y)dx + M(x)K(y)dy = 0. \quad (2.4)$$

Це рівняння називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**. Метод його розв'язування полягає у наступному. Розділивши (2.4) на добуток $M(x)R(y)$, дістанемо

$$\frac{N(x)}{M(x)}dx + \frac{K(y)}{R(y)}dy = 0. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) є рівнянням з відокремленими змінними, тобто типу (2.3). Операція ділення рівняння (2.4) на добуток $M(x)R(y)$ називається **відокремленням змінних**. Інтегруючи (2.5), дістанемо загальний інтеграл

$$\int \frac{N(x)}{M(x)}dx + \int \frac{K(y)}{R(y)}dy = C$$

вихідного рівняння. При діленні рівняння (2.4) на добуток $M(x)R(y)$ можна втратити деякі розв'язки, які впливають з рівняння $M(x)R(y) = 0$. Визначаючи із останнього рівняння розв'язки $y = \varphi(x)$, треба перевірити, чи є воно розв'язком рівняння (2.4). Якщо ні, то його треба відкинути, а коли так, то перевірити, чи входить воно до загального інтеграла. Якщо входить, то воно є частинним розв'язком, а якщо не входить, то цей розв'язок називається особливим.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0.$$

Розв'язання. Рівняння ділимо на добуток xy і дістаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0; \quad dx + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - dy = 0.$$

Його розв'язком є загальний інтеграл

$$x + \ln|x| + \ln|y| - y = C; \quad \ln|xy| + x - y = C.$$

Тут рівняння $M(x)R(y) = 0$ має вигляд $xy = 0$. Його розв'язки $x = 0$, $y = 0$ є розв'язками вихідного рівняння, але не входять до загального інтеграла. Отже, розв'язки $x = 0$, $y = 0$ є особливими.

ВПРАВИ. 1. Розв'язати рівняння $xy' - y = y^3$. Відповідь. $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = Cx$.

2. Розв'язати рівняння $y' \operatorname{tg} x = y$. Відповідь. $y = C \sin x$.

3. Розв'язати задачу Коші: $y' \sin x = y \ln|y|$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$. Відповідь. $\ln|y| = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

2.3. Рівняння першого порядку з однорідною функцією

Нехай дано рівняння

$$y' = f(x, y). \quad (2.6)$$

Функція $f(x, y)$ називається **однорідною n -го порядку виміру відносно x, y** , якщо

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Наприклад:

$$1) f(x, y) = \frac{y}{x}; f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} = t^0 \frac{y}{x} = t^0 f(x, y).$$

Функція $\frac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру.

$$2) f(x, y) = x^2 - y^2;$$

$$f(tx, ty) = t^2 x^2 - t^2 y^2 = t^2 (x^2 - y^2) = t^2 f(x, y).$$

Функція $x^2 - y^2$ — однорідна функція другого виміру.

$$3) \text{Однорідна функція нульового виміру: } f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy};$$

$$f(tx, ty) = t^0 \frac{ax + by}{cx + dy} = t^0 f(x, y).$$

$$4) f(x, y) = \frac{ax + bx + C}{a_1x + b_1y + C_1} \text{ не є однорідною функцією.}$$

Рівняння (2.6) називається **рівнянням з однорідною функцією**, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру:

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y).$$

Розв'яжемо це рівняння в такій послідовності. Покладемо $t = \frac{1}{x}$, тоді

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right); \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Нехай $\frac{y}{x} = u$, тоді

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}; x \frac{du}{dx} + u = f(1, u).$$

Це рівняння належить до рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{dx} x = f(1, u) - u. \quad (2.7)$$

У процесі відокремлення змінних може статися, що

$$f(1, u) - u = 0, \quad (2.8)$$

тоді рівняння запишемо у вигляді

$$x \frac{du}{dx} = 0 \text{ або } \frac{du}{dx} = 0;$$

$$u = \text{const} = C_1; \frac{y}{x} = C_1; y = C_1 x.$$

Отже припущення (2.8) приводить до вже відомого типу рівнянь — з відокремлюваними змінними. Тому у подальшому будемо припускати, що $f(1, u) - u \neq 0$ всюди, де визначена $f(x, y)$. Повертаючись до рівняння (2.7), перепишемо його у вигляді

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x},$$

а після інтегрування дістанемо

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|Cx|.$$

Поклавши

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \lambda(u),$$

дістанемо

$$\lambda(u) - \ln|Cx| = 0. \quad (2.9)$$

Якщо тут замінити u на $\frac{y}{x}$, то дістанемо загальний інтеграл рівняння (2.6):

$$\lambda\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|Cx| = 0. \quad (2.10)$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}. \quad (2.11)$$

Розв'язання. Задане рівняння належить до рівнянь з однорідною функцією. Дійсно, нехай

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2};$$
$$f(tx, ty) = \frac{txty}{t^2x^2 - t^2y^2} = t^0 \frac{xy}{x^2 - y^2} = t^0 f(x, y).$$

Для розв'язування рівняння покладемо, як і у загальному випадку, $y = ux$, тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$. Підставимо це значення в рівняння (2.11):

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{x^2 u}{x^2 - x^2 u^2}; \quad x \frac{du}{dx} + u = \frac{u}{1 - u^2};$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2} - u; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2};$$

$$\frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|xC|; \quad \ln|uCx| + \frac{1}{2u^2} = 0.$$

Після заміни $u = \frac{y}{x}$ дістаємо відповідь: $\ln|yCx| + \frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} = 0$ — загальний інтеграл рівняння (2.11).

Зауваження. Рівняння (2.2) буде рівнянням з однорідною функцією, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ будуть однакового виміру.

2.4. Рівняння, що зводяться до рівнянь з однорідною функцією

Такі рівняння мають загальний вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right). \quad (2.12)$$

Розглянемо кілька окремих випадків.

1. Якщо $c = c_1 = 0$, то маємо рівняння з однорідною функцією і його можна розв'язати методом, запропонованим у п. 2.3. Дійсно, нехай

$$y' = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right). \quad (2.13)$$

Якщо $u = \frac{y}{x}$, то $u'x + u = f\left(\frac{a + bu}{a_1 + b_1u}\right)$. Після відокремлення змінних дістанемо

$$\frac{du}{f\left(\frac{a + bu}{a_1 + b_1u}\right) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{f\left(\frac{a + bu}{a_1 + b_1u}\right) - u} = \ln|Cx|.$$

Введемо позначення

$$\int \frac{du}{f\left(\frac{a + bu}{a_1 + b_1u}\right) - u} = \psi(u),$$

тоді

$$\psi(u) = \ln|Cx|, \quad \psi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|Cx|.$$

Це є загальний інтеграл рівняння (2.13).

2. Нехай $c \neq c_1 \neq 0$. Покладемо

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k, \quad (2.14)$$

де h і k — сталі. Візьмемо від (2.14) диференціали:

$$dx = dx_1 \quad \text{і} \quad dy = dy_1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Отже,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}\right).$$

Візьмемо h і k такі, що

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0; \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Тоді рівняння (2.12) набере вигляду

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}\right).$$

Воно розв'язується підстановкою $y_1 = x_1u$.

3. Викладений метод не підходить для використання, якщо визначник системи (2.15)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо цей випадок, позначивши $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$; $a_1 = a\lambda$; $b_1 = b\lambda$; рівняння (2.12) запишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right). \quad (2.16)$$

Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою $z = ax + by$. Дійсно,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}; \quad \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right);$$

$$\frac{dz}{dx} = bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a; \quad \frac{dz}{bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a} = dx.$$

Загальний інтеграл рівняння (2.16) має вигляд

$$\int \frac{dz}{bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a} = x + C.$$

Нехай

$$\int \frac{dz}{bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) + a} = \varphi(z),$$

тоді

$$\varphi(z) = x + C; \quad \varphi(ax + by) = x + C.$$

Наведені операції геометрично означають, що чисельник і знаменник у функції $f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ можна розглядати як ліві частини рівнянь прямих на площині, $ax + by + c = 0$, які або перетинаються (визначник не дорівнює нулю):

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

або паралельні (визначник дорівнює нулю). Підстановка (2.14) геометрично означає паралельне перенесення системи координат, що дає змогу початок координат перенести в точку перетину прямих.

Висновок. Якщо у рівнянні (2.12) $c = c_1 = 0$, то рівняння підстановкою $y = ux$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $c \neq c_1 \neq 0$, то при $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ підстановками $y_1 = ux_1$;

$x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$ рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо ж $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то, поклавши $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$;

$z = ax + by$, приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції z .

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(2x - y + 3)dx + (x + y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у формі (2.12):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y - 3}{x + y - 1}. \quad (2.17)$$

Тут $a = -2$; $b = 1$; $c = -3$; $a_1 = 1$; $b_1 = 1$; $c_1 = -1$. Визначник $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Отже, задане рівняння (2.17) належить до розглянутого випадку 2. Введемо нові

змінні x_1, y_1 такі, що $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$. Запишемо рівняння (2.17) у вигляді

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2x_1 + y_1 - 2h + k - 3}{x_1 + y_1 + h + k - 1} \quad (2.18)$$

Система (2.15) для рівняння (2.18) має вигляд

$$\begin{cases} -2h + k - 3 = 0; \\ h + k - 1 = 0. \end{cases}$$

звідси $h = -\frac{2}{3}$; $k = \frac{5}{3}$. Рівняння (2.18) можна записати у вигляді

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2x_1 + y_1}{x_1 + y_1} \quad (2.19)$$

Покладемо $y_1 = ux_1$, тоді

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{du}{dx_1} x_1 + u; \quad \frac{-2x_1 + y_1}{x_1 + y_1} = \frac{u - 2}{u + 1}$$

Підставимо знайдені результати в (2.19):

$$\frac{du}{dx_1} x_1 + u = \frac{u - 2}{u + 1}$$

Розділимо змінні:

$$\frac{du}{dx_1} x_1 = \frac{u - 2}{u + 1} - u; \quad \frac{du}{dx_1} x_1 = -\frac{u^2 + 2}{u + 1}; \quad \frac{u + 1}{2 + u^2} du = -\frac{dx_1}{x_1}$$

Знайдемо інтеграл

$$\int \frac{u + 1}{2 + u^2} du = \int \frac{udu}{2 + u^2} + \int \frac{du}{2 + u^2} = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}}$$

Отже,

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + \ln|x_1 C| = 0,$$

але

$$u = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y - k}{x - h} = \frac{y - \frac{5}{3}}{x + \frac{2}{3}} = \frac{3y - 5}{3x + 2}$$

Після об'єднання першого і останнього логарифмів дістанемо загальний інтеграл рівняння (2.17)

$$\ln \left| C \left(x + \frac{2}{3} \right) \sqrt{(3y - 5)^2 (3x + 2)^2 + 2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3y - 5}{(3x + 2)\sqrt{2}} = 0.$$

ВПРАВИ Розв'язати рівняння:

1. $(x - y) y dx - x^2 dy = 0$. Відповідь. $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$

2. $y' = \frac{x + y}{x}$. Відповідь. $y = x \ln|Cx|$.

3. $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$. Відповідь. $\ln|4x + 8y + 5| = 4x - 8y + C$.

2.5. Лінійні рівняння першого порядку

Якщо рівняння (2.1) можна записати у вигляді

$$A(x)y' + B(x)y + E(x) = 0 \quad (2.20)$$

або

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (2.21)$$

де $A(x), B(x), E(x), P(x), Q(x)$ — відомі функції і $A(x) \neq 0$, то таке рівняння називається лінійним тому, що у наведену форму запису (2.21) цього рівняння невідома функція і її похідна входять у першому степені. Не можна дати визначення лінійного рівняння як рівняння, до якого функція і її похідна входять у першому степені, не вказавши при цьому, що йдеться про рівняння, записане у формі (2.20) або (2.21). Саме тому форма запису рівняння (2.20) дістала назву **канонічної**. Перехід від (2.20) до (2.21) здійснюється діленням (2.20) на $A(x)$. Припущення $A(x) = 0$ не має смислу, оскільки в цьому разі немає диференціального рівняння. Отже, завжди припускають, що $A(x) \neq 0$, тому рівняння (2.20) і (2.21) еквівалентні.

Область визначення розв'язків рівнянь (2.20) і (2.21) визначається спільною частиною областей визначення функцій $A(x), B(x), E(x)$ для (2.20) і $P(x), Q(x)$ для (2.21).

Якщо в (2.20) $E(x) \equiv 0$, а в (2.21) $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (2.20) і (2.21) набувають вигляду

$$A(x)z' + B(x)z = 0; \quad (2.22)$$

$$z' + P(x)z = 0 \quad (2.23)$$

і називаються **лінійними однорідними рівняннями**. Оскільки рівняння (2.20), (2.21) відрізняються від рівнянь (2.22), (2.23), то в них невідома функція позначена $z(x)$.

Якщо в (2.20) $E(x) \neq 0$, а в (2.21) $Q(x) \neq 0$, то рівняння (2.20) і (2.21) називаються **лінійними неоднорідними рівняннями**.

Розглянемо розв'язання лінійних однорідних рівнянь. Запишемо рівняння (2.23) у вигляді

$$\frac{dz}{dx} = -P(x)z.$$

У цьому рівнянні змінні легко відокремити. В результаті маємо

$$\frac{dz}{z} = -P(x)dx; \ln|z| = -\int P(x)dx + \ln|C|,$$

де для зручності стала C записана у вигляді $\ln|C|$. Потенціюючи, знаходимо загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння першого порядку:

$$z(x) = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (2.24)$$

Для розв'язання неоднорідних рівнянь (2.20) і (2.21) застосовують два методи: метод варіації довільної сталої і метод Бернуллі-Фур'є.

Метод варіації довільної сталої полягає ось у чому: вважаємо в (2.24) C невідомою функцією від x і визначаємо її за умови такого розв'язку рівнянь (2.20) або (2.21):

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (2.25)$$

Розглянемо рівняння (2.21). Після диференціювання виразу (2.25) маємо

$$y'(x) = \frac{dC}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (2.26)$$

Замінивши в (2.21) y' на (2.26), дістаємо диференціальне рівняння для функції $C(x)$:

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1.$$

Замінивши в (2.25) $C(x)$ на цей вираз, маємо

$$y(x) = C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx. \quad (2.27)$$

Вираз (2.27) можна записати таким чином:

$$y = C_1 \psi(x) + \xi(x). \quad (2.28)$$

Перший доданок збігається із загальним розв'язком однорідного рівняння, а другий $\xi(x)$ є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Функція

$$\xi(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

задовольняє рівняння (2.21). Дійсно, знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \xi'(x) &= -P(x)e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Q(x)e^{\int P(x)dx} e^{-\int P(x)dx} = \\ &= -P(x)e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Q(x). \end{aligned}$$

Підставивши значення похідної $\xi'(x)$ в (2.21), дістаємо

$$\begin{aligned} &-P(x)e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Q(x) + \\ &+ P(x)e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = Q(x). \end{aligned}$$

Маємо тотожність

$$Q(x) \equiv Q(x),$$

що й доводить, що функція $\xi(x)$ є розв'язком рівняння (2.21). Оскільки функція $\xi(x)$ не містить довільних сталих, то, природно, вона називається частинним розв'язком неоднорідного рівняння (2.21).

Отже, загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння першого порядку складається із суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Звичайно це твердження називають теоремою.

Приклади. 1. Знайти закон зміни струму I з часом в електричному колі з опором R , самоіндукцією L , якщо ЕРС $E = E_0 \sin \omega t$ (рис. 1.5).

Розв'язання. За законом Кірхгофа

$$E = IR + L \frac{dI}{dt}, \quad (2.29)$$

звідки

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}. \quad (2.30)$$

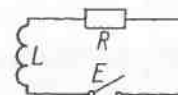


Рис. 1.5

Замінивши E на $E_0 \sin \omega t$, дістанемо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L} \sin \omega t. \quad (2.31)$$

Візьмемо початкову умову $I = I_0$ при $t = 0$. Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{R}{L}z = 0; \quad \frac{dz}{z} = -\frac{R}{L}dt;$$

$$\ln|z| = -\frac{R}{L}t + \ln C; \quad z = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Розв'язуємо неоднорідне рівняння (2.31) методом варіації довільної сталої. Нехай

$$I = C(t)e^{-\frac{R}{L}t},$$

тоді

$$\frac{dI}{dt} = C'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - C(t)\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (2.31), дістаємо

$$C'(t) = \frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t; \quad C(t) = \frac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt + C_1.$$

Інтеграл

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{RL}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin \omega t - \frac{\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos \omega t \right),$$

тоді

$$I(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \left[\frac{E_0}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) \right]. \quad (2.32)$$

Тут вираз, що містить C_1 , є загальним розв'язком однорідного рівняння, а вираз у квадратних дужках є частинним розв'язком неоднорідного рівняння.

Використовуючи початкові умови, знаходимо:

$$I_0 = C_1 - \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}; \quad C_1 = I_0 + \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}.$$

Частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$I(t) = \left[\left(I_0 + \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \right] + \left[\frac{E_0}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) \right]. \quad (2.33)$$

У цьому розв'язку вираз у перших квадратних дужках з часом швидко наближається до нуля через наявність множника $e^{-\frac{R}{L}t}$ («затухає»), а вираз у других квадратних дужках незалежно від початкових умов у будь-який час має гармонічний характер. Практично сила струму $I(t)$ описується виразом у других квадратних дуж-

ках, тобто періодичною функцією з тією самою частотою, що і ЕРС, але з іншою амплітудою і початковою фазою:

$$I(t) = \frac{E_0}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t). \quad (2.34)$$

Знайдемо амплітуду вимушених коливань сили струму і початкову фазу. Введемо такі позначення:

$$\frac{E_0 R}{\omega^2 L^2 + R^2} = A \cos \alpha; \quad \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} = A \sin \alpha.$$

Тоді

$$A = \frac{E_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}; \quad \alpha = \arctg \frac{\omega L}{R};$$

$$I(t) = A \cos \alpha \sin \omega t - A \sin \alpha \cos \omega t; \quad I(t) = A \sin(\omega t - \alpha).$$

Із останнього виразу випливає, що амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{E_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}, \quad (2.35)$$

а початкова фаза

$$\alpha = \arctg \frac{\omega L}{R}. \quad (2.36)$$

2. Розв'язати рівняння $y' - y = e^x$.

Розв'язання. Тут $P(x) = -1$; $Q(x) = e^x$. Згідно з (2.27)

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_1 e^{-\int P(x) dx},$$

де

$$e^{-\int P(x) dx} = e^{\int dx} = e^x, \quad \int e^x e^{-\int dx} dx = x.$$

Отже,

$$y = x e^x + C_1 e^x.$$

Метод Бернуллі-Фур'є полягає ось у чому: припускається можливість пошуку розв'язку будь-якого рівняння у вигляді добутку двох функцій: $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$y(x) = u(x)v(x). \quad (2.37)$$

Оскільки одна з двох функцій довільна, то це спричинює деяку свободу вибору однієї з функцій, яка далі використовується. Враховуючи (2.37) у рівнянні (2.21), дістаємо

$$y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$$

Після групування маємо

$$[u' + P(x)u]v + uv' = Q(x).$$

Виберемо u таким чином, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тоді

$$u' + P(x)u = 0; \quad (2.38)$$

$$uv' = Q(x). \quad (2.39)$$

Ці рівняння легко розв'язуються. Рівняння (2.38) збігається з (2.23). Його розв'язком є функція (2.24). Враховуючи свободу вибору функції $u(x)$ в (2.24), можна покласти $C = 1$:

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Цей розв'язок підставимо в рівняння (2.39):

$$v' = Q(x)e^{\int P(x)dx}; \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1;$$

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx. \quad (2.40)$$

Таким чином дістаємо вираз (2.40), що збігається з розв'язком (2.27), знайденим за методом варіації довільних сталих.

Зауваження. Якщо права частина неоднорідного рівняння (2.21) — стала величина і функція $P(x)$ також стала, то рівняння завжди можна звести до однорідного. Дійсно, нехай в (2.21) $Q(x) = Q_0 = \text{const}$, а $P(x) = P_0$. Введемо нову функцію $Y(x)$, пов'язану із старою $y(x)$ співвідношенням

$$y(x) = Y(x) + \frac{Q_0}{P_0}. \quad (2.41)$$

Тоді $y' = Y'$ і рівняння (2.21) перепишемо у вигляді

$$Y' + P_0 \left[Y(x) + \frac{Q_0}{P_0} \right] = Q_0; \quad (2.42)$$

$$Y'(x) + P_0 Y = 0.$$

ВПРАВИ. 1. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = t; \quad \text{б) } \frac{dx}{d\varphi} - \frac{2x}{\varphi} = \varphi^3.$$

$$\text{Відповідь. а) } y = t(t + C); \quad \text{б) } x = \varphi^2 \left(\frac{\varphi^2}{3} + C \right).$$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } \frac{dh}{dt} - \frac{h}{1-t^2} - 1 - t = 0, \quad h = 0 \text{ при } t = 0;$$

$$\text{б) } xy' + y - e^x = 0, \quad y = 2 \text{ при } x = 1.$$

$$\text{Відповідь. а) } h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right); \quad \text{б) } y = (e^x + 2 - e)x^{-1}.$$

2.6. Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (2.43)$$

де n не дорівнює нулю або одиниці, називається **рівнянням Бернуллі**. Якщо $n = 0$, то рівняння (2.43) збігатиметься з лінійним. Якщо $n = 1$, то після об'єднання $P(x)$ з $Q(x)$ дістанемо лінійне однорідне рівняння

$$y' + [P(x) - Q(x)]y = 0 \quad \text{або} \quad y' + P_1(x)y = 0,$$

метод розв'язування якого відомий. Тому цікаво розглянути рівняння, в якому $n \neq 0$ або $n \neq 1$. Розв'яжемо рівняння (2.43). Поділивши його на y^n , знайдемо

$$y^{-n}y' + P(x)y^{-n+1} = Q(x). \quad (2.44)$$

Введемо позначення $y^{-n+1} = z$, тоді

$$\frac{dz}{dx} = y^{-n}(1-n) \frac{dy}{dx}; \quad \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} - P(x)z = Q(x);$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x). \quad (2.45)$$

Останнє рівняння є лінійним відносно z . Розв'язок такого рівняння відомий. Таким чином, підстановка $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння (2.43) до лінійного.

Приклад. Розв'язати рівняння $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

Розв'язання. Тут

$$n = \frac{1}{2}; z = y^{-\frac{1}{2}+1}; z^2 = y; y' = 2zz';$$

$$2xzz' - 4z^2 = x^2z; z(2xz' - 4z - x^2) = 0.$$

Розв'язування останнього рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

1) $z = 0$, але тоді і $y = 0$ (тривіальний розв'язок);

2) $2xz' - 4z - x^2 = 0$; $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$.

Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі-Фур'є:

$$z = uv; u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2}; u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = \frac{x}{2};$$

$$v' - \frac{2}{x}v = 0; v' = \frac{2}{x}v; \frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx; \ln|v| = 2\ln|x|; v = x^2;$$

$$u'v = \frac{x}{2}; du = \frac{1}{2x}dx; u = \frac{1}{2}\ln|x| + C; z = uv = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right).$$

У виразі $z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)$, замінивши z на \sqrt{y} , дістанемо відповідь

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок рівняння.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$. *Відповідь.* $y = \frac{1}{x(x^3 + C)}$.

2. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$. *Відповідь.* $\frac{1}{\sqrt{y(C+y)}}$ (за невідому функцію взяти $x(y)$).

2.7. Рівняння у повних диференціалах

Вираз вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (2.46)$$

називається **повним (точним) диференціалом**, якщо існує функція $u(x, y)$ двох змінних, для якої

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (2.47)$$

Рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (2.48)$$

в якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, називається **рівнянням у повних (точних) диференціалах**. Розглянемо методику розв'язування таких рівнянь. Якщо ліва частина рівняння (2.47) є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, то (2.48) можна записати так: $du = 0$. Розв'язком цього рівняння є

$$u(x, y) = C. \quad (2.49)$$

Для існування розв'язку $y = y(x)$ рівняння (2.48), що відповідає початковим значенням x_0, y_0 , необхідно мати змогу за $u(x, y)$ визначити неявну функцію $y(x)$. Для цього треба, щоб $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ при $x = x_0, y = y_0$. Враховуючи рівність $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ і (2.47), маємо

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Знайдемо умову, за якою можна стверджувати, що (2.46) є повним диференціалом.

Теорема. Для того щоб вираз (2.46), де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — неперервні функції двох змінних, разом із частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в їхній спільній частині області визначення D був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.51)$$

Доведемо необхідність. Нехай (2.46) — повний диференціал. Тоді, диференціюючи (2.50) і враховуючи, що змішані частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ рівні між собою, дістанемо (2.51).

Доведемо достатність. Дана система диференціальних рівнянь (2.50) з умовою (2.51), із якої треба знайти функцію $u(x, y)$. Якщо у першому рівнянні системи (2.50) зафіксувати і зінтегрувати рівняння по x , то дістанемо

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y). \quad (2.52)$$

Тут довільна стала $C = \varphi(y)$ залежить від y . У розв'язку (2.52) не відома лише $\varphi(y)$. Для визначення $\varphi(y)$ здиференціюємо (2.52) по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y). \quad (2.53)$$

Використовуючи друге рівняння (2.50) і рівняння (2.51), (2.53) можна записати у вигляді

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y),$$

але

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y) \Big|_{x_0}^x = Q(x, y) - Q(x_0, y),$$

тому

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) \quad \text{або} \quad \varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

Це диференціальне рівняння відносно невідомої функції $\varphi(y)$. Розв'язавши його, знайдемо одне значення функції

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy.$$

Отже,

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (2.54)$$

Тут x_0, y_0 — координати довільної точки області визначення $u(x, y)$. Із (2.54) випливає, що $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, тобто до-

ведено достатність умови (2.51). Вираз (2.54) з урахуванням (2.49) дає

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C. \quad (2.55)$$

При розв'язуванні диференціальних рівнянь вигляду (2.48) спочатку перевіряють виконання умови (2.51). Потім із будь-якого рівняння (2.50) визначають $u(x, y)$. Диференціюючи знайдений для $u(x, y)$ вираз і використовуючи друге рівняння (2.50), визначають функцію $\varphi(y)$ ($\varphi(x)$), а з нею і функцію $u(x, y)$. Розв'язок одержують у вигляді

$$u(x, y) = C.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Розв'язання.

$$P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy;$$

$$Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

$$u(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y); \quad 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3;$$

$$\varphi'(y) = 4y^3; \quad \varphi(y) = y^4; \quad u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

Розв'язком рівняння є

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

ВПРАВИ. Розв'язати рівняння.

1. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$. Відповідь. $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$.

2. $x dx + y dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. Відповідь. $\frac{x^2 + y^2}{2} + \arctg \frac{y}{x} = C$.

3. $(x^2 + y^2 - 2x)dx + 2xy dy = 0$. Відповідь. $\frac{x^3}{3} + y^2x - x^2 = C$.

2.8. Інтегровальний множник

Рівняння (2.48) завжди можна звести до рівняння у повних диференціалах, підбравши множник $\mu(x, y)$, який називають **інтегровальним множником**. Помноживши таке рівняння на $\mu(x, y)$, дістанемо

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0. \quad (2.56)$$

Умову (2.51) запишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)Q(x, y)); \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \frac{\partial P}{\partial y} \mu &= \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}; \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} P - \frac{\partial \mu}{\partial x} Q &= \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$P \frac{\partial}{\partial y} \ln \mu - Q \frac{\partial}{\partial x} \ln \mu = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (2.59)$$

Із останнього рівняння знаходимо $\mu(x, y)$. Проте це рівняння з частинними похідними. Його розв'язування викликає не менші труднощі, ніж розв'язування початкового рівняння. Задача спрощується, якщо припустити існування μ як функції або лише від x , або лише від y . Наприклад, якщо

$$\mu = \mu(y), \quad (2.60)$$

то (2.59) набирає вигляду

$$P \frac{\partial}{\partial y} \ln \mu = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2.61)$$

або

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \mu = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right); \quad (2.62)$$

$$d \ln \mu = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy. \quad (2.63)$$

Отже, щоб припускати розв'язок для $\mu(x, y)$ лише у вигляді функції від y , треба, щоб

$$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \Phi(y). \quad (2.64)$$

Аналогічно для існування інтегровального множника вигляду $\mu(x)$ необхідно, щоб

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F(x). \quad (2.65)$$

Можна довести, що будь-яке рівняння першого порядку, яке задовольняє умови теореми Коші, має інтегровальний множник. Число інтегровальних множників у такого рівняння нескінченне.

ВПРАВИ. Розв'язати рівняння, вводячи інтегровальний множник.

- $(x + y^2) dx - 2xy dy = 0$. Відповідь. $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$.
- $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln|x|) dy = 0$. Відповідь. $\frac{\ln|x|}{y} + \frac{y^2}{2} = C$.

§ 3. РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Це рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0.$$

Наприклад, $y' + e^{y'} - x = 0$.

Рівняння, яке у заданих змінних відносно похідної розв'язати важко або неможливо, називається **рівнянням, не розв'язаним відносно похідної**. Якщо вдається вказати загальний метод розв'язування таких рівнянь відносно похідної, то задача їх розв'язання зводиться до розглянутих раніше рівнянь.

З метою розв'язання рівняння відносно y' позначимо $y' = p$ і запишемо

$$F(x, y, p) = 0, \quad (3.1)$$

вважаючи p новою змінною.

Запишемо рівняння (3.1) у параметричній формі. Для цього введемо нові змінні u, v таким чином:

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad p = \lambda(u, v). \quad (3.2)$$

Оскільки

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ то } dy = p dx. \quad (3.3)$$

Однак із (3.2) випливає, що

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv; \quad dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv. \quad (3.4)$$

Тепер (3.3) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv &= \lambda(u, v) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right]; \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{dv}{du} &= \lambda(u, v) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{du} \right]; \\ \frac{dv}{du} &= \frac{\lambda(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \lambda(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}} = B(u, v). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Дістали рівняння, розв'язане відносно похідної:

$$\frac{dv}{du} = B(u, v);$$

Позначимо розв'язок рівняння через $v = f(u, C)$.

Тоді розв'язком рівняння (3.1) будуть функції

$$x = \varphi[u, f(u, C)]; \quad y = \psi[u, f(u, C)]; \quad p = \lambda[u, f(u, C)].$$

Розглянемо, зокрема, рівняння, що допускають розв'язність відносно однієї із змінних:

$$y = f(x, y'), \text{ або } y = f(x, p),$$

де p — параметр. Із співвідношення $dy = p dx$ і рівняння дістаємо

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp; \quad p dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp;$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \quad (3.6)$$

Дістали рівняння, в якому невідомою функцією є $p(x)$. Знайдемо загальний розв'язок рівняння (3.6):

$$p = \varphi(x, C). \quad (3.7)$$

Тоді

$$y = f(x, p) = f[x, \varphi(x, C)]. \quad (3.8)$$

Зазначимо, що у розв'язку (3.7) параметр p не можна розглядати як y' , тому що тоді дістанемо рівняння другого порядку.

Рівняння Клеро і Лагранжа. Як приклад рівняння, не розв'язаного відносно похідної, розглянемо **рівняння Клеро**, яке запишемо у вигляді

$$y = xy' + \psi(y'). \quad (3.9)$$

Покладемо $y' = p$, тоді $dy = p dx$. З (3.9) маємо

$$dy = p dx + x dp + \psi'(p) dp.$$

Отже,

$$p dx = p dx + x dp + \psi'(p) dp,$$

або

$$p = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}; \quad \frac{dp}{dx} [x + \psi'(p)] = 0.$$

Тоді

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad (3.10)$$

$$x + \psi'(p) = 0. \quad (3.11)$$

Із (3.10) випливає, що $p = C$, а з (3.9) маємо $y = xC + \psi(C)$. Це **загальний розв'язок рівняння Клеро**. Рівняння (3.11) не є диференціальним рівнянням, а лише визначає $p(x)$ як функцію від x . Замінюючи p його значенням у рівнянні

$$y = xp + \psi(p),$$

дістанемо ще один розв'язок

$$y = x\varphi(x) + \psi[\varphi(x)].$$

Цей розв'язок називається **особливим розв'язком рівняння Клеро**. Особливість цього розв'язку полягає в тому, що він міститься у формулі загального розв'язку рівняння.

Розглянемо **рівняння Лагранжа**

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \quad (3.12)$$

Поклавши $y' = p$, $dy = p dx$, дістанемо

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) = f(x, p); \quad y = f(x, p).$$

Знайдемо диференціал від обох частин останнього виразу, вважаючи $f(x, p)$ функцією двох змінних x , p і $dy = df$:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = \varphi(p) dx + \frac{d\varphi}{dp} x dp + \frac{d\psi}{dp} dp; \\ dy &= \varphi(p) dx + \frac{d\varphi}{dp} x dp + \frac{d\psi}{dp} dp. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Після ділення (3.13) на dx і заміни $\frac{dy}{dx}$ на p дістанемо рівняння відносно p :

$$\begin{aligned} p &= \varphi(p) + x \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx} + \frac{d\psi}{dp} \frac{dp}{dx}; \\ p - \varphi(p) &= \frac{dp}{dx} \left[x \frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

У процесі відокремлення змінних можливі два випадки.

1. Знайдуться значення $p = p_0 = \text{const}$, які є коренями рівняння $p - \varphi(p) = 0$. Ці значення $p_0 = \text{const}$ задовольняють рівняння (3.13), $\frac{dp_0}{dx} = 0$. Розв'язок $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$ є особливим для рівняння (3.12).

2. Припустимо, що немає значень $p = p_0$, які задовольняють рівняння $p - \varphi(p) = 0$. Тоді $p - \varphi(p) \neq 0$ і рівняння (3.14) можна розв'язати відносно похідної

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p - \varphi(p)} \left(x \frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp} \right).$$

Розв'язок дістанемо у формі $x = \lambda(p, C)$. Тепер маємо

$$\begin{cases} y = \lambda(p, C)\varphi(p) + \psi(p); \\ x = \lambda(p, C). \end{cases}$$

Виключаючи звідси p , знаходимо $y = \gamma(x, C)$. Діємо аналогічно, якщо рівняння (3.1) можна записати у формі $x = f(y, p)$. Тоді

$$dx = df; \quad df = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp; \quad dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp,$$

але

$$y' = p; \quad x' = \frac{1}{p}; \quad \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}; \quad \frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}.$$

Якщо $\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, то

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial p} \left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)}; \quad \frac{dy}{dp} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Розв'язуючи рівняння, знаходимо

$$y = \xi(p, C). \quad (3.15)$$

Підставляючи (3.15) у вираз $x = f(y, p)$, дістаємо

$$x = f[\xi(p, C), p]. \quad (3.16)$$

Виключаючи p із (3.15) і (3.16), знаходимо інтеграл рівняння

$$\mu(x, y) = 0.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0, \quad p = y'.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно x :

$$x = \frac{8y^2 + p^3}{4yp} = 2\frac{y}{p} + \frac{1}{4}\frac{p^2}{y};$$

$$dx = 2\frac{dy}{p} - 2\frac{ydp}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{pdp}{y} - \frac{1}{4}\frac{p^2dy}{y^2},$$

але

$$y' = p; \quad \frac{dy}{dx} = p; \quad dx = \frac{dy}{p},$$

тоді

$$\frac{dy}{p} = 2\frac{dy}{p} - 2\frac{ydp}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{pdp}{y} - \frac{1}{4}\frac{p^2dy}{y^2}.$$

Після зведення подібних членів дістанемо

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{p^2}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{2}\frac{p}{y} - 2\frac{y}{p^2}\right)dp = 0;$$

$$\frac{4y^2 - p^3}{4py^2}dy + \frac{p^3 - 4y^2}{2yp^2}dp = 0;$$

$$\frac{4y^2 - p^3}{2yp} \left(\frac{dy}{2y} - \frac{dp}{p}\right) = 0.$$

Остання рівність виконується, якщо:

$$a) \quad 4y^2 - p^3 = 0 \Rightarrow p = \sqrt[3]{4y^2},$$

тоді

$$x = 2\frac{y}{p} + \frac{1}{4}\frac{p^2}{y} = 2\frac{y}{\sqrt[3]{4y^2}} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{16y^4}}{y} = 2\sqrt[3]{\frac{y}{4}} + 3\sqrt[3]{\frac{y}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{y}{4}}$$

— це особливий розв'язок рівняння.

$$b) \quad \frac{dy}{2y} - \frac{dp}{p} = 0; \quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{2}\frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C|; \quad p = C\sqrt{y}.$$

Підставивши це значення p у рівняння, дістанемо

$$C^3y^{\frac{3}{2}} - 4xCy^{\frac{3}{2}} + 8y^2 = 0,$$

$$C^3y^{\frac{1}{2}} - 4xCy^{\frac{1}{2}} + 8y = 0.$$

Це загальний інтеграл. Перетворивши його, дістанемо відповідь

$$y = \frac{1}{64}(C^3 - 4xC)^2.$$

ВПРАВИ. 1. Розв'язати рівняння Клеро:

$$a) \quad y = xy' + (y')^2; \quad б) \quad y = xy' + \frac{1}{y'}.$$

Відповідь. а) $y = Cx + C^2$ — загальний розв'язок, $y = -\frac{x^2}{4}$ — особливий розв'язок;

б) $y = Cx + \frac{1}{C}$ — загальний розв'язок, $y = 2\sqrt{x}$ — особливий розв'язок;

2. Розв'язати рівняння Лагранжа:

$$a) \quad y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{1}{y'}\right); \quad б) \quad y = (1 + y')x + (y')^2.$$

Відповідь. а) $y = \frac{1}{2}x\left(C_1e^x + \frac{1}{C_1}e^{-x}\right)$ — загальний розв'язок, $y = x$ — особливий

розв'язок; б) $y = C(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2$ — загальний розв'язок.

§ 4. ОБВІДНА СІМ'І КРИВИХ

Розглянемо однопараметричну сім'ю кривих

$$F(x, y, C) = 0, \quad (4.1)$$

де $F(x, y, C)$ — неперервно диференційовна функція в області зміни своїх змінних x, y, C .

Обвідною сім'ї (4.1) називається крива $y = \varphi(x)$, кожна точка якої є точкою дотику з кривою сім'ї (4.1), причому різними точкам $y = \varphi(x)$ відповідають різні криві сім'ї (4.1).

4.1. Рівняння обвідної

Якщо взяти точку (x, y) на обвідній, то вона має задовольняти рівняння (4.1), але цій точці відповідає одна крива (4.1) з певним C . Звідси дістаємо $C = C(x, y)$. Отже, в рівнянні обвідної $C = C(x, y)$. Рівняння обвідної тепер запишемо у вигляді

$$F(x, y, C(x, y)) = 0. \quad (4.2)$$

Припустимо, що $C = C(x, y)$ — диференційовна функція, що не дорівнює тотожно сталій.

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до обвідної у точці (x, y) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} y' = 0. \quad (4.3)$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої (4.1)

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Тоді (4.3) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial F}{\partial C} \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0.$$

Однак $C(x, y)$ не є сталою. Тому $\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0$ і залишається

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0. \quad (4.4)$$

Отже, рівняння обвідної знайдемо з рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial C} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

шляхом виключення C . Якщо з рівняння (4.5) випливає, що C – стала, то обвідної не існує.

Приклади. 1. Знайти рівняння обвідної

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0. \quad (4.6)$$

Розв'язання. Диференціюючи (4.6) по C , дістанемо (4.5):

$$2(x - C) = 0; \quad C = x.$$

Замінюючи в (4.6) C на x , дістанемо рівняння обвідної $y = \pm R$ (рис. 1.6).

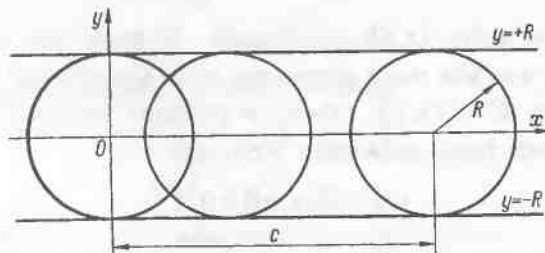


Рис. 1.6

2. Знайти рівняння обвідної

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{a_1 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Розв'язання. Візьмемо за параметр $C = \operatorname{tg} \alpha$, тоді

$$y = Cx - a(1 + C^2)x^2, \quad (4.7)$$

де $\frac{a_1}{2v_0^2} = a$. Перепишемо (4.7) у вигляді (4.1):

$$xC - a(1 + C^2)x^2 - y = 0. \quad (4.8)$$

Диференціюючи (4.8) по C , дістанемо

$$x - 2ax^2C = 0,$$

звідки: 1) $x = 0$; 2) при $x \neq 0$ знайдемо C

$$\left(1 - 2axC = 0; 2axC = 1; C = \frac{1}{2ax} \right).$$

Підставивши значення C в (4.7), дістанемо рівняння обвідної (рис. 1.7):

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

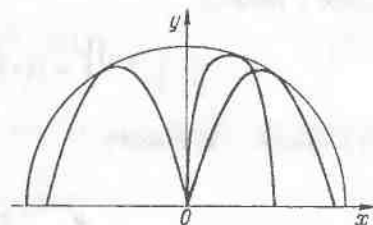


Рис. 1.7

Це рівняння параболи безпеки.

4.2. Особливий розв'язок і обвідна

Розглянемо рівняння (3.1) із § 3:

$$F(x, y, p) = 0. \quad (4.9)$$

Нехай

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (4.10)$$

— загальний інтеграл цього рівняння. Припустимо, що інтеграл (4.10) має обвідну. Тоді ця обвідна задовольняє рівняння (4.9), отже, є розв'язком рівняння (4.9). Однак ця обвідна не визначається з (4.10) при жодному C . Отже, це є особливий розв'язок. Таким чином, особливий розв'язок диференціального рівняння є обвідною сім'ї інтегральних кривих.

5.1. Рівняння вищих порядків, що розв'язуються у квадратурах

Рівняння $y^{(n)} = f(x)$ називається рівнянням, що розв'язується у квадратурах, якщо від функції $f(x)$ можна n разів взяти інтеграл.

а) Нехай дано рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \quad (5.1)$$

Його розв'язування зводиться до таких операцій. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx} [y^{(n-1)}] = f(x), \text{ або } dy^{(n-1)} = f(x)dx.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(t)dt + C_1.$$

Далі аналогічно дістаємо

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^x f(t)dt + C_1(x - x_0) + C_2;$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^x f(t)dt + \frac{C_1}{2}(x - x_0)^2 + C_2(x - x_0) + C_3;$$

$$y = \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^x dt \dots \int_{x_0}^x f(t)dt + \frac{C_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \dots + C_n. \quad (5.2)$$

Якщо в (5.2) зінтегрувати частинами повторні інтеграли, то матимемо

$$y = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt + \frac{C_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dots + C_n. \quad (5.2')$$

Тепер задамо початкові умови при $x = x_0$:

$$y = y_0; y' = y'_0; y'' = y''_0; \dots; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Частинний розв'язок дістанемо, якщо в (5.2) покладемо

$$C_1 = y_0^{(n-1)}; C_2 = y_0^{(n-2)}; C_3 = y_0^{(n-3)}; \dots; C_n = y_0.$$

Якщо початкові умови нульові, то формулу (5.2) запишемо у вигляді

$$y = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt,$$

або

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t)dt. \quad (5.3)$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' = \sin kx$, що задовольняє початкові умови: при $x = 0$; $y = 0$; $y' = 1$ ($y(0) = 0$; $y'(0) = 1$).

Розв'язання. Після першого інтегрування маємо

$$y' = -\frac{1}{k} \cos kx + C_1.$$

Використовуючи початкову умову $y'(0) = 1$, знаходимо C_1 :

$$1 = -\frac{1}{k} + C_1; \quad C_1 = \frac{k+1}{k}.$$

Тепер рівняння запишемо у вигляді

$$y' = \frac{1}{k}(k+1 - \cos kx).$$

Інтегруючи ще раз, дістанемо

$$y = \frac{1}{k} \left[(k+1)x - \frac{1}{k} \sin kx \right] + C_2.$$

Підставляючи сюди початкову умову $y(0) = 0$, знаходимо $C_2 = 0$, тоді

$$y = \frac{1}{k} \left[(k+1)x - \frac{1}{k} \sin kx \right].$$

б) Нехай дано рівняння

$$F(y^{(n)}, x) = 0$$

у неявній формі, тобто його неможливо розв'язати відносно $y^{(n)}$.

Розв'язання цього рівняння можна звести до розв'язання рівняння типу (5.1). Для цього покладемо

$$x = \varphi(t); \quad y^{(n)} = \psi(t),$$

тоді

$$F[\psi(t), \varphi(t)] = 0.$$

Застосовуючи до рівняння $y^{(n)} = \psi(t)$ міркування п. а), дістанемо

$$y = \int_{t_0}^t \varphi'(t) dt \dots \int_{t_0}^t \psi(t) \varphi'(t) dt + \frac{C_1(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_n.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$e^{y''} + y'' = x.$$

Розв'язання. Нехай $y'' = t$, тоді

$$x = e^t + t; \quad \frac{d}{dx}(y') = t; \quad dy' = t dx,$$

але

$$dx = (e^t + 1) dt.$$

Тепер

$$dy' = t(e^t + 1) dt;$$

$$y' = \int_{t_0}^t te^t dt + \int_{t_0}^t t dt = te^t - e^t + \frac{t^2}{2} + C_1;$$

$$y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Інтегруючи ще раз, дістаємо

$$dy = \left[e^t(t-1) + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] (e^t + 1) dt;$$

$$y = \int \left[te^{2t} - e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^t + C_1 e^t + te^t - e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] dt.$$

Розв'язком рівняння є

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1 \right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

в) Нехай дано рівняння

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0. \quad (5.4)$$

Використаємо підстановку

$$z = y^{(n-1)}, \quad y^n = z'. \quad (5.5)$$

Тоді рівняння (5.4) запишемо у вигляді рівняння першого порядку: $F(z', z) = 0$. Розв'язуємо його відносно z , а далі діємо за п. а).

Приклад. Розв'язати рівняння $ay'' = -[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}$.
Розв'язання.

$$y' = z; \quad y'' = z'; \quad az' = -(1+z^2)^{\frac{3}{2}}; \quad -\frac{adz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = dx;$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad -a \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = x - C_1.$$

Далі буде зручно ввести параметр φ :

$$y' = z = \operatorname{tg} \varphi; \quad x - C_1 = -\frac{a \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = -a \sin \varphi; \quad x - C_1 = -a \sin \varphi; \quad dx = -a \cos \varphi d\varphi;$$

$$dy = \operatorname{tg} \varphi dx = -a \sin \varphi d\varphi; \quad dy = -a \sin \varphi d\varphi; \quad y = a \cos \varphi + C_2; \quad y - C_2 = a \cos \varphi.$$

Виключаючи φ з рівнянь

$$\begin{cases} x - C_1 = -a \sin \varphi, \\ y - C_2 = a \cos \varphi, \end{cases}$$

дістаємо

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2.$$

Ця сім'я кіл на площині є загальним інтегралом рівняння.

г) Рівняння виду

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \quad (5.6)$$

підстановкою

$$y^{(n-2)} = z \quad (5.7)$$

можна звести до рівняння другого порядку

$$F(z'', z) = 0. \quad (5.8)$$

Припускаючи можливість розв'язуваності рівняння відносно z'' , дістанемо

$$z'' = f(z). \quad (5.9)$$

Для розв'язування (5.9) його можна помножити на $2z'$, тоді

$$2z'z'' = 2z'f(z).$$

З іншого боку,

$$2z'z'' = \frac{d}{dx}[(z')^2].$$

Отже,

$$\frac{d}{dx}[(z')^2] = 2f(z)\frac{dz}{dx}; \quad d[(z')^2] = 2f(z)dz; \quad (z')^2 = 2\int f(z)dz;$$

$$z' = \sqrt{2\int f(z)dz}; \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{2\int f(z)dz}; \quad \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz}} = dx.$$

Після інтегрування дістаємо

$$x + C_2 = \int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz}}; \quad z = \lambda(x, C_1, C_2). \quad (5.10)$$

Тепер можна повернутися до рівняння $y^{(n-2)} = z$ і розв'язати його відповідно з п. а).

5.2. Рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Введенням нових змінних вдалося знизити порядок рівняння (5.4) до першого, а (5.6) — до другого. Розглянемо докладніше типи рівнянь, що допускають зниження порядку. Виклад здійснюватимемо на прикладі рівнянь другого порядку. Розглянемо рівняння, розв'язуване відносно другої похідної, яке не містить у явному вигляді незалежну змінну:

$$y'' = f(y, y'). \quad (5.11)$$

Введемо змінну $p = y'$, тоді $\frac{dp}{dx} = y''$. Рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{dp}{dx} = f(y, p). \quad (5.12)$$

Оскільки $p = p(y(x))$, то

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}; \quad y'' = p \frac{dp}{dy},$$

і рівняння (5.12) запишемо у вигляді

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \quad (5.13)$$

Маємо рівняння першого порядку відносно $p(y)$. Розв'язуючи його, знайдемо $p(y) = p$. Після цього потрібно розв'язати рівняння $y' = p(y)$. Аналогічно діємо, якщо рівняння не розв'язуване відносно y'' , тобто дано

$$F(y, y', y'') = 0. \quad (5.14)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y^3 y'' - a^2 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $y'' = p \frac{dp}{dy}$, то рівняння переписуємо таким чином:

$$y^3 p \frac{dp}{dy} - a^2 = 0; \quad p \frac{dp}{dy} = a^2 y^{-3}$$

У останньому рівнянні відокремлюємо змінні:

$$p dp = a^2 y^{-3} dy.$$

Після інтегрування дістаємо

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{a^2 y^{-2}}{2} + C_1; \quad p^2 = 2C_1 - a^2 y^{-2}; \quad p = \sqrt{2C_1 - a^2 y^{-2}};$$

$$p = \sqrt{C - a^2 y^{-2}}; \quad C = 2C_1.$$

Замінюючи в останньому рівнянні p на $\frac{dy}{dx}$, знаходимо $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C - a^2 y^{-2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{Cy^2 - a^2}}{y}; \quad \frac{y dy}{\sqrt{Cy^2 - a^2}} = dx;$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{Cy^2 - a^2}} = x + C_2; \quad \int \frac{y dy}{\sqrt{Cy^2 - a^2}} = \frac{1}{C} \sqrt{Cy^2 - a^2};$$

$$\frac{1}{C} \sqrt{Cy^2 - a^2} = x + C_2; \quad y = \sqrt{\frac{(x + C_2)^2 C^2 + a^2}{C}}.$$

Розглянемо окремий випадок рівняння (5.14), коли $F(y, y', y'')$ не містить у явному вигляді невідому функцію $y(x)$, тобто рівняння виду

$$F(y', y'') = 0. \quad (5.15)$$

Це рівняння підстановкою

$$y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dx} \quad (5.16)$$

зводиться до рівняння першого порядку відносно p :

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \quad (5.17)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $(y'')^2 = y'$.
Розв'язання. Нехай

$$y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dx},$$

тоді рівняння запишемо у вигляді

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = p \quad \text{і} \quad \frac{dp}{dx} = \sqrt{p}; \quad p^{-\frac{1}{2}} dp = dx; \quad 2p^{\frac{1}{2}} = x + C_1; \quad p = \left(\frac{x + C_1}{2}\right)^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x + C_1}{2}\right)^2; \quad dy = \frac{1}{4}(x + C_1)^2 dx; \quad y = \frac{1}{4} \int (x^2 + 2xC_1 + C_1^2) dx;$$

$$y = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_1^2 x \right) + C_2; \quad y = \frac{x^3}{12} + \frac{C_1}{4} x^2 + \frac{C_1^2}{4} x + C_2.$$

Усі розглянуті дії можна узагальнити на випадок рівнянь n -го порядку.

Розглянемо тепер рівняння, що не містять явно функцію:

$$F(x, y', y'') = 0; \quad F(x, y'') = 0. \quad (5.18)$$

Позначимо, як і в (5.16),

$$y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dx}. \quad (5.19)$$

Тоді рівняння (5.18) набувають вигляду

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0; \quad F\left(x, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \quad (5.20)$$

Це рівняння першого порядку відносно p .

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{1}{x} y' = 0$.

Розв'язання. Нехай

$$y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dx},$$

тоді

$$\frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = 0; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|p| = -\ln|C_1 x|; \quad p = (C_1 x)^{-1};$$

$$p = \frac{1}{C_1 x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_1 x}; \quad dy = \frac{dx}{C_1 x}; \quad y = \frac{1}{C_1} \ln|C_2 x|.$$

ВПРАВИ. 1. Розв'язати рівняння:

а) $y'' = \frac{1}{x}$; б) $y'' = 1 - (y')^2$; в) $xy'' = y' \ln \left| \frac{y'}{x} \right|$; г) $y' [1 + (y')^2] = ay''$, $a = \text{const}$.

Відповідь. а) $y = x \ln|x| - x + C_1 x + C_2$; б) $y = -x + \ln|e^{2x} C_1 + 1| + C_2$;

в) $y = (C_1 x - C_1^2) \frac{x}{C_1} + C_2$; г) $x - C_1 = a \ln \left| \sin \frac{y - C_2}{a} \right|$.

2. Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє вказані початкові умови:

а) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y = 0$; $y' = 3$ при $x = 0$;

б) $xy'' = y'$; $y = 0$; $y' = 1$ при $x = 1$;

в) $y'' y^3 = -1$; $y = 1$; $y' = 1$ при $x = \frac{1}{2}$;

г) $y'' - (y')^2 + y'(y - 1) = 0$; $y = 2$; $y' = 2$ при $x = 0$.

Відповідь. а) $y = 3x \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$; б) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$; в) $y^2 = 2x$; г) $y = 2e^x$.

5.3. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку

Рівняння виду

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = Q(x), \quad (5.21)$$

де $b_0(x); b_1(x); \dots; b_n(x); Q(x)$ — відомі функції, називається **лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку**. Іншими словами, лінійне рівняння — це рівняння, що містить шукану функцію і всі її похідні у канонічній формі (5.21) у першому степені.

Коефіцієнт $b_0(x)$ в області свого визначення не повинен дорівнювати нулю, оскільки тоді рівняння не буде рівнянням n -го порядку. Тому рівняння (5.21) можна поділити на $b_0(x)$. Поклавши

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)} = a_1(x); \frac{b_2(x)}{b_0(x)} = a_2(x); \dots; \frac{b_n(x)}{b_0(x)} = a_n(x); \frac{Q(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

дістанемо так зване зведене рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (5.22)$$

Для цього рівняння сформулюємо теорему існування та єдиності.

Теорема 1. Якщо коефіцієнти $a_1(x); a_2(x); \dots; a_n(x)$ і функція $f(x)$ рівняння (5.22) неперервні на сегменті $[a, b]$, то існує один і лише один розв'язок $y = \varphi(x)$, визначений і неперервний в (a, b) . Він задовольняє рівняння і будь-яку систему початкових умов при будь-якому початковому значенні x_0 , взятому з (a, b) .

Як і для лінійних рівнянь першого порядку, вводяться поняття однорідного рівняння n -го порядку і неоднорідного. Якщо $Q(x)/f(x) = 0$, то рівняння називається однорідним, у противному разі – неоднорідним.

Лінійні диференціальні рівняння – найбільш вивчений тип рівнянь вищих порядків. Багато задач техніки зводяться до лінійних рівнянь.

Назвемо дві загальні властивості лінійних рівнянь:

1) рівняння залишається лінійним при заміні незалежної змінної на m разів диференційовну функцію іншої змінної;

2) рівняння залишається лінійним при лінійному перетворенні відомої функції, тобто при заміні

$$y = v(x)\eta(x) + \gamma(x),$$

де $v(x), \gamma(x)$ – відомі, а $\eta(x)$ – невідома неперервна n разів диференційовна функція; $v(x) \neq 0$ в інтервалі (a, b) . Якщо покласти $\gamma(x) = 0$, то спеціальним підбором функції

$$v = e^{-\frac{1}{n} \int a_1(x) dx}$$

можна перетворити на нуль коефіцієнт при $\eta^{(n-1)}(x)$.

5.4. Загальна теорія однорідних диференціальних рівнянь n -го порядку із змінними коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне рівняння n -го порядку

$$L(z) = z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0. \quad (5.23)$$

Вираз

$$L(z) = z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z \quad (5.24)$$

називається лінійним диференціальним оператором від функції z .

Нехай незалежна змінна у рівнянні (5.23) $x \in (a, b)$, функції $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ неперервні в $[a, b]$ і z_1, z_2 – частинні розв'язки рівняння (5.23), тобто

$$L(z_1) = 0; L(z_2) = 0.$$

Чи є розв'язками рівняння (5.23) C_1z_1, C_2z_2 або $C_1z_1 + C_2z_2$, де C_1, C_2 – сталі? Підставимо C_1z_1 в (5.23):

$$L(C_1z_1) = C_1z_1^{(n)} + C_1a_1(x)z_1^{(n-1)} + \dots + C_1a_n(x)z_1 = C_1L(z_1),$$

але $L(z_1) = 0$, тоді $C_1L(z_1) = 0$ і $L(C_1z_1) = 0$. Це стосується також розв'язків z_2 і C_2z_2 .

Теорема 2. Якщо z_1 і z_2 – частинні розв'язки рівняння (5.23), то C_1z_1 і C_2z_2 є також розв'язками цього рівняння.

Доведення. Підставивши $C_1z_1 + C_2z_2$ в (5.23), дістанемо

$$L(C_1z_1 + C_2z_2) = (C_1z_1 + C_2z_2)^{(n)} + a_1(x)(C_1z_1 + C_2z_2)^{(n-1)} + \dots + a_n(x)(C_1z_1 + C_2z_2) = C_1L(z_1) + C_2L(z_2) = 0;$$

$$L(C_1z_1 + C_2z_2) = 0,$$

тобто $C_1z_1 + C_2z_2$ також є розв'язком рівняння.

Теорема 3. Якщо z_1 і z_2 – частинні розв'язки рівняння (5.23), то їхня сума $z_1 + z_2$, а також їхня лінійна комбінація $C_1z_1 + C_2z_2$ є розв'язками цього рівняння.

Зрозуміло, що теорему 3 можна узагальнити: якщо функції $z_1(x); z_2(x); \dots; z_n(x)$ — частинні розв'язки рівняння (5.23), то їхня лінійна комбінація

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \dots + C_n z_n(x) \quad (5.25)$$

також є розв'язком рівняння (5.23).

Які ж умови потрібно накласти на функції $z_1(x); z_2(x); \dots; z_n(x)$, щоб (5.25) було загальним розв'язком (5.23)? Для відповіді на це запитання введемо поняття лінійно незалежної системи функцій.

Система функцій $z_1(x); z_2(x); \dots; z_n(x)$, визначена в (a, b) , називається лінійно залежною, якщо існують відмінні від нуля сталі α_i ($i = \overline{1, n}$) такі, що рівність

$$\alpha_1 z_1(x) + \alpha_2 z_2(x) + \dots + \alpha_n z_n(x) = 0 \quad (5.26)$$

виконується для всіх $x \in (a, b)$. Якщо ж відмінних від нуля α_i , при яких би виконувалася рівність (5.26), немає, то сукупність функцій $z_1(x); z_2(x); \dots; z_n(x)$ називається лінійно незалежною.

Приклади. 1. Система функцій $z_1 = \sin^2 x$, $z_2 = \cos^2 x$, $z_3 = 1$ є лінійно залежною у проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки при $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = -1$ рівність

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

виконується для будь-якого x , взятого з проміжку $(-\infty; +\infty)$.

2. Система функцій $z_1 = \sin x$, $z_2 = \cos x$ є лінійно незалежною у проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки рівність

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

виконується для всіх x лише при $C_1 = C_2 = 0$. Дійсно,

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0,$$

$\frac{C_1}{C_2} = -\operatorname{tg} x$ залежить від x , а нам треба, щоб це відношення від x не залежало.

3. Система функцій $z_1 = e^x$, $z_2 = 2e^x$ є лінійно залежною для $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. Система функцій $z_1 = e^x$, $z_2 = e^{-x}$ є лінійно незалежною, оскільки $C_1 e^x + C_2 e^{-x} = 0$ при $C_1 = C_2 = 0$ для $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. Система функцій $1; x; x^2; \dots; x^n$, $x \in (-\infty; +\infty)$ є лінійно незалежною, оскільки співвідношення

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

може виконуватися при α_i , відмінних для нуля, лише для коренів полінома, а рівність нулю обов'язкова для будь-яких x . Це можливо лише для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$. Виникає необхідність у відшуванні ознаки залежності або незалежності системи функцій $z_1; z_2; \dots; z_n$. Ця ознака пов'язана з поняттям визначника Вроньського.

5.5. Визначник Вроньського та його властивості

Визначник виду

$$W[z_1, z_2, \dots, z_n] = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (5.27)$$

називається **визначником Вроньського**. Це функціональний визначник, оскільки він залежить від x .

Теорема 4. Якщо функції z_1, z_2, \dots, z_n лінійно залежні на (a, b) , то визначник Вроньського дорівнює нулю.

Доведення. Доведемо це твердження для двох функцій: z_1 і z_2 . За умовою функції z_1 і z_2 лінійно залежні при $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$, де значення α_1 або α_2 відмінні від нуля. Поклавши $\alpha_2 \neq 0$, дістанемо $z_1 = \lambda z_2$, де $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Диференціюючи, маємо $z_1' = \lambda z_2'$, тоді

$$W[z_1, z_2] = \begin{vmatrix} \lambda z_2 & z_2 \\ \lambda z_2' & z_2' \end{vmatrix} = 0. \quad (5.28)$$

Наслідок. Дві функції z_1 і z_2 є лінійно залежними, якщо

$$\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{const}, \quad (5.29)$$

і лінійно незалежними, якщо $\frac{z_1}{z_2} \neq \operatorname{const}$.

Теорема 5. Якщо розв'язки $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ лінійного однорідного рівняння (5.23) є лінійно незалежними у деякому інтервалі (a, b) , де коефіцієнти рівняння неперервні, то визначник Вроньського на цьому інтервалі ніде не перетворюється на нуль.

Доведення. Цю теорему для загального випадку доведимо від супротивного.

Припустимо, що є точка $x_0 \in (a, b)$, для якої $W(x_0) = 0$. Позначимо через z_{i0} величину z_i при $x = x_0$, а похідні від них – через $z_{i0}^{(n-1)}, z_{i0}^{(n-2)}, \dots, z'_{i0}$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 z_{10} + C_2 z_{20} + \dots + C_n z_{n0} = 0; \\ C_1 z'_{10} + C_2 z'_{20} + \dots + C_n z'_{n0} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 z_{10}^{(n-1)} + C_2 z_{20}^{(n-1)} + \dots + C_n z_{n0}^{(n-1)} = 0, \end{cases} \quad (5.30)$$

припустивши, що C_1, C_2, \dots, C_n – невідомі сталі. Визначник цієї системи дорівнює нулю: $W(x_0) = 0$. Отже, є відмінні від нуля розв'язки системи (5.30). Складемо функцію

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n. \quad (5.31)$$

За попередніми теоремами z є розв'язком лінійного однорідного рівняння. За початкової умови $x = x_0$ з (5.31) дістанемо

$$z(x_0) = 0; \quad z'(x_0) = 0; \quad \dots; \quad z^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Тоді за теоремою про єдиність розв'язку $z = 0$. Отже,

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n = 0.$$

Оскільки не всі C_i дорівнюють нулю для $x \in (a, b)$, то система z_1, z_2, \dots, z_n є лінійно залежною, що призводить до суперечності. Вона виникла із припущення, що в (a, b) існує точка, в якій $W(x_0) = 0$. Отже, $W(x_0) \neq 0$. Теорему доведено.

5.6. Фундаментальна система розв'язків

Будь-яка система з n лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку, визначених в інтервалі (a, b) , називається **фундаментальною системою**.

Теорема 6. Якщо $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння, то $z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n$ є загальним розв'язком однорідного рівняння.

Доведення. Треба довести, що розв'язок є загальним. Це означає, що за заданими початковими умовами при $x = x_0 \in (a, b)$

$$z(x_0) = z_0; \quad z'(x_0) = z'_0; \quad \dots; \quad z^{(n-1)}(x_0) = z_0^{(n-1)} \quad (5.32)$$

можна єдиним способом знайти довільні сталі. Для визначення цих сталих маємо неоднорідну систему

$$\begin{cases} z_0 = C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + \dots + C_n z_n(x_0); \\ z'_0 = C_1 z'_1(x_0) + C_2 z'_2(x_0) + \dots + C_n z'_n(x_0); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_0^{(n-1)} = C_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 z_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n z_n^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \quad (5.33)$$

Визначник цієї системи збігається з $W[z_1, z_2, \dots, z_n] \neq 0$ для $x_0 \in (a, b)$. Отже, із системи (5.33) сталі C визначаються єдиним способом. Теорему доведено.

Наведемо без доведення наступні твердження.

1. Максимальне число лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0 \quad (5.34)$$

з неперервними в (a, b) коефіцієнтами $a_1(x), \dots, a_n(x)$ дорівнює порядку рівняння.

2. Незалежно від початкових умов усі інші розв'язки рівняння (5.34) є лінійною комбінацією лінійно незалежних частинних розв'язків.

Доведення цих тверджень буде наведено для окремого випадку лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Таким чином, для розв'язання лінійного однорідного рівняння n -го порядку необхідно знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$z'' - z = 0.$$

Розв'язання. Частинними розв'язками цього рівняння є $z_1 = e^x$; $z_2 = e^{-x}$.

Визначимо, чи утворюють ці розв'язки фундаментальну систему. Для цього складемо визначник Вроньського

$$W[z_1, z_2] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2 \neq 0.$$

Отже, система розв'язків z_1 і z_2 фундаментальна. Розв'язок системи має вигляд

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

5.7. Формула Ліувілля–Остроградського

Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку

$$z'' + a_1(x)z' + a_2(x)z = 0 \quad (5.35)$$

і два його лінійно незалежних розв'язки: z_1 і z_2 ; тоді

$$\begin{cases} z_1'' + a_1(x)z_1' + a_2(x)z_1 = 0; \\ z_2'' + a_1(x)z_2' + a_2(x)z_2 = 0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на z_2 , а друге – на $-z_1$:

$$\begin{cases} z_2 z_1'' + a_1(x)z_2 z_1' + a_2(x)z_1 z_2 = 0; \\ -z_1 z_2'' - a_1(x)z_1 z_2' - a_2(x)z_1 z_2 = 0 \end{cases}$$

і додамо їх:

$$z_2 z_1'' - z_1 z_2'' + a_1(x)(z_2 z_1' - z_1 z_2') = 0.$$

Цей вираз можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dx} (z_1' z_2 - z_1 z_2') + a_1(x)(z_1' z_2 - z_1 z_2') = 0$$

або

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} + a_1(x)W &= 0; \quad \frac{dW}{dx} = -a_1(x)W; \\ \frac{dW}{W} &= -a_1(x)dx; \quad \ln|W| = -\int_{x_0}^x a_1(x)dx + \ln|C|; \\ W &= C e^{-\int_{x_0}^x a_1(x)dx}; \end{aligned} \quad (5.36)$$

при $x = x_0$, $W(x_0) = C$

$$W = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(x)dx} \quad (5.37)$$

Вираз (5.37) називається **формулою Ліувілля–Остроградського**. Ця формула справедлива для лінійних диференціальних рівнянь будь-якого порядку; у цьому разі $a_1(x)$ є коефіцієнтом при $(n-1)$ -й похідній у рівнянні. При виведенні формули Ліувілля–Остроградського використовується неперервність $a_1(x)$, оскільки у цьому разі завжди

існує інтеграл $\int_{x_0}^x a_1(x)dx$.

Зауваження. Не існує загального методу розв'язування лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Однак, якщо відомі $(n-1)$ лінійно незалежних розв'язків лінійного рівняння n -го порядку, то останній розв'язок знаходять квадратурою. Доведемо це для диференціального рівняння другого порядку.

Припустимо, що відомим є розв'язок z_1 рівняння (5.35). Знайдемо розв'язок z_2 , лінійно незалежний від розв'язку z_1 . Скориставшись формулою Ліувілля–Остроградського, запишемо

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} &= C \exp(-\int a_1(x)dx); \\ z_2' - \frac{z_2}{z_1} z_1' &= \frac{C}{z_1} \exp(-\int a_1(x)dx). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Маємо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно функції z_2 . Це рівняння можна зінтегрувати:

$$\frac{z_1 z_2' - z_2 z_1'}{z_1^2} = \frac{C_{11}}{z_1^2} \exp(-\int a_1(x)dx); \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{C_{11}}{z_1^2} \exp(-\int a_1(x)dx);$$

$$\frac{z_2}{z_1} = C_{11} \int z_1^{-2} \exp(-\int a_1(x)dx) dx + C_{22}.$$

Оскільки нас цікавить частинний розв'язок, то можна покласти $C_{11} = 1$, $C_{22} = 0$. Тоді

$$z_2 = z_1 \int z_1^{-2} \exp\left(-\int a_1(x) dx\right) dx.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння запишемо у вигляді

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

або

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int z_1^{-2} \exp\left(-\int a_1(x) dx\right) dx.$$

5.8. Побудова рівняння за фундаментальною системою

Нехай дано фундаментальну систему z_1, z_2, \dots, z_n . Побудуємо диференціальне рівняння, розв'язком якого є ця система. Складемо визначник Вроньського із системи функцій z_1, z_2, \dots, z_n, z . Цей визначник дорівнює нулю, оскільки система функцій z_1, z_2, \dots, z_n, z лінійно залежна:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n & z \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' & z' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} & z^{(n-1)} \\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & \dots & z_n^{(n)} & z^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.39)$$

Розкриваючи визначник за елементами останнього стовпця, дістанемо шукане рівняння

$$z^{(n)} + \frac{W_1}{W} z^{(n-1)} + \dots + \frac{W_n}{W} z = 0,$$

де $W = W[z_1, z_2, \dots, z_n]$; W_i - алгебраїчні доповнення елементів останнього стовпця визначника (5.39), $i = \overline{1, n}$:

$$W_i = (-1)^{2n-i+1} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(i-1)} & z_2^{(i-1)} & \dots & z_n^{(i-1)} \\ z_1^{(i+1)} & z_2^{(i+1)} & \dots & z_n^{(i+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & \dots & z_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (5.40)$$

Приклад. Дано фундаментальну систему $z_1 = x$; $z_2 = x^2$ для $x \in (-\infty; +\infty)$. Знайти лінійне однорідне диференціальне рівняння, розв'язком якого є ця система. Розв'язання. Складемо визначник

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z \\ z_1' & z_2' & z' \\ z_1'' & z_2'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & z \\ 1 & 2x & z' \\ 0 & 2 & z'' \end{vmatrix} = 0$$

і дістаємо рівняння

$$2x^2 z'' + 2z - x^2 z'' - 2xz' = 0;$$

$$x^2 z'' - 2xz' + 2z = 0.$$

Отже, задача розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку зводиться до задачі відшукування n лінійно незалежних частинних розв'язків.

ВПРАВИ. 1. Дослідити на лінійну залежність системи функцій для $x \in (-\infty; +\infty)$:

а) $z_1 = x$, $z_2 = x + 1$; б) $z_1 = e^x$, $z_2 = e^{2x}$, $z_3 = e^{3x}$.

Відповідь. а) Незалежна; б) незалежна.

2. Скласти лінійне однорідне рівняння за фундаментальною системою при $x \in (-\infty; +\infty)$:

а) $z_1 = \sin x$, $z_2 = \cos x$; б) $z_1 = e^x$, $z_2 = xe^x$.

Відповідь. а) $z'' + z = 0$; б) $z'' - 2z' + z = 0$.

3. Розв'язати рівняння

$$x^2(|n|x| - 1)z'' - xz' + z = 0,$$

знаючи його частинний розв'язок $z_1 = x$.

Відповідь. $z = C_2 x - C_1 \ln|x|$.

5.9. Лінійні однорідні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

Загальний вигляд однорідного рівняння другого порядку такий:

$$z'' + a_1 z' + a_2 z = 0. \quad (5.41)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (5.41) у вигляді

$$z = e^{kx}, \quad (5.42)$$

де k - невідома стала, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Вибір розв'язку у формі (5.42) ґрунтується на тому, що функція $z = e^{kx}$, визначена для $x \in (-\infty; +\infty)$, має похідну будь-якого порядку і ніде в нуль не перетворюється. Підставляючи (5.42) в рівняння, знаходимо

$$e^{kx}(k^2 + a_1k + a_2) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то розв'язок (5.42) задовольнятиме рівняння, якщо

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0.$$

Це рівняння називається **характеристичним**. Корені характеристичного рівняння

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

1. Нехай k_1 і k_2 — дійсні різні корені, $k_1 \neq k_2$, тоді згідно з (5.42)

$$z_1 = e^{k_1x}, z_2 = e^{k_2x}, x \in (-\infty; +\infty).$$

З'ясуємо лінійну незалежність z_1 і z_2 , для чого знайдемо

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = k_2e^{(k_1+k_2)x} - k_1e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, z_1 і z_2 — лінійно незалежні для $x \in (-\infty; +\infty)$. Загальний розв'язок рівняння (5.41) має вигляд

$$z = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \quad (5.43)$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$z'' - 7z' + 12z = 0.$$

Розв'язання.

$$z = e^{kx}; k^2 - 7k + 12 = 0; k_1 = 3; k_2 = 4.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$z = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}.$$

2. Нехай k_1 і k_2 — комплексно-спряжені корені:

$$k_1 = \alpha + j\beta, k_2 = \alpha - j\beta, j = \sqrt{-1},$$

тоді

$$z_1 = e^{\alpha x} e^{j\beta x}; z_2 = e^{\alpha x} e^{-j\beta x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

маємо

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x; e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x;$$

$$z_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + j e^{\alpha x} \sin \beta x; z_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - j e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Доведемо лему.

Лема. Якщо функція $z = v(x) + ju(x)$ є розв'язком лінійного рівняння n -го порядку, то v і u також є розв'язками цього рівняння.

Доведення. За умовою

$$L(z) = 0; L(v) + jL(u) = 0.$$

Ця рівність можлива, якщо $L(v) = 0, L(u) = 0$. На підставі цієї лемати візьмемо за частинні розв'язки рівняння (5.41):

$$\bar{z}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ та } \bar{z}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними. Дійсно, це випливає з того, що відношення $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \neq \text{const}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (5.41) запишемо у вигляді

$$z = C_1\bar{z}_1 + C_2\bar{z}_2;$$

$$z = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5.44)$$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$z'' - 4z' + 13z = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, поклавши $z = e^{kx}$:

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Розв'язавши характеристичне рівняння, знаходимо $k_1 = 2 + 3j$, $k_2 = 2 - 3j$. Ці корені комплексно-спряжені. Тоді частинними лінійно незалежними розв'язками будуть:

$$\bar{z}_1 = e^{2x} \cos 3x; \quad \bar{z}_2 = e^{2x} \sin 3x.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$z = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Додамо до рівняння початкові умови $z(0) = 1$; $z'(0) = 0$, тобто поставимо задачу Коші про визначення частинного розв'язку заданого рівняння.

Знайдемо C_1 і C_2 . Із умови $z(0) = 1$ маємо $C_1 = 1$. Для використання другої умови знайдемо першу похідну від розв'язку:

$$z' = 2e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 3e^{2x} (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x);$$

$$z' = e^{2x} [2(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 3(C_2 \cos 3x - C_1 \sin 3x)].$$

Використовуючи умову $z'(0) = 0$, дістанемо

$$2C_1 + 3C_2 = 0; \quad C_2 = -\frac{2}{3}C_1; \quad C_2 = -\frac{2}{3}; \quad C_1 = 1.$$

Розв'язок задачі Коші запишемо у вигляді

$$z = e^{2x} \left(\cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x \right).$$

3. Нехай $k_1 = k_2 = k$, тоді $z_1 = e^{kx}$. Другий розв'язок шукатимемо у формі $z_2 = u(x)e^{kx}$, вважаючи $u(x)$ невідомою. Тоді

$$z_2' = u'(x)e^{kx} + ku(x)e^{kx};$$

$$z_2'' = u''(x)e^{kx} + 2u'(x)ke^{kx} + k^2u(x)e^{kx}.$$

Внесемо ці вирази в рівняння (5.41):

$$[u'' + 2u'k + uk^2]e^{kx} + a_1(u' + uk)e^{kx} + a_2ue^{kx} = 0.$$

Після відповідних перетворень маємо

$$u'' + (2k + a_1)u' = 0.$$

За теоремою Вієта $2k + a_1 = 0$, тому

$$u''(x) = 0; \quad u(x) = Ax + B.$$

Поклавши $A = 1$; $B = 0$, дістаємо $z_2 = xe^{kx}$. Розв'язки $z_1 = e^{kx}$ і $z_2 = xe^{kx}$, як легко перевірити, утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд

$$z = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x). \quad (5.45)$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + 2k + 1 = 0, \quad k_1 = k_2 = -1.$$

Частинні розв'язки:

$$z_1 = e^{-x}; \quad z_2 = xe^{-x}.$$

Загальний розв'язок:

$$\bar{z} = e^{-x}(C_1 + C_2x).$$

ВПРАВИ. 1. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $z'' - 5z' + 6z = 0$; б) $z'' - 9z = 0$; в) $z'' + 4z' + 13z = 0$.

Відповідь. а) $z = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; б) $z = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$;

в) $z = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

2. Знайти частинні розв'язки, що задовольняють вказані умови:

а) $z'' - 5z' + 4z = 0$, $z = 5$, $z' = 8$ при $x = 0$;

б) $z'' = \frac{z}{a^2}$, $z = a$, $z' = 0$ при $x = 0$.

Відповідь. а) $z = 4e^x + e^{4x}$; б) $z = \frac{a}{2} \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$.

5.10. Лінійні однорідні рівняння n -го порядку з сталими коефіцієнтами

Занишемо у загальному вигляді лінійне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \dots + a_nz = 0. \quad (5.46)$$

Фундаментальну систему розв'язків (5.46) шукатимемо аналогічно рівнянням другого порядку у формі

$$z = e^{kx}, \quad (5.47)$$

де k — невідоме, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Підставляючи (5.47) в (5.46), дістанемо рівняння для визначення k :

$$M(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (5.48)$$

Рівняння (5.48) називається **характеристичним**.

Отже задача звелась до визначення коренів цього рівняння.

Серед коренів характеристичного рівняння можуть бути такі.

1. Всі корені характеристичного рівняння k_1, k_2, \dots, k_n дійсні і різні. Тоді фундаментальну систему утворюють функції, лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty; +\infty)$:

$$z_1 = e^{k_1 x}; z_2 = e^{k_2 x}; \dots; z_n = e^{k_n x}, \quad (5.49)$$

тому загальний розв'язок має вигляд

$$z = \sum_{i=1}^n C_i z_i(x) = \sum_{i=1}^n C_i e^{k_i x}. \quad (5.50)$$

2. Серед коренів характеристичного рівняння крім дійсних є і комплексно-спряжені, але немає кратних. Нехай k_1, \dots, k_m — дійсні корені (5.48) і

$$k_l = \alpha_l \pm j\beta_l; \quad 2l = m+1, m+2, \dots, n.$$

Тоді дійсним кореням відповідають частинні розв'язки виду

$$z_i = e^{k_i x}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.51)$$

а парі комплексно-спряжених коренів $\alpha_l \pm j\beta_l$ на підставі леми з п. 5.9 —

$$e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x; \quad e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x. \quad (5.52)$$

Система частинних розв'язків $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_m x}$;

$$e^{\alpha_{m+1} x} \cos \beta_{m+1} x, \quad e^{\alpha_{m+1} x} \sin \beta_{m+1} x, \quad e^{\alpha_{m+2} x} \cos \beta_{m+2} x,$$

$$e^{\alpha_{m+2} x} \sin \beta_{m+2} x, \quad \dots, \quad e^{\frac{\alpha_{m+n} x}{2}} \cos \beta_{\frac{m+n}{2}} x, \quad e^{\frac{\alpha_{m+n} x}{2}} \sin \beta_{\frac{m+n}{2}} x$$

$$\left(\text{оскільки } m + \frac{n-m}{2} = \frac{m+n}{2} \right), \quad (5.53)$$

як легко довести, утворює лінійно незалежну систему функцій. Загальний розв'язок у цьому разі буде лінійною комбінацією вказаних функцій (5.53).

3. Серед коренів характеристичного рівняння є кратні. Нехай k_i — дійсний корінь кратності m . Тоді цьому кореню відповідають m частинних розв'язків виду

$$e^{k_i x}, \quad x e^{k_i x}, \quad x^2 e^{k_i x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{k_i x}. \quad (5.54)$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є комплексні, то кожній парі комплексно-спряжених коренів

$$k_i^{(1)} = \alpha_i + j\beta_i, \quad k_i^{(2)} = \alpha_i - j\beta_i$$

кратності μ відповідають 2μ частинних розв'язків:

$$e^{\alpha_i x} \cos \beta_i x, \quad x e^{\alpha_i x} \cos \beta_i x, \quad \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\alpha_i x} \cos \beta_i x; \quad (5.55)$$

$$e^{\alpha_i x} \sin \beta_i x, \quad x e^{\alpha_i x} \sin \beta_i x, \quad \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\alpha_i x} \sin \beta_i x.$$

Можна довести, що знайдені таким чином частинні розв'язки z_1, z_2, \dots, z_n складають систему лінійно незалежних функцій, тобто фундаментальну систему. Загальний розв'язок однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами запишемо у вигляді

$$z = \sum_{i=1}^n C_i z_i(x). \quad (5.56)$$

Зауваження. Якщо корені чисто уявні, то в (5.55) $\alpha_i = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$a) \quad z''' - z'' + 2z' + 4z = 0. \quad (5.57)$$

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння:

$$k_1 = -1, \quad k_{2,3} = 1 \pm j\sqrt{3}. \quad (5.58)$$

Частинні розв'язки

$$z_1 = e^{-x}, \quad z_2 = e^x \cos \sqrt{3}x, \quad z_3 = e^x \sin \sqrt{3}x \quad (5.59)$$

складають фундаментальну систему, тому загальний розв'язок має вигляд

$$z = C_1 e^{-x} + e^x (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x). \quad (5.60)$$

$$6) z^{(n)} + 2z'' + z = 0. \quad (5.61)$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння: $(k^2 + 1)^2 = 0$, його корені: $k_1 = k_2 = j$; $k_3 = k_4 = -j$. Частинні розв'язки:

$$z_1 = \cos x, \quad z_2 = x \cos x, \quad z_3 = \sin x, \quad z_4 = x \sin x.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$z = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$$

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок рівняння.

1. $z''' - 13z'' + 12z' = 0$. Відповідь. $z = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}$.

2. $z^{(4)} - 2z'' + z = 0$. Відповідь. $z = (C_1 + C_2 x) e^x + (C_3 + C_4 x) e^{-x}$.

3. $z''' - 3z'' + 3z' - z = 0$. Відповідь. $z = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x$.

5.11. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальні властивості лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad (5.62)$$

де $f(x) \neq 0$; a_1, \dots, a_n — неперервні функції на $[a, b]$. Однорідне рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню, запишемо у вигляді

$$L(z) \equiv z^{(n)} + a_1(x)z^{(n-1)} + \dots + a_n(x)z = 0. \quad (5.63)$$

Теорема 7. Якщо відомими є будь-який частинний розв'язок $y^*(x)$ рівняння (5.62) і загальний розв'язок рівняння (5.63)

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \dots + C_n z_n(x), \quad (5.64)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі; $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ — система лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (5.63), то загальний розв'язок у рівняння (5.62) дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння

$$y = y^* + z. \quad (5.65)$$

Доведення. Вираз (5.65) є розв'язком рівняння (5.62). Це випливає з таких міркувань:

$$L(z) = 0; \quad L(y^*) = f(x);$$

$$L(y) = L(z + y^*) = L(z) + L(y^*) = f(x).$$

Тепер нам залишилося довести, що розв'язок рівняння (5.65)

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n + y^* \quad (5.66)$$

є загальним. Останнє означає, що за будь-якими заданими початковими умовами

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (5.67)$$

з (5.66) одночасно визначаються довільні сталі, що відповідають заданим початковим умовам (5.67).

Дійсно, здиференціюємо вираз (5.66) $(n-1)$ разів. В усіх здобутих у такий спосіб рівностях замінимо x на x_0 , а $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ на $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. У результаті дістанемо систему рівнянь відносно сталих C_1, C_2, \dots, C_n :

$$\begin{cases} C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + \dots + C_n z_n(x_0) = -y_0 - y^*(x_0); \\ C_1 z_1'(x_0) + C_2 z_2'(x_0) + \dots + C_n z_n'(x_0) = -y'_0 - y'^*(x_0); \\ \dots \\ C_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 z_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n z_n^{(n-1)}(x_0) = -y_0^{(n-1)} - y^{*(n-1)}(x_0). \end{cases} \quad (5.68)$$

Визначником системи (5.68) є визначник Вроньського $W(x_0)$. Він не дорівнює нулю, оскільки фундаментальна система функцій z_1, z_2, \dots, z_n в (a, b) лінійно незалежна. Тому система (5.68) має єдиний розв'язок, що визначає C_1, C_2, \dots, C_n , а отже, розв'язок (5.66) є загальним.

Дуже часто фундаментальну систему z_1, z_2, \dots, z_n позначають y_1, y_2, \dots, y_n , а загальний розв'язок рівняння (5.63)

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x). \quad (5.69)$$

Теорема 8. Якщо права частина рівняння (5.62) є сумою кількох функцій, то частинний розв'язок рівняння дорівнює сумі частинних розв'язків, що відповідають кожній функції окремо.

Доведення. Нехай

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

а частинними розв'язками рівнянь

$$L(y) = f_1(x); \quad L(y) = f_2(x)$$

є відповідно $y_1^*(x)$ і $y_2^*(x)$, $y^* = y_1^* + y_2^*$. Тоді

$$L(y_1^*(x)) = f_1(x), \quad L(y_2^*(x)) = f_2(x);$$

$$L(y^*) = L(y_1^* + y_2^*) = L(y_1^*) + L(y_2^*) = f_1(x) + f_2(x).$$

Ця теорема дає змогу спростити відшукування частинних розв'язків неоднорідних рівнянь.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язання. Розглянемо два допоміжних рівняння:

$$y'' + y = x, \quad y'' + y = -\sin 2x, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -\sin 2x.$$

Розв'яжемо однорідне рівняння:

$$z'' + z = 0, \quad k^2 + 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm j.$$

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Безпосередньою перевіркою переконаємося в тому, що частинним розв'язком для першого рівняння буде $y_1^* = x$, а для другого $y_2^* = \frac{1}{3} \sin 2x$. На підставі теореми маємо

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{3} \sin 2x.$$

Метод варіації сталих. Як впливає з рівняння (5.66), задача про відшукування загального розв'язку неоднорідного рівняння (5.62) зводиться до відшукування загального розв'язку однорідного рівняння (5.63) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння y^* . Тут викладемо метод, що дає змогу визначити загальний розв'язок неоднорідного рівняння за загальним розв'язком однорідного рівняння.

Теорема 9. Якщо відомою є фундаментальна система для однорідного рівняння, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння визначається квадратурою.

Доведення. Для доведення теореми скористаємося методом варіації (у формі Лагранжа) довільних сталих. Це метод відшукування загального розв'язку неоднорідного рівняння (5.62), який було використано при розв'язуванні лінійного неоднорідного рівняння першого порядку (п. 2.5). За умовою теореми відомою є фундаментальна система y_1, y_2, \dots, y_n ; $\bar{y} = \sum_{i=1}^n C_i y_i$.

Шукатимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i, \quad (5.70)$$

де $C_i(x)$ — невідомі функції.

Для визначення цих n невідомих функцій поки що є одна умова — функція (5.70) має задовольняти рівняння (5.62). Отже, $(n-1)$ умов вибору функцій $C_i(x)$ є довільні. Для того щоб задовольнити рівняння (5.62), потрібно знайти n довільних функцій (5.70), тому для спрощення обчислення цих похідних щоразу вважатимемо, що лінійна комбінація $C_i(x)$ по y_i дорівнює нулю. Всі можливі $(n-1)$ умови накладаємо на $(n-1)$ похідні від розв'язку (5.70), а n -ну похідну обчислюємо як звичайно. Отже, дістаємо вирази для похідних:

$$\begin{cases} y' = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i'; \\ y'' = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i''; \\ \dots \\ y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n-1)}; \\ y^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i^{(n-1)}. \end{cases} \quad (5.71)$$

Додаткові умови, що накладаються на функцію (5.70), мають вигляд

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i' = 0; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i^{(n-2)} = 0. \end{cases} \quad (5.72)$$

Замінюючи в (5.62) всі похідні на (5.71), а функцію — на (5.70), дістаємо

$$L(y) = \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i^{(n-1)} + \\ + a_1 \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i^{(n-1)} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n C_i(x)y_i = f(x);$$

$$L(y) = \sum_{i=1}^n C_i(x) \left[y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \dots + a_n y_i \right] + \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Однак

$$y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \dots + a_n y_i = 0,$$

тому

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x). \quad (5.73)$$

Отже, для визначення невідомих функцій $C_i(x)$ маємо систему n рівнянь, що складається з (5.72) і (5.73):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i'(x) = 0; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \quad (5.74)$$

Визначник цієї системи є $W(x)$. Він не дорівнює нулю. Тому система має єдиний розв'язок

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Інтегруючи, маємо

$$C_i(x) = \int \psi_i(x) dx + \tilde{C}_i = \gamma_i(x) + \tilde{C}_i,$$

де \tilde{C}_i — довільні сталі.

Повертаючись до (5.70), маємо

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i \gamma_i(x) = \bar{y} + y^* ;$$

при цьому перша сума збігається із загальним розв'язком однорідного рівняння, а друга є частинним розв'язком неоднорідного рівняння.

Отже, для розв'язання неоднорідного диференціального рівняння методом варіації довільних сталих необхідно:

- 1) розв'язати однорідне рівняння і записати його загальний розв'язок;
- 2) записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння у формі загального розв'язку однорідного рівняння, але зі змінними коефіцієнтами;
- 3) побудувати систему (5.74) і розв'язати її;
- 4) здобутий розв'язок підставити в (5.70).

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$.

Розв'язання. Рівняння має єдиний розв'язок у будь-якому інтервалі (a, b) , що не містить точок, в яких $\sin x = 0$:

$$x = n\pi \quad (n = 0; \pm 1; \dots).$$

Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y''' + y' = 0; \quad k^3 + k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_{2,3} = \pm j.$$

Система $y_1 = 1; y_2 = \cos x; y_3 = \sin x$ є фундаментальною, тому

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Запишемо (5.70) у вигляді

$$y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x. \quad (5.75)$$

Знайдемо похідні:

$$y' = -C_2(x)\sin x + C_3(x)\cos x;$$

$$y'' = -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x;$$

$$y'' = C_2(x)\sin x - C_3(x)\cos x - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x.$$

Складемо систему (5.74):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0; \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0; \\ -C_2(x)\cos x - C_3(x)\sin x = \frac{1}{\sin x}; \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1;$$

$$C_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x};$$

$$C_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg} x;$$

$$C_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1;$$

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \bar{C}_1;$$

$$C_2(x) = -\int \operatorname{ctg} x dx = -\ln |\sin x| + \bar{C}_2;$$

$$C_3(x) = -\int dx = -x + \bar{C}_3;$$

$$y = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x \cdot \ln |\sin x| - x \sin x.$$

Зауваження. Нехай у рівнянні (5.62) коефіцієнти $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ сталі. Тоді розв'язок однорідного рівняння відомий. Користуючись методом варіації сталих, можна легко знайти розв'язок неоднорідного рівняння з будь-якою правою частиною $f(x)$. Ілюстрацією цього є розглянутий вище приклад.

ВПРАВИ. Застосовуючи метод варіації довільних сталих, розв'язати рівняння:

а) $y'' + y = \operatorname{tg} x$. Відповідь. $y = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$;

б) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. Відповідь. $y = x \sin x + \cos x \ln |\cos x| + C_1 \cos x + C_2 \sin x$;

в) $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x$. Відповідь. $y = x(|\ln|x|| - 1)e^x + (C_1 + C_2x)e^x$.

5.12. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

Нехай задано неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x). \quad (5.76)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (5.76), згідно з (5.65), запишемо у вигляді

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

1. Нехай

$$f(x) = (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n)e^{\alpha x} \quad (5.77)$$

або

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

$$\text{де } P_n(x) = (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n).$$

Рівняння (5.76) запишемо у вигляді

$$y'' + a_1y' + a_2y = P_n(x)e^{\alpha x}. \quad (5.78)$$

Можливі такі випадки.

а) Значення α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0. \quad (5.79)$$

Частинний розв'язок y^* треба шукати у формі

$$y^* = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x}, \quad (5.80)$$

де A_0, A_1, \dots, A_n — невизначені коефіцієнти.

Покажемо, як знайти ці коефіцієнти так, щоб (5.80) було розв'язком рівняння (5.78). Знайдемо $\frac{dy^*}{dx}$; $\frac{d^2y^*}{dx^2}$. Підставляючи їх в (5.78), після скорочення на $e^{\alpha x}$ дістаємо

$$Q_n''(x) + (2\alpha + a_1)Q_n'(x) + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q_n(x) = P_n(x). \quad (5.81)$$

В останньому виразі зліва маємо поліном $Q_n(x)$ степеня n , поліном $Q_n'(x)$ степеня $(n-1)$, поліном $Q_n''(x)$ степеня $(n-2)$. Отже, в лівій частині рівняння (5.81), взагалі кажучи, маємо поліном степеня n з невизначеними коефіцієнтами, а в правій частині — поліном степеня n , але з відомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , дістанемо систему $(n+1)$ рівнянь для визначення коефіцієнтів A_0, A_1, \dots, A_n .

б) Значення α є однократним коренем характеристичного рівняння $k^2 + a_1k + a_2 = 0$. Шукати розв'язок у формі (5.80) у цьому разі не можна, оскільки $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, а (5.81) набирає вигляду

$$Q_n''(x) + (2\alpha + a_1)Q_n'(x) = P_n(x).$$

Така рівність не може бути тотожністю, тому що у лівій її частині маємо поліном степеня $(n-1)$, а в правій — поліном степеня n . Для того щоб цьому запобігти, у розв'язку (5.80) треба мати поліном степеня $(n+1)$:

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \quad (5.82)$$

в) Значення α є двократним коренем характеристичного рівняння $k^2 + a_1k + a_2 = 0$. У цьому разі в (5.81) $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ і $2\alpha + a_1 = 0$, тому в лівій частині залишається поліном степеня $(n-2)$. Для того щоб у лівій частині мати поліном степеня n , частинний розв'язок слід шукати у формі

$$y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}. \quad (5.83)$$

2. Нехай

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + R_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (5.84)$$

Цей випадок можна звести до попереднього, міркуючи так. За формулами Ейлера

$$\cos \beta x = \frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2}; \quad \sin \beta x = \frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2j},$$

тоді

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) \frac{e^{(\alpha+j\beta)x} + e^{(\alpha-j\beta)x}}{2} + R_m(x) \frac{e^{(\alpha+j\beta)x} - e^{(\alpha-j\beta)x}}{2j}; \\ f(x) &= \left[\frac{1}{2} P_n(x) + \frac{1}{2j} R_m(x) \right] e^{(\alpha+j\beta)x} + \left[\frac{1}{2} P_n(x) - \frac{1}{2j} R_m(x) \right] e^{(\alpha-j\beta)x} = \\ &= D_{nm}(x) e^{(\alpha+j\beta)x} + E_{nm}(x) e^{(\alpha-j\beta)x}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

де $D_{nm}(x)$, $E_{nm}(x)$ — поліноми, степені яких дорівнюють найвищому степеню поліномів $P_n(x)$ і $R_m(x)$.

Вираз (5.85) аналогічний (5.77), тому, якщо $\alpha + j\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то за аналогією з (5.80) з урахуванням леми (п. 5.9) маємо

$$y^*(x) = M(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + N(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (5.86)$$

де $M(x)$, $N(x)$ — поліноми з невизначеними коефіцієнтами, степені яких дорівнює степеню поліномів $P_n(x)$ і $R_m(x)$.

Зауваження. Форма (5.86) зберігається незалежно від того, дорівнює чи не дорівнює тотожно нулю один з поліномів. Іншими словами, розв'язок у формі (5.86) шукаємо і у випадку, коли

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

або

$$f(x) = R_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Доведення методу відшукування частинного розв'язку неоднорідного рівняння впливає з методу варіації довільної сталої.

Приклади. Розв'язати рівняння.

1. $y'' - 3y' + 2y = 2 \sin x$.

Розв'язання.

$$k^2 - 3k + 2 = 0; k_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}}; k_1 = 2; k_2 = 1;$$

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

$$y^* = A \cos x + B \sin x; (y^*)' = -A \sin x + B \cos x; (y^*)'' = -A \cos x - B \sin x;$$

$$-A \cos x - B \sin x + 3A \sin x - 3B \cos x + 2A \cos x + 2B \sin x = 2 \sin x;$$

$$\begin{cases} -A - 3B + 2A = 0; \\ -B + 3A + 2B = 2; \end{cases} \begin{cases} A = 3B; A = \frac{3}{5}; \\ B + 9B = 2; B = \frac{1}{5}; \end{cases}$$

$$y^* = \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x; y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Якщо $\alpha + j\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то, згідно з (5.82) і з урахуванням леми з п. 5.9, маємо

$$y^* = x[M(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + N(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]. \quad (5.87)$$

Зауваження залишається в силі і для цього випадку.

2. $y'' - 2y' + 10y = e^x \cos 3x$.

Розв'язання.

$$k^2 - 2k + 10 = 0; k_1 = 1 + 3j; k_2 = 1 - 3j;$$

$$\bar{y} = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$$

Підстановка y^* в рівняння та пошук невизначених коефіцієнтів здійснюються таким чином:

$$\begin{array}{l} 10 \left\{ \begin{array}{l} y^* = xe^x(A \sin 3x + B \cos 3x); \\ (y^*)' = e^x(A \sin 3x + B \cos 3x) + \\ + xe^x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x); \\ (y^*)'' = e^x(A \sin 3x + B \cos 3x) + e^x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + \\ + e^x(A \sin 3x + B \cos 3x) + xe^x(A \sin 3x + B \cos 3x) + \\ + xe^x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + e^x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + \\ + xe^x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + xe^x(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x); \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2B + B + 3A + B + 3A = 1; \\ -2A + A - 3B + A - 3B = 0; \end{array} \right. B = 0; A = \frac{1}{6}. \end{array}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) + \frac{x}{6} e^x \sin 3x.$$

Далі розглянемо один важливий окремий випадок. Нехай в рівнянні (5.84) поліноми $P_n(x)$ і $R_m(x)$ мають нульовий степінь і $\alpha = 0$:

$$f(x) = A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x. \quad (5.88)$$

Тоді, згідно з формулами (5.86) і (5.87), маємо два варіанти.

а) Якщо $j\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то, згідно з (5.86), частинний розв'язок знаходимо у формі

$$y^* = M_0 \cos \beta x + N_0 \sin \beta x. \quad (5.89)$$

Значимо, що наведене вище зауваження залишається в силі і в цьому разі.

б) Якщо $j\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то, згідно з (5.87), частинний розв'язок знаходимо у формі

$$y^* = x(M_0 \cos \beta x + N_0 \sin \beta x). \quad (5.90)$$

Звичайно у формулі (5.88) β називається **частотою зовнішнього збурення**, а коефіцієнт в уявному корені — **власною частотою**. Умову (5.90) тепер можна сформулювати таким чином: якщо частота зовнішнього збурення збігається з власною частотою, то розв'язок шукаємо у формі (5.90). Збіг частоти зовнішнього збурення з власною частотою називається **резонансом**. Як впливає з (5.90), за умов резонансу розв'язок рівняння зростає майже за лінійним законом.

Приклади. Розв'язати рівняння.

1. $y'' + y = 4 \cos 2x$.

Розв'язання.

$$k^2 + 1 = 0; k_1 = j; k_2 = -j;$$

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y^* = A \sin 2x + B \cos 2x; (y^*)' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x;$$

$$(y^*)'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x;$$

$$-3A \sin 2x - 3B \cos 2x = 4 \cos 2x; A = 0; B = -\frac{4}{3}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{4}{3} \cos 2x.$$

$$2. y'' + 9y = 24 \cos 3x.$$

Розв'язання.

$$k^2 + 9 = 0; k_1 = 3j; k_2 = -3j;$$

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x;$$

$$y^* = x(A \sin 3x + B \cos 3x);$$

$$(y^*)' = A \sin 3x + B \cos 3x + x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x);$$

$$(y^*)'' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x + 3A \cos 3x - 3B \sin 3x + \\ + x(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x); A = 4; B = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 4x \sin 3x.$$

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок методом невизначених коефіцієнтів.

$$1. y'' + y = \cos x. \text{ Відповідь. } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

$$2. y'' + 4y' + 4y = x^2. \text{ Відповідь. } y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8}.$$

$$3. y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x. \text{ Відповідь. } y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5} (3 \sin 2x + \cos 2x).$$

$$4. y'' - 2y' + y = \sin x. \text{ Відповідь. } y = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{1}{2} \cos x.$$

5.13. Лінійні неоднорідні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай дано рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x). \quad (5.91)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (5.91), згідно з (5.65), має вигляд

$$y = z + y^*, \quad (5.92)$$

де z — розв'язок рівняння $L(z) = 0$.

Якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то, користуючись методом варіації довільної сталої, можна довести, що частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів (за аналогією з рівнянням другого порядку). При цьому можливі такі випадки.

1. Нехай $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ (див. (5.77)), тоді, якщо α не є коренем характеристичного рівняння (5.48), то частинний розв'язок (5.91) шукають у формі

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}, \quad (5.93)$$

де $Q_n(x)$ — поліном з невизначеними коефіцієнтами степеня n , що дорівнює степеню полінома $P_n(x)$. Якщо α є коренем характеристичного рівняння (5.48) кратності r , то

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}. \quad (5.94)$$

2. Нехай

$$f(x) = A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x. \quad (5.95)$$

Якщо $j\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y^* = M_0 \cos \beta x + N_0 \sin \beta x, \quad (5.96)$$

де M_0, N_0 — невизначені коефіцієнти.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 15 \sin 2x + 20 \cos 2x.$$

Розв'язання.

$$k^3 - k^2 + 9k - 9 = 0; k_1 = 1; k_2 = 3j; k_3 = -3j;$$

$$z = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x;$$

$$-9 \begin{cases} y^* = A \sin 2x + B \cos 2x; \\ (y^*)' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x; \\ (y^*)'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x; \\ (y^*)''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x; \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} (y^*)' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x; \\ (y^*)'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x; \\ (y^*)''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x; \end{cases}$$

$$-1 \begin{cases} (y^*)'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x; \\ (y^*)''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x; \end{cases}$$

$$1 \begin{cases} (y^*)''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x; \end{cases}$$

$$A = 1; B = -2; y^* = \sin 2x - 2 \cos 2x; y = z + y^*.$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + \sin 2x - 2 \cos 2x.$$

Якщо $j\beta$ — корінь характеристичного рівняння кратності r , то

$$y^* = x^r [M_0 \cos \beta x + N_0 \sin \beta x]. \quad (5.97)$$

Зазначимо, що тут можна говорити про явище резонансу.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 2 \sin 2x + \cos 2x.$$

Розв'язання.

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = 2j; \quad k_3 = -2j;$$

$$z = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Тут $2j$ є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$-4 \quad \begin{cases} y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x); \\ (y^*)' = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x); \\ (y^*)'' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x); \\ (y^*)''' = -8A \cos 2x - 8B \sin 2x - 4A \cos 2x - 4B \sin 2x + x(8A \sin 2x - 8B \cos 2x); \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} (y^*)' = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x); \\ (y^*)'' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x); \\ (y^*)''' = -8A \cos 2x - 8B \sin 2x - 4A \cos 2x - 4B \sin 2x + x(8A \sin 2x - 8B \cos 2x); \end{cases}$$

$$-1 \quad \begin{cases} (y^*)'' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x); \\ (y^*)''' = -8A \cos 2x - 8B \sin 2x - 4A \cos 2x - 4B \sin 2x + x(8A \sin 2x - 8B \cos 2x); \end{cases}$$

$$1 \quad \begin{cases} (y^*)''' = -8A \cos 2x - 8B \sin 2x - 4A \cos 2x - 4B \sin 2x + x(8A \sin 2x - 8B \cos 2x); \\ (y^*)'' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x); \\ (y^*)' = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x); \\ y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4A - 4B - 12A = 1; \\ 4B + 4A - 12B = 2; \end{cases} \quad A = 0; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad y^* = -\frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

3. Нехай

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x]. \quad (5.98)$$

У цьому разі розв'язок рівняння (5.91) шукаємо у формі

$$y^* = x^r e^{\alpha x} [M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x], \quad (5.99)$$

де r показує, скільки разів $\alpha + j\beta$ є коренем характеристичного рівняння (5.48), а степені поліномів M і N дорівнюють максимальним степеням поліномів P_n і R_m . Дійсно, замінимо в (5.98) $\cos \beta x$ і $\sin \beta x$ за формулами Ейлера. Дістанемо

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x} P_n(x) \frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} + e^{\alpha x} R_m(x) \frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} = \\ & = e^{(\alpha+j\beta)x} \left[\frac{P_n(x)}{2} + \frac{R_m(x)}{2j} \right] + e^{(\alpha-j\beta)x} \left[\frac{P_n(x)}{2} - \frac{R_m(x)}{2j} \right]. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\frac{P_n(x)}{2} + \frac{R_m(x)}{2j} = M(x); \quad \frac{P_n(x)}{2} - \frac{R_m(x)}{2j} = N(x).$$

Виразу $M(x)e^{(\alpha+j\beta)x}$ відповідає $x^r e^{\alpha x} M(x) \cos \beta x$, а $N(x)e^{(\alpha-j\beta)x}$ відповідає $x^r e^{\alpha x} N(x) \sin \beta x$, тобто y^* обчислюється за формулою (5.99).

Приклади. 1. Розв'язати рівняння $y'' + y = x \cos x + \sin x$.

Розв'язання. $k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = +j; \quad k_2 = -j; \quad \bar{z} = C_1 \sin x + C_2 \cos x;$

$$1 \quad \begin{cases} y^* = x[(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x] = (Ax^2 + Bx) \sin x + (Cx^2 + Dx) \cos x; \\ (y^*)' = (2Ax + B) \sin x + (2Cx + D) \cos x + (Ax^2 + Bx) \cos x - (Cx^2 + Dx) \sin x; \\ (y^*)'' = 2A \sin x + 2C \cos x + (2Ax + B) \cos x - (2Cx + D) \sin x + (2Ax + B) \cos x - \\ - (2Cx + D) \sin x - (Ax^2 + Bx) \sin x - (Cx^2 + Dx) \cos x; \end{cases}$$

$$0 \quad \begin{cases} (y^*)' = (2Ax + B) \sin x + (2Cx + D) \cos x + (Ax^2 + Bx) \cos x - (Cx^2 + Dx) \sin x; \\ (y^*)'' = 2A \sin x + 2C \cos x + (2Ax + B) \cos x - (2Cx + D) \sin x + (2Ax + B) \cos x - \\ - (2Cx + D) \sin x - (Ax^2 + Bx) \sin x - (Cx^2 + Dx) \cos x; \end{cases}$$

$$1 \quad \begin{cases} (y^*)'' = 2A \sin x + 2C \cos x + (2Ax + B) \cos x - (2Cx + D) \sin x + (2Ax + B) \cos x - \\ - (2Cx + D) \sin x - (Ax^2 + Bx) \sin x - (Cx^2 + Dx) \cos x; \\ (y^*)' = (2Ax + B) \sin x + (2Cx + D) \cos x + (Ax^2 + Bx) \cos x - (Cx^2 + Dx) \sin x; \\ y^* = x[(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x] = (Ax^2 + Bx) \sin x + (Cx^2 + Dx) \cos x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B + 2C = 0; \quad A = \frac{1}{4}; \\ 2B + 2C = 0; \quad B = 0; \\ 4A = 1; \quad C = 0; \\ 2A - 2D = 1; \quad D = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$y^* = \frac{1}{4} x^2 \sin x - \frac{1}{4} x \cos x;$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{4} x^2 \sin x - \frac{1}{4} x \cos x.$$

Зауваження. Навіть тоді, коли права частина виразів (5.95), (5.98) містить лише $\sin \beta x$ або лише $\cos \beta x$, частинний розв'язок потрібно шукати у формі (5.96) або (5.99).

2. Розв'язати рівняння $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 3 \sin x$.

Розв'язання. $k^4 + 5k^2 + 4 = 0; \quad k_1 = j; \quad k_2 = -j; \quad k_3 = 2j; \quad k_4 = -2j.$

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x;$$

$$4 \quad \begin{cases} y^* = x(A \sin x + B \cos x) = Ax \sin x + Bx \cos x; \\ (y^*)' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x); \\ (y^*)'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x); \\ (y^*)''' = -2A \sin x - 2B \cos x - A \sin x - B \cos x + x(-A \cos x + B \sin x); \\ (y^*)^{(4)} = -3A \cos x + 3B \sin x - A \cos x + B \sin x + x(A \sin x + B \cos x); \end{cases}$$

$$0 \quad \begin{cases} (y^*)' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x); \\ (y^*)'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x); \\ (y^*)''' = -2A \sin x - 2B \cos x - A \sin x - B \cos x + x(-A \cos x + B \sin x); \\ (y^*)^{(4)} = -3A \cos x + 3B \sin x - A \cos x + B \sin x + x(A \sin x + B \cos x); \end{cases}$$

$$5 \quad \begin{cases} (y^*)'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x); \\ (y^*)''' = -2A \sin x - 2B \cos x - A \sin x - B \cos x + x(-A \cos x + B \sin x); \\ (y^*)^{(4)} = -3A \cos x + 3B \sin x - A \cos x + B \sin x + x(A \sin x + B \cos x); \end{cases}$$

$$0 \quad \begin{cases} (y^*)''' = -2A \sin x - 2B \cos x - A \sin x - B \cos x + x(-A \cos x + B \sin x); \\ (y^*)^{(4)} = -3A \cos x + 3B \sin x - A \cos x + B \sin x + x(A \sin x + B \cos x); \end{cases}$$

$$1 \quad \begin{cases} (y^*)^{(4)} = -3A \cos x + 3B \sin x - A \cos x + B \sin x + x(A \sin x + B \cos x); \\ (y^*)''' = -2A \sin x - 2B \cos x - A \sin x - B \cos x + x(-A \cos x + B \sin x); \\ (y^*)'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x); \\ (y^*)' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x); \\ y^* = x(A \sin x + B \cos x) = Ax \sin x + Bx \cos x; \end{cases}$$

$$6A \cos x - 6B \sin x = 3 \sin x;$$

$$\begin{cases} 6A = 0; \quad A = 0; \\ -6B = 3; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad y^* = -\frac{1}{2} x \cos x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

Зауваження. Якщо права частина рівняння (5.91) є сталою величиною, то рівняння завжди можна звести до однорідного. Дійсно, нехай в (5.91) $f(x) = Q_0 = \text{const}$. Введемо нову функцію $Y(x)$, пов'язану із старою $y(x)$ співвідношенням $y(x) = Y(x) + Q_0$. Тоді

$$y^{(i)}(x) = Y^{(i)}(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Рівняння (5.91) перепишемо у вигляді

$$Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \dots + a_n \left(Y + \frac{Q_0}{a_n} \right) = Q_0,$$

або

$$Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \dots + a_n Y = 0. \quad (5.100)$$

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок рівнянь методом невизначених коефіцієнтів:

- а) $y'' + y''' = \cos 4x$. *Відповідь.* $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{1088} (4 \cos 4x - \sin 4x)$;
- б) $y'' - 2y''' + y'' = e^x$. *Відповідь.* $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$;
- в) $y''' - y = 3x - 1$. *Відповідь.* $y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - 3x + 1$.

5.14. Метод комплексних амплітуд

Нехай задано рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = a \sin(\omega t + \alpha); \quad (5.101)$$

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.102)$$

в яких невідомими функціями є $y(t)$ і $x(t)$, а незалежною змінною є час t . Праві частини рівнянь (5.101) і (5.102) є гармонічними функціями часу. У цих функціях звичайно a — амплітуда, ω — частота, α — початкова фаза.

До рівнянь вигляду (5.101) і (5.102) приводять численні фізичні задачі. Наприклад, вібрації машин, спричинені нерівноваженістю їх

нерухомих елементів, описуються рівняннями типу (5.101) і (5.102). В електротехніці права частина таких рівнянь пов'язана з ЕРС. У вібраційних машинах спеціально використовують незрівноважений вал, що обертається з певною частотою. Він створює коливання так званого робочого органу машини. Коливання робочого органу вібраційної машини описуються рівняннями (5.101) і (5.102).

Рівняння (5.101) і (5.102) можна розв'язувати за загальною методикою, викладеною в п. 5.13: розв'язують однорідне рівняння $L(z) = 0$ і знаходять його загальний розв'язок; знаходять частинний розв'язок неоднорідного рівняння; якщо k є коренем характеристичного рівняння

$$L(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

кратності r , то розв'язок знаходять у вигляді

$$y^* = t^r [A \cos(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \alpha)].$$

Поряд з цим методом в електротехніці для розв'язування рівнянь (5.101) і (5.102) застосовують так званий метод комплексних амплітуд. Щоб зрозуміти суть цього методу, розглянемо комплексну функцію

$$r(t) = \rho e^{j\omega t}, \quad (5.103)$$

де

$$\rho = a e^{j\alpha}. \quad (5.104)$$

Зазначимо, що $|\rho| = a$, оскільки $|e^{j\alpha}| = 1$. Комплексну функцію (5.103) можна записати у вигляді

$$r(t) = a e^{j(\omega t + \alpha)} = a [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)]. \quad (5.105)$$

Звідси випливає, що дійсна частина функції (5.105) збігається з правою частиною (5.102), а коефіцієнт при j — з правою частиною (5.101). Отже, $r(t)$ — гармонічна функція з комплексною амплітудою $\rho = a e^{j\alpha}$ і початковою фазою α .

Розглянемо тепер замість рівнянь (5.101) і (5.102), в яких, як звичайно, вважаємо коефіцієнти дійсними числами, одне рівняння з невідомою функцією $z = x + jy$:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = \rho e^{j\omega t}. \quad (5.106)$$

Порівнюючи (5.105) з (5.101) і (5.102), помічаємо, що x і y — відповідно розв'язки рівнянь (5.102) і (5.101). Отже, щоб розв'язати рівняння (5.101) і (5.102), треба розв'язати рівняння (5.106), для чого розглянемо два рівняння: однорідне $L(\bar{z}) = 0$ і неоднорідне $L(z) = \rho e^{j\omega t}$. Однорідне рівняння розв'язуємо тим самим методом, що й у випадку, коли невідомою є дійсна функція. Частинний розв'язок знаходимо так само, як і для дійсної функції. Поліном у правій частині (5.106) має нульовий степінь.

Нехай $L(j\omega) \neq 0$, тобто $j\omega$ не є коренем характеристичного рівняння (5.48). Тоді розв'язок (5.106) шукаємо у вигляді

$$z^* = \sigma e^{j\omega t}, \quad (5.107)$$

де σ — невідома комплексна стала, що є амплітудою розв'язку з частотою ω .

Підставляючи (5.107) в (5.106), знаходимо

$$\sigma = \frac{\rho}{L(j\omega)} = A e^{j\beta}. \quad (5.108)$$

При цьому

$$|\sigma| = \frac{|\rho|}{|L(j\omega)|} = A$$

є дійсною амплітудою, а β — початкова фаза частинного розв'язку (5.107).

Розв'язок (5.107) можна записати у вигляді

$$z^*(t) = A e^{j(\omega t + \beta)} = A [\cos(\omega t + \beta) + j \sin(\omega t + \beta)]. \quad (5.109)$$

Отже,

$$x^*(t) = A \cos(\omega t + \beta); \quad (5.110)$$

$$y^*(t) = A \sin(\omega t + \beta), \quad (5.111)$$

де A і β визначаються з (5.108):

$$A e^{j\beta} = \frac{\rho e^{j\alpha}}{L(j\omega)}. \quad (5.112)$$

Загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$$z(t) = \bar{z}(t) + z^*(t) = \bar{z}(t) + \sigma e^{j\omega t}, \quad (5.113)$$

а розв'язки рівнянь (5.102) і (5.101) — відповідно у вигляді

$$x(t) = \bar{x}(t) + A \cos(\omega t + \beta); \quad (5.114)$$

$$y(t) = \bar{y}(t) + A \sin(\omega t + \beta). \quad (5.115)$$

Нехай корені характеристичного рівняння (5.48) $L(k) = 0$ мають від'ємні дійсні частини. Тоді у розв'язках однорідного рівняння $\bar{z}(t)$ або відповідно $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ будуть присутні експоненти з від'ємними показниками степенів. Тому $\bar{z}(t)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ прямують до нуля досить швидко. Практично ці функції при виконанні вказаних вище умов за досить короткий час перетворюються на нуль. Розв'язок рівняння подається лише частинними розв'язками (5.109)—(5.111). Розв'язки (5.109)—(5.111) дістали назву усталених, $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ — власних розв'язків, а (5.113)—(5.115) — перехідних розв'язків.

У техніці до математичних назв цих розв'язків додаються особливості коливального процесу. Так, у механіці $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ називаються вільними коливаннями, $x^*(t)$, $y^*(t)$, $z^*(t)$ — вимушеними коливаннями, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — сумісними, або перехідними. В електроніці $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ — вільний струм, $x^*(t)$, $y^*(t)$, $z^*(t)$ — вимушений струм, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — перехідний струм.

Введемо ще один термін. Якщо всі корені многочлена (5.48) $M(k) = 0$ мають від'ємні дійсні частини, то многочлен називається стійким.

Стійкий рух описується усталеним розв'язком. Якщо $L(j\omega) = 0$ і $j\omega$ — корінь кратності r , то частинний розв'язок рівняння (5.106) потрібно шукати у формі

$$z^*(t) = t^r \sigma e^{j\omega t}. \quad (5.116)$$

5.15. Коливання у замкнутому електричному контурі з ємністю

Як приклад застосування методу комплексних амплітуд розглянемо коливання в електричному контурі з ємністю (рис. 1.8).

Нехай дано замкнений електричний контур з індуктивністю L , опором R та ємністю C . У цьому контурі генератор створює змінну за часом напругу $E(t)$, яка викликає в контурі струм $I(t)$. Падіння

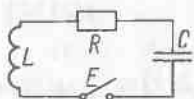


Рис. 1.8

напруги IR — від опору, $L \frac{dI}{dt}$ — від індуктивності

та $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau$ — від ємності за законом Кірхгофа

дорівнює прикладеній до контуру ЕРС:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau = E(t). \quad (5.117)$$

Це інтегро-диференціальне рівняння коливань в електричному контурі. Рівняння (5.117) називається інтегро-диференціальним тому, що до нього невідома входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла. Якщо в (5.117) ємність дуже велика, $C \rightarrow \infty$, то

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau \rightarrow 0,$$

а (5.117) переходить у рівняння (2.30), що описує коливання в електричному контурі без ємності:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t); \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}.$$

Вважатимемо, що $E(t)$ є диференційовною функцією. Тоді (5.117) можна записати у вигляді

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dE}{dt}. \quad (5.118)$$

Якщо не робити припущення про диференційовність $E(t)$, то

$$P(t) = \int_{-\infty}^t I(\tau) d\tau; \quad I(t) = \frac{dP}{dt}, \quad (5.119)$$

тоді (5.117) запишемо у вигляді

$$L \frac{d^2 P}{dt^2} + R \frac{dP}{dt} + \frac{1}{C} P(t) = E(t). \quad (5.120)$$

Переходимо до розв'язання рівняння (5.118). Розв'яжемо задачу Коші, тобто візьмемо початкові умови: $t = 0$, $I = I_0$, $I' = I'_0$. Якщо $E(t) = 0$, то рівняння (5.118) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 \bar{I}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\bar{I}}{dt} + \frac{1}{LC} \bar{I} = 0. \quad (5.121)$$

Це однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + \frac{R}{L} k + \frac{1}{LC} = 0; \quad k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm q,$$

де

$$q = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Розглянемо кілька випадків (порівняйте з п. 5.9).

1. Нехай $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$, тоді корені дійсні, причому обидва від'ємні:

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm q,$$

де $|q| < \frac{R}{2L}$.

Розв'язок рівняння (5.121), згідно з (5.43), запишемо у вигляді

$$\bar{I} = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}) \quad (5.122)$$

при $t \rightarrow \infty$, $\bar{I} \rightarrow 0$, тобто власний струм згасає за будь-яких початкових умов.

2. Нехай $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$, тоді $k_{1,2} = -\frac{R}{2L}$, а згідно з (5.45)

$$\bar{I}(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 + C_2 t). \quad (5.123)$$

Легко помітити, що розв'язок (5.123) згасаючий, оскільки експонента спадає швидше від лінійної функції.

3. Нехай $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$. Покладемо $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = b^2$, тоді $k_1 = -\frac{R}{2L} + jb$; $k_2 = -\frac{R}{2L} - jb$, а, згідно з (5.44), сила власного струму

$$\bar{i}(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt). \quad (5.124)$$

Цей розв'язок при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля, тому що експонента при $t \rightarrow \infty$ спадає, а другий множник є обмеженою функцією.

Таким чином, у коливальному контурі за умови відсутності ЕРС власний струм завжди згасає.

4. Нехай $E(t) = a \sin(\omega t + \alpha)$, тоді рівняння (5.118) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{a\omega}{L} \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.125)$$

Це рівняння розв'язуватимемо методом комплексних амплітуд. Замість (5.125) розглянемо рівняння

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dz}{dt} + \frac{1}{LC} z = \rho e^{j\omega t}, \quad (5.126)$$

де $\rho = \frac{a\omega}{L} e^{j\alpha}$.

Рівняння (5.126) аналогічне рівнянню (5.106).

Вираз $j\omega$ не може бути коренем характеристичного рівняння, тобто

$$L(k) = L(j\omega) \neq 0, \text{ оскільки } L(k) = k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC}.$$

При $k = j\omega$

$$L(j\omega) = -\omega^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC} = \frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R}{L}j\omega \neq 0.$$

Тому частинний розв'язок рівняння (5.126) шукаємо у формі (5.107):

$$z^*(t) = \sigma e^{j\omega t}, \quad (5.127)$$

а σ визначимо за формулою (5.108):

$$\sigma = \frac{\rho}{L(j\omega)} = \frac{a\omega}{L} \frac{e^{j\alpha}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R}{L}j\omega};$$

$$|\sigma| = \frac{|\rho|}{|L(j\omega)|} = \frac{a\omega}{L} \frac{|e^{j\alpha}|}{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R}{L}j\omega \right|}, \quad |e^{j\alpha}| = 1;$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R}{L}j\omega \right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2}} = \\ &= \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right)^2 + R^2 \omega^2}}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Дійсна амплітуда вимушеного струму:

$$|\sigma| = \frac{a\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right)^2 + R^2 \omega^2}} = A. \quad (5.129)$$

Враховуючи (5.128), згідно з (5.127), маємо

$$z^*(t) = \frac{a\omega}{L} \frac{e^{j(\omega t + \alpha)}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R\omega}{L}j};$$

$$z^*(t) = \frac{a\omega}{L} \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2 - \frac{R\omega}{L}j}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2}} [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)].$$

Оскільки у рівнянні (5.125) правою частиною є дійсна частина розв'язків z^* , то сила вимушеного струму

$$I^*(t) = \frac{\left[\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \alpha) + \frac{R}{L} \omega \sin(\omega t + \alpha) \right]}{L \left[\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2} \right]} a\omega.$$

Якщо ввести позначення

$$\frac{1}{LC} - \omega^2 = A_1 \sin \alpha_1; \quad \frac{R}{L} \omega = A_1 \cos \alpha_1,$$

то, з одного боку,

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L} \omega\right)^2}, \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{1}{2C} - \omega^2\right)L}{R\omega},$$

а з іншого —

$$I^*(t) = \frac{a\omega}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2}}} \sin(\omega t + \alpha_1 + \alpha).$$

Вносячи L під знак кореня і позначаючи $\alpha_1 + \alpha = \beta$, знаходимо

$$I^*(t) = \frac{a\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + R^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \beta),$$

де β — нова початкова фаза.

Отже, сила перехідного струму

$$I_{\text{пер}} = \bar{I}(t) + \frac{a\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + R^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \beta). \quad (5.130)$$

Максимальне значення амплітуди суто вимушеного струму дістанемо, якщо $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. Через скінченний досить малий проміжок часу в контурі встановиться струм, що зображується другим доданком формули (5.130). Це вимушений струм зі сталою амплітудою

$$A = \frac{a\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + R^2 \omega^2}}$$

і частотою, що збігається з частотою ЕРС.

Нехай у контурі відсутній опір $R = 0$, тоді (5.125) набирає вигляду

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = \frac{a\omega}{L} \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.131)$$

а рівняння (5.126) —

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{LC} z = \frac{a\omega}{L} e^{j(\omega t + \alpha)} = \rho e^{j\omega t}. \quad (5.132)$$

У цьому разі характеристичне рівняння

$$k^2 + \frac{1}{LC} = 0, \quad k_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Якщо $j\omega \neq j \sqrt{\frac{1}{LC}}$, то розв'язок рівняння дістанемо з (5.130), поклавши в ньому $R = 0$. Якщо

$$j\omega = j \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (5.133)$$

то розв'язком (5.130) скористатися не можна. Частинний розв'язок необхідно шукати у вигляді (5.116):

$$z^*(t) = \sigma t e^{j\omega t}. \quad (5.134)$$

Такий розв'язок називається **резонансним**. Саме тоді, коли частота ЕРС збігається з власною частотою коливального контуру, струм називається резонансним.

Для визначення σ знайдемо $\frac{dz^*}{dt}$, $\frac{d^2 z^*}{dt^2}$ і підставимо їхні значення в (5.132):

$$\frac{dz^*}{dt} = \sigma e^{j\omega t} + \sigma j \omega t e^{j\omega t};$$

$$\frac{d^2 z^*}{dt^2} = 2j\omega \sigma e^{j\omega t} + (j)^2 \sigma \omega^2 t e^{j\omega t};$$

$$2\sigma j \omega e^{j\omega t} - \sigma \omega^2 t e^{j\omega t} + \frac{1}{LC} \sigma \omega t e^{j\omega t} = \rho e^{j\omega t},$$

звідси

$$\sigma = \frac{\rho}{2j\omega}, \quad \rho = \frac{a\omega}{L} e^{j\alpha}.$$

Тепер розв'язок (5.134) запишемо у вигляді

$$z^*(t) = \frac{\rho}{2j\omega} t e^{j\omega t} \quad (5.135)$$

Знайдемо сталу частину дійсної амплітуди A і початкову фазу β частинного розв'язку (вимушеного струму), поклавши $\sigma = Ae^{j\beta}$:

$$Ae^{j\beta} = \frac{\rho}{2j\omega} = -\frac{j\rho}{2\omega} = \frac{a}{2L} (-je^{j\alpha}),$$

але

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}; \quad -je^{j\alpha} = e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})},$$

тоді

$$\sigma = Ae^{j\beta} = \frac{a}{2L} e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})} \quad (5.136)$$

Отже.

$$A = \frac{a}{2L}, \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Початкова фаза вимушеного струму буде зміщеною порівняно з початковою фазою ЕРС на $\frac{\pi}{2}$. Функцію $z^*(t)$ з урахуванням (5.136) запишемо у вигляді

$$z^*(t) = \frac{a}{2L} t e^{j(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{a}{2L} t \left[\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right];$$

$$z^*(t) = \frac{a}{2L} t [\sin(\omega t + \alpha) - j \cos(\omega t + \alpha)]. \quad (5.137)$$

Частинний розв'язок рівняння (5.131) запишемо у вигляді

$$I_p(t) = \frac{a}{2L} t \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2L} t \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.138)$$

Це резонансний струм, амплітуда якого

$$A = \frac{a}{2L} t \quad (5.139)$$

з часом зростає, що, природно, може призвести до руйнування приладів у колі. Аналогічну картину дістанемо, якщо у правій частині

(5.131) замість $\cos(\omega t + \alpha)$ буде $\sin(\omega t + \alpha)$. Щоб дістати вираз резонансного струму у цьому випадку, потрібно взяти такий коефіцієнт при уявній одиниці:

$$I_p(t) = \frac{a}{2L} t \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{2L} t \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.140)$$

Графіком амплітудного значення резонансного струму, згідно з (5.139), є прямі $y = \pm \frac{a}{2L} t$ (рис. 1.9), між якими міститься графік функції (5.140)

Перехідний (загальний) розв'язок рівняння (5.131) має вигляд

$$I(t) = \bar{I}_{\text{вл}} + \frac{a}{2L} t \sin(\omega t + \alpha).$$

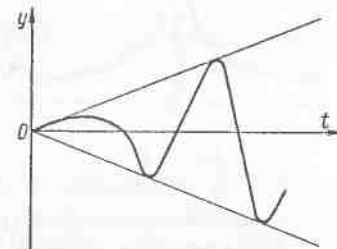


Рис. 1.9

де $\bar{I}_{\text{вл}}$ — сила власного струму.

Порівняємо розв'язки (5.130) і (5.138). При $R \neq 0$ розв'язок (5.130) обмежений для будь-якого моменту часу. Нехай $R = 0$, тоді (5.130) при $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ запишемо у вигляді

$$I_{\text{пер}} = \bar{I}(t) + \frac{a\omega}{L\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)} \cos(\omega t + \alpha).$$

Амплітуда вимушеного струму має вигляд

$$A = \frac{a\omega}{L\left|\frac{1}{LC} - \omega^2\right|}.$$

Введемо позначення $\frac{a\omega}{L} = h$, а $\frac{1}{LC} = k^2$, де k — частота коливального контуру. Тепер

$$A = \frac{h}{|k^2 - \omega^2|} = \frac{h}{k^2} \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right|}.$$

Введемо позначення

$$A_0 = \frac{h}{k^2}; \quad \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right|} = \lambda\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

Умови резонансу, тобто розв'язок (5.138), дістанемо при $\omega \rightarrow k$ або $\frac{\omega}{k} \rightarrow 1$. Побудуємо графік функції $\lambda\left(\frac{\omega}{k}\right)$, який вказує на необмежене зростання амплітуди A (рис. 1.10).

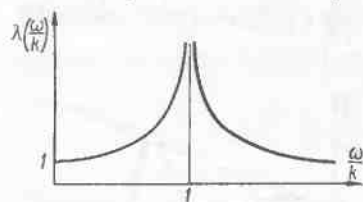


Рис. 1.10

Характер зростання описується функцією (5.139). Якщо у загальному випадку ω назвати частотою зовнішнього збурення, то явище резонансу характеризується збігом власної частоти k і частоти зовнішнього збурення. Явище резонансу відіграє важливу роль у техніці. Умови резонансу обов'язково оцінюються і розраховуються для будь-яких споруд. При цьому

не рекомендується користуватися частотами, які збігаються з власною частотою споруд. Нехтування цією рекомендацією може призвести до катастрофи.

5.16. Застосування диференціальних рівнянь другого порядку в техніці

У п. 5.15 викладено застосування диференціальних рівнянь другого порядку до дослідження коливань у колі електричного струму. Розглянемо деякі інші задачі, що приводять до аналогічних рівнянь. При цьому обмежимося лише механічними (вільними і вимушеними) коливаннями.

1. Коливання вантажу на пружині. Нехай на вертикально закріпленій невагомій пружині з жорсткістю c підвішено вантаж вагою p і масою m (рис. 1.11). Статичне зміщення вантажу $\delta_{ст}$ під дією ваги відбувається у вертикальному напрямі, який приймемо за вісь x . Початок відліку O сумістимо з положенням статичної рівноваги $p = c\delta_{ст}$, а вантаж приймемо за матеріальну точку. На точку діє вага p і пружна сила $\bar{F}_{пр}$, яку вважатимемо пропорційною розтягу пружини. За другим законом Ньютона рівнодійна прикладених до точки сил

$$\bar{F} = m\bar{W}, \quad (5.141)$$

де \bar{W} — прискорення.

Проекція рівнодійної на вісь Ox (рис. 1.11)

$$F_x = mW_x.$$

Однак $W_x = \ddot{x}$, $F_x = p + F_{пр}$, $F_{пр} = -c(\delta_{ст} + x)$, тоді

$$\ddot{x} = p - c(\delta_{ст} + x), \text{ або } m\ddot{x} + cx = 0.$$

Введемо позначення $\frac{c}{m} = k^2$ (величину k називають власною частотою). Тепер

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (5.142)$$

Рівняння (5.142) називається **диференціальним рівнянням гармонічного осцилятора**. У даному випадку це рівняння руху вантажу на пружині. Розв'язок рівняння (5.142), згідно з (5.44), при $\alpha = 0$, $\beta = k$ має вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (5.143)$$

Доповнимо рівняння (5.142) початковими умовами при $t = 0$; $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Використовуючи їх та (5.143), знаходимо

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt.$$

Введемо нові сталі a і γ :

$$x_0 = a \sin \gamma; \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = a \cos \gamma. \quad (5.144)$$

Із (5.144) знаходимо

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}; \quad (5.145)$$

$$\gamma = \arctg \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}, \quad (5.146)$$

тоді

$$x = a \sin \gamma \cos kt + a \cos \gamma \sin kt; \\ x = a \sin(kt + \gamma). \quad (5.147)$$

Отже, вантаж на пружині здійснює коливання із власною частотою k , амплітудою (5.145) і початковою фазою (5.146). При цьому часто-

та коливань не залежить від початкових умов. Це явище дістало назву ізохронності. Амплітуда коливань, навпаки, залежить від початкових умов.

2. Малі коливання математичного або фізичного маятника. Нехай математичний маятник (рис. 1.12) завдовжки l , вагою p рухається навколо осі z , перпендикулярної до площини рисунка. Відхилення від положення рівноваги позначимо через φ . Тоді момент сили інерції дорівнює $ml^2\ddot{\varphi}$, а момент сили ваги — $-pl \sin \varphi$. За теоремою моментів маємо

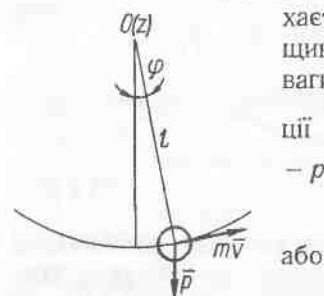


Рис. 1.12

Це рівняння руху маятника. Воно нелінійне. Вважаючи $\sin \varphi \approx \varphi$, дістанемо лінійне відносно φ рівняння

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Якщо ввести позначення $\varphi = x$, $\frac{g}{l} = k^2$, то дістанемо рівняння

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Отже, математичний маятник при малому відхиленні від положення рівноваги здійснюватиме гармонічні коливання.

Для фізичного маятника картина буде аналогічною, лише зміниться вираз для власної частоти.

3. Вертикальна качка корабля на спокійній воді. На корабель (рис. 1.13) діє вага p і виштовхувальна сила, яку можна вважати аналогом пружної сили (див. 1). Виштовхувальна сила дорівнює добутку площі S перерізу корабля площиною, перпендикулярною до напрямів сили \bar{p} , густини води γ і зміщення $\delta = \delta_{ст} + x$. Отже, рівняння вертикальної качки корабля можна записати у вигляді

$$m\ddot{x} = p - S(\delta_{ст} + x)\gamma,$$

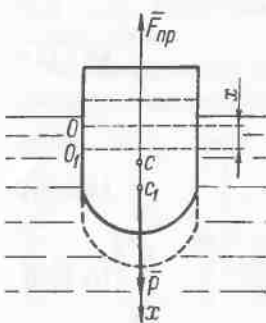


Рис. 1.13

враховуючи, що $p = S\delta_{ст}\gamma$, дістаємо $m\ddot{x} + S\gamma x = 0$, або

$$\ddot{x} + \frac{S\gamma}{m} x = 0. \quad (5.149)$$

Власна частота коливань $k = \sqrt{\frac{S\gamma}{m}}$.

4. Бортова качка корабля. Коливання судна навколо поздовжньої осі називається бортовою качкою. У цьому разі маємо аналог фізичного маятника (рис. 1.14). Рівняння малих коливань запишемо у вигляді

$$I\ddot{\varphi} + pa\varphi = 0, \quad (5.150)$$

де I — момент інерції; p — вага; a — відстань від поздовжньої осі до центра маси судна. Після ділення (5.150) на I і введення власної частоти дістанемо рівняння, що описує вільну бортову качку корабля:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Можна показати, що коливання вантажу на кінці консольно закріпленої балки (крутильні коливання) також описуються рівняннями типу (5.142).

5. Вільні коливання за наявності опору. Із розв'язку рівняння (5.147) випливає, що коливання, оскільки вони почалися, мають продовжуватись нескінченно довго, але в дійсності цього не відбувається через наявність всіляких сил опору. Якщо в усіх розглянутих вище прикладах враховувати силу опору, поклавши її пропорційною швидкості зміщення (типу $2n\dot{x}$), то рівняння запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \quad (5.151)$$

де n — коефіцієнт опору середовища, $n \geq 0$. Характеристичне рівняння для (5.151) має вигляд

$$\mu^2 + 2n\mu + k^2 = 0.$$

Для коливального процесу цікавим є випадок, коли $n^2 - k^2 < 0$. Позначимо $\sqrt{k^2 - n^2}$ через ω_1 . Тоді за формулою (5.44) при $\beta = \omega_1$ і $\alpha = -n$ дістанемо

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t). \quad (5.152)$$

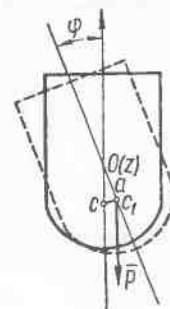


Рис. 1.14

Введемо початкові умови при $t = 0$: $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$, тоді

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_1};$$

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (5.153)$$

Якщо ввести позначення, аналогічні (5.144), тобто

$$x_0 = a \sin \gamma, \quad \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_1} = a \cos \gamma,$$

то

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\omega_1} \right)^2}; \quad (5.154)$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega_1}{\dot{x}_0 + nx_0}; \quad (5.155)$$

$$x = ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \gamma). \quad (5.156)$$

Отже, з урахуванням лінійного опору в усіх розглянутих вище прикладах також спостерігатимуться коливання. Вони відбуватимуться зі згасаючою за експонентою амплітудою $A = ae^{-nt}$, з частотою $\omega_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ і періодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}},$$

тобто

$$T_1 = T \left(1 - \frac{n^2}{k^2} \right)^{-1/2}, \quad (5.157)$$

де $T = \frac{2\pi}{k}$ — період коливань гармонічного осцилятора. Коливання, що описуються формулами (5.152), (5.153), (5.156), називаються вільними коливаннями з опором. У замкненому електричному контурі вільні коливання з опором (вільний струм $\bar{I}(t)$) описуються рівнянням (5.124). Тут роль n виконує $\frac{R}{2L}$, а $\omega_1 = b$. Із формули (5.157) ви-

пливає, що вільні коливання з опором також мають властивість ізохронності. Якщо n мале порівняно з k , то $T_1 \approx T$. Взявши абсолютну величину лівої частини рівняння (5.156) і врахувавши, що $|\sin(\omega_1 t + \gamma)| \leq 1$, одержимо $|x| \leq ae^{-nt}$, або

$$-ae^{-nt} \leq x \leq ae^{-nt}. \quad (5.158)$$

Останні нерівності дають змогу побудувати графік коливань, що описується формулою (5.156), наведений на рис. 1.15. Знайдемо моменти часу, при яких швидкість коливань дорівнює нулю. Із формули (5.156) випливає, що

$$\dot{x} = -ne^{-nt} a \sin(\omega_1 t + \gamma) + \omega_1 ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + \gamma).$$

Прирівнюючи цей вираз до нуля і позначаючи корені рівняння t_i , $i = \overline{1, v}$, дістаємо

$$-ne^{-nt_i} a \sin(\omega_1 t_i + \gamma) + \omega_1 ae^{-nt_i} \cos(\omega_1 t_i + \gamma) = 0;$$

$$\operatorname{tg}(\omega_1 t_i + \gamma) = \frac{\omega_1}{n}; \quad (5.159)$$

$$\omega_1 t_i + \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{n} + \pi i. \quad (5.160)$$

Знаходимо

$$t_i = \frac{1}{\omega_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{n} - \gamma \right) + \frac{\pi}{\omega_1} i, \quad (5.161)$$

звідки

$$t_0 = \frac{1}{\omega_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{n} - \gamma \right);$$

$$t_i = t_0 + \frac{\pi}{\omega_1} i, \quad i = \overline{1, v}. \quad (5.162)$$

Моменти часу t_i відповідають найбільшим (амплітудним) значенням x . Позначимо ці значення відповідно x_0, x_1, \dots, x_v . Амплітудні значення x знайдемо за формулою (5.156), замінивши t на (5.162):

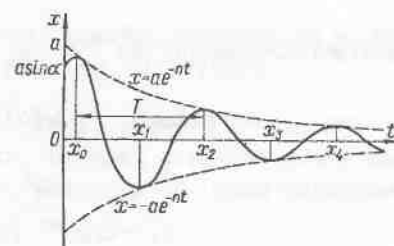


Рис. 1.15

$$x_i = ae^{-nt_i} \sin(\omega_1 t_i + \gamma) = ae^{-n\left(t_0 + \frac{\pi}{\omega_1} i\right)} \sin\left[\omega_1 \left(t_0 + \frac{\pi}{\omega_1} i\right) + \gamma\right] =$$

$$= ae^{-n t_0} e^{-\frac{n\pi}{\omega_1} i} \sin(\omega_1 t_0 + \gamma + \pi i).$$

Введемо позначення $ae^{-n t_0} = a_0$ і врахуємо, що

$$\sin(\omega_1 t_0 + \gamma + \pi i) = (-1)^i \sin(\omega_1 t_0 + \gamma).$$

Тоді

$$x_i = a_0 e^{-\frac{n\pi}{\omega_1} i} (-1)^i \sin(\omega_1 t_0 + \gamma);$$

$$x_{i+1} = a_0 e^{-\frac{n\pi}{\omega_1} (i+1)} (-1)^{i+1} \sin(\omega_1 t_0 + \gamma) = (-1) e^{-\frac{n\pi}{\omega_1}} x_i. \quad (5.163)$$

Складемо відношення

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = (-1) e^{-\frac{n\pi}{\omega_1}}.$$

Візьмемо абсолютні значення амплітуд

$$\left| \frac{x_{i+1}}{x_i} \right| = e^{-\frac{n\pi}{\omega_1}}. \quad (5.164)$$

Звідси випливає, що амплітудні значення згасаючих коливань спадають за геометричною прогресією зі знаменником

$$q = e^{-\frac{n\pi}{\omega_1}} = e^{-\frac{n T_1}{2}}.$$

Величина, обернена до знаменника цієї геометричної прогресії $\eta = \frac{1}{q}$, називається декрементом згасання коливань, а логарифм цього декременту

$$\ln \eta = n \frac{T_1}{2} \quad (5.165)$$

називається **логарифмічним декрементом згасання**. Із формул (5.164) і (5.165) випливає, що

$$\eta = \frac{|x_i|}{|x_{i+1}|}; \quad \ln \eta = \ln \frac{|x_i|}{|x_{i+1}|} = \ln |x_i| - \ln |x_{i+1}|; \quad (5.166)$$

$$n = \frac{2}{T_1} (\ln |x_i| - \ln |x_{i+1}|).$$

За цю формулою визначають коефіцієнт опору середовища за відомим періодом коливань T_1 і двома сусідніми амплітудами.

6. Вимушені коливання. Припустимо, що до матеріальної точки, розглянутої в 1-3, прикладається ще одна зовнішня сила, що є функцією часу. Тоді диференціальне рівняння руху точки запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = f(t), \quad (5.167)$$

де $f(t)$ можна фізично зобразити як силу, прикладену до одиничної маси. Якщо в (5.167) $f(t) = h \sin \omega t$, то дістанемо рівняння

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin \omega t, \quad (5.168)$$

аналогічне (5.125). Частинний розв'язок цього неоднорідного рівняння часто називають вимушеними коливаннями. Застосовуючи до (5.168) метод комплексних амплітуд, знайдемо вираз для чисто вимушених коливань

$$x_0 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \delta),$$

де δ — початкова фаза.

Повне коливання дістанемо, склавши розв'язки неоднорідного рівняння (5.168) із загальним розв'язком однорідного рівняння:

$$x = ae^{-nt} \sin\left[\sqrt{k^2 - \omega^2} t + \gamma\right] + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \delta).$$

При $n \neq 0$ у цьому розв'язку резонанс неможливий, при $n = 0$ і $k = \omega$ резонанс можливий. Резонансні коливання описуються формулами (5.139), (5.140) і графіком, зображеним на рис. 1.9.

6.1. Основні поняття і означення

Сукупність співвідношень

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0; \\ F_2(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0; \\ \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

де x — незалежна змінна; y_1, y_2, \dots, y_n — невідомі функції від x , а F_1, F_2, \dots, F_n — відомі функції, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язком цієї системи є функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$, які після підстановки їх у систему (6.1) перетворюють її на тотожність. Якщо система диференціальних рівнянь (6.1) допускає можливість розв'язання відносно похідних, то дістаємо систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (6.2)$$

яка називається **нормальною**. Функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ мають бути визначені в $(n+1)$ -вимірній області D , яка називається областю визначення системи рівнянь.

Прикладом одного нормального рівняння першого порядку є

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Це рівняння задає поле напрямів у площині x, y (див. п. 1.4). Розв'язком цього рівняння є однопараметрична сім'я кривих, розміщених в одній площині (п. 1.2). Якщо в цій площині задано точку

(x_0, y_0) і $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$ — неперервні, то рівняння має єдиний розв'язок, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$. Візьмемо тепер два рівняння:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2); \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z); \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Знову за певних умов дістанемо розв'язки

$$y_1 = y = \varphi(x); \quad y_2 = z = \psi(x).$$

Їх можна розглядати як параметричні рівняння просторової кривої у системі координат x, y, z . Отже, розв'язок одного рівняння можна зобразити кривою двовимірного простору. Розв'язок двох рівнянь першого порядку можна зобразити кривою у тривимірному просторі. Розв'язки рівнянь першого порядку утворюють криву, розміщену в $(n+1)$ -вимірному просторі. Ці криві, як відомо (див. п. 1.2), називаються інтегральними. Наведемо механічне тлумачення як розв'язків так і самих рівнянь (6.2) і (6.1).

Позначимо незалежну змінну через t і розглянемо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z); \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z); \\ \frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z) \end{cases} \quad (6.3)$$

з розв'язками

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (6.4)$$

Тепер уявимо масу, проекція швидкості руху якої задається рівняннями (6.3). Тоді (6.4) є рівнянням траєкторії, записаним у параметричній формі. Систему (6.4) називають динамічною, а простір x, y, z — фазовим. Якщо права частина (6.3) явно від t не залежить, то в будь-який момент часу напрям швидкості у даній точці буде однаковим. У зв'язку з цим такі рівняння дістали назву **стаціонарних** (автономних).

Рух точки у просторі описується трьома диференціальними рівняннями другого порядку, які випливають з другого закону Ньютона:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = F_1(t, x, y, z, x', y', z'); \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = F_2(t, x, y, z, x', y', z'); \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = F_3(t, x, y, z, x', y', z'). \end{cases}$$

Якщо ввести нові невідомі функції і похідні

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = \omega; \quad \frac{du}{dt} = F_1; \quad \frac{dv}{dt} = F_2; \quad \frac{d\omega}{dt} = F_3,$$

то дістанемо систему із шести диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = \omega; \\ \frac{du}{dt} = F_1; \quad \frac{dv}{dt} = F_2; \quad \frac{d\omega}{dt} = F_3. \end{cases}$$

Отже, рух однієї матеріальної точки описується трьома рівняннями другого порядку або шістьма рівняннями першого порядку. Нагадаємо, що одна точка має три степеня вільності. Якщо взяти тверде тіло, то воно має шість степенів вільності, і відповідно до цього рух тіла описується шістьма диференціальними рівняннями другого порядку. Із цих міркувань випливає, що система з n степенями вільності описується n диференціальними рівняннями другого порядку або $2n$ диференціальними рівняннями першого порядку, тобто одному степеню вільності відповідає одне диференціальне рівняння другого порядку або два диференціальних рівняння першого порядку. Тепер запишемо систему (6.2), вважаючи t незалежною змінною:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.5)$$

Розв'язки цієї системи $y_i = y_i(t)$ являють собою рівняння траєкторії однієї точки, що має $n/2$ степенів вільності. Рівняння (6.5) задають зміну швидкості руху цієї точки як функції від координат (положення) і часу. Систему (6.5) також називають динамічною, а простір траєкторій називають фазовим простором.

6.2. Теорема про існування і єдиність розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь

Складемо задачу Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь (6.2): за заданим рівнянням і початковими значеннями $M_0(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$, взятими з області D визначення системи, знайти розв'язок системи, що задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (6.6)$$

Ця задача розв'язується за допомогою теореми Коші.

Теорема 10. Якщо в (6.2) всі $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними по y_i у деякій $(n+1)$ -вимірній області D , то для будь-якої точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$, що належить області D , в деякому okolí точки M_0 існує єдиний розв'язок

$$y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x), \quad (6.7)$$

що задовольняє початкові умови (6.6):

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}; \quad \varphi_2(x_0) = y_{20}; \quad \dots; \quad \varphi_n(x_0) = y_{n0}.$$

Доведення не наводимо. Очевидно, що, змінюючи в області D точку $M_0(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$, дістанемо безліч розв'язків, залежних від довільних сталих:

$$\begin{aligned} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \quad y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \quad \dots \\ \dots; \quad y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ці розв'язки будуть загальними розв'язками, якщо за заданими початковими умовами можна однозначно визначити сталі C_1, C_2, \dots, C_n з рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_{10}; \\ \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_{20}; \\ \dots \\ \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_{n0}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Тепер доведемо, що будь-яке рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, еквівалентне нормальної системі n рів-

нянь першого порядку. Нехай дано рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6.10)$$

Виконаємо заміну $y = z_1$; $y' = z_2$; ...; $y^{(n-1)} = z_n$. Тоді

$$\begin{aligned} y' = \frac{dz_1}{dx} = z_2; \quad y'' = \frac{dz_2}{dx} = z_3; \quad \dots; \quad y^{(n-1)} = \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n; \\ y^{(n)} = \frac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Дістанемо нормальну систему, еквівалентну рівнянню (6.10):

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} = z_2; \quad \frac{dz_2}{dx} = z_3; \quad \dots; \quad \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n; \\ \frac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Покажемо, що можливим є і обернене твердження. Нехай дано нормальну систему

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i^{(1)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.13)$$

Візьмемо похідну

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}.$$

Замінивши тут $\frac{dy_i}{dx}$, згідно з (6.13), і знайшовши похідні

$$\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

дістанемо

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = f_i^{(2)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Продовжуємо пошук похідних до n -го порядку включно:

$$\frac{d^n y_i}{dx^n} = f_i^{(n)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (6.14)$$

Із системи $(n-1)$ рівнянь

$$\begin{cases} y_i' = f_i^{(1)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ y_i'' = f_i^{(2)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n); \\ \dots \\ y_i^{(n-1)} = f_i^{(n-1)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (6.15)$$

знаходимо $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, \dots, y_n$ (всі, крім y_i) і підставляємо в рівняння (6.14):

$$y_i^{(n)} = f_i^{(n)}(x, y_i, y_i', y_i'', \dots, y_i^{(n-1)}). \quad (6.16)$$

Дістаємо рівняння n -го порядку.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = y + z; \\ z' = y + z + x. \end{cases} \quad (6.17)$$

Розв'язання. Замінімо за наведеною вище методикою систему одним рівнянням другого порядку відносно невідомої функції y . Диференціюючи перше рівняння $y'' = y' + z'$, дістаємо

$$y'' = y' + y + z + x, \text{ але } y' = y + z,$$

тоді

$$y'' = y' + y' + x; \quad y'' - 2y' = x.$$

Це рівняння зі сталими коефіцієнтами. Розв'язуємо його:

$$k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad \bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}. \quad (6.18)$$

Оскільки нуль є коренем характеристичного рівняння (див. п. 5.9), маємо

$$\begin{aligned} y^* &= x(Ax + B); \quad (y^*)' = 2Ax + B; \quad (y^*)'' = 2A; \\ 2A - 4Ax - 2B &= x; \quad -4A = 1; \quad A = -\frac{1}{4}; \quad B = A = -\frac{1}{4}; \\ y^* &= -\frac{1}{4}x(x+1); \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Знайдемо z з першого рівняння системи:

$$z = y' - y; \quad y' = 2C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$z = C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}x(x-1) - \frac{1}{4} - C_1. \quad (6.20)$$

ВПРАВИ. Знайти загальний розв'язок системи зведенням її до одного рівняння.

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y; \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases} \quad \text{Відповідь.} \quad \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{7t}; \\ y = -C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{7t}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases} \quad \text{Відповідь.} \quad \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{6t}; \\ y = -\frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^{6t}. \end{cases}$$

6.3. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Вважатимемо, що в (6.2) $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ є лінійними функціями від невідомих функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Тоді (6.2) запишемо у вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x) + a_{i1}(x)y_1 + \dots + a_{in}(x)y_n, \quad (6.21)$$

або

$$\frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j = g_i(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Система (6.21) називається лінійною із змінними коефіцієнтами.

Теорема 11 (існування і єдиності розв'язку для системи (6.21)). Якщо коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і функції $g_i(x)$ неперервні на $[a, b]$, то існує єдиний і неперервний розв'язок системи $y_i = \varphi_i(x)$, що задовольняє рівняння і будь-яку систему початкових умов при будь-якому значенні x_0 , взятому з (a, b) .

Якщо a_{ij} від x не залежать, то (6.21) є системою лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Якщо $g_i(x) \equiv 0$, то система (6.21) називається однорідною, у противному разі — неоднорідною.

Розглянемо спочатку однорідну систему

$$\frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.22)$$

Нехай $y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, \dots, y_{ni}$ — частинні розв'язки системи (6.22). Тоді, діючи так само, як і в загальній теорії лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку (див. п. 5.4–5.8), можна показати, що лінійна комбінація цих розв'язків також є розв'язком системи:

$$y_i = C_1 y_{1i} + C_2 y_{2i} + \dots + C_n y_{ni}. \quad (6.23)$$

Виникає запитання: коли цей розв'язок буде загальним? Відповідь аналогічна випадку диференціального рівняння n -го порядку: якщо система функцій $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$ буде лінійно залежною, тобто не існує відмінних від нуля сталих $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, при яких виконується рівність

$$\alpha_1 y_{1i} + \alpha_2 y_{2i} + \dots + \alpha_n y_{ni} = 0 \quad (6.24)$$

для всіх $x \in (a, b)$, де $a_{ij}(x)$ — неперервні. Поняття лінійно незалежної системи функцій є розширеним поняттям лінійно незалежної системи векторів.

Визначник, аналогічний до визначника Вроньського, запишемо у вигляді

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.25)$$

Якщо визначник (6.25) не дорівнює нулю для всіх $x \in (a, b)$, то система функцій $y_{ij}(x)$ лінійно залежна в (a, b) . Таким чином, загальний розв'язок однорідної системи (6.22) запишемо у вигляді

$$\overline{y}_i(x) = C_1 y_{1i} + C_2 y_{2i} + \dots + C_n y_{ni}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.26)$$

за умови, що функції $y_{ij}(x)$ лінійно незалежні, тобто утворюють фундаментальну систему.

Розглянемо тепер неоднорідну систему (6.21). Нехай $y_i^*(x)$ — частинні розв'язки неоднорідної системи. Тоді загальний розв'язок системи

$$y_i(x) = \overline{y}_i(x) + y_i^*(x). \quad (6.27)$$

Якщо відомим є загальний розв'язок (6.26) однорідної системи, то загальний розв'язок неоднорідної системи можна знайти методом варіації довільної сталої. Покажемо це на прикладі.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos x + z; \\ \frac{dz}{dx} = 1 - y. \end{cases} \quad (6.28)$$

Розв'язання. Розв'язуємо однорідну систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dx} - \bar{z} = 0; \\ \frac{d\bar{z}}{dx} + \bar{y} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} - \frac{d\bar{z}}{dx} = 0; \\ \frac{d^2\bar{z}}{dx^2} + \bar{y} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\bar{z}}{dx} = -\bar{y}; \\ k^2 + 1 = 0; \end{cases} \quad k_{1,2} = \pm j; \\ \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\bar{z} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x. \quad (6.30)$$

У двох останніх виразах вважатимемо C_1 і C_2 функціями від x . Тоді \bar{y} і \bar{z} переходять в y і z . Знайдемо похідні

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_1' \cos x + C_2' \sin x;$$

$$z' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x - C_1' \sin x + C_2' \cos x$$

і підставимо їх у рівняння (6.28):

$$-C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_1' \cos x + C_2' \sin x = \cos x - C_1 \sin x + C_2 \cos x;$$

$$-C_1 \cos x - C_2 \sin x - C_1' \sin x + C_2' \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 1.$$

Дістаємо систему відносно невідомих функцій C_1' і C_2' :

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = \cos x; \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = 1; \end{cases} \quad C_1' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \cos^2 x - \sin x;$$

$$C_1 = \int \cos^2 x dx - \int \sin x dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \cos x + \bar{C}_1;$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & \cos x \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$C_2 = \sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + \bar{C}_2;$$

$$C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \cos x + \bar{C}_1;$$

$$C_2 = \sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + \bar{C}_2.$$

Тепер загальний розв'язок системи запишемо у вигляді

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) \cos x + \left(\sin x - \frac{\cos 2x}{4}\right) \sin x;$$

$$z = -\bar{C}_1 \sin x + \bar{C}_2 \cos x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) \sin x + \left(\sin x - \frac{\cos 2x}{4}\right) \cos x.$$

6.4. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Таку систему дістанемо з (6.22), припустивши, що $a_{ij} = \text{const}$:

$$\frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.31)$$

Цю систему можна легко звести до одного рівняння n -го порядку, тому розв'язок треба шукати у вигляді (див. п. 5.10)

$$y_i = \gamma_i e^{kx}, \quad (6.32)$$

де γ_i — сталі, які треба визначити таким чином, щоб розв'язок (6.32) задовольняв (6.31).

Підставляючи (6.32) в (6.31), дістаємо

$$\gamma_i k - \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.33)$$

або

$$\begin{cases} -\gamma_1 k + a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n = 0; \\ -\gamma_2 k + a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n = 0; \\ \dots \\ -\gamma_n k + a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + a_{nn}\gamma_n = 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

Для того щоб система (6.34) мала відмінні від нуля розв'язки, треба визначник системи прирівняти до нуля:

$$\begin{vmatrix} -k + a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -k + a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & -k + a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.35)$$

Звідси знайдемо k_1, k_2, \dots, k_n , якщо корені $k_i, i = \overline{1, n}$, різні, то відповідно дістанемо

$$y_i^{(1)} = \gamma_i^{(1)} e^{k_1 x}, \dots, y_i^{(n)} = \gamma_i^{(n)} e^{k_n x}, \quad (6.36)$$

У цьому разі загальний розв'язок системи має вигляд

$$y_i = \sum_{v=1}^n C_v \gamma_i^{(v)} e^{k_v x} = \sum_{v=1}^n C_v y_i^{(v)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.37)$$

6.5. Матрична форма запису системи диференціальних рівнянь і її розв'язки

Введемо позначення

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \quad (6.38)$$

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}; \quad (6.39)$$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

Вирази (6.38) і (6.39) називають матрицями розв'язку і похідної від розв'язку, а вираз (6.40) — основною матрицею або матрицею коефіцієнтів заданої системи диференціальних рівнянь. Користуючись правилом множення матриць, систему (6.22) можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

або у стислому вигляді

$$\frac{dY}{dx} - A(x)Y = 0; \quad \frac{dY}{dx} = A(x)Y. \quad (6.42)$$

Для рівняння зі сталими коефіцієнтами матриця A буде сталою, а рівняння (6.42) набере вигляду

$$\frac{dY}{dx} = AY. \quad (6.43)$$

Знайдемо матричний розв'язок рівняння (6.43). Для цього запишемо розв'язок (6.32) у матричній формі, ввівши матрицю

$$\gamma = (\gamma_i) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}; \quad Y = \gamma e^{kx}. \quad (6.44)$$

Підставляючи (6.44) у (6.43), дістаємо

$$k e^{kx} \gamma = A \gamma e^{kx} \quad (6.45)$$

або

$$k\gamma = A\gamma; \quad A\gamma - k\gamma = 0. \quad (6.46)$$

Якщо ввести одиничну матрицю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

то останнє рівняння запишемо у вигляді

$$(A - kE)\gamma = 0. \quad (6.48)$$

Рівняння (6.48) подамо в розгорнутій формі

$$\begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це рівносильно умові рівності нулю визначника першої із перемножуваних матриць. У стислій формі умову (6.35) запишемо так:

$$\det(A - kE) = 0. \quad (6.49)$$

Нехай розв'язками (6.49) є k_1, k_2, \dots, k_n , тоді кожному k_v , згідно з (6.48), буде відповідати матриця

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^{(v)} \\ \gamma_2^{(v)} \\ \dots \\ \gamma_n^{(v)} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи (6.31) у матричній формі запишемо таким чином:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} & \dots & \gamma_1^{(n)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \dots & \gamma_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n^{(1)} & \gamma_n^{(2)} & \dots & \gamma_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 x} \\ C_2 e^{k_2 x} \\ \dots \\ C_n e^{k_n x} \end{pmatrix},$$

або

$$Y = \gamma C e^{kx}.$$

Звернемося тепер до неоднорідної системи (6.21). Якщо ввести матрицю-стовпець

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ g_n(x) \end{pmatrix},$$

то (6.21) з урахуванням (6.38), (6.39) запишемо у вигляді

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y(x) + g(x). \quad (6.50)$$

Розв'язок системи (6.50), поданий раніше у формі (6.27), запишемо в матричній формі:

$$Y = \bar{Y} + Y^*, \quad (6.51)$$

де \bar{Y} — матриця-розв'язок рівняння

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A(x)\bar{Y}. \quad (6.52)$$

Зазначимо також, що і систему (6.2) можна записати в матричній формі; для цього потрібно ввести матрицю-стовпець

$$f(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Тоді система (6.2) набирає вигляду

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y). \quad (6.53)$$

Якщо права частина в (6.53) не залежить від x , то система називається стаціонарною (автономною). Таким чином, рівняння автономних систем має вигляд

$$\frac{dY}{dx} = f(Y). \quad (6.54)$$

Глава 2
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Один із способів розв'язання звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами побудовано на тому, що операцію диференціювання невідомої функції розглядають як деякий оператор:

$$\frac{d}{dx} = D, \quad \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \dots, \quad \frac{d^n}{dx^n} = D^n.$$

Встановлюють властивості і вводять дії з оператором D , які дають змогу будувати метод розв'язання диференціальних рівнянь і їхніх систем. Цей метод називають **символічним (операторним)**.

В операційному численні оператору D надають змісту будь-якої комплексної змінної p , пов'язаної з невідомою функцією перетворенням Лапласа. Виявилось, що розв'язування звичайного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і заданими початковими умовами зводиться до розв'язання деякого алгебраїчного рівняння. Перехід від диференціального рівняння до алгебраїчного здійснюється операціями множення та інтегрування. Звідси і назва методу. Головне в цьому переході – інтегрування, що спричинило іншу назву методу – інтегральне перетворення.

§ 1. ОРИГІНАЛ І ЗОБРАЖЕННЯ ЗА ЛАПЛАСОМ

Функція дійсної змінної t виду

$$f(t) = u(t) + jv(t),$$

де $u(t)$, $v(t)$ – дійсна й уявна частини функції; j – уявна одиниця, називається комплексною функцією дійсної змінної.

Наприклад, $f(t) = \cos t + j \sin t = e^{jt}$ – комплексна функція дійсної змінної t . У фізичних задачах під t найчастіше розуміють час.

Розглянемо комплексну функцію $f(t)$ дійсної змінної t . Накладемо на функцію $f(t)$ такі умови:

1) $f(t)$ визначена і неперервна всюди на осі t від $-\infty$ до $+\infty$, за винятком, можливо, скінченного числа точок розриву першого роду на кожному інтервалі скінченної довжини;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) існують такі два числа $M > 0$ і $s \geq 0$, що для всіх $t > 0$ $|f(t)| < Me^{st}$.

Число s називається показником зростання функції $f(t)$. Це означає, що $f(t)$ за абсолютною величиною може зростати не швидше деякої наперед заданої показникової функції.

Функція $f(t)$, що задовольняє згадані вище умови, називається **оригіналом**, або початковою функцією. Обмеження, що накладаються на $f(t)$ умовами 1)–3), звужують клас оригіналів і, отже, можливості описування фізичних процесів.

Для фізичних процесів найменш жорсткою є умова 2), оскільки звичайно можна вказати початок відліку часу $t = 0$ і досліджувати процеси для $t > 0$. Умови 1) і 3) значно звужують клас оригіналів.

Так, функції $\frac{1}{\ln t}$, $\operatorname{tg} t$ тощо не є оригіналами, оскільки порушується перша умова. Не є оригіналом і функція e^{t^2} , оскільки не задовольняє умову 3). Отже, до класу функцій-оригіналів входять не всі функції.

Далі розглянемо функцію-оригінал $f(t)$, комплексний параметр $p = \alpha + j\beta$ і функцію $K(t, p)$ змінної t і параметра p . Розглянемо інтеграл

$$\int_a^b f(t) K(t, p) e^{-pt} dt,$$

який є функцією параметра p :

$$F(p) = \int_a^b f(t) K(t, p) e^{-pt} dt. \quad (1.1)$$

Якщо інтеграл праворуч існує, то функція $F(p)$ називається **зображенням** функції $f(t)$, а сама операція (1.1) переходу від $f(t)$ до $F(p)$ називається інтегральним перетворенням. Іноді функцію називають також інтегральним перетворенням. Вигляд перетворення і

його характер залежить від вибору меж інтегрування a і b , а також функції $K(t, p)$, яка називається ядром перетворення.

Якщо в (1.1) покласти $a = 0$, $b = +\infty$, $K(t, p) = 1$, то дістанемо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.2)$$

Операція відповідності оригіналу $f(t)$ і зображення $F(p)$, визначена формулою (1.2), називається інтегральним перетворенням Лапласа. Невласний інтеграл у формулі (1.2) називається **інтегралом (оператором) Лапласа**.

У символах рівність (1.2) записується таким чином:

$$f(t) \neq F(p); \quad F(p) \leftrightarrow f(t) \text{ і т.д.}$$

У цій главі розглядатимемо лише перетворення Лапласа. Нагадаємо ще, що дійсна частина і коефіцієнт при уявній одиниці будь-якої комплексної величини $p = \alpha + j\beta$ позначають таким чином:

$$\alpha = \operatorname{Re} p; \quad \beta = \operatorname{Im} p; \quad p = \operatorname{Re} p + j \operatorname{Im} p.$$

Вираз (1.2) має смисл, якщо існує невластний інтеграл, що входить до нього. Умови існування невластного інтеграла (1.2) разом з тим визначають область існування зображення $F(p)$.

1.1. Теорема про область визначення зображення

Теорема. Зображення визначено у тих точках комплексної площини, де $\operatorname{Re} p > s$ (дійсна частина комплексного аргументу більша за показник зростання оригіналу s).

Доведення. Запишемо вираз для зображення:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Для визначення області зміни аргументу p , в якій інтеграл Лапласа збігається, скористаємося умовою, що модуль визначеного інтеграла не перевищує інтеграла від модуля підінтегральної функції:

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t) e^{-pt}| dt = \int_0^{+\infty} |e^{-pt}| |f(t)| dt.$$

Оскільки $|f(t)| < Me^{st}$, то

$$\int_0^{+\infty} |e^{-pt}| |f(t)| dt < \int_0^{+\infty} |e^{-pt}| Me^{st} dt.$$

Оцінимо множник $|e^{-pt}|$. Пам'ятаючи, що $p = \alpha + j\beta$, запишемо

$$e^{-pt} = e^{-(\alpha + j\beta)t} = e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}.$$

Останній множник запишемо за формулою Ейлера:

$$e^{-j\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t.$$

Отже,

$$e^{-pt} = e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} = e^{-\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t).$$

Перейшовши до абсолютних величин, дістанемо

$$|e^{-pt}| = e^{-\alpha t} |(\cos \beta t - j \sin \beta t)|.$$

Однак показникова функція $e^{-\alpha t}$ при будь-якому показнику додатна, тому знак модуля можна не записувати. Модуль комплексного числа знаходимо за означенням:

$$|\cos \beta t - j \sin \beta t| = \sqrt{\cos^2 \beta t + \sin^2 \beta t} = 1.$$

Отже,

$$|e^{-pt}| = e^{-\alpha t} = e^{-\operatorname{Re} pt};$$

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < M \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{st} dt. \quad (1.3)$$

Останній інтеграл легко обчислюється:

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-\alpha)t} dt = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{e^{(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_0^{\eta} = -\frac{1}{s-\alpha} + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{(s-\alpha)\eta}}{s-\alpha}. \quad (1.4)$$

Таким чином, інтеграл Лапласа збігається в півплощині $\alpha = \operatorname{Re} p > s$. Якщо $s - \alpha > 0$, то інтеграл розбіжний. Отже,

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < \frac{M}{\alpha - s}. \quad (1.5)$$

Наслідок. Якщо $p \rightarrow \infty$ так, що $\operatorname{Re} p = \alpha$ необмежено зростає, то з (1.5) випливає

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (1.6)$$

Вираз (1.6) є необхідною умовою існування зображення. Так, не можуть бути зображеннями функції комплексної змінної p ; $\frac{p^2 + a}{p + b}$; e^{ap} тощо, оскільки при необмеженому зростанні $\operatorname{Re} p$ вони не прямують до нуля.

Зазначимо, що сукупність усіх функцій $f(t)$, які є оригіналами, називається **простором оригіналів**, а сукупність відповідних цим оригіналам зображень називається **простором зображень**.

1.2. Теорема єдиності зображення – оригінал

Теорема єдиності. Будь-якому оригіналу відповідає єдине зображення.

Доведення не наводимо.

Справедливим є і обернене твердження: якщо у півплощині, де $\operatorname{Re} p > s$, $F(p)$ є зображенням деяких двох оригіналів $f_1(t)$, і $f_2(t)$, то ці оригінали тотожно рівні в точках своєї неперервності.

§ 2. ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Одинична функція Хевісайда

Функція

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

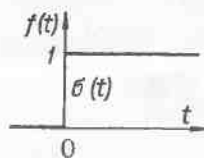


Рис. 2.1.

називається **функцією Хевісайда**. Графік її наведено на рис. 2.1. Застосуємо до неї перетворення Лапласа.

Зауваження. Питання про визначення функції Хевісайда у точці 0 залишається відкритим, оскільки для обчислення інтеграла Лапласа не має значення, чому дорівнює $\sigma(0)$. Приймають $\sigma(t) = 0, \frac{1}{2}, 1$. Далі вважатимемо, що $\sigma(0) = 1$.

Розглянемо тепер функцію $\Phi(t)$, яка задовольняє умови 1) і 3) (див. § 1) оригіналу, а умова 2) не виконується. Наприклад, маємо функції $1, \sin t, e^t, t^n$ і т.д. Помноживши $\Phi(t)$ на $\sigma(t)$, дістанемо $\Phi(t)\sigma(t) = 0$ при $t < 0$, тобто $\Phi(t)\sigma(t)$ тепер є оригіналом. Введення функції $\sigma(t)$ розширює клас оригіналів. Надалі заради стислості викладу оригінали $\Phi(t)\sigma(t)$ записуватимемо без множника $\sigma(t)$.

Введемо, як це прийнято, позначення оператора Лапласа L . Тоді зображення деякого оригіналу $f(t)$ запишемо у вигляді $Lf(t)$. Символічній рівності

$$f(t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

відповідатиме звичайна рівність

$$Lf(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Тепер

$$\begin{aligned} L\sigma(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sigma(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-p\eta}}{p} \right]_0^{\eta} = -\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{-p\eta}}{p} + \frac{1}{p}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Якщо $\operatorname{Re} p = \alpha > 0$, то $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{e^{-p\eta}}{p} = 0$.

Отже, зображенням одиничної функції є

$$L\sigma(t) = \frac{1}{p}, \quad \sigma(t) \doteq \frac{1}{p}. \quad (2.2)$$

Оскільки $s = 0$, то зображення $\frac{1}{p}$ існує, якщо $\operatorname{Re} p > 0$. Зображення сталої C

$$LC = LC\sigma(t) = CL\sigma(t) = \frac{C}{p}; \quad LC = \frac{C}{p}.$$

2.2. Показникова функція $f(t) = e^{qt}$

Як наслідок застосування перетворення Лапласа маємо

$$Le^{qt} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{qt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(q-p)t} dt = \frac{e^{(q-p)t}}{q-p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-q}, \quad (2.3)$$

якщо $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q$.

У випадку $f(t) = e^{-qt}$

$$Le^{-qt} = \frac{1}{p+q}, \quad (2.4)$$

якщо $\operatorname{Re} p + \operatorname{Re} q > 0$.

§ 3. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

3.1. Властивість лінійності

Нехай є скінченна сукупність оригіналів з відповідними зображеннями $f_i(t) \doteq F_i(p)$, $i = \overline{1, n}$. Тоді лінійна комбінація оригіналів

$$f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t), \quad (3.1)$$

де $C_i = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$, також є оригіналом. Зображенням лінійної комбінації оригіналів $F(p)$ є лінійна комбінація відповідних зображень

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p).$$

Доведення випливає з властивості лінійності визначеного інтеграла.

Приклад. Знайти зображення функції $f(t) = \sin t$.

Розв'язання. За формулами Ейлера (ч. 1, гл. 3, п. 6.5)

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + j \sin t \\ e^{-it} &= \cos t - j \sin t \\ e^{it} - e^{-it} &= 2j \sin t. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\sin t = \frac{1}{2j} e^{it} - \frac{1}{2j} e^{-it}, \quad (3.2)$$

то після порівняння з (3.1) видно, що роль C_1 виконує $\frac{1}{2j}$, а $C_2 = -\frac{1}{2j}$.

Отже, за властивістю лінійності

$$L \sin t = \frac{1}{2j} L e^{it} - \frac{1}{2j} L e^{-it}.$$

Скориставшись уже знайденими зображеннями (2.3) і (2.4), дістанемо

$$L e^{it} = \frac{1}{p-j}; \quad L e^{-it} = \frac{1}{p+j}.$$

Тому

$$L \sin t = \frac{1}{2j} \frac{1}{p-j} - \frac{1}{2j} \frac{1}{p+j},$$

що після елементарних перетворень дає змогу записати

$$L \sin t = \frac{1}{p^2 + 1}; \quad \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (3.3)$$

Знайдемо тепер зображення для $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Знову застосовуючи властивість лінійності і формули (2.3) та (2.4), маємо

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \text{або} \quad L \cos t = \frac{p}{p^2 + 1}. \quad (3.4)$$

Оскільки показник зростання для функцій $\sin t$ і $\cos t$, $s = 0$, то зображення (3.3) і (3.4) існують при $\operatorname{Re} p > 0$.

ВПРАВИ. Знайти зображення функцій.

1. $\operatorname{sh} t$. Відповідь. $\frac{1}{p^2 - 1}$.
2. $\operatorname{ch} t$. Відповідь. $\frac{p}{p^2 - 1}$.
3. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$. Відповідь. $\frac{p^3}{p^4 - 1}$.
4. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$. Відповідь. $\frac{p^2}{p^4 - 1}$.
5. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$. Відповідь. $\frac{1}{p^4 - 1}$.
6. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$. Відповідь. $\frac{p}{p^4 - 1}$.

3.2. Теорема подібності
(зображення функції зі змінним масштабом)

Теорема. Нехай функція $f(t)$ – оригінал і $f(t) \doteq F(p)$, тоді

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad (3.5)$$

де $a > 0$ (див. § 1, умову 2) для оригіналу $\operatorname{Re} p > \max(s, as)$.

Доведення. Застосуємо перетворення Лапласа до $f(at)$:

$$Lf(at) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt$$

і введемо нову змінну $z = at$, тоді $dt = \frac{dz}{a}$, межі інтегрування залишаються попередніми. Отже,

$$Lf(at) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) \frac{dz}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right).$$

Останню рівність записано, виходячи з означення перетворення Лапласа.

Таким чином, якщо оригіналу $f(t)$ відповідає зображення $F(p)$, то операції множення аргументу у просторі оригіналів на додатний множник відповідає операція ділення зображення і комплексного аргументу у просторі зображень на цей самий множник.

За теоремою подібності можна, не користуючись безпосередньо формулою (1.2), дістати зображення інших оригіналів, виходячи з уже здобутих формул (2.3), (2.4), (3.3), (3.4).

Нехай потрібно знайти зображення оригіналу $f(t) = \sin \omega t$, де $\omega > 0$ (останнє обмеження спричинено умовою 2) оригіналу). Звертаючись до формули (3.3), за теоремою подібності маємо

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1},$$

або після спрощень

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.6)$$

Аналогічно з (3.4) знаходимо

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.7)$$

Рекомендуємо перевірити також формули

$$\operatorname{sh} at \doteq \frac{a}{p^2 - a^2}; \quad \operatorname{ch} at \doteq \frac{p}{p^2 - a^2}. \quad (3.8)$$

Приклад. Знайти зображення оригіналу $\operatorname{sh}^3 \omega t \sin^4 \omega t$, знаючи зображення

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sh}^3 t \sin^4 t] &= \frac{1}{32} \left[\frac{3p^2 - 75}{p^4 + 14p^2 + 625} - \right. \\ &- 3 \cdot \frac{p^2 - 17}{p^4 + 30p^2 + 289} - 4 \cdot \frac{3p^2 - 39}{p^4 - 10p^2 + 169} + \\ &\left. + 12 \cdot \frac{p^2 - 5}{p^4 + 6p^2 + 25} + \frac{9}{p^2 - 9} - \frac{9}{p^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Розв'язання. Скористаємось теоремою подібності:

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sh}^3 \omega t \sin^4 \omega t] &= \frac{1}{32\omega} \left[\frac{3\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 75}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^4 + 14\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 625} - \right. \\ &- 3 \cdot \frac{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 17}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^4 + 30\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 289} - 4 \cdot \frac{3\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 39}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^4 - 10\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 169} + \\ &\left. + 12 \cdot \frac{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 5}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^4 + 6\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 25} + \frac{9}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 9} - \frac{9}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Після спрощень маємо

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sh}^3 \omega t \sin^4 \omega t] &= \frac{\omega}{32} \left[\frac{3p^2 - 75\omega^2}{p^4 + 14p^2\omega^2 + 625\omega^4} - \right. \\ &- 3 \cdot \frac{p^2 - 17\omega^2}{p^4 + 30p^2\omega^2 + 289\omega^4} - 4 \cdot \frac{3p^2 - 39\omega^2}{p^4 - 10p^2\omega^2 + 169\omega^4} + \\ &\left. + 12 \cdot \frac{p^2 - 5\omega^2}{p^4 + 6p^2\omega^2 + 25\omega^4} + \frac{9}{p^2 - 9\omega^2} - \frac{9}{p^2 - \omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ВПРАВИ. Знайти зображення функцій:

1. $\cos^2 at$. Відповідь. $\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$

2. $\operatorname{ch}^2 at$. Відповідь. $\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$

3. $\sin^2 at$. Відповідь. $\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$

4. $\operatorname{sh}^2 \omega t$. Відповідь. $\frac{2\omega^2}{p(p^2 - 4\omega^2)}$

5. $\sin \alpha t \cos \beta t$. Відповідь. $\frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{[p^2 + (\alpha - \beta)^2][p^2 + (\alpha + \beta)^2]}$

6. $\sin \alpha t \sin \beta t$. Відповідь. $\frac{2\alpha\beta p}{[p^2 + (\alpha - \beta)^2][p^2 + (\alpha + \beta)^2]}$

7. $\cos \alpha t \cos \beta t$. Відповідь. $\frac{p(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{[p^2 + (\alpha - \beta)^2][p^2 + (\alpha + \beta)^2]}$

8. $\operatorname{ch} \omega t \cos \omega t$. Відповідь. $\frac{p^3}{p^4 + 4\omega^4}$

9. $\operatorname{sh} bt \sin bt$. Відповідь. $\frac{2pb^2}{p^4 + 4b^4}$

3.3. Теорема зміщення в аргументі зображення

Теорема. Нехай $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$ і α — комплексне число, тоді $F(p + \alpha)$ є зображенням $e^{-\alpha t} f(t)$.

Доведення. Застосуємо перетворення Лапласа до функції

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = F(p + \alpha). \quad (3.11)$$

Показником зростання функції $f(t)$ є s . Тоді показником зростання функції $e^{-\alpha t} f(t)$ буде $s - \operatorname{Re} \alpha$. У зв'язку з цим умова

$$L(e^{-\alpha t} f(t)) = F(p + \alpha)$$

є справедливою, якщо $\operatorname{Re} p > s - \operatorname{Re} \alpha$ або $\operatorname{Re}(p + \alpha) > s$.

Доведену теорему можна узагальнити і на випадок діаметрально протилежного зміщення

$$F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha t} f(t) \quad (\operatorname{Re}(p - \alpha) > s). \quad (3.12)$$

Наприклад,

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2};$$

$$e^{-\alpha t} \cos \omega t \doteq \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (3.13)$$

ВПРАВИ. Знайти зображення функцій.

1. $e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \omega t$. Відповідь. $\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$

2. $e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \omega t$. Відповідь. $\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \omega^2}$

3. $y_1(at) = \operatorname{ch} at \cdot \cos at$. Відповідь. $L(y_1) = \frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$;

$y_2(at) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} at \cdot \sin at + \operatorname{sh} at \cdot \cos at)$. Відповідь. $L(y_2) = \frac{ap^2}{p^4 + 4a^4}$;

$y_3(at) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} at \cdot \sin at$. Відповідь. $L(y_3) = \frac{a^2 p}{p^4 + 4a^4}$;

$y_4(at) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} at \cdot \sin at - \operatorname{sh} at \cdot \cos at)$. Відповідь. $L(y_4) = \frac{a^2}{p^4 + 4a^4}$.

Вказівка. При виконанні вправи 3 скористатися теоремою зміщення в аргументі зображення. Функції $y_1(at)$, $y_2(at)$, $y_3(at)$, $y_4(at)$ називають функціями Крилова.

4. $e^{-4t} \sin 3t \cdot \cos 2t$. Відповідь. $\frac{3(p+4)^2 + 15}{[(p+4)^2 + 25][(p+4)^2 + 1]}$

3.4. Теорема зміщення в аргументі оригіналу

Теорема. Якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$e^{-bt} F(p) \doteq \begin{cases} 0 & \text{при } t < b; \\ f(t-b) & \text{при } t \geq b, \end{cases} \quad (3.14)$$

де b — будь-яке додатне число.

Доведення. Застосуємо перетворення Лапласа до функції $f(t-b)$:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-b) dt = \begin{cases} t-b = \tau, & dt = d\tau \\ t=0 \rightarrow \tau = -b \\ t = \infty \rightarrow \tau = \infty \end{cases} = \\ = \int_{-b}^{\infty} e^{-p\tau} e^{-pb} f(\tau) d\tau = e^{-pb} \int_{-b}^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \\ = e^{-pb} \int_{-b}^0 e^{-p\tau} f(\tau) d\tau + e^{-pb} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{-pb} F(p)$$

Перший доданок

$$e^{-pb} \int_{-b}^0 e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = 0,$$

оскільки за означенням оригінал дорівнює нулю для всіх від'ємних значень аргументу.

Теорему доведено.

Приклади. 1. Дано $f(t) = \sigma(t)$, знайти $L \sigma(t-b)$.

Розв'язання.

$$L \sigma(t-b) = e^{-pb} \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

2. Знайти зображення

$$f(t) = \sigma(t-b) - \sigma(t-b_1), \quad b < b_1.$$

Розв'язання.

$$L f(t) = L \sigma(t-b) - L \sigma(t-b_1) = e^{-pb} \frac{1}{p} - e^{-pb_1} \frac{1}{p} = \frac{e^{-pb} - e^{-pb_1}}{p}.$$

Розглянемо також випадок від'ємного зміщення, коли $-b < 0$ і $b > 0$. При цьому графік оригіналу зміщується вліво на відрізок b . В силу умови 2), що накладається на функцію-оригінал, графік $f(t)$, перенесений ліворуч від початку координат, збігається з віссю t . Визначимо, які операції треба виконати із зображенням. Застосувавши перетворення Лапласа до функції $f(t+b)$, маємо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t+b) dt = \begin{cases} t+b = \tau, & dt = d\tau \\ t=0 \rightarrow \tau = +b \\ t = \infty \rightarrow \tau = \infty \end{cases} = \\ = \int_b^{\infty} e^{-p(\tau-b)} f(\tau) d\tau = e^{pb} \int_b^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau.$$

У правій частині здобутого виразу здійснюємо тотожні перетворення, додаючи і віднімаючи $e^{pb} \int_0^b e^{-p\tau} f(\tau) d\tau$. Дістанемо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t+b) dt = e^{pb} \int_b^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau + e^{pb} \int_0^b e^{-p\tau} f(\tau) d\tau - \\ - e^{pb} \int_0^b e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{pb} \left\{ F(p) - \int_0^b e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \right\}.$$

Таким чином, нехай для від'ємного зміщення $f(t) \doteq F(p)$. Тоді

$$f(t+b) \doteq e^{pb} \left\{ F(p) - \int_0^b e^{-p\tau} f(\tau) d\tau \right\},$$

де b — будь-яке додатне число. Маючи спільне походження, функції $f(t)$ і $f(t+b)$ різні. Тому з'являється інтеграл зі скінченними межами.

Об'єднуючи доведені теореми з теоремою подібності, можна довести (нехай це зробить читач) ще два твердження. Нехай $f(t) \doteq F(p)$ і $a > 0$; $b \geq 0$ тоді:

$$\text{а) } \frac{1}{a} e^{-\frac{pb}{a}} F\left(\frac{p}{a}\right) \doteq \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < \frac{b}{a}; \\ f(at-b), & \text{якщо } t \geq \frac{b}{a}; \end{cases} \\ \text{б) } \frac{1}{a} e^{\frac{pb}{a}} \left[F\left(\frac{p}{a}\right) - \int_0^b e^{-\frac{p}{a}t} f(t) dt \right] \doteq f(at+b). \quad (3.15)$$

Застосування формул а) і б) можна проілюструвати на прикладах:

$$\sin(\omega t - b) \doteq \frac{1}{\omega} e^{-\frac{pb}{\omega}} F\left(\frac{p}{\omega}\right) = e^{-\frac{pb}{\omega}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.16)$$

$$\cos(\omega t - b) \doteq e^{\frac{pb}{\omega}} \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.17)$$

ВПРАВИ. Знайти зображення функції.

1. $\operatorname{sh}(\omega t - \varphi_0)$. Відповідь. $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$.

2. $\operatorname{ch}(\omega t - \varphi_0)$. Відповідь. $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega} p} \frac{p}{p^2 - \omega^2}$.

3.5. Теорема про диференціювання зображення

Теорема. Нехай $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > s$, тоді

$$-t f(t) \doteq \frac{dF(p)}{dp}$$

Доведення. Оскільки інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ збігається рівномірно, то його можна диференціювати за параметром. Тому

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} [e^{-pt} f(t) dt] = \int_0^{\infty} e^{-pt} [-t \cdot f(t)] dt \doteq -t f(t),$$

що й треба було довести.

Слід зазначити, що коли $f(t)$ — оригінал, то $-t f(t)$ також оригінал, оскільки за показник зростання можна взяти будь-яке $s_1 > s$, де s — показник зростання вихідного оригіналу $f(t)$.

Доведену теорему можна сформулювати ще й так: операції диференціювання у просторі зображень відповідає операція множення оригіналу на аргумент з від'ємним знаком у просторі оригіналів.

Застосовуючи операцію диференціювання багаторазово, можна показати, що

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \doteq (-t)^n f(t).$$

Звідси випливає, що коли $f(t)$ — оригінал і $f(t) \doteq F(p)$, тоді

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Приклади. 1. Знайти зображення $f(t) = t$.

Розв'язання. Скористаємося раніше знайденим зображенням функції Хевісайда:

да: $\sigma(t) \doteq \frac{1}{p}$. Тоді

$$t \doteq t \sigma(t) = (-1) \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p^2}.$$

2. Застосовуючи той самий спосіб, що і в попередньому прикладі, можна легко знайти зображення t^n . Дійсно,

$$t^n = t^n \sigma(t) \doteq (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p} \right),$$

але

$$\frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p} \right) \doteq (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Отже,

$$t^n \doteq (-1)^{2n} \frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (3.18)$$

У деяких випадках треба знайти зображення $f(t) = t^n$ для дробового n . Це можна зробити таким чином:

$$L(t^n \sigma(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \left[\begin{array}{l} pt = \tau, \quad dt = \frac{d\tau}{p}, \\ t = \frac{\tau}{p}, \quad \tau_n = 0, \quad \tau_e = \infty \end{array} \right] = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau$$

(див. ч. 1, гл. 6, п. 7.2),

але $\int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau = \Gamma(n+1)$ (див. ч. 1, гл. 6, § 10), тоді

$$t^n \doteq \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}.$$

Як випливає з доведення останньої формули, теорема про диференціювання зображення тут не використовувалася, хоча при цілому n маємо $\Gamma(n+1) = n!$, що дає (3.18).

3. Дано $f(t) = (t-b)^n$, де n — ціле. Знайти $F(p)$.

Розв'язання. Користуючись формулою (3.18) і теоремою зміщення, дістанемо

$$(t-b)^n \doteq (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}} e^{-pb}. \quad (3.19)$$

4. Знайти зображення $f(t) = t \sin t$.

Розв'язання. Оскільки $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, то

$$t \sin t \doteq -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}. \quad (3.20)$$

ВПРАВИ. Знайти зображення функцій.

1. $t \sin at$. Відповідь. $\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$.

2. $t \cos at$. Відповідь. $\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$.

3. $t \operatorname{sh} at$. Відповідь. $\frac{2pa}{(p^2 - a^2)^2}$.

4. $t \operatorname{ch} at$. Відповідь. $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2}$.

5. $t^2 \cos at$. Відповідь. $\frac{2p(p^2 - 3a^2)}{(p^2 + a^2)^3}$.

6. $t^2 \sin at$. Відповідь. $\frac{2a(3p^2 - a^2)}{(p^2 + a^2)^3}$.

7. $t \sin at \operatorname{sh} at$. Відповідь. $\frac{2a^2(3p^4 - 4a^4)}{(p^4 + 4a^4)^2}$.

8. $t \cos at \operatorname{ch} at$. Відповідь. $\frac{p^2(p^4 - 12a^4)}{(p^4 + 4a^4)^2}$.

3.6. Теорема про диференціювання оригіналу

Теорема. Нехай функція $f(t)$ має неперервну похідну на всій додатній півосі ($t > 0$) і нехай $f'(t)$ — оригінал. Показники зростання $f(t)$ і $f'(t)$ дорівнюють s_0 . Тоді, якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\frac{df}{dt} = f'(t) \doteq pF(p) - f(+0).$$

Доведення. Застосовуючи перетворення Лапласа до $f'(t)$:

$$Lf'(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt.$$

Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \left[\begin{array}{l} u = e^{-pt}; \quad dv = f'(t) dt \\ du = -pe^{-pt} dt; \quad v = f(t) \end{array} \right] = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} pe^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(+0).$$

що й треба було довести. Теорема має сенс, якщо $f'(t)$ — кусково-неперервна на $(0, +\infty)$ з розривами першого роду.

Слід зазначити, що під $f(+0)$ розуміють праве граничне значення $f(t)$, тобто $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Вимога, що $f'(t)$ є оригіналом, досить істотна, оскільки з умови, що $f'(t)$ є оригіналом, випливає, що і первісна є оригіналом. Однак обернене твердження не завжди справедливе. Так, $\ln t$ має зображення. Проте для похідної $(\ln t)' = \frac{1}{t}$ зображення не існує.

Доведену теорему можна сформулювати і так: операції диференціювання у просторі оригіналів відповідає множення зображення на аргумент p з подальшим відніманням початкового значення оригіналу.

Після повторного застосування теореми маємо

$$Lf''(t) = p[pF(p) - f(+0)] - f'(+0) = p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0);$$

$$Lf'''(t) = p^3F(p) - p^2f(+0) - pf'(+0) - f''(+0);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Lf^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - p f^{(n-1)}(+0), \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (3.21)$$

Сформулюємо знайдений результат у вигляді теореми: якщо функція $f(t)$ разом зі своїми похідними, тобто $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$, неперервні, а $f^{(n)}(t)$ — кусково-неперервна на $(0, +\infty)$, причому всі згадані в теоремі функції є оригіналами з одним і тим самим порядком зростання s_0 , то має місце формула (3.21).

Надалі “+0” замінимо на “0”.

У випадку нульових початкових умов: $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ маємо

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p). \quad (3.22)$$

Приклади. 1. Знайти зображення $\cos t$.

Розв'язання. Відомо, що

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}; \quad (\sin t)' = \cos t,$$

тоді

$$L(\sin t)' = p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \sin 0 = \frac{p}{p^2 + 1}; \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$$

2. Знайти зображення диференціального виразу

$$x^{IV}(t) - 7x'''(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) + 12$$

за умови

$$x(0) = 1; \quad x'(0) = 0; \quad x''(0) = 0; \quad x'''(0) = -1;$$

$x(t)$ і всі її похідні до четвертого порядку включно – неперервні оригінали в правому околі нуля.

Розв'язання. Загальне правило переходу від оригіналу до зображення залишається попереднім: а) множимо цей вираз на e^{-pt} ; б) інтегруємо знайдений вираз по t у межах від 0 до $+\infty$. Якщо позначити $Lx(t) = X(p)$, то за формулою (3.21)

$$Lx'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$Lx''(t) = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p;$$

$$Lx'''(t) = p^3X(p) - p^2;$$

$$Lx^{IV}(t) = p^4X(p) - p^3 + 1.$$

Звідси випливає, що

$$L[x^{IV}(t) - 7x'''(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) + 12] = p^4X(p) - p^3 + 1 - 7[p^3X(p) - p^2] - [p^2X(p) - p] + [pX(p) - 1] - X(p) + \frac{12}{p}$$

Після зведення подібних у правій частині рівності маємо

$$L[x^{IV}(t) - 7x'''(t) - x''(t) + x'(t) + 12] = (p^4 - 7p^3 - p^2 + p - 1)X(p) - p^3 + 7p^2 + p + \frac{12}{p}$$

ВПРАВИ. Знайти зображення диференціальних виразів з початковими умовами:

1. $x'(t) + 8$, $x(0) = 0$. Відповідь. $pF(p) + \frac{8}{p}$

2. $x''(t) + x(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. Відповідь. $(p^2 + 1)F(p) - 1$.

3. $3x''(t) - 2x'(t) + 5$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -3$. Відповідь. $(3p^3 - 2p^2)F(p) - 3p^2 - 4p + 13 + \frac{5}{p}$

4. $x^V(t) + 2x^{IV}(t) + 4x(t)$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = x^{IV}(0) = -1$. Відповідь. $(p^5 + 2p^4 + 4)F(p) + p + 3$.

3.7. Теорема про інтегрування оригіналу

Теорема. Нехай $f(t)$ – оригінал, а його зображенням є $F(p)$, тоді $\int_0^t f(u)du$ – також оригінал, а його зображенням є $\frac{F(p)}{p}$.

Доведення. Інтеграл $\int_0^t f(u)du$ є оригіналом, оскільки виконуються всі три умови для оригіналу (див. § 1).

Для доведення другої частини теореми позначимо шукане зображення через $\Phi(p)$. Отже,

$$\int_0^t f(u)du \doteq \Phi(p).$$

Користуючись теоремою про диференціювання оригіналу – формула (3.21), запишемо

$$\left[\int_0^t f(u)du \right]' \doteq p\Phi(p) - \int_0^0 f(u)du = p\Phi(p).$$

Інтеграл, що міститься у лівій частині останнього виразу, зі змінною верхньою межею здиференціюємо по цій межі. Дістанемо підінтегральну функцію від верхньої межі

$$f(t) \doteq p\Phi(p).$$

Однак за умовою теореми

$$f(t) \doteq F(p).$$

У силу єдиності зображення

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p},$$

що й доводить теорему. Отже,

$$\int_0^t f(u)du \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Це означає, що операції інтегрування у просторі оригіналів відповідає операція ділення на аргумент у просторі зображень.

Приклад. Знайти оригінал за зображенням $\frac{1}{p(p^2 - 4p + 5)}$.

Розв'язання. Спочатку перетворимо це зображення до однієї з відомих формул. Зазначимо, що в знаменнику міститься квадратний тричлен. Виділимо повний квадрат, тоді

$$\frac{1}{p^2 - 4p + 5} = \frac{1}{(p-2)^2 + 1}$$

За формулою (3.11)

$$\frac{1}{(p-2)^2 + 1} \doteq e^{2t} \sin t.$$

Поділивши ліву частину на p , справа беремо інтеграл. Тому

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p^2 - 4p + 5)} &\doteq \int_0^t e^{2u} \sin u du = \frac{e^{2u}(2 \sin u - \cos u)}{5} \Big|_0^t = \\ &= \frac{e^{2t}(2 \sin t - \cos t) + 1}{5}. \end{aligned}$$

ВПРАВИ. Користуючись теоремою про існування оригіналу, знайти оригінали за зображеннями.

1. $\frac{1}{p(p^2 - 6p + 13)}$. *Відповідь.* $\frac{e^{3t}}{26}(3 \sin 2t - 2 \cos 2t) + \frac{1}{13}$.

2. $\frac{1}{p(p^2 + 2p - 3)}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4} \left(e^t + \frac{1}{3} e^{-3t} - \frac{4}{3} \right)$.

3.8. Теорема про інтегрування зображення

Теорема. Нехай $f(t) \doteq F(p)$ і $\frac{f(t)}{t}$ — оригінал, а $\int_p^\infty F(z) dz$ збігається; тоді

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z) dz.$$

Доведення. Оскільки $\frac{f(t)}{t}$ — оригінал, то нехай $\frac{f(t)}{t} \doteq \Phi(p)$.

Застосовуючи теорему про диференціювання зображення, можемо записати: $f(t) \doteq -\Phi'(p)$. З іншого боку, $f(t) \doteq F(p)$, тоді $F(p) = -\Phi'(p)$ або $\frac{d\Phi}{dp} = -F(p)$. Це диференціальне рівняння відносно не-

відомої функції зображення $\Phi(p)$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи в межах від p до η , дістанемо

$$\begin{aligned} d\Phi &= -F(p) dp; \quad \int_p^\eta d\Phi = -\int_p^\eta F(z) dz; \\ \Phi(\eta) - \Phi(p) &= -\int_p^\eta F(z) dz. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Нехай в останній рівності $\eta \rightarrow \infty$. Тоді за наслідком (див. формулу (1.6))

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi(\eta) = 0; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_p^\eta F(z) dz = \int_p^\infty F(z) dz.$$

Отже, вираз (3.23) можна записати у вигляді

$$\Phi(p) = \int_p^\infty F(z) dz, \quad \text{а} \quad \frac{f(t)}{t} \doteq \Phi(p),$$

тому

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z) dz.$$

Це співвідношення існує, якщо $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, де s_1, s_0 — показники зростання функцій $f(t)$ і $\frac{f(t)}{t}$.

Отже, операція ділення на аргумент у просторі оригіналів відповідає операції інтегрування в межах від p до ∞ у просторі зображень.

Приклад. Знайти зображення оригіналу

$$f(t) = \frac{e^{-at} \sin^2 bt}{t}.$$

Розв'язання. Знайдемо найкоротший шлях розв'язання прикладу. Вважатимемо операцію ділення на t останньою. Отже, останнім кроком буде інтегрування зображення оригіналу $e^{-at} \sin^2 bt$. Якщо зображення оригіналу $\sin^2 bt$ є відомим, то можна застосовувати теорему про зміщення в аргументі зображення. У свою чергу, якщо відомим буде зображення $\sin^2 t$, то теорема подібності дасть змогу знайти з-

ображення для $\sin^2 bt$. Пройдемо всі ці етапи у зворотній послідовності, починаючи з перетворення $\sin^2 t$. За формулами тригонометрії

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Звідси, користуючись формулами (2.2) і (3.7), маємо

$$L \sin^2 t = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

Застосувавши теорему подібності, дістанемо

$$\sin^2 bt \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4b^2} \right).$$

За теоремою зміщення в аргументі зображення

$$e^{-at} \sin^2 bt \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{p+a}{(p+a)^2 + 4b^2} \right).$$

Останньою операцією в просторі оригіналів є ділення оригіналу на аргумент t , що відповідає операції інтегрування в просторі зображень. Розв'язок задачі має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{e^{-at} \sin^2 bt}{t} &\doteq \frac{1}{2} \int_p^\infty \left(\frac{1}{z+a} - \frac{z+a}{(z+a)^2 + 4b^2} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \ln \frac{z+a}{\sqrt{(z+a)^2 + 4b^2}} \Big|_p^\eta = \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{\eta+a}{\sqrt{(\eta+a)^2 + 4b^2}} \right] - \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{p+a}{\sqrt{(p+a)^2 + 4b^2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{p+a}{\sqrt{(p+a)^2 + 4b^2}}. \end{aligned}$$

Границя у квадратних дужках при $\eta \rightarrow \infty$ дорівнює нулю, оскільки $\ln 1 = 0$. Остаточно відповідь можна перетворити таким чином:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln \frac{p+a}{\sqrt{(p+a)^2 + 4b^2}} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(p+a)^2 + 4b^2}}{p+a} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left[\left(\frac{\sqrt{(p+a)^2 + 4b^2}}{p+a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \ln \frac{(p+a)^2 + 4b^2}{(p+a)^2}. \end{aligned}$$

Тому

$$\frac{e^{-at} \sin^2 bt}{t} \doteq \frac{1}{4} \ln \frac{(p+a)^2 + 4b^2}{(p+a)^2} \quad (3.24)$$

ВПРАВИ. Застосовуючи теорему про інтегрування зображення, знайти зображення оригіналу.

1. $\frac{\sin t}{t}$. Відповідь. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$.
2. $\frac{\cos at - \cos bt}{t}$. Відповідь. $\frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + b^2}{p^2 + a^2}$.
3. $\frac{\sin 7t \sin 3t}{t}$. Відповідь. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 100}{p^2 + 16}$.
4. $\frac{1 - e^{\beta t}}{te^t}$. Відповідь. $\ln \frac{p - \beta + 1}{p + 1}$.
5. $\frac{\sin^2 \omega t}{t}$. Відповідь. $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4\omega^2}{p^2}$.

3.9. Поняття про згортку функцій. Теорема про згортку

Нехай дано дві функції $a(t)$ і $b(t)$. Згортокою функцій $a(t)$ і $b(t)$ називається функція $c(t)$, що визначається рівністю

$$c(t) = \int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau.$$

Враховуючи, що операція згортання дещо схожа на операцію множення, згортку позначають таким чином: $c(t) = a(t) \times b(t)$.

Доведемо, що згортка функцій підпорядковується переставному закону:

$$a(t) \times b(t) = b(t) \times a(t).$$

Маємо

$$c(t) = a(t) \times b(t) = \int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau.$$

Введемо підстановку $t - \tau = u$; $d\tau = -du$, отже, при $\tau = 0$, $u = t$; при $\tau = t$, $u = 0$. Тоді

$$\int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau = -\int_t^0 a(t - u) b(u) du = \int_0^t b(u) a(t - u) du.$$

Отже,

$$\int_0^t a(\tau) b(t - \tau) d\tau = \int_0^t b(\tau) a(t - \tau) d\tau,$$

$$a(t) \times b(t) = b(t) \times a(t).$$

Приклад. Нехай $a(t) = e^t$, $b(t) = \cos t$. Знайти згортку цих функцій.
Розв'язання.

$$c(t) = a(t) \times b(t) = \int_0^t e^\tau \cos(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{t-u} \cos u du = e^t \int_0^t e^{-u} \cos u du.$$

В останньому інтегралі за його знак винесено множник e^t , сталий відносно u . Застосовуючи двічі до здобутого інтеграла формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$e^t \times \cos t = \frac{\sin t - \cos t}{2} + \frac{e^t}{2}. \quad (3.25)$$

Теорема про згортку (множення зображень). Нехай функції $f_1(t)$ з порядком зростання s_1 відповідає зображення $F_1(p)$, де $\operatorname{Re} p > s_1$, а функції $f_2(t)$ з порядком зростання s_2 — зображення $F_2(p)$ і $\operatorname{Re} p > s_2$, $s_1 > s_2$. Тоді добутку зображень $F_1(p)F_2(p)$ відповідає оригінал, зображений згорткою оригіналів:

$$F_1(p)F_2(p) = f_1(t) \times f_2(t) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > s_1.$$

Доведення. Позначимо зображення згортки, тобто функції $c(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$, через $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} c(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right) dt.$$

Це двократний інтеграл. Область його визначення $D: 0 \leq t < \infty$, $0 \leq \tau \leq t$, де інтеграл збігається абсолютно (див. ч. 1, гл. 6, п. 9.1). Тому можна змінити порядок інтегрування, взявши $0 \leq \tau < \infty$, $\tau \leq t < \infty$. Тоді

$$\Phi(p) = \int_0^\infty f_2(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(t-\tau) dt.$$

У другому інтегралі замінимо змінну $t - \tau = u$; $t = u + \tau$. Другий інтеграл переходить в інтеграл

$$\int_0^\infty e^{-pu} f_1(u) du, \quad \text{а} \quad \Phi(p) = F_2(p)F_1(p).$$

Теорему доведено. Її можна сформулювати ще й таким чином: операції множення двох функцій у просторі зображень відповідає операція згортки їхніх оригіналів у просторі оригіналів. Як ілюстрацію розглянемо приклад.

Приклад. Знайти оригінал $f(t)$, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Розв'язання. Скористаємося теоремою про згортку. З цією метою дане зображення подамо у вигляді добутку двох множників, оригінали яких або відомі, або їх можна знайти. Зазначимо, що за формулою (2.3) можна знайти оригінал для зображення $\frac{1}{p-1}$, а за формулою (3.4) — оригінал $\frac{p}{p^2+1}$. Тому

$$\frac{p}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \doteq e^t \times \cos t.$$

Для остаточного розв'язання задачі звернемося до (3.25), де вже знайдено згортку. Тому

$$\frac{p}{(p-1)(p^2+1)} \doteq \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^t).$$

Узагальненням теореми про згортку є **теорема Ефроса**. Нехай $f(t) \doteq F(p)$, а $\Phi(p)$ і $q(p)$ — такі аналітичні функції, що

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)} \doteq \varphi(t, \tau).$$

Тому

$$F(q(p))\Phi(p) \doteq \int_0^\infty f(\tau)\varphi(t, \tau) d\tau.$$

У практичних обчисленнях важливу роль відіграє наслідок з теореми про згортку (інтеграл Дюамеля). Припустимо, що треба знайти оригінал для зображень $pF_1(p)F_2(p)$, де $F_1(p)$ і $F_2(p)$ відповідають відомим оригіналам $f_1(t)$ і $f_2(t)$. Перетворимо дане зображення, додаючи до нього нуль:

$$pF_1(p)F_2(p) = pF_1(p)F_2(p) + f_1(+0)F_2(p) - f_1(+0)F_2(p).$$

Групуємо перший і останній члени правої частини здобутої рівності. Дістанемо

$$pF_1(p)F_2(p) = f_1(+0)F_2(p) + [pF_1(p) - f_1(+0)]F_2(p).$$

У квадратних дужках міститься зображення першої похідної оригіналу $f_1(t)$, тому другому доданку відповідає згортка відомих оригіналів. Звідси дістанемо інтеграл Дюамеля

$$pF_1(p)F_2(p) \doteq f_1(+0)f_2(t) + \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \quad (3.26)$$

Формула (3.26) є однією з чотирьох можливих для інтеграла Дюамеля. У (3.26) можна поміняти місцями $f_1(t)$ і $f_2(t)$, а потім, користуючись переставною властивістю згортки, записати ще дві формули.

Інтеграл Дюамеля використовується в операційному методі розв'язування диференціальних рівнянь.

ВПРАВИ. Користуючись теоремою про згортку, знайти оригінали, що відповідають таким зображенням.

1. $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$. Відповідь. $e^{2t} - e^t$.

2. $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$. Відповідь. $e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}$.

3. $\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$. Відповідь. $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$.

4. $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$. Відповідь. $\frac{1}{5}(3 \sin 3t - 2 \sin 2t)$.

Примітка. Оригінали у вправах 3 і 4 можна знайти за допомогою інтеграла Дюамеля.

3.10. Теорема про граничні співвідношення

Теорема 1. Нехай $f(t) \doteq F(p)$ і $f'(t)$ – оригінал, тоді

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t). \quad (3.27)$$

Доведення. Згідно з теоремою про диференціювання оригіналів маємо

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0).$$

Необхідною умовою існування зображення є прямування його до нуля при $p \rightarrow \infty$, тому $\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(p) - f(+0)] = 0$. Звідси випливає рівність (3.27).

Теорема 2. Нехай $f(t) \doteq F(p)$ і $f'(t)$ – оригінал; тоді, якщо існує границя $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Доведення. За теоремою про диференціювання оригіналу

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = pF(p) - f(+0).$$

Спрямувавши у цій рівності p до нуля, дістанемо

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p) - f(+0)]. \quad (3.28)$$

Невласний інтеграл подамо у вигляді

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} f'(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) - f(+0). \quad (3.29)$$

Повертаючись у рівності (3.29) від η до t , перепишемо (3.28) таким чином:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(+0)$$

або

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (3.30)$$

Здобуті формули (3.27) і (3.30) дають змогу скласти уявлення про досліджуваний процес на його початку і на нескінченності. А цього іноді буває достатньо.

§ 4. ЗОБРАЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНОГО ОРИГІНАЛУ

Розглянемо функцію-оригінал $f(t)$, визначену на обмеженому проміжку $\langle 0, a \rangle$. Припустимо, що $f(t) = 0$ всюди поза $\langle 0, a \rangle$. Тоді

$$Lf(t) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^a f(t)e^{-pt} dt.$$

Побудуємо періодичну функцію $\psi(t)$ з періодом $T = a$, що збігається на $(0, a)$ з $f(t)$. Отже,

$$\psi(t) = \psi(t + a) = \psi(t + 2a) = \dots = \psi(t + na) = f(t). \quad (4.1)$$

Знайдемо зображення $\Phi(p)$ періодичної функції $\psi(t)$. Введемо змінну $u = t + na$. Очевидно, у кожному з інтервалів $(na, (n+1)a)$ змінна u має різні значення. Тому формально записаний ряд Лапласа

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pu} \psi(u) du$$

треба записати через суму:

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pu} \psi(u) du = \int_0^a e^{-pu} \psi(u) du + \int_a^{2a} e^{-pu} \psi(u) du + \dots + \\ &+ \int_{(n+1)a}^{(n+2)a} e^{-pu} \psi(u) du + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{na}^{(n+1)a} e^{-pu} \psi(u) du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a e^{-p(t+na)} \psi(t+na) dt. \end{aligned}$$

Враховуючи умову періодичності оригіналу (4.1), останній вираз можна записати у вигляді

$$\Phi(p) = \int_0^a e^{-pt} f(t) dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pna}.$$

Розглянемо множник

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pna} = 1 + e^{-pa} + e^{-2pa} + \dots + e^{-pna} + \dots$$

Цей вираз є збіжною геометричною прогресією. Дійсно $\text{Re } p > s_0 > 0$, тоді $|e^{-pa}| < 1$ і

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pna} = \frac{1}{1 - e^{-pa}}.$$

Нагадаємо, що

$$\int_0^a e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p).$$

Тоді періодичний оригінал, визначений всюди при $t > 0$, має зображення

$$\psi(t) \doteq F(p) \frac{1}{1 - e^{-pa}}, \quad (4.2)$$

яке можна записати таким чином:

$$L\psi(t) = \Phi(p) = \frac{1}{1 - e^{-pa}} \int_0^a e^{-pt} f(t) dt.$$

Приклади. 1. Знайти зображення прямокутного імпульсу з періодом $2b$ (рис. 2.2):

$$\psi(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t \leq b; \\ 0 & \text{при } b < t \leq 2b. \end{cases}$$

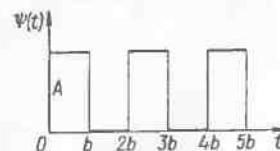


Рис. 2.2.

Розв'язання.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} A dt = A \int_0^b e^{-pt} dt = -A \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^b = \frac{A}{p} (1 - e^{-pb}).$$

Скориставшись формулою (4.2) при $a = 2b$, дістанемо

$$\psi(t) \doteq \frac{A}{p} (1 - e^{-pb}) \frac{1}{1 - e^{-2pb}} = \frac{A}{p(1 + e^{-pb})}.$$

2. Знайти зображення функції випрямленого струму

$$\psi(t) = \sin t \cdot \sigma(\sin t).$$

Розв'язання. Множник $\sigma(\sin t)$ погашає від'ємне значення струму. Дійсно, на сегменті $[0, \pi]$: $\sigma(\sin t) = 1$, оскільки $\sin t > 0$. На сегменті $[\pi, 2\pi]$: $\sin t < 0$, тому $\sigma(\sin t) = 0$ і т.д. Графік функції $\psi(t) = \sin t \cdot \sigma(\sin t)$ зображено на рис. 2.3:

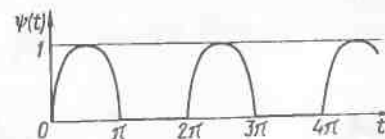


Рис. 2.3.

$$\sin t \cdot \sigma(\sin t) \doteq \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t dt = \frac{1}{(1 + p^2)(1 + e^{-p\pi})}.$$

§ 5. ЗОБРАЖЕННЯ ОРИГІНАЛУ, ЗАДАНОГО РІЗНИМИ СПОСОБАМИ В ОБЛАСТІ ВИЗНАЧЕННЯ

У застосуванні часто зустрічаються оригінали, область визначення яких розбивається на кілька інтервалів, і в кожному з них використовуються різні функціональні залежності. Як приклад розглянемо функцію (рис. 2.4)

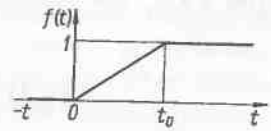


Рис. 2.4.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ kt & \text{при } 0 < t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0, \quad k = \text{const.} \end{cases}$$

Запишемо тепер дану функцію у вигляді однієї формули, скориставшись одиничною функцією:

$$f(t) = kt - k(t - t_0)\sigma(t - t_0),$$

де

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Застосуємо тепер до здобутого виразу перетворення Лапласа:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} kt e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} k(t - t_0)\sigma(t - t_0)e^{-pt} dt.$$

Кожен з інтегралів у правій частині легко обчислюється. Слід звернути увагу на те, що у другому інтегралі нижню межу інтегрування треба взяти рівною t_0 . Крім того, з означення функції $f(t)$ випливає, що $k = \frac{1}{t_0}$. Тому

$$f(t) = \frac{1 - e^{-pt_0}}{t_0 p^2}.$$

ВПРАВИ. Знайти зображення періодичних функцій.

$$1. f(t) = f(t + 2a) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a, \quad t < 0; \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ (рис. 2.5). Відповідь. } \frac{1}{p(1 + e^{-pa})}$$

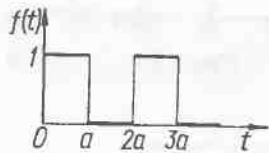


Рис. 2.5.

$$2. f(t) = f(t + 4a) = \begin{cases} 0, & 2na < t < (2n+1)a, \quad t < 0; \\ 1, & (4n+1)a < t < (4n+2)a; \\ -1, & (4n+3)a < t < (4n+4)a, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ (рис. 2.6). Відповідь. } \frac{1 - e^{-ap}}{2p \operatorname{ch} ap}$$

$$3. f(t) = f(t + 4a) =$$

$$\begin{cases} t - 4n, & 4na < t < (4n+1)a, \quad t < 0; \\ a, & \\ -\frac{t}{a} + 4n + 2, & (4n+1)a < t < (4n+2)a; \\ 0, & (4n+2)a < t < (4n+4)a, \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ (рис. 2.7). Відповідь.}$$

$$\frac{(1 - e^{-ap})^2}{ap^2(1 - e^{-4ap})}$$

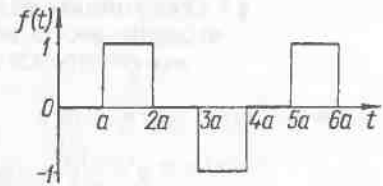


Рис. 2.6.

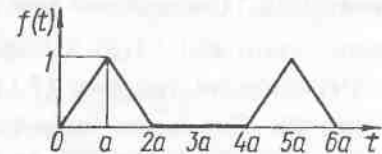


Рис. 2.7.

§ 6. ОБЕРНЕНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА (ФОРМУЛА ОБЕРНЕННЯ)

Раніше було показано, що за допомогою формули (1.2) можна знаходити зображення функції. Властивості перетворення Лапласа дають змогу за знайденими зображеннями для найпростіших оригіналів дістати зображення для складніших оригіналів. Таким чином, можна скласти таблицю для переходу з простору оригіналів до простору зображень. Зрозуміло, що така таблиця придатна і для оберненого переходу — від простору зображень до простору оригіналів. Наприкінці глави (див. § 13) наведено табл. 13.1 формул прямого і оберненого перетворень Лапласа. Більш повні таблиці містяться у довідниках з операційного числення. Однак скласти повну таблицю з цілком зрозумілих причин неможливо. В теорії інтегральних зображень знайдено формулу оберненого перетворення (формулу обернення):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-j\omega}^{s+j\omega} F(p)e^{pt} dp. \quad (6.1)$$

Вираз (6.1) дає змогу за відомим зображенням $F(p)$ знайти оригінал $f(t)$.

§ 7. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ n -ГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай дано задачу Коші

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = Q(t); \quad (7.1)$$

$$t = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-2)}(0) = y_0^{(n-2)};$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (7.2)$$

Припустимо, що шукана функція $y(t)$ – оригінал, $Y(p)$ – її зображення, тобто $y(t) \doteq Y(p)$. Нехай також $Q(t) \doteq R(p)$.

Перетворимо рівняння (7.1) із простору оригіналів до простору зображень. Для цього домножимо кожний доданок (7.1) на e^{-pt} і зінтегруємо обидві частини по t у межах від 0 до ∞ . Іншими словами, застосуємо до кожного члена рівняння (7.1) перетворення Лапласа. Скористаємось теоремою про диференціювання оригіналу і застосуємо формулу (3.21):

$$y^{(n)}(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} y^{(n)}(t) dt = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

або, використовуючи початкові умови (7.2), дістанемо

$$y^{(n)} \doteq p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y'_0 - \dots - y_0^{(n-1)}.$$

Аналогічно маємо

$$\left. \begin{aligned} y^{(n-1)} &\doteq p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - p^{n-3} y'_0 - \dots - y_0^{(n-2)}; \\ y^{(n-2)} &\doteq p^{n-2} Y(p) - p^{n-3} y_0 - p^{n-4} y'_0 - \dots - y_0^{(n-3)}; \\ &\dots \\ y(t) &\doteq Y(p). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Домноживши відповідно кожен із символічних рівностей (7.3) на їхні сталі множники $1; a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ і додавши їх почленно, дістанемо зображення лівої частини рівняння (7.1):

$$p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \dots - y_0^{(n-1)} + a_1 p^{n-1} Y(p) - a_1 p^{n-2} y_0 - \dots - a_1 y_0^{(n-2)} + \dots + a_n Y(p).$$

Оскільки $Q(t) \doteq R(p)$, то

$$Y(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n) - y_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + a_2 p^{n-3} + \dots + a_{n-1}) - y'_0(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + a_2 p^{n-4} + \dots + a_{n-2}) - \dots - y_0^{(n-1)} = R(p). \quad (7.4)$$

Рівняння (7.4) називається зображувальним (операторним) рівнянням для задачі Коші (7.1), (7.2), яка таким чином переходить із простору оригіналів до алгебраїчного рівняння (7.4) з невідомою функцією $Y(p)$ у просторі зображень. Початкові умови (7.2) враховуються в ньому автоматично. Позначивши

$$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = P_n(p),$$

рівняння (7.4) запишемо у вигляді

$$Y(p)P_n(p) - y_0 P_{n-1}(p) - y'_0 P_{n-2}(p) - \dots - y_0^{(n-1)} = R(p).$$

Розв'язавши його відносно $Y(p)$, дістанемо

$$Y(p) = \frac{R(p) + y_0 P_{n-1}(p) + y'_0 P_{n-2}(p) + \dots + y_0^{(n-1)}}{P_n(p)}. \quad (7.5)$$

Знайшовши оригінал за зображенням (7.5), дістанемо розв'язок задачі Коші. Зазначимо, що за нульових початкових умов рівняння (7.4) спрощується і його розв'язок набирає вигляду

$$Y(p) = \frac{R(p)}{P_n(p)}. \quad (7.6)$$

Введемо позначення $\frac{1}{P_n(p)} = P(p)$. Якщо здобуто оригінал для зображення $P(p) \doteq G(t)$, то шуканий розв'язок виражається через згортку

$$y(t) = G(t) \times Q(t). \quad (7.7)$$

Із цієї формули випливає, що проблема розв'язання рівняння (7.1) з нульовими початковими умовами зводиться до відшукування функції $G(t)$ за зображенням $P(p)$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = t^3 + 6t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Складемо зображувальне рівняння, покладаючи, що $y(t)$ — оригінал. Застосовуючи формулу (3.21), дістанемо

$$y''(t) \doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p); \quad y(t) \doteq Y(p).$$

Знаходимо зображення правої частини:

$$Q(t) = t^3 + 6t; \quad t^3 \doteq \frac{3!}{p^4}; \quad 6t \doteq 6 \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Тепер зображувальне рівняння запишемо у вигляді

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^2}$$

або

$$Y(p)(1 + p^2) = \frac{6}{p^4}(1 + p^2); \quad Y(p) = \frac{6}{p^4} \doteq t^3.$$

Частинний розв'язок $y(t) = t^3$.

Вище було означено інтеграл Дюамеля (формула (3.26)). Покажемо його особливу роль у розв'язанні лінійних рівнянь типу (7.1) з нульовими початковими умовами. Для цього розглянемо також неоднорідне рівняння, ліва частина якого збігається з вихідним (7.1), а права частина дорівнює 1:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = 1$$

і

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Нехай частинний розв'язок останнього рівняння відомий: $y_1(t)$. Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння (7.1) з нульовими початковими умовами, дістаємо

$$P_n(p) Y(p) = R(p).$$

Якщо ж у правій частині рівняння $Q(t) = 1$, то у просторі зображень запишемо його таким чином:

$$P_n(p) Y_1(p) = \frac{1}{p},$$

де $Y_1(p) \doteq y_1(t)$.

З останньої рівності випливає, що

$$P_n(p) = \frac{1}{p Y_1(p)}.$$

Звідси дістанемо зображення шуканого оригіналу

$$Y(p) = p Y_1(p) R(p).$$

Оригінал знаходимо за допомогою інтеграла Дюамеля (3.26). Якщо врахувати нульові умови, то $y_1(0) = 0$. Тому

$$y(t) = \int_0^t Q(\tau) y_1'(t - \tau) d\tau. \quad (7.8)$$

Приклад. Застосувати інтеграл Дюамеля при розв'язанні операційним методом лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і нульовими початковими умовами:

$$y'' - 4y = 4e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (7.9)$$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку рівняння

$$y'' - 4y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

застосовуючи перетворення Лапласа:

$$y(t) \doteq Y(p); \quad y''(t) \doteq p^2 Y(p); \quad 1 \doteq \frac{1}{p}.$$

Маємо

$$Y_1(p)(p^2 - 4) = \frac{1}{p}; \quad Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4)}.$$

Оригінал для останнього зображення знайдемо, скориставшись формулою (3.8) і теоремою про інтегрування оригіналу (п. 3.7):

$$\frac{1}{p^2 - 4} \doteq \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t;$$

$$\frac{1}{p(p^2 - 4)} \doteq \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{sh} 2u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2u \Big|_0^t = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 2t - 1).$$

Отже, у позначеннях, використаних вище, маємо

$$y_1(t) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 2t - 1).$$

Як і слід було очікувати, $y_1(0) = 0$.

Тепер за формулою (7.8) знаходимо розв'язок рівняння (7.9)

$$y(t) = \int_0^t 4e^{2\tau} \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{2\tau} (e^{2t} e^{-2\tau} - e^{-2\tau} e^{2\tau}) d\tau = \\ = e^{2t} \int_0^t d\tau - e^{-2t} \int_0^t e^{4\tau} d\tau = te^{2t} - e^{-2t} \cdot \frac{e^{4t}}{4} + \frac{e^{-2t}}{4} = te^{2t} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t.$$

ВПРАВИ. 1. Знайти частинні розв'язки, що задовольняють задані початкові умови, таких диференціальних рівнянь:

а) $y' + ay = f(t)$, $y(0) = A$, $f(t)$ – відома; *Відповідь.* $y = Ae^{-at} + \int_0^t e^{-ax} f(t-x) dx$;

б) $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; *Відповідь.* $y = \frac{1}{15} (12e^{-2t} + 8e^{3t} - 5)$;

в) $y'' + 4y = 2 \cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$. *Відповідь.* $y = 2 \sin 2t + 0,5t \sin 2t$.

2. Використовуючи інтеграл Дюамеля, знайти частинні розв'язки, що задовольняють нульові початкові умови, таких диференціальних рівнянь:

а) $y'' + y = \cos t + \sin 2t$; *Відповідь.* $y = \frac{1}{6} (3t \sin t + 4 \sin t - 2 \sin 2t)$;

б) $y'' + y = e^{-t} + 2$; *Відповідь.* $y = \frac{1}{2} (\sin t - 5 \cos t + e^{-t} + 4)$;

в) $y'' + y' = 10e^{2t}$. *Відповідь.* $y = e^{2t} + 4 \cos t - 2 \sin t - 5$.

Відшукування функції Гріна. Повертаючись до рівностей (7.1) і (7.7), введемо такі назви: $Q(t)$ – функція входу, а відповідний розв'язок $y(t)$ – функція виходу, або відгуку; $P(p)$ – перехідна (передавальна) функція; $G(t)$ – функція Гріна. Знайдемо функцію $G(t)$ за перехідною функцією $P(p) = \frac{1}{P_n(p)}$, де $P_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$.

Нехай коренями многочлена $P_n(p) \in \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; серед них можуть бути і комплексні. Нехай кратність кожного кореня k_i , $i = \overline{1, n}$, $m \leq n$. Розкладемо функцію $P(p)$ на елементарні дроби

$$P(p) = \frac{A_1^{(1)}}{p - \alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(p - \alpha_1)^2} + \frac{A_3^{(1)}}{(p - \alpha_1)^3} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(p - \alpha_1)^{k_1}} + \\ + \frac{A_1^{(2)}}{p - \alpha_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(p - \alpha_2)^2} + \frac{A_3^{(2)}}{(p - \alpha_2)^3} + \dots + \frac{A_{k_m}^{(m)}}{(p - \alpha_m)^{k_m}} = \frac{1}{P_n(p)}. \quad (7.10)$$

Невизначені коефіцієнти $A_i^{(j)}$ знайдемо за відомим методами (див. ч. 1, гл. 5, § 8). Нехай, наприклад, треба знайти $A_3^{(2)}$. Домножимо обидві частини рівності (7.10) на $(p - \alpha_2)^{k_2}$ і здиференціюємо його $k_2 - 3$ рази, спрямувавши в результаті $p \rightarrow \alpha_2$. Дістанемо

$$\lim_{p \rightarrow \alpha_2} \frac{d^{k_2-3}}{dp^{k_2-3}} \left[\frac{(p - \alpha_2)^{k_2}}{P_n(p)} \right] = (k_2 - 3)! A_3^{(2)},$$

звідси

$$A_3^{(2)} = \frac{1}{(k_2 - 3)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_2} \frac{d^{k_2-3}}{dp^{k_2-3}} \left[\frac{(p - \alpha_2)^{k_2}}{P_n(p)} \right]. \quad (7.11)$$

Оригінали для кожного з доданків виразу (7.10) також знаходять за відомою формулою

$$\frac{A_j^{(i)}}{(p - \alpha_i)^j} \doteq A_j^{(i)} e^{\alpha_i t} \cdot \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \quad \text{де } j = \overline{1, k_i}$$

тому

$$G(t) = A_1^{(1)} e^{\alpha_1 t} + A_2^{(1)} \frac{e^{\alpha_1 t} t}{1!} + A_3^{(1)} \frac{e^{\alpha_1 t} t^2}{2!} + \dots + \\ + A_{k_1}^{(1)} \frac{e^{\alpha_1 t} t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} + \dots + A_1^{(m)} e^{\alpha_m t} + A_2^{(m)} e^{\alpha_m t} \frac{t}{1!} + \\ + A_3^{(m)} e^{\alpha_m t} \frac{t^2}{2!} + \dots + A_{k_m}^{(m)} e^{\alpha_m t} \frac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!}. \quad (7.12)$$

Тепер дістанемо функцію виходу

$$y(t) = G(t) * Q(t) = \int_0^t G(\tau) Q(t - \tau) d\tau.$$

Слід пам'ятати, що серед коренів многочлена $P_n(p)$ можуть бути також і комплексні (прості і кратні). Методика відшукування невизначених коефіцієнтів у розвиненні (7.10) залишається справедливою і в цьому випадку. Комплексних коренів можна позбавитися у розвиненні

зображення (7.10), об'єднавши відповідні пари спряжених коренів, або у виразі для оригіналу (7.12), користуючись формулою Ейлера.

У випадку лінійного однорідного рівняння: $Q(t) \equiv 0$ розв'язок зображувального рівняння набирає вигляду

$$Y(p) = \frac{S_{n-1}(p)}{P_n(p)},$$

де $S_{n-1}(p) = y_0 P_{n-1}(p) + y_0' P_{n-2}(p) + \dots + y_0^{(n-1)}$ (див. (7.5)).

Оригінал за зображенням $\frac{S_{n-1}(p)}{P_n(p)}$ також знаходять за наведеною

вище методикою. Випадок неоднорідного рівняння з нульовими початковими умовами є комбінацією вже розглянутих задач. Однорідне рівняння з нульовими початковими умовами, як і у класичному випадку, дає тривіальний розв'язок $Y(p) \equiv 0$. Отже, $y(t) \equiv 0$.

Загальна схема розв'язання задач Коші для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами може бути такою.

1. Від диференціального рівняння і початкових умов шляхом прямого перетворення Лапласа (1.2) переходимо до зображувального рівняння, яке є алгебраїчним. Іншими словами, здійснюємо перехід із простору оригіналів у простір зображень.

2. Розв'язуємо зображувальне рівняння, тобто дістаємо зображення шуканого розв'язку.

3. Користуючись таблицею відповідностей або оберненим перетворенням Лапласа (формула (6.1)), переходимо від розв'язку зображувального рівняння в просторі зображень до шуканої функції у просторі оригіналів. Тут спостерігається деяка аналогія з діями над числами за допомогою логарифмів. Дійсно, для множення, наприклад, кількох чисел спочатку знаходять їхні логарифми. Оскільки множенню чисел відповідає операція додавання їхніх логарифмів, то здобуті логарифми додають і знаходять спочатку не сам результат, а його логарифм. Остаточний результат знаходять за таблицею логарифмів. Аналогічно діють при операційному методі розв'язування задач Коші.

§ 8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Розглянемо приклад диференціального рівняння з нульовими початковими умовами

$$y'' + y''' = \sin t \quad \text{при } t=0 \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0. \quad (8.1)$$

Нехай $y(t) \doteq Y(p)$, тоді за теоремою про диференціювання оригіналу

$$y'' \doteq p^2 Y(p), \quad y''' \doteq p^3 Y(p).$$

Поклавши у формулі (3.3) $\omega = 1$, дістанемо $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$. Зображувальне рівняння має вигляд

$$p^4 Y(p) + p^3 Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \quad \text{або} \quad Y(p)(p^4 + p^3) = \frac{1}{p^2 + 1},$$

а його розв'язок

$$Y(p) = \frac{1}{p^3(p+1)(p^2+1)}. \quad (8.2)$$

Знаменником правої частини є поліном шостого степеня відносно p , його коренями будуть $\alpha_{1,2,3} = 0$, $\alpha_4 = -1$, $\alpha_{5,6} = \pm j$. Праву частину рівності (8.2) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{p^3(p+1)(p^2+1)} = \frac{A_1}{p^3} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p} + \frac{A_4}{p+1} + \frac{A_5 p + A_6}{p^2 + 1}. \quad (8.3)$$

Для відшукування шести коефіцієнтів A_i застосуємо метод довільних значень. Зведемо (8.3) до спільного знаменника:

$$1 = A_1(p+1)(p^2+1) + A_2 p(p+1)(p^2+1) + A_3 p^2(p+1)(p^2+1) + A_4 p^3(p^2+1) + (A_5 p + A_6)(p+1)p^3. \quad (8.4)$$

Рівність (8.4) є тотожною, тому, надаючи p різних значень, дістанемо

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 & \text{при } p=0; \\ 1 &= -2A_4; \quad A_4 = -\frac{1}{2} & \text{при } p=-1; \\ 1 &= (A_5 + A_6) + j(A_5 - A_6) & \text{при } p=j. \end{aligned}$$

Здобута комплексна рівність породжує дві рівності дійсних чисел:

$$A_5 + A_6 = 1; \quad A_5 - A_6 = 0,$$

тобто $A_5 = A_6 = \frac{1}{2}$.

Використовуючи знайдені коефіцієнти $A_1 = 1$, $A_4 = -\frac{1}{2}$, $A_5 =$
 $= A_6 = \frac{1}{2}$, перетворимо рівність (8.4):

$$1 = (p+1)(p^2+1)[1 + pA_2 + p^2A_3] - \frac{p^3}{2}[p^2+1 - (p+1)^2]$$

або

$$1 - p^4 = (p+1)(p^2+1)[1 + A_2p + A_3p^2].$$

Ліва частина рівності розкладається на множники:

$$1 - p^4 = (1-p)(1+p)(1+p^2)$$

звідси

$$1 - p = 1 + A_2p + A_3p^2,$$

тобто $A_2 = -1$, $A_3 = 0$.

Розклад (8.3) тепер записується у вигляді

$$\frac{1}{p^3(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1}.$$

Можна легко знайти оригінал для кожного із доданків у правій частині здобутої рівності:

$$\frac{1}{p^3} \doteq \frac{t^2}{2!}; \quad -\frac{1}{p^2} \doteq -t; \quad -\frac{1}{2} \frac{1}{p+1} \doteq -\frac{1}{2} e^{-t};$$

$$\frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} \doteq \frac{1}{2} \cos t; \quad \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1} \doteq \frac{1}{2} \sin t.$$

Використовуючи властивості лінійності перетворення Лапласа, розв'язок рівняння (8.1) запишемо у вигляді

$$y(t) = \frac{t^2}{2} - t - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

Розглянемо приклад диференціального рівняння з відмінними від нуля початковими умовами:

$$\ddot{x} + \dot{x} = e^t; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2. \quad (8.5)$$

Нехай шукана функція є оригіналом і $x(t) \doteq X(p)$. Застосовуючи теорему про диференціювання оригіналу, маємо

$$\ddot{x}(t) \doteq p^3 X(p) - p^2 x(0) - p \dot{x}(0) - \ddot{x}(0).$$

З урахуванням початкових умов знаходимо

$$\ddot{x}(t) \doteq p^3 X(p) - 2p.$$

Аналогічно маємо

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p).$$

Якщо врахувати, що зображенням функції $e^t \in \frac{1}{p-1}$, то можна скласти зображувальне рівняння, що відповідає задачі (8.5):

$$p^3 X(p) - 2p + pX(p) = \frac{1}{p-1}. \quad (8.6)$$

Розв'язуємо алгебраїчне рівняння (8.6) відносно зображення шуканої функції:

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p-1)} + \frac{2}{p^2+1}. \quad (8.7)$$

Для відшукування оригіналу першого доданка у правій частині розкладу (8.7) застосуємо формулу

$$A_i = \frac{1}{P'_n(\alpha_i)}.$$

Коренями знаменника $P_4(p) = p(p^2+1)(p-1) \in$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_{2,3} = \pm j; \quad \alpha_4 = 1.$$

Знайдемо похідну знаменника:

$$P'_4(p) = (p^2+1)(p-1) + 2p^2(p-1) + p(p^2+1)$$

Тепер визначимо коефіцієнти A_i :

$$A_1 = \frac{1}{P'_4(0)} = \frac{1}{-1} = -1; \quad A_2 = \frac{1}{P'_4(+j)} = \frac{1}{2(1-j)} = \frac{1+j}{4};$$

$$A_3 = \frac{1}{P_4'(-j)} = \frac{1}{2(j+1)} = \frac{1-j}{4}; \quad A_4 = \frac{1}{P_4'(1)} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\frac{1}{p(p^2+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1+j}{4} \frac{1}{p-j} + \frac{1-j}{4} \frac{1}{p+j} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-1}.$$

Другий і третій доданки у правій частині здобутого розкладу можна замінити також двома, але із квадратичним знаменником:

$$\frac{1+j}{4} \frac{1}{p-j} + \frac{1-j}{4} \frac{1}{p+j} = \frac{p-1}{2(p^2+1)} = \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1}.$$

Тому

$$\frac{1}{p(p^2+1)(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-1}.$$

Використовуючи формули (2.2), (2.3), (3.3), (3.4), запишемо вираз шуканого розв'язку задачі (8.5):

$$x(t) = -1 + \frac{1}{2} \cos t + \frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} e^t.$$

ВПРАВИ. Знайти частинний розв'язок диференціальних рівнянь за вказаних початкових умов.

1. $x^{(v)} - \dot{x} = 8 \sin t$ при $\dot{x}(0) = x(0) = \ddot{x}(0) = \bar{x}(0) = 0$, $x^{(v)}(0) = 1$. *Відповідь.*
 $x(t) = -9 + \frac{5}{2} \cos t + \frac{13}{2} \sin t + 2t \sin t.$

2. $\ddot{x} + 3\dot{x} - 4x = 0$ при $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 2$. *Відповідь.* $x(t) = \frac{2}{9} [e^t - e^{-2t}(3t+1)].$

3. $\ddot{x} + x = 2 \sin t$ при $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$. *Відповідь.* $x(t) = \cos t - t \cos t.$

4. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}(\cos t - 2 \sin t)$ при $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 1$. *Відповідь.* $x(t) = e^{-2t}(3t - \cos t + 2 \sin t).$

Інтегральне перетворення Лапласа дає змогу знаходити не лише частинні розв'язки (використовуючи початкові умови), а й загальні розв'язки рівнянь. Геометрично частинний розв'язок звичайного диференціального рівняння n -го порядку зображується інтегральною кривою у просторі $(n+1)$ -ї змінної, що проходить

через точку цього простору, координати якої задаються початковими умовами:

$$t = t_0; \quad y(t_0) = y_0; \quad y'(t_0) = y_0'; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Отже, початкові умови вказують конкретну точку простору, що дає змогу знайти певну інтегральну криву, тобто частинний розв'язок. Якщо початкові умови не задано, то їх можна вибирати довільно у допустимих межах через довільні сталі:

$$t = 0; \quad y(0) = \bar{C}_0; \quad y'(0) = \bar{C}_1; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(0) = \bar{C}_{n-1}. \quad (8.8)$$

Довільні умови (8.8) визначають деяку точку простору $(n+1)$ -ї змінної, де виконуються умови теореми Коші про існування частинних розв'язків. Доповнюючи лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами умовами (8.8), дістанемо задачу, яку можна розв'язувати операційним методом. Маючи загальний розв'язок, за початковими умовами при $t = t_0 \neq 0$ визначаємо частинний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12x^2 e^{3x} - e^{2x}. \quad (8.9)$$

Рівняння (8.9) доповнюємо початковими умовами:

$$x = 0; \quad y(0) = \bar{C}_0; \quad y'(0) = \bar{C}_1; \quad y''(0) = \bar{C}_2. \quad (8.10)$$

Застосовуючи до рівняння (8.9) перетворення Лапласа і враховуючи умови (8.10), дістанемо зображувальне рівняння

$$Y(p)(p^3 - 6p^2 + 11p - 6) = \frac{24}{(p-3)^3} - \frac{1}{p-2} + p^2 \bar{C}_0 + p(\bar{C}_1 - 6\bar{C}_0) - 6\bar{C}_1 + 11\bar{C}_0 + \bar{C}_2.$$

Об'єднуючи два перші дроби у правій частині останньої рівності і розв'язуючи її відносно $Y(p)$, дістаємо

$$Y(p) = \frac{24(p-2) - (p-3)^3}{(p^3 - 6p^2 + 11p - 6)(p-3)^3(p-2)} + \frac{p^2 \bar{C}_0 + p(\bar{C}_1 - 6\bar{C}_0) + \bar{C}_2 - 6\bar{C}_1 + 11\bar{C}_0}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}. \quad (8.11)$$

Розкладемо перший дріб в (8.11) на елементарні:

$$\begin{aligned} \frac{24(p-2) - (p-3)^3}{(p-3)^3(p-2)(p^3 - 6p^2 + 11p - 6)} &= \frac{24(p-2) - (p-3)^3}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)} = \\ &= \frac{A}{p-3} + \frac{B}{(p-3)^2} + \frac{C}{(p-3)^3} + \frac{D}{(p-3)^4} + \frac{E}{p-2} + \frac{F}{(p-2)^2} + \frac{G}{p-1}. \end{aligned}$$

Застосовуючи вже відомі методи, знаходимо невизначені коефіцієнти

$$B = 21; C = -18; D = \frac{1}{12}; F = 1. \quad (8.12)$$

Шукати коефіцієнти A , E і G немає потреби. Використовуючи (8.12), розв'язок (8.11) запишемо у вигляді

$$Y(p) = \frac{A}{p-3} + \frac{21}{(p-3)^2} - \frac{18}{(p-3)^3} + \frac{1}{3(p-3)^4} + \frac{E}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{G}{p-1} + \frac{p^2 C_0 + p(C_1 - 6C_0) + C_2 - 6C_1 + 11C_0}{(p-1)(p-2)(p-3)}. \quad (8.13)$$

Якщо розкласти останній дріб у (8.13) на елементарні, то його можна записати у вигляді суми:

$$\frac{A_0}{p-1} + \frac{A_1}{p-2} + \frac{A_2}{p-3}, \quad (8.14)$$

де коефіцієнти A_0 , A_1 і A_2 будуть містити невизначені початкові умови (8.10). Тому з урахуванням формули (8.14) об'єднаємо в (8.13) відповідні дробі, а їхні коефіцієнти, перепозначені відповідно C_1 , C_2 і C_3 , і будуть довільними сталими у шуканому загальному розв'язку. Отже, розклад (8.13) запишемо у вигляді

$$Y(p) = \frac{C_1}{p-1} + \frac{C_2}{p-2} + \frac{C_3}{p-3} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{21}{(p-3)^2} - \frac{18}{(p-3)^3} + \frac{12}{(p-3)^4},$$

а оригінал, що йому відповідає, знаходимо за відомими формулами:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + x e^{2x} + (21x - 9x^2 + 2x^3) e^{3x}.$$

Це і є шуканий загальний розв'язок рівняння (8.9).

ВПРАВИ. Знайти загальні розв'язки рівнянь.

1. $y'' - 3y' + 2y = (4x^2 + 4x - 10)e^{-x}$. *Відповідь.* $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

2. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 1 + x + x^2$. *Відповідь.* $y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left[(C_1 + C_2 x) \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_4 x) \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right] + x^2 - 3x + 1$.

3. $y^{IV} + y'' - \cos x = 0$. *Відповідь.* $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$.

§ 9. ЛІНІЙНЕ ОДНОРІДНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай дано рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad \text{і} \quad y(0) = y_0 \neq 0; \quad y'(0) = y'_0 \neq 0.$$

Вимагатимемо, щоб розв'язок був оригіналом і $y(t) \doteq Y(p)$. Тоді зображувальне рівняння можна записати у вигляді

$$Y(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = p y_0 + y'_0 + a_1 y_0.$$

Розв'язком зображувального рівняння є

$$Y(p) = \frac{y_0(p + a_1) + y'_0}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Випадок 1. Виконується умова

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0,$$

тоді знаменник $p^2 + a_1 p + a_2$ можна подати у вигляді $(p - \alpha_1) \times (p - \alpha_2)$, де корені α_1 і α_2 - дійсні і різні. Отже,

$$\frac{y_0(p + a_1) + y'_0}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2};$$

тому оригінал можна записати у вигляді

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 5y' + 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язання.

$$Y(p) = \frac{(p-5) + 2}{(p-3)(p-2)} = \frac{p-3}{(p-3)(p-2)} = \frac{1}{p-2} \doteq e^{2t}.$$

Частинним розв'язком є

$$y(t) = e^{2t}.$$

Випадок 2. Виконуються умови

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2;$$

тоді $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\frac{a_1}{2}$.

Розв'язок зображувального рівняння можна подати у вигляді суми двох дробів:

$$Y(p) = \frac{A_1}{(p - \alpha)^2} + \frac{A_2}{p - \alpha}.$$

Перехід до простору оригіналів приводить до виразу

$$y(t) = A_1 t e^{\alpha t} + A_2 e^{\alpha t} = e^{\alpha t} (A_1 t + A_2) = e^{-\frac{a_1}{2} t} (A_1 t + A_2).$$

Випадок 3. Виконується умова

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0.$$

Тепер корені α_1 і α_2 є комплексними. Розв'язок такої задачі можна знайти за методикою випадку 1, скориставшись потім формулою Ейлера:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} = -\frac{a_1}{2} \pm j \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = b_1 \pm j b_2,$$

де

$$b_1 = -\frac{a_1}{2}; \quad b_2 = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

За своїм утворенням невизначені коефіцієнти A_1 і A_2 будуть також комплексно-спряженими

$$A_1 = \frac{y_0}{2} + j \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}; \quad A_2 = \frac{y_0}{2} - j \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}$$

або

$$A_{1,2} = m_1 \pm j m_2,$$

де

$$m_1 = \frac{y_0}{2}; \quad m_2 = \frac{y_0 b_1 + y_0'}{2b_2}.$$

Згідно з випадком 1 маємо

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = (m_1 + j m_2) e^{(b_1 + j b_2)t} + (m_1 - j m_2) e^{(b_1 - j b_2)t} = \\ &= e^{b_1 t} [(m_1 + j m_2)(\cos b_2 t + j \sin b_2 t) + (m_1 - j m_2)(\cos b_2 t - j \sin b_2 t)], \\ y(t) &= e^{b_1 t} (2m_1 \cos b_2 t - 2m_2 \sin b_2 t) = 2e^{b_1 t} (m_1 \cos b_2 t - m_2 \sin b_2 t). \end{aligned}$$

Цей самий результат можна дістати іншим шляхом. Маємо

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{y_0(p + a_1) + y_0'}{p^2 + a_1 p + a_2} = \frac{y_0 p + y_0 a_1 + y_0'}{p^2 + 2\frac{a_1}{2} p + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_2} = \\ &= \frac{y_0 p + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} = \frac{y_0(p - b_1) + y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{y_0(p - b_1)}{(p - b_1)^2 + b_2^2} + \frac{y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Тут величини b_1 і b_2 мають той самий зміст, що й раніше, а $B = y_0 a_1 + y_0'$.

Знаходимо оригінали

$$\begin{aligned} \frac{y_0 b_1 + B}{(p - b_1)^2 + b_2^2} &\doteq \frac{1}{b_2} (y_0 b_1 + B) e^{b_1 t} \sin b_2 t = -2m_2 e^{b_1 t} \sin b_2 t; \\ \frac{y_0(p - b_1)}{(p - b_1)^2 + b_2^2} &\doteq y_0 e^{b_1 t} \cos b_2 t = 2m_1 e^{b_1 t} \cos b_2 t. \end{aligned}$$

Знову розв'язок дістаємо у вигляді

$$y(t) = 2e^{b_1 t} (m_1 \cos b_2 t - m_2 \sin b_2 t).$$

§ 10. ТЕОРЕМИ РОЗКЛАДАННЯ

Викладену вище методику відшукування невизначених коефіцієнтів у розкладі перехідної функції на елементарні дроби можна подати у загальному вигляді переходу від простору зображень до простору оригіналів. Ці загальні положення називаються теоремами розкладання.

Перша теорема розкладання. Якщо зображення $F(p)$ можна подати у вигляді суми

$$F(p) = \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{p^{n+1}}, \quad (10.1)$$

де $a_n = \text{const}$ ($n = \overline{0, k}$), то можна здійснити почленний перехід до простору оригіналів також за допомогою суми

$$f(t) = \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{n!} t^n. \quad (10.2)$$

Застосовуючи формулу (3.18) у вигляді

$$\frac{1}{p^{n+1}} = \frac{t^n}{n!}, \quad (10.3)$$

до кожного з доданків функцій $F(p)$, дістанемо формулу (10.2) для оригіналу $f(t)$.

ВПРАВИ. Використовуючи першу теорему розкладання, знайти оригінали для зображень.

1. $F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{7}{p^{11}}$. Відповідь. $f(t) = t^2 + \frac{7t^{10}}{10!}$.

2. $F(p) = \frac{3}{p^2(p-1)^3}$. Відповідь. $f(t) = -3t - 9 + \frac{3}{2}t^2e^t - 6te^t + 9e^t$.

Вказівка. Розкласти на елементарні дроби.

3. $F(p) = \frac{3}{p^4} + \frac{7}{p^{12}}$. Відповідь. $f(t) = \frac{t^3}{2} + \frac{7}{11!}t^{11}$.

Друга теорема розкладання. Якщо зображення є дробово-раціональною функцією

$$F(p) = \frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)}, \quad (10.4)$$

де степінь чисельника s менше степеня знаменника n , причому знаменник має корені $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ відповідно кратності k_1, k_2, \dots, k_m ($k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = n$), то оригінал визначається за формулою

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(k_1-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_1} \frac{d^{k_1-1}}{dp^{k_1-1}} \left[(p - \alpha_1)^{k_1} \frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)} e^{pt} \right] + \\ &+ \frac{1}{(k_2-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_2} \frac{d^{k_2-1}}{dp^{k_2-1}} \left[(p - \alpha_2)^{k_2} \frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)} e^{pt} \right] + \dots + \\ &+ \frac{1}{(k_m-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_m} \frac{d^{k_m-1}}{dp^{k_m-1}} \left[(p - \alpha_m)^{k_m} \frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)} e^{pt} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left[(p - \alpha_i)^{k_i} \frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)} e^{pt} \right]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Строге доведення цієї теореми здійснюється за допомогою теорії лишків (див. гл. 3, п. 3.2). Непряме доведення для $\Phi_s(p) = 1$ наведено в п. 7.1.

Як приклад безпосереднього використання другої теореми розкладання розглянемо зображення

$$\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \Phi_1(p) &= p+1; & \Psi_4(p) &= p^2(p-1)(p+2); \\ \alpha_1 &= 0; & k_1 &= 2; & \alpha_2 &= 1; & k_2 &= 1; & \alpha_3 &= -2; & k_3 &= 1. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою (10.5):

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left[(p - \alpha_i)^{k_i} \frac{\Phi_1(p)}{\Psi_4(p)} e^{pt} \right] = \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} \left[p^2 \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} e^{pt} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1-1)!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^{1-1}}{dp^{1-1}} \left[(p-1) \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} e^{pt} \right] + \\
& + \frac{1}{(1-1)!} \lim_{p \rightarrow -2} \frac{d^{1-1}}{dp^{1-1}} \left[(p+2) \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} e^{pt} \right] = \\
& = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[\frac{p+1}{(p-1)(p+2)} e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow 1} \left[\frac{p+1}{p^2(p+2)} e^{pt} \right] + \\
& \quad + \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{p+1}{p^2(p-1)} e^{pt} \right].
\end{aligned}$$

Знаходимо похідні, а потім окремо кожен з границь:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} \left[\frac{p+1}{(p-1)(p+2)} e^{pt} \right] &= \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} e^{pt} t + \\
& + \frac{(p-1)(p+2) - (p+1)(2p+1)}{(p-1)^2(p+2)^2} e^{pt}.
\end{aligned}$$

Переходячи до границі, дістаємо

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left[\frac{p+1}{(p-1)(p+2)} e^{pt} \right] = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2},$$

а далі

$$\lim_{p \rightarrow 1} \left[\frac{p+1}{p^2(p+2)} e^{pt} \right] = \frac{2}{3} e^t; \quad \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{p+1}{p^2(p-1)} e^{pt} \right] = \frac{1}{12} e^{-2t}.$$

Додаючи останні три вирази, знаходимо шуканий оригінал

$$\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} \doteq -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{2}{3} e^t + \frac{1}{12} e^{-2t}.$$

Значний інтерес становить випадок, коли знаменник виразу (10.4) має лише прості корені, тобто

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1.$$

Підставляючи ці значення k_i ($i = \overline{1, m}$) у вираз (10.5), під знаком суми дістанемо

$$\frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow \alpha_i} \left[(p - \alpha_i) \frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)} e^{pt} \right] = \frac{\Phi_s(\alpha_i)}{\Psi'_n(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}.$$

Тому оригінал запишемо у вигляді

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_s(\alpha_i)}{\Psi'_n(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}. \quad (10.6)$$

Якщо серед простих коренів знаменника $\Psi_n(p)$ є нульовий, то виконується співвідношення

$$\Psi_n(p) = p \Psi_{n_1}(p), \quad (10.7)$$

де $\Psi_{n_1}(p)$ вже не містить нульового кореня. Отже,

$$\frac{\Phi_s(p)}{\Psi_n(p)} = \frac{\Phi_s(p)}{p \Psi_{n_1}(p)}.$$

Застосовуючи другу теорему розкладання до останнього дробу, дістанемо

$$\frac{\Phi_s(p)}{p \Psi_{n_1}(p)} \doteq \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_s(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'_{n_1}(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}. \quad (10.8)$$

Перепозначимо корені знаменника $\Psi_n(p)$ так, щоб $\alpha_i = 0$ при $i = n$, тобто $\alpha_n = 0$. Останній доданок у виразі (10.8) розглянемо окремо:

$$\frac{\Phi_s(\alpha_n)}{\alpha_n \Psi'_{n_1}(\alpha_n)} e^{\alpha_n t} = \lim_{p \rightarrow \alpha_n} \frac{\Phi_s(p)}{p - \alpha_n} e^{pt} = \frac{\Phi_s(0)}{\Psi'_{n_1}(0)}. \quad (10.9)$$

Враховуючи формулу (10.9), згідно з (10.8), маємо

$$\frac{\Phi_s(p)}{p \Psi_{n_1}(p)} \doteq \frac{\Phi_s(0)}{\Psi'_{n_1}(0)} + \sum_{i=1}^l \frac{\Phi_s(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi'_{n_1}(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}, \quad (10.10)$$

де $l = n_1$ — кількість коренів многочлена $\Psi_{n_1}(p)$.

Численні інженерні задачі (наприклад, визначення теплопровідності) приводять до відшукування оригіналу за зображенням

$$\frac{\Phi(p)}{p^{s+1}\Psi_1(p)}, \quad (10.11)$$

де s – натуральне число.

Тому іноді виникає потреба узагальнення співвідношення (10.10). Нехай треба знайти оригінал для зображення

$$\frac{\Phi_s(p)}{p^2\Psi_1(p)}.$$

Застосовуючи до (10.10) теорему про інтегрування оригіналу, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(p)}{p^2\Psi_1(p)} &\doteq \int_0^t \left[\frac{\Phi(0)}{\Psi_1'(0)} + \sum_{i=1}^l \frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i \Psi_1'(\alpha_i)} e^{\alpha_i \tau} \right] d\tau = \\ &= \frac{\Phi(0)}{\Psi_1'(0)} t + \sum_{i=1}^l \frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i^2 \Psi_1'(\alpha_i)} (e^{\alpha_i t} - 1). \end{aligned}$$

Здійснивши цю операцію з (10.10) s разів, дістанемо оригінал для зображення (10.11):

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(p)}{p^{s+1}\Psi_1(p)} &\doteq \frac{\Phi(0)}{\Psi_1'(0)} \frac{t^s}{s!} + \sum_{i=1}^l \left[\frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i^s \Psi_1'(\alpha_i)} (e^{\alpha_i t} - 1) - \frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i^{s-1} \Psi_1'(\alpha_i)} t - \right. \\ &\left. - \frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i^{s-2} \Psi_1'(\alpha_i)} \frac{t^2}{2} - \frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i^{s-3} \Psi_1'(\alpha_i)} \frac{t^3}{3!} - \dots - \frac{\Phi(\alpha_i)}{\alpha_i^2 \Psi_1'(\alpha_i)} \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \right]. \quad (10.12) \end{aligned}$$

ВПРАВИ. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінали, що відповідають зображенням.

4. $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$. Відповідь. $\frac{1}{2}(t^2 e^{2t} - 4t e^{2t} + 6e^{2t} - 2t e^t - 6e^t)$.

5. $\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$. Відповідь. $\frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$.

6. $\frac{1}{(p+1)^3(p+3)}$. Відповідь. $\frac{1}{8}(2t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - e^{-3t})$.

§ 11. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Все, що було викладено стосовно операційного методу розв'язування лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку, можна майже повністю застосувати до розв'язування систем лінійних рівнянь. Відмінність полягає в тому, що невідомих функцій декілька, а замість одного зображувального рівняння дістають систему рівнянь. Як ілюстрацію методу розглянемо систему трьох рівнянь першого порядку.

Нехай дано систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + a_{13}z(t) + q_1(t); \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + a_{23}z(t) + q_2(t); \\ \dot{z}(t) = a_{31}x(t) + a_{32}y(t) + a_{33}z(t) + q_3(t) \end{cases} \quad (11.1)$$

і початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \quad (11.2)$$

Припустимо, що кожна із шуканих функцій є оригіналом і

$$x(t) \doteq X(p), \quad y(t) \doteq Y(p), \quad z(t) \doteq Z(p),$$

а також

$$q_1(t) \doteq Q_1(p), \quad q_2(t) \doteq Q_2(p), \quad q_3(t) \doteq Q_3(p).$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до кожного з рівнянь системи (11.1), з урахуванням теореми про диференціювання оригіналу дістаємо

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 = a_{11}X(p) + a_{12}Y(p) + a_{13}Z(p) + Q_1(p); \\ pY(p) - y_0 = a_{21}X(p) + a_{22}Y(p) + a_{23}Z(p) + Q_2(p); \\ pZ(p) - z_0 = a_{31}X(p) + a_{32}Y(p) + a_{33}Z(p) + Q_3(p). \end{cases}$$

або після перетворень

$$\begin{cases} (p - a_{11})X(p) - a_{12}Y(p) - a_{13}Z(p) = Q_1(p) + x_0; \\ -a_{21}X(p) + (p - a_{22})Y(p) - a_{23}Z(p) = Q_2(p) + y_0; \\ -a_{31}X(p) - a_{32}Y(p) + (p - a_{33})Z(p) = Q_3(p) + z_0. \end{cases} \quad (11.3)$$

Назвемо систему (11.3) зображувальною (операційною) системою. Це система алгебраїчних рівнянь. Її розв'язок $X(p), Y(p), Z(p)$ по-

дамо за відомими формулами Крамера. Для цього складемо визначник системи

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & p - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix}$$

і відповідні визначники

$$\Delta_X(p) = \begin{vmatrix} Q_1(p) + x_0 & -a_{12} & -a_{13} \\ Q_2(p) + y_0 & p - a_{22} & -a_{23} \\ Q_3(p) + z_0 & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_Y(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & Q_1(p) + x_0 & -a_{13} \\ -a_{21} & Q_2(p) + y_0 & -a_{23} \\ -a_{31} & Q_3(p) + z_0 & p - a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_Z(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & Q_1(p) + x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & Q_2(p) + y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & Q_3(p) + z_0 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{\Delta_X(p)}{\Delta(p)}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_Y(p)}{\Delta(p)}; \quad Z(p) = \frac{\Delta_Z(p)}{\Delta(p)}. \quad (11.4)$$

Розглянемо докладніше один з розв'язків (11.4), наприклад $Z(p)$.

Визначник $\Delta_Z(p)$ за відомою властивістю визначників запишемо у вигляді суми:

$$\Delta_Z(p) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & Q_1(p) \\ -a_{21} & p - a_{22} & Q_2(p) \\ -a_{31} & -a_{32} & Q_3(p) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z_0 \end{vmatrix}.$$

Перший доданок правої частини здобутої рівності можна розписати за елементами останнього стовпця:

$$Q_1(p) \begin{vmatrix} -a_{21} & p - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix} - Q_2(p) \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix} + Q_3(p) \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix}.$$

Тепер розв'язок $Z(p)$ можна подати у вигляді

$$Z(p) = Q_1(p) \frac{\begin{vmatrix} -a_{21} & p - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta(p)} - Q_2(p) \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}}{\Delta(p)} + \\ + Q_3(p) \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta(p)} + \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z_0 \end{vmatrix}}{\Delta(p)}. \quad (11.5)$$

Останній доданок правої частини є дробово-раціональною функцією комплексної змінної p . У § 10 було показано, як знаходити для неї оригінал. Другі множники трьох перших доданків також є дробово-раціональними функціями. Знайдемо оригінали цих функцій. Тепер для відшукування оригіналів кожного з перших трьох доданків застосуємо теорему про згортку, оскільки оригінали для зображень $Q_1(p)$, $Q_2(p)$, $Q_3(p)$ і дробово-раціональних функцій відомі. Аналогічні міркування можна повторити і для зображень $X(p)$ та $Y(p)$. У випадку однорідної системи рівнянь (11.1) у розв'язку залишаються лише останні доданки:

$$\bar{X}(p) = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & -a_{12} & -a_{13} \\ y_0 & p - a_{22} & -a_{23} \\ z_0 & -a_{32} & p - a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta(p)}; \\ \bar{Y}(p) = \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & x_0 & -a_{13} \\ -a_{21} & y_0 & -a_{23} \\ -a_{31} & z_0 & p - a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta(p)}; \quad (11.6) \\ \bar{Z}(p) = \frac{\begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} & x_0 \\ -a_{21} & p - a_{22} & y_0 \\ -a_{31} & -a_{32} & z_0 \end{vmatrix}}{\Delta(p)},$$

де $\bar{X}(p)$; $\bar{Y}(p)$; $\bar{Z}(p)$ – розв'язки у просторі зображень однорідної системи диференціальних рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -3x + y - 2z \end{cases} \quad (11.7)$$

з початковими умовами $x(0) = 1; y(0) = 1; z(0) = 0$.

Розв'язання. Вважаючи шукані функції оригіналами, введемо такі позначення:

$$x(t) \stackrel{\cdot}{=} X(p), \quad y(t) \stackrel{\cdot}{=} Y(p), \quad z(t) \stackrel{\cdot}{=} Z(p).$$

Згідно з теоремою про диференціювання оригіналу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \stackrel{\cdot}{=} pX(p) - x(0) = pX(p) - 1; \\ \dot{y}(t) \stackrel{\cdot}{=} pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \\ \dot{z}(t) \stackrel{\cdot}{=} pZ(p) - z(0) = pZ(p). \end{cases}$$

Зображувальну систему можна записати у вигляді

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) - Y(p) + Z(p); \\ pY(p) - 1 = X(p) + Z(p); \\ pZ(p) = -3X(p) + Y(p) - 2Z(p) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (2-p)X(p) - Y(p) + Z(p) = -1; \\ X(p) - pY(p) + Z(p) = -1; \\ -3X(p) + Y(p) - (2+p)Z(p) = 0. \end{cases} \quad (11.8)$$

Обчислюємо визначник системи

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 2-p & -1 & 1 \\ 1 & -p & 1 \\ -3 & 1 & -2-p \end{vmatrix} = p(1-p^2).$$

Згідно з формулами (11.6) знаходимо визначники

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -p & 1 \\ 0 & 1 & -2-p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -p & 1 \\ -2-p & 1 & -2-p \end{vmatrix} = (2+p)(1-p);$$

$$\begin{vmatrix} 2-p & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -2-p \end{vmatrix} = (2+p)(1-p);$$

$$\begin{vmatrix} 2-p & -1 & -1 \\ 1 & -p & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(p-1).$$

За формулами Крамера, на підставі яких здобуто розв'язки (11.6), запишемо розв'язки системи (11.8):

$$X(p) = \frac{2+p}{p(p+1)}; \quad Y(p) = \frac{2+p}{p(p+1)}; \quad Z(p) = -\frac{2}{p(p+1)}.$$

Для відшукування оригіналів скористаємося таблицею відповідностей, попередньо перетворивши дроби:

$$\frac{2+p}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{2+2p-2p}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1}; \quad -\frac{2}{p(p+1)} = -\frac{2}{p} + \frac{2}{p+1}.$$

Тепер можна записати розв'язок задачі Коші (11.7):

$$x(t) = 2 - e^{-t}; \quad y(t) = 2 - e^{-t}; \quad z(t) = 2e^{-t} + 2.$$

Системи лінійних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами розв'язуються аналогічно. Зображувальні системи і в цьому випадку складаються з рівнянь першого степеня відносно шуканих зображень. Операційним методом можна також розв'язувати мішані системи рівнянь, які разом з диференціальними містять також лінійні алгебраїчні рівняння. Відмінність полягає лише в утворенні коефіцієнтів зображувальної системи.

ВПРАВИ.

1. Знайти частинні розв'язки системи лінійних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови.

а) $\begin{cases} \dot{x} + 2x + 7\dot{y} + y = 0, \\ \dot{x} + 3x + 11\dot{y} + y = 0 \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 1$.

Відповідь. $\begin{cases} x(t) = e^{-\frac{1}{8}t} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{17}}{8}t - \frac{9}{\sqrt{17}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{17}}{8}t \right), \\ y(t) = e^{-\frac{1}{8}t} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{17}}{8}t - \frac{1}{\sqrt{17}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{17}}{8}t \right); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} - 2x + y = 2t, \\ \dot{y} - 6x + 9y = 4t \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = 3$.

Відповідь. $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{72}e^{-\frac{7}{2}t} \left(277 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{97}}{2}t + \frac{2539}{\sqrt{97}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{97}}{2}t \right) - \frac{7}{6}t - \frac{61}{72}, \\ y(t) = \frac{1}{36}e^{-\frac{7}{2}t} \left(127 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{97}}{2}t + \frac{265}{\sqrt{97}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{97}}{2}t \right) - \frac{1}{3}t - \frac{19}{36}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x + \dot{y} - y = 0, \\ \dot{x} + x + \dot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0 \end{cases}$ при $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0; y(0) = 1$.

Відповідь. $\begin{cases} x(t) = -\frac{5}{6}e^t + \frac{1}{30}e^{-t} (13 \operatorname{ch} \sqrt{10}t + 5\sqrt{10} \operatorname{sh} \sqrt{10}t + 12), \\ y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{30}e^{-t} (11 \operatorname{ch} \sqrt{10}t - 2\sqrt{10} \operatorname{sh} \sqrt{10}t - 36); \end{cases}$

г) $\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} - \dot{y} + y = 1, \\ \dot{x} + 6x + \dot{y} - \dot{y} = e^{4t} \end{cases}$ при $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$.

Відповідь. $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{30}(2e^{-t} + 3e^{4t} - 5e^{2t}), \\ y(t) = 1 - \frac{1}{6}(9e^t - 4e^{2t} + e^{-t}). \end{cases}$

2. Знайти загальні розв'язки систем рівнянь.

$$а) \begin{cases} \dot{y} - y - x = 0, \\ \dot{x} - y + x = 0. \end{cases} \text{ Відповідь } \begin{cases} x(t) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{2}t + \frac{C_2 - C_1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2}t, \\ y(t) = C_2 \operatorname{ch} \sqrt{2}t + \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \sqrt{2}t; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \dot{x} + 2x + 2y + 4z = 0, \\ \dot{y} + 2x - y + 2z = 0, \\ \dot{z} - 5x - 2y - 7z = 0. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } \begin{cases} x(t) = e^{2t} [C_1 + 2(C_2 + C_3) \operatorname{ch} \sqrt{29}t]; \\ y(t) = e^{2t} [(C_2 + C_3) \operatorname{ch} \sqrt{29}t - 14C_1]; \\ z(t) = e^{2t} \left[6C_1 - \left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2} C_2 + \frac{5 - \sqrt{29}}{2} C_3 \right) \operatorname{ch} \sqrt{29}t \right]. \end{cases}$$

§ 12. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД ПОДІБНОСТІ

Вище ми розглянули розв'язування операційним методом лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Однак перетворення Лапласа дає змогу розв'язувати деякі лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Нехай коефіцієнтами рівняння є многочлен відносно незалежної змінної. У рівнянні

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_k(t)y^{(k)} + \dots + a_n(t) = q(t) \quad (12.1)$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \quad (12.2)$$

коефіцієнти a_k є многочленами від t :

$$a_k(t) = b_{0k}t^m + b_{1k}t^{m-1} + b_{2k}t^{m-2} + \dots + b_{mk}, \\ b_{ik} = \text{const}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.3)$$

Іншими словами, ліва частина рівняння (12.1) є лінійною комбінацією виразів виду

$$t^r y^{(k)}(t), \quad (12.4)$$

де r і k — цілі додатні числа.

Застосовуючи перетворення Лапласа у виразі виду (12.4) і використовуючи обидві теореми про диференціювання (див. п. 3.5 і 3.6), одержуємо

$$y^{(k)}(t) \doteq p^k Y(p) - p^{k-1} y_0 - \\ - p^{k-2} y'_0 - \dots - p y_0^{(k-2)} - y_0^{(k-1)} = F_k(p); \quad (12.5)$$

$$t^r y^{(k)}(t) \doteq (-1)^r \frac{d^r F_k(p)}{dp^r}. \quad (12.6)$$

Виконавши такі перетворення для кожного доданку рівняння (12.1), дістанемо зображувальне рівняння, яке у цьому випадку (зверніть увагу!) буде диференціальним. Легко помітити, що порядок диференціального зображувального рівняння дорівнюватиме показнику найвищого степеня r многочленів (12.3). Звідси випливає, що застосування операційного методу до лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами виду (12.3) за певних умов може привести до зниження порядку рівнянь.

Як приклад розглянемо диференціальне рівняння з лінійними коефіцієнтами

$$(2t + 1)y'' + (4t - 2)y' - 8y = 0. \quad (12.7)$$

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. З цієї метою введемо дві довільні сталі: C_1 і C_2 . Нехай

$$y(t) \doteq Y(p); \quad y(0) = C_1; \quad y'(0) = C_2. \quad (12.8)$$

Тоді $y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - C_1$;

$$y''(t) \doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - C_1 p - C_2;$$

$$ty'(t) \doteq -\frac{d}{dp} [pY(p) - C_1] = -Y(p) - pY'(p);$$

$$t^2 y''(t) \doteq -\frac{d}{dp} [p^2 Y(p) - C_1 p - C_2] = -2pY(p) - p^2 Y'(p) + C_1.$$

Використовуючи (12.8), запишемо зображувальне рівняння у вигляді

$$4pY(p) + 2p^2 Y'(p) - 2C_1 - p^2 Y(p) + C_1 p + C_2 + \\ + 4Y(p) + 4pY'(p) + 2pY(p) - 2C_1 + 8Y(p) = 0.$$

Після спрощень дістанемо

$$Y'(p) - \frac{p^2 - 6p - 12}{2p(p+2)} Y(p) = \frac{C_1(4-p) - C_2}{2p(p+2)}. \quad (12.9)$$

Зображувальне рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку. Розв'язують його за відомою методикою класичної теорії диференціальних рівнянь:

$$Z' - \frac{p^2 - 6p - 12}{2p(p+2)} Z = 0; \quad \frac{dZ}{Z} = \frac{p^2 - 6p - 12}{2p(p+2)} dp;$$

$$\ln|Z| = \int \frac{p^2 - 6p - 12}{2p(p+2)} dp = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{8p+12}{p(p+2)} \right) dp =$$

$$= \frac{1}{2} p - 2 \int \frac{2p+3}{p(p+2)} dp = \frac{1}{2} p - 3 \ln|p| - \ln|p+2| + \ln|c|;$$

$$\ln|Z| = \ln e^{\frac{1}{2}p} - 3 \ln|p| - \ln|p+2| + \ln|c|;$$

$$Z = \frac{C}{p^3(p+2)} e^{\frac{1}{2}p}; \quad Y(p) = \frac{C(p)}{p^3(p+2)} e^{\frac{1}{2}p};$$

$$Y'(p) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}p} \frac{C(p)}{p^3(p+2)} + e^{\frac{1}{2}p} \frac{C'(p)p^3(p+2) - 2C(p)p^2(2p+3)}{p^6(p+2)^2}$$

або

$$Y'(p) = \frac{C(p)}{2p^3(p+2)} e^{\frac{p}{2}} + \frac{p(p+2)C'(p) - 2(2p+3)C(p)}{p^4(p+2)^2} e^{\frac{p}{2}}.$$

Вирази $Y(p)$ і $Y'(p)$ підставляємо в неоднорідне рівняння (12.9) для того, щоб знайти $C(p)$:

$$\frac{C(p)}{2p^3(p+2)} e^{\frac{p}{2}} + \frac{p(p+2)C'(p) - 2(2p+3)C(p)}{p^4(p+2)^2} e^{\frac{p}{2}} - \frac{p^2 - 6p - 12}{2p(p+2)} \frac{C(p)}{p^3(p+2)} e^{\frac{p}{2}} = \frac{C_1(4-p) - C_2}{2p(p+2)}.$$

Групуємо подібні члени:

$$e^{\frac{p}{2}} C(p) \left[\frac{1}{2p^3(p+2)} - \frac{2(2p+3)}{p^4(p+2)^2} - \frac{p^2 - 6p - 12}{2p^4(p+2)^2} \right] + \frac{C'(p)}{p^3(p+2)} e^{\frac{p}{2}} = \frac{C_1(4-p) - C_2}{2p(p+2)}.$$

Як і слід було очікувати, вираз у квадратних дужках дорівнює нулю. Відносно $C'(p)$ дістаємо рівняння

$$C'(p) e^{\frac{p}{2}} = \frac{p^2}{2} [C_1(4-p) - C_2].$$

Звідси

$$C(p) = \int \frac{p^2}{2} [C_1(4-p) - C_2] e^{-\frac{p}{2}} dp.$$

Беручи цей інтеграл частинами, дістаємо

$$C(p) = [C_1 p^3 - (10C_1 - C_2)p^2 + 4(10C_1 - C_2)p + 8(10C_1 - C_2)] e^{-\frac{p}{2}}.$$

Розв'язок зображувального рівняння запишемо у вигляді

$$Y(p) = \frac{C_1}{p+2} - \frac{10C_1 - C_2}{p(p+2)} + \frac{4(10C_1 - C_2)}{p^2(p+2)} + \frac{8(10C_1 - C_2)}{p^3(p+2)}.$$

Розкладаючи останні три дроби на елементарні і групуючи подібні члени, маємо

$$Y(p) = \frac{12C_1 - C_2}{2} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{10C_1 - C_2}{2} \frac{1}{p} + 4(10C_1 - C_2) \frac{1}{p^3}.$$

Перепозначивши сталі, шуканий розв'язок у просторі оригіналів дістанемо у вигляді

$$y(t) = C_3 e^{-2t} + C_4 (1 + 4t^2)$$

де

$$C_3 = \frac{12C_1 - C_2}{2}; \quad C_4 = \frac{10C_1 - C_2}{2}.$$

ВПРАВИ. Знайти загальні розв'язки рівнянь з лінійними коефіцієнтами.

1. $xy'' - (1+x)y' + y = 0$. Відповідь. $y(x) = C_1 e^x + C_2(x+1)$

2. $t\ddot{x} - 2(at+b)\dot{x} + (a^2t+2ab)x = 0$, $b > 0$. Відповідь. $x(t) = e^{at}(C_1 + C_2 t^{2b+1})$

3. $xz'' - (x+5)z' + 3z = 0$. Відповідь. $z(x) = C_1(x^3 + 9x^2 + 36x + 60) + C_2 e^x(x^2 - 8x + 20)$.

Метод подібності. В інженерній практиці часто зустрічаються рівняння зі змінними коефіцієнтами більш загального вигляду, ніж розглянуті вище. Як правило, такі рівняння шляхом індивідуальних у кожному разі перетворень зводяться до рівнянь з відомими розв'язками. Перша спроба систематизації цих методів привела до так званого методу подібності, який полягає в тому, що у вихідному рівнянні шукана функція або незалежні змінні (або одне і друге разом) змінюються на інші змінні за допомогою коефіцієнтів подібності. Якщо ці коефіцієнти сталі, то подібність називається лінійною, а якщо змінні, то подібність називається нелінійною. Заміна змінних у вихідному рівнянні дає змогу перетворити його на простіше або на рівняння, розв'язання якого є відомим. Зокрема, метод подібності дає змогу за певних умов перейти від лінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Припустимо, що дано лінійне рівняння другого порядку

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0. \quad (12.10)$$

де $P_1(x)$ – неперервно диференційовна функція; $P_2(x)$ – неперервна функція.

Покажемо, як за допомогою заміни шуканої функції співвідношенням

$$y(x) = u(x)Y(x), \quad (12.11)$$

де $u(x)$ – коефіцієнт подібності, рівняння (12.10) зі змінними коефіцієнтами можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами a_1 і a_2 :

$$Y''(x) + a_1 Y'(x) + a_2 Y(x) = 0. \quad (12.12)$$

Підставляємо (12.11) у вихідне рівняння (12.10). Для цього знаходимо

$$y'(x) = u'Y + uY'; \quad y''(x) = u''Y + 2u'Y' + uY''. \quad (12.13)$$

Після підстановки дістаємо рівняння

$$uY'' + (2u' + P_1u)Y' + (u'' + P_1u' + P_2u)Y = 0,$$

яке шляхом нескладних перетворень зводиться до вигляду

$$uY'' + \frac{2u' + P_1u}{a_1} a_1 Y' + \frac{u'' + P_1u' + P_2u}{a_2} a_2 Y = 0. \quad (12.14)$$

Для остаточного переходу до рівняння (12.12) треба, щоб виконувалася система

$$u = \frac{2u' + P_1u}{a_1} = \frac{u'' + P_1u' + P_2u}{a_2}. \quad (12.15)$$

Здобуті умови (12.15) є необхідними і достатніми. Припускаючи, що a_1 відоме, розв'яжемо перше рівняння системи (12.15):

$$u = \exp\left[\frac{1}{2} \int [a_1 - P_1(x)] dx\right]. \quad (12.16)$$

Якщо підстановка (12.16) перетворює друге рівняння системи (12.15)

$$u = \frac{u'' + P_1u' + P_2u}{a_2} \quad (12.17)$$

на тотожність, то задача перетворення рівняння (12.10) на (12.12) є розв'язаною. Щоб виконати цю підстановку, знаходимо похідні

$$u' = \frac{1}{2} [a_1 - P_1(x)] \exp\left[\frac{1}{2} \int [a_1 - P_1(x)] dx\right]; \quad (12.18)$$

$$u'' = \left\{ -\frac{1}{2} \left(P_1'(x) + \frac{1}{4} [a_1 - P_1(x)]^2 \right) \right\} \exp\left[\frac{1}{2} \int [a_1 - P_1(x)] dx\right].$$

Підставляючи (12.16) і (12.18) в (12.17) і скорочуючи на експоненту, дістаємо

$$a_2 = -\frac{1}{2} P_1'(x) + \frac{1}{4} [a_1 - P_1(x)]^2 + \frac{1}{2} [a_1 - P_1(x)] P_1(x) + P_2(x).$$

Після спрощень маємо

$$\frac{1}{2} P_1'(x) + \frac{1}{4} P_1^2(x) - P_2(x) = \frac{1}{4} a_1^2 - a_2 = \text{const}. \quad (12.19)$$

Отже, необхідною і достатньою умовою перетворення вихідного рівняння (12.10) на рівняння (12.12) зі сталими коефіцієнтами є інваріант, що складається з коефіцієнтів вихідного рівняння:

$$I(x) = \frac{1}{2} P_1'(x) + \left[\frac{1}{2} P_1(x) \right]^2 - P_2(x) = \alpha = \text{const.} \quad (12.20)$$

Звідси впливає умова, що дає змогу вибирати коефіцієнти:

$$\frac{1}{4} a_1^2 - a_2 = \alpha. \quad (12.21)$$

Залишаючи a_1 довільним, дістаємо

$$a_2 = \frac{1}{4} a_1^2 - \alpha. \quad (12.22)$$

Тому

$$Y''(x) + a_1 Y'(x) + \left(\frac{1}{4} a_1^2 - \alpha \right) Y(x) = 0. \quad (12.23)$$

Загальна схема переходу від рівняння зі змінними коефіцієнтами до рівняння зі сталими коефіцієнтами є такою: а) складаємо вираз інваріанта $I(x)$ за формулою (12.20) і знаходимо величину α ; б) вибираємо значення коефіцієнта a_1 і обчислюємо значення коефіцієнта a_2 за формулою (12.22).

Загальний розв'язок рівняння (12.23) можна знайти операційним методом. Перехід до розв'язання вихідного рівняння (12.10) здійснюємо за формулою (12.11). Якщо рівняння (12.10) було доповнено початковими умовами $y(0) = y_0$; $y'(0) = y'_0$, то рівняння (12.23) треба розв'язувати за таких початкових умов:

$$Y(0) = \frac{y_0}{u_0}; \quad Y'(0) = \frac{y'_0 u_0 - y_0 u'_0}{u_0^2},$$

де $u_0 = u(0)$, $u'_0 = u'(0)$ обчислюють за формулою (12.16) при $x = 0$.

Розглянемо кілька прикладів перетворення лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами на диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклади. 1. Перетворити рівняння

$$x^2 y'' - (3x^2 + 4x)y' + 6(x+1)y = 0$$

зі змінними коефіцієнтами на рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язання. Ділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт при старшій похідній:

$$y'' - \left(3 + \frac{4}{x} \right) y' + \frac{6}{x^2} (x+1)y = 0,$$

де $P_1(x) = -3 - \frac{4}{x}$; $P_2(x) = \frac{6}{x^2}(x+1)$;

$$I(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x^2} \right) + \frac{1}{4} \left(3 + \frac{4}{x} \right)^2 - \frac{6(x+1)}{x^2} = \frac{9}{4}.$$

Для того щоб коефіцієнти були цілими, можна покласти $a_1 = 3$. За формулою (12.22)

$$a_2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0.$$

Перетворене рівняння запишемо у вигляді

$$Y''(x) + 3Y'(x) = 0.$$

2. Знайти операційним методом загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' \operatorname{tg} x + (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)y = 0.$$

Розв'язання. Складаємо інваріант

$$I(x) = \frac{1}{2} \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \cdot 4 \operatorname{tg}^2 x - 1 - 2 \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0.$$

Отже, $\alpha = 0$. За a_1 можна взяти будь-яке дійсне число. Нехай $a_1 = 0$, тоді $a_2 = 0$. Тому перетворене рівняння має вигляд $Y''(x) = 0$. Доповнюємо його початковими умовами: $Y(0) = C_1$; $Y'(0) = C_2$. Позначимо зображення розв'язку $Y(x)$ через $\bar{y}(p)$. За теоремою про диференціювання оригіналу

$$Y''(x) \doteq p^2 \bar{y}(p) - p C_1 - C_2 = 0.$$

Звідси

$$\bar{y}(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2}.$$

Отже, $Y(x) = C_1 + C_2 x$.

Для відшукування загального розв'язку вихідного рівняння треба знайти коефіцієнт нелінійної подібності з (12.16) при $a_1 = 0$ і $P_1(x) = 2 \operatorname{tg} x$:

$$u(x) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int 2 \operatorname{tg} x dx \right).$$

У цьому випадку немає смислу враховувати довільну сталу C . Отже,

$$u(x) = e^{\ln|\cos x|} = \cos x.$$

Тому загальний розв'язок вихідного рівняння, згідно з (12.11), має вигляд

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) \cos x.$$

3. Знайти операційним методом частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 2y' \operatorname{th} x + 3y = 0.$$

що задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Згідно з (12.20)

$$l(x) = \frac{1}{2} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{4}{4} \operatorname{th}^2 x - 3 = -2.$$

Покладемо $a_1 = 0$, тоді $a_2 = 2$. Перетворене рівняння запишемо у вигляді

$$Y''(x) + 2Y'(x) = 0.$$

Щоб дістати перетворені початкові умови, треба знайти $u(x)$. З (12.16) при $a_1 = 0$ маємо

$$u(x) = \exp\left(-\int \operatorname{th} x dx\right) = e^{-\ln \operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Із співвідношення (12.11) знаходимо

$$Y(x) = \frac{y(x)}{u(x)}; \quad Y(x) = y(x) \operatorname{ch} x; \quad Y'(x) = y'(x) \operatorname{ch} x + y(x) \operatorname{sh} x.$$

Звідси перетворені початкові умови: $Y(0) = 1$; $Y'(0) = 1$, оскільки $\operatorname{ch} 0 = 1$; $\operatorname{sh} 0 = 0$.

Ввівши позначення $Y(x) \doteq \bar{y}(p)$, зображувальне рівняння запишемо у вигляді

$$(p^2 + 2)\bar{y}(p) - p - 1 = 0.$$

Звідси

$$\bar{y}(p) = \frac{p+1}{p^2+2} = \frac{p}{p^2+2} + \frac{1}{p^2+2}.$$

За формулами (3.5) і (3.6) знаходимо

$$Y(x) = \cos \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x.$$

Помноживши розв'язок перетвореного рівняння на коефіцієнт подібності $u(x)$, дістанемо розв'язок задачі Коші:

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \left(\cos \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x \right).$$

Покажемо, як і за яких умов здійснюється заміна незалежної змінної. Нехай дано лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y''(x) + P_1(x)y'(x) + P_2(x)y(x) = 0, \quad (12.24)$$

де $P_1(x)$ – неперервна, а $P_2(x)$ – неперервно диференційовна функція у деякій області.

Здійснюємо перехід від незалежної змінної x до аргументу ξ за формулою

$$x = \eta(\xi) \xi \quad (12.25)$$

таким чином, щоб рівняння (12.24) перейшло у рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Y''(\xi) + a_1 Y'(\xi) + a_2 Y(\xi) = 0, \quad (12.26)$$

де $\eta(\xi)$ – коефіцієнт подібності для незалежної змінної, а $Y(\xi) = y(x)$. Перетворимо похідні:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}} \frac{dy}{d\xi}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{dy}{d\xi}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Підставивши (12.27) у (12.24), дістанемо

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} \frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \left[\frac{P_1(x)}{\frac{dx}{d\xi}} - \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \right] \frac{dy(\xi)}{d\xi} + P_2(x)y(\xi) = 0. \quad (12.28)$$

Домноживши другий і третій доданки відповідно на $\frac{a_1}{a_1}$ і $\frac{a_2}{a_2}$, діста-

немо умови, за яких рівняння (12.28) переходить у (12.26):

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} = \frac{P_1(x)}{a_1 \frac{dx}{d\xi}} - \frac{1}{a_1 \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} \frac{d^2 x}{d\xi^2} = \frac{P_2(x)}{a_2}. \quad (12.29)$$

Із двох рівнянь системи (12.29) вибираємо одне:

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} = \frac{P_2(x)}{a_2}. \quad (12.30)$$

Його розв'язок неважко знайти, оскільки змінні відокремлюються:

$$d\xi = \sqrt{\frac{P_2(x)}{a_2}} dx; \quad \xi = \int \sqrt{\frac{P_2(x)}{a_2}} dx. \quad (12.31)$$

Задача перетворення рівняння (12.24) на (12.26) буде розв'язана, якщо вираз (12.31) задовольняє і друге рівняння системи (12.29):

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2} = \frac{P_1(x)}{a_1} \frac{dx}{d\xi} - \frac{1}{a_1} \frac{d^2(x)}{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^3} d\xi^2. \quad (12.32)$$

Отже, підставивши (12.31) в (12.32), дістанемо умови перетворення рівняння. Із (12.31) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}}, & \frac{d^2x}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dx}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}} \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{a_2}{P_2(x)}} \right) \frac{dx}{d\xi} = -\frac{a_2 P_2'(x)}{2P_2^2(x)}. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Підставивши (12.33) у (12.32), отримаємо

$$\frac{P_2(x)}{a_2} = \frac{P_1(x)\sqrt{P_2(x)}}{a_1\sqrt{a_2}} + \frac{P_2'(x)}{2a_1\sqrt{a_2}\sqrt{P_2(x)}}.$$

Після перетворення знову дістанемо інваріант, який позначимо через β :

$$I(x) = \frac{P_1(x)}{\sqrt{P_2(x)}} + \frac{P_2'(x)}{2\sqrt{P_2^3(x)}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_2}} = \beta. \quad (12.34)$$

Здобутий інваріант дає змогу визначити клас рівнянь вигляду (12.24), які можна перетворити на нескінченну множину рівнянь ви-

гляду (12.26) зі сталими коефіцієнтами, оскільки умова (12.34) є необхідною і достатньою.

Розв'язуючи (12.34) відносно першого коефіцієнта $P_1(x)$, дістаємо

$$P_1(x) = \beta\sqrt{P_2(x)} - \frac{P_2'(x)}{2P_2(x)}. \quad (12.35)$$

Звідси робимо висновок, що рівняння виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\beta\sqrt{P(x)} - \frac{P'(x)}{2P(x)} \right] \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \quad (12.36)$$

підстановкою

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \sqrt{P(x)} dx \quad (12.37)$$

можна перетворити на рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + \beta\sqrt{a} \frac{dY}{d\xi} + aY = 0. \quad (12.38)$$

У формулах (12.36) і (12.38) коефіцієнти не мають індексів, оскільки вони всюди однакові. Якщо інваріант (12.34) дорівнює нулю ($\beta = 0$), перетворене рівняння набирає вигляду

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} + aY = 0. \quad (12.39)$$

Приклади. Знайти операційним методом загальний розв'язок рівнянь.

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} - (2e^x + 1) \frac{dy}{dx} + e^{2x} y = 0.$$

Розв'язання. Спочатку перетворимо його на рівняння зі сталими коефіцієнтами, для чого скористаємося формулою (12.34):

$$\beta = -\frac{2e^x + 1}{e^x} + \frac{2e^{2x}}{2e^{3x}} = -2.$$

Коефіцієнт a вибираємо довільно, наприклад $a = 9$. Підставляючи $a = 9$ і $P_2(x) = e^{2x}$ у формулу (12.37), дістаємо $\xi = \frac{1}{3} e^x$, тому перетворене рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} - 6 \frac{dY}{d\xi} + 9Y = 0.$$

Доповнимо його початковими умовами $Y(0) = C_1$, $Y'(0) = C_2$. Це дає змогу записати зображувальне рівняння

$$p^2 y(p) - pC_1 - C_2 - 6py(p) + 6C_1 + 9y(p) = 0,$$

де $Y(\xi) \doteq y(p)$

Після зведення подібних членів маємо

$$y(p) = \frac{C_1 p - 6C_1 + C_2}{p^2 - 6p + 9} = \frac{C_1}{p-3} + \frac{-3C_1 + C_2}{(p-3)^2}.$$

У просторі оригіналів розв'язок перетвореного рівняння має вигляд

$$Y(\xi) = [\bar{C}_1 + \bar{C}_2 \xi] e^{3\xi},$$

де $\bar{C}_1 = C_1$; $\bar{C}_2 = C_2 - 3C_1$.

Повертаючись до змінної x , дістаємо

$$y(x) = e^{3x} \left[C_1 (1 - e^{-x}) + \frac{C_2}{3} e^{-x} \right].$$

$$2. \frac{d^2 y}{dx^2} + \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} + y \cos^2 x = 0.$$

Розв'язання.

$$I(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \frac{2 \cos x \sin x}{2 \cos^3 x} = 0; \quad \beta = 0.$$

Покладемо $a = 1$. Знаходимо $\xi = \sin x$. Тепер перетворене рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + Y = 0; \quad Y(0) = C_1; \quad Y'(0) = C_2.$$

Маємо зображувальне рівняння

$$p^2 \bar{y}(p) - pC_1 - C_2 + \bar{y}(p) = 0, \quad \bar{y}(p) = \frac{pC_1 + C_2}{p^2 + 1}$$

і його розв'язок

$$Y(\xi) = C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi.$$

Отже, загальний розв'язок

$$y(x) = C_1 \cos(\sin x) + C_2 \sin(\sin x).$$

§ 13. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівняння називається інтегральним, якщо невідома функція міститься під знаком інтеграла. Хоча означення не є точним, але суть воно відображає точно. Найвідомішими є такі класи інтегральних рівнянь.

1. Лінійні рівняння. Це рівняння виду

$$y(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) y(s) ds + f(t), \quad (13.1)$$

де $y(t)$ — невідома функція; $f(t)$, $K(t, s)$ — відомі функції; a , b — будь-які числа; λ — параметр; $K(t, s)$ — ядро інтегрального рівняння (звичайно воно визначене у квадраті зі стороною $b - a$); $f(t)$ — вільний член (ця функція визначена у проміжку $a \leq t \leq b$).

Рівняння (13.1) називається **рівнянням Фредгольма**, якщо функції $K(t, s)$ і $f(t)$ неперервні в області свого визначення або мають такі розриви, що

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 dt ds < +\infty; \quad (13.2)$$

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty. \quad (13.3)$$

Якщо $f(t) = 0$ для $t \in [a, b]$, то рівняння (13.1) називається однорідним, у противному разі — неоднорідним (згадаємо означення однорідних і неоднорідних лінійних рівнянь).

Рівняння (13.1) називається рівнянням Фредгольма другого роду, а рівняння

$$\lambda \int_a^b K(t, s) y(s) ds = f(t) \quad (13.4)$$

називається рівнянням Фредгольма першого роду.

Приклад. Визначити рід рівняння

$$y(t) = \int_0^1 (t^2 + s^2) y(s) ds + t^2.$$

де $f(t) = t^2$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язання. Ядро $K(t, s) = t^2 + s^2$ — неперервне у квадраті ($0 \leq t \leq 1$; $0 \leq s \leq 1$); $\lambda = 1$. Тому рівняння є рівнянням Фредгольма другого роду.

2. Нелінійні рівняння. Це рівняння виду

$$y(t) = \lambda \int_a^b K(t, s, y(s)) ds + f(t). \quad (13.5)$$

Ці рівняння належать до рівнянь Фредгольма, якщо для (13.5) виконані умови неперервності або умови, аналогічні (13.2) і (13.3).

Серед лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь виділяють клас рівнянь типу Вольєрра. Це рівняння виду

$$y(t) = \lambda \int_a^t K(t, s) y(s) ds + f(t), \quad (13.6)$$

в якому ядро $K(t, s)$ визначене для $a \leq s \leq t$.

Рівняння (13.6) є лінійним неоднорідним рівнянням Вольєрра другого роду. Воно стане рівнянням першого роду, якщо буде записане у вигляді

$$\lambda \int_a^t K(t, s) y(s) ds = f(t). \quad (13.7)$$

Численні задачі техніки зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольєрра. Наприклад, нехай поставлено задачу Коші для рівняння

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + a_1(t) \frac{dX}{dt} + a_2(t) X = Q(t); \quad X(0) = C_0; \quad X'(0) = C_1. \quad (13.8)$$

Нехай $\frac{d^2 X}{dt^2} = Y(t)$. Тоді $\frac{dX}{dt} = \int_0^t Y(s) ds + C_1$;

$$X(t) = \int_0^t \left[\int_0^v Y(s) ds \right] dv + C_1 t + C_0,$$

або

$$X(t) = \int_0^t (t-s) Y(s) ds + C_1 t + C_0.$$

Підставимо здобуті значення у вираз (13.8):

$$Y(t) + a_1(t) \left(\int_0^t Y(s) ds + C_1 \right) + a_2(t) \left[\int_0^t (t-s) Y(s) ds + C_1 t + C_0 \right] = Q(t);$$

$$Y(t) + \int_0^t [a_1(t) + a_2(t)(t-s)] Y(s) ds = Q(t) - [a_1(t) C_1 + C_1 t a_2(t) + C_0 a_2(t)]. \quad (13.9)$$

Введемо позначення

$$K(t, s) = -[a_1(t) + a_2(t)(t-s)]; \quad (13.10)$$

$$f(t) = Q(t) - [C_1 a_1(t) + C_1 t a_2(t) + C_0 a_2(t)]. \quad (13.11)$$

Тепер (13.9) запишемо у вигляді

$$Y(t) = \int_0^t K(t, s) Y(s) ds + f(t). \quad (13.12)$$

Дістали рівняння Вольєрра другого роду. Якщо в (13.10) коефіцієнти сталі, то $K(t, s) = -[a_1 + a_2(t-s)]$ є ядром, залежним лише від різниці аргументів:

$$Y(t) = \lambda \int_0^t K(t-s) Y(s) ds + f(t). \quad (13.13)$$

Ці рівняння дістали назву **рівнянь типу згортки**.

Приклад. Звести задачу Коші

$$\ddot{x} + (1+t^2)x(t) = \cos t; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 2$$

до інтегрального рівняння.

Розв'язання. Як і у випадку рівняння (13.8), позначимо $\ddot{x} = Y(t)$, тоді

$\dot{x} = \int_0^t Y(s) ds + C_1$. Визначимо C_1 , використовуючи початкову умову $\dot{x}(0) = 2$. Маємо

$$\dot{x}(0) = \int_0^0 Y(s) ds + C_1; \quad 2 = C_1.$$

Тепер $\dot{x} = \int_0^t Y(s) ds + 2$. Знайдемо

$$x(t) = \int_0^t \left[\int_0^v Y(s) ds \right] dv + 2t + C_0,$$

або

$$x(t) = \int_0^t (t-s) Y(s) ds + 2t + C_0.$$

Використовуючи початкову умову $x(0) = 0$, знайдемо $C_0 = 0$. Тоді

$$x(t) = \int_0^t (t-s)Y(s)ds + 2t.$$

Підставимо значення $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ у задане рівняння, дістанемо

$$Y(t) + (1+t^2) \left(\int_0^t (t-s)Y(s)ds + 2t \right) = \cos t.$$

Множник $(1+t^2)$ можна внести без зміни під знак інтеграла, оскільки інтегрування здійснюється за змінною s . В результаті дістанемо

$$Y(t) + \int_0^t (1+t^2)(t-s)Y(s)ds + 2t(1+t^2) = \cos t.$$

Запишемо рівняння у формі (13.6):

$$Y(t) = - \int_0^t (1+t^2)(t-s)Y(s)ds + \cos t - 2t(1+t^2).$$

Дістанемо рівняння Вольтерра, в якому

$$\lambda = -1, \quad K(t, s) = (1+t^2)(t-s); \quad f(t) = \cos t - 2t(1+t^2).$$

Рівняння є лінійним, оскільки невідома функція $Y(t)$ входить у рівняння в першому степені.

Рівняння типу (13.13) легко розв'язується операційним методом.

Дійсно, нехай $y(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – зображенням. Нехай зображення $f(t)$ є $\Phi(p)$. Тоді за теоремою про згортку (п. 3.9.)

$$\int_0^t K(t-s)y(s)ds \doteq K(p)F(p).$$

Тепер рівняння (13.13) можна записати у вигляді

$$F(p) = \lambda K(p)F(p) + \Phi(p), \quad (13.14)$$

звідки

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \lambda K(p)}. \quad (13.15)$$

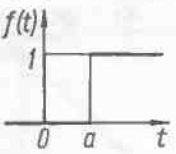
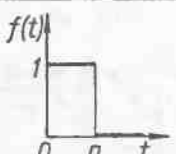
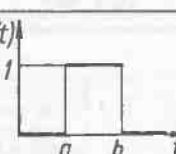
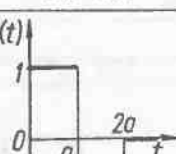
Залишилося перейти до простору оригіналів. Це робиться або за допомогою таблиць (табл. 13.1), або за формулою обернення.

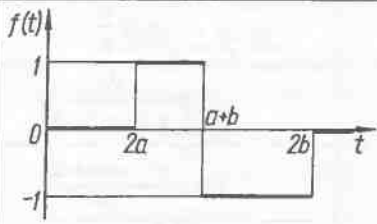
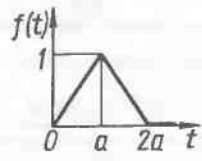
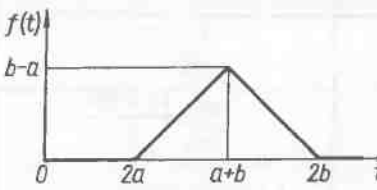
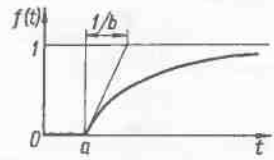
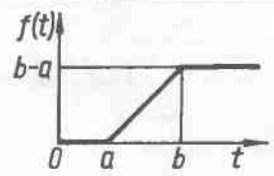
№ п/п	Оригінал	Зображення
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$
3	e^{qt}	$\frac{1}{p-q}$
4	$\frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{1+ap}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
6	$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
7	$\frac{1}{a}(e^{at}-1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
8	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
9	te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$
10	$\frac{1}{a^2} te^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$
11	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
12	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
13	$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
14	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$

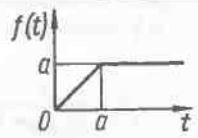
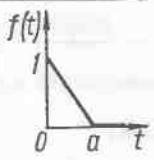
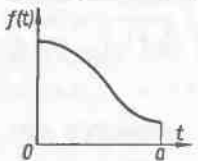
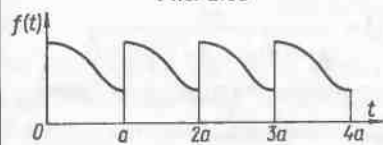
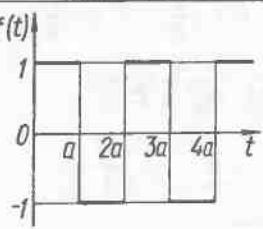
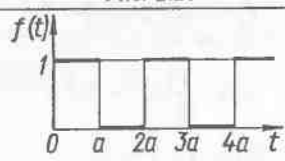
№ п/п	Оригінал	Зображення
15	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - 1 - at)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
16	$\frac{1}{2}t^2 e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^3}$
17	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$
18	$\frac{1}{a^2}(\operatorname{ch} at - 1)$	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)}$
19	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
20	$\cos^2 at$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
21	$\operatorname{ch}^2 at$	$\frac{p^2 - 2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
22	$\sin^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
23	$\operatorname{sh}^2 at$	$\frac{2a^2}{p(p^2 - 4a^2)}$
24	$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at - \sin at)$	$\frac{a^3}{p^4 - a^4}$
25	$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} at - \cos at)$	$\frac{a^2 p}{p^4 - a^4}$
26	$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at + \sin at)$	$\frac{ap^2}{p^4 - a^4}$
27	$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} at + \cos at)$	$\frac{p^3}{p^4 - a^4}$
28	$\sin at \operatorname{sh} at$	$\frac{2a^2 p}{p^4 + 4a^4}$

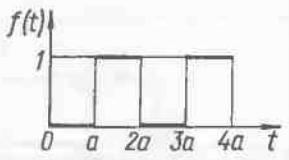
№ п/п	Оригінал	Зображення
29	$\cos at \operatorname{ch} at$	$\frac{p^3}{p^4 + 4a^4}$
30	$\sin at \operatorname{ch} at$	$\frac{a(p^2 + 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$
31	$\cos at \operatorname{sh} at$	$\frac{a(p^2 - 2a^2)}{p^4 + 4a^4}$
32	$\frac{1}{2}(\sin at - at \cos at)$	$\frac{a^3}{(p^2 + a^2)^2}$
33	$\frac{t}{2} \sin at$	$\frac{ap}{(p^2 + a^2)^2}$
34	$\frac{1}{2}(\sin at + at \cos at)$	$\frac{ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$
35	$\cos at - \frac{at}{2} \sin at$	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)^2}$
36	$\frac{1}{2}(at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$	$\frac{a^3}{(p^2 - a^2)^2}$
37	$\frac{1}{2}t \operatorname{sh} at$	$\frac{ap}{(p^2 - a^2)^2}$
38	$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} at + at \operatorname{ch} at)$	$\frac{ap^2}{(p^2 - a^2)^2}$
39	$\operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at$	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)^2}$
40	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
41	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$

№ п/п	Оригінал	Зображення
42	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
43	$t - \frac{1}{a} \sin at$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$
44	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at - t$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 - a^2)}$
45	$\sin (at + b)$	$\frac{p \sin b + a \cos b}{p^2 + a^2}$
46	$\cos (at + b)$	$\frac{p \cos b - a \sin b}{p^2 + a^2}$
47	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
48	$\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
49	$\frac{1 + 2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{p + a}{p\sqrt{p}}$
50	$\frac{ate^{-at} + e^{-at} - 1}{t^2}$	$p \ln \left(1 + \frac{a}{p}\right) - a$
51	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$	$\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b}$
52	$\frac{\sin at}{t\sqrt{2\pi t}}$	$\sqrt{\sqrt{p^2 - a^2} - p}$
53	$\frac{1 - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p}$
54	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
55	$\frac{2 \operatorname{sh} at}{t}$	$\ln \frac{p+a}{p-b}$
56	$\sigma(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$

№ п/п	Оригінал	Зображення
57	$\frac{\sin at}{t}$	$\operatorname{arctg} \frac{a}{p}$
58	$2 \frac{\sin at \cos bt}{t}$	$\operatorname{arctg} \frac{2ap}{p^2 - a^2 + b^2}$
59	$\frac{e^{at} - 1}{t} \sin bt$	$\operatorname{arctg} \frac{p^2 - ap + b^2}{ab}$
60	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}} (\ln 4p + C)$
61	 <p>Рис. 2.8</p>	$\frac{e^{-ap}}{p}$
62	 <p>Рис. 2.9</p>	$\frac{1 - e^{-ap}}{p}$
63	 <p>Рис. 2.10</p>	$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$
64	 <p>Рис. 2.11</p>	$\frac{(1 - e^{-ap})^2}{p}$

№ п/п	Оригінал	Зображення
65	 <p>Рис. 2.12</p>	$\frac{(e^{-ap} - e^{-bp})^2}{p}$
66	 <p>Рис. 2.13</p>	$\frac{(1 - e^{-ap})^2}{p^2}$
67	 <p>Рис. 2.14</p>	$\frac{(e^{-ap} - e^{-bp})^2}{p^2}$
68	 <p>Рис. 2.15</p>	$\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$
69	 <p>Рис. 2.16</p>	$\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p^2}$

№ п/п	Оригінал	Зображення
70	 <p>Рис. 2.17</p>	$\frac{1 - e^{-ap}}{p^2}$
71	 <p>Рис. 2.18</p>	$\frac{e^{-ap} + ap - 1}{ap^2}$
72	 <p>Рис. 2.19</p>	$F(p) = \frac{Lf(t)}{1 - e^{-ap}}$
	 <p>Рис. 2.20</p>	
73	 <p>Рис. 2.21</p>	$\frac{1 - e^{-ap}}{p(1 + e^{-ap})}$
74	 <p>Рис. 2.22</p>	$\frac{1}{p(1 + e^{-ap})}$

№ п/п	Оригінал	Зображення
75	 <p>Рис. 2.23</p>	$\frac{1}{p(1 + e^{ap})}$

Приклад. Знайти розв'язок інтегрального рівняння другого роду

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds + \sin t.$$

Розв'язання. Переведемо задане рівняння у простір зображень

$$y(t) \doteq F(p); \quad \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds = t^2 \times y(t) \doteq \frac{2}{p^3} F(p); \quad \sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Операторне рівняння запишемо у вигляді

$$F(p) = \frac{1}{2} \frac{2}{p^3} F(p) + \frac{1}{p^2 + 1}; \quad F(p) \left(1 - \frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^3 - 1)(p^2 + 1)}; \quad F(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2 + p + 1)(p^2 + 1)}$$

Розкладаючи на елементарні дроби і визначаючи коефіцієнти, дістанемо

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{p^2+p+1};$$

$$A = \frac{1}{6}; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{2}; \quad D = -\frac{2}{3}; \quad E = -\frac{1}{3};$$

$$F(p) = \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)};$$

$$y(t) = \frac{1}{6} \left(e^t + 3 \cos t + 3 \sin t - 4e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$$

ВПРАВИ. Зінтегрувати рівняння типу згортки.

1. $y(t) = \int_0^t y(s) ds + \sin t$. Відповідь. $y(t) = \frac{1}{2} (e^t - \cos t + \sin t)$

2. $y(t) = 3 \int_0^t e^{-(t-s)} y(s) ds + e^{-2t}$. Відповідь. $y(t) = \frac{1}{4} (e^{-2t} + 3e^{2t})$

3. $y(t) = \int_0^t \sin(t-s) y(s) ds + t^3$. Відповідь. $y(t) = t^3 + \frac{t^5}{20}$

§ 14. ПЕРЕТВОРЕННЯ КАРСОНА. ІНШІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Вище наводилось означення інтегрального перетворення Лапласа для деякого оригіналу $f(t)$:

$$f(t) \doteq F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (14.1)$$

У застосуваннях поряд із перетворенням (14.1) зустрічається й перетворення виду

$$\Phi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (14.2)$$

Інтегральне перетворення (14.2) називається **інтегральним перетворенням Карсона** для функції $f(t)$. Іноді його називають перетворенням Хевісайда. Зіставляючи формули (14.1) і (14.2), робимо висновок, що між функціями $\Phi(p)$ і $F(p)$ існує співвідношення

$$\Phi(p) = pF(p). \quad (14.3)$$

Звідси випливає, що для відшукування відповідностей оригінал-зображення, і навпаки, можна користуватися одним і тим самим довідником, домноживши або поділивши зображення на p . Введемо для перетворення (14.2) знак відповідності \div , тобто $f(t) \div \Phi(p)$. Тоді

$$\sin t \div \frac{1}{p^2 + 1}; \quad \sin t \div \frac{p}{p^2 + 1};$$

$$e^{qt} \div \frac{1}{p - q}; \quad e^{qt} \div \frac{p}{p - q}.$$

Суттєво позитивною ознакою перетворення (14.2) є те, що сталій у просторі оригіналів відповідає також стала у просторі зображень. Дійсно,

$$C \div \int_0^{\infty} p e^{-pt} C dt = Cp \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Big|_0^{\infty} = C. \quad (14.4)$$

В останній рівності, як і раніше, за сталу C у просторі оригіналів приймають її добуток на функцію Хевісайда:

$$C\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ C & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (14.5)$$

Для перетворення Карсона (14.2) можна довести властивості з тими самими назвами, що й для перетворення Лапласа (14.1). Однак лише деякі з них збігаються повністю (властивість подібності, теорема про диференціювання оригіналу і т.д.). Негативною рисою перетворення (14.2) є ускладнення з доведенням інших властивостей. Наприклад, аналог теореми зміщення в аргументі зображення має вигляд

$$\Phi(p+a) \div e^{-at} f(t) + a \int_0^t a^{-a\tau} f(\tau) d\tau. \quad (14.6)$$

Дії множення на експоненту у просторі оригіналів відповідає також складніша операція у просторі зображень:

$$e^{-at} f(t) \div \frac{P}{p+a} \Phi(p+a). \quad (14.7)$$

Порівняння формул (14.7) і (14.6) із відповідними формулами п. 3.3 виявляє переваги перетворення Лапласа. Невиправдані труднощі, що породжуються перетворенням Карсона, значно звужують область його застосування. Однак слід пам'ятати, що вибір найефективнішого інтегрального перетворення залежить від розглядуваної задачі. Так, досить часто користуються перетворенням Мелліна.

Перетворенням Мелліна функції $f(t)$ називається функція

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} f(t) dt, \quad p = \alpha + j\beta,$$

де $f(t)$ задовольняє умову

$$\int_0^{\infty} |f(t)| t^{\alpha+1} dt < +\infty$$

при належному виборі α .

Більшість теорем, що стосуються перетворення Мелліна, можна дістати із відповідних теорем для перетворення Лапласа.

§ 1. ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. Числові і функціональні послідовності

Якщо кожному (натуральному) числу поставити у відповідність певну величину, то множина цих величин утворить послідовність. Послідовність може бути числовою (такою, що складається з чисел):

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots;$$

$$1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots;$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

або функціональною (такою, що складається з функцій):

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$$

Для позначення послідовностей використовують фігурні дужки. Наприклад, наведені послідовності можна записати у вигляді

$$\{n\}; \{1/n\}; \{x_n\}; \{\sin nx\}. \quad (1.1)$$

Функціональні послідовності можуть бути як для однієї змінної:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, \text{ або } \{f_n(x)\}, \quad (1.2)$$

так і для багатьох змінних: $f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots$, або

$$\{f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\} = \{f_n(X)\}, \quad (1.3)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — точка m -вимірного простору; $x_n, f_n(x), f_n(X)$ — загальні члени послідовності.

Якщо у функціональній послідовності $\{f_n(X)\}$ незалежним змінним надати конкретних значень, то функціональна послідовність перетворюється на числову.

Наприклад, послідовність $\{\sin nx\}$ при $x = \pi/8$ переходить у числову

$$\left\{ \sin n \frac{\pi}{8} \right\}.$$

Областю визначення функціональної послідовності називається множина значень незалежних змінних, за яких всі функції, що утворюють послідовність, існують. Наприклад, послідовності $\{x^n\}$, $\{\sin nx\}$ визначені всюди на числовій осі.

1.2. Збіжність числових послідовностей

Нехай числова послідовність $\{x_n\}$ задана загальним членом x_n . Нагадаємо означення границі числової послідовності: дійсне число a називається границею послідовності, і це записують таким чином:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

якщо $\forall \delta > 0 \exists N(\delta) > 0, \forall x_n \text{ з } n > N$

$$|x_n - a| < \delta \text{ або } a - \delta < x_n < a + \delta.$$

Геометрично це означає: якщо у будь-якому як завгодно малому околі точки a міститься нескінченна множина членів послідовності, а поза ним нічого крім скінченного числа, то точка a називається границею послідовності, або граничною точкою (точкою скупчення). Якщо числова послідовність має скінченну границю, то вона називається **збіжною**; у протилежному разі послідовність називається **розбіжною**, тобто послідовність розбіжна, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не існує або $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Приклади. 1. Послідовність $\{1/n\}$ збігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, а $\{n\}$ — розбігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

2. $\left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} \right\}$ збігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} = 0$.

3. $\{n^2\}$ розбігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

4. $\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}$ збігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

ВПРАВИ. Знайти границі послідовностей, заданих своїми загальними членами.

1. $x_n = (-1)^n n$. *Відповідь.* ∞ . 2. $x_n = \frac{n}{n+1}$. *Відповідь.* 1.

3. $x_n = \frac{n}{2^n}$. *Відповідь.* 0.

1.3. Збіжність функціональних послідовностей

Розглянемо функціональну послідовність, наприклад однієї змінної $\{f_n(x)\}$, областю визначення якої є (a, b) . Якщо виберемо конкретне $x_1 \in (a, b)$, то можна утворити числову послідовність $\{f_n(x_1)\}$. Вона може збігатися і розбігатися. Якщо $\{f_n(x_1)\}$ збігається, то точка x_1 називається точкою збіжності функціональної послідовності. Множина (сукупність) точок збіжності функціональної послідовності називається областю збіжності (проміжком збіжності). Якщо проміжок збіжності послідовності $\{f_n(x)\}$ позначити через (c, d) , то завжди $(c, d) \subset (a, b)$. Наприклад, послідовність $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n, \dots$, визначена в $(-\infty, \infty)$, збігається для всіх $|x| < 1$, а для всіх $|x| > 1$ розбігається. Інтервал збіжності $(-1, +1) \subset (-\infty; +\infty)$.

Та функція, до якої збігається функціональна послідовність, називається **граничною функцією**. Якщо граничної функції не існує або вона нескінченно велика, то функціональна послідовність називається **розбіжною на деякому проміжку (в області)**.

Приклади. Знайти область збіжності і граничну функцію функціональної послідовності

1. $\{x^n\} = 1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$

Розв'язання. Для $|x| < 1$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. При $x = 1$: $1^n = 1$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \text{ для } |x| > 1.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ не існує для $x = -1$. Дійсно, при $x = -1$ маємо послідовність $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Область збіжності $\{x^n\}$: $(-1; 1]$, а область розбіжності $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$. Граничною функцією є $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

2. $\{x^{-n}\} = 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}, \dots$

Розв'язання. Послідовність визначена всюди на числовій осі, крім $x = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{-n} = 0 \text{ для } |x| > 1;$$

при $x = 1, 1^{-n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{-n} = 1$; при $x = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{-n}$ — не існує.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{-n} = \infty \text{ для } (-1, 0) \text{ і для } (0, 1).$$

Область збіжності послідовності $\{x^{-n}\}$; $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. Гранична функція

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } |x| > 1; \\ 1 & \text{для } x = 1. \end{cases}$$

$$3. \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\} = \sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \dots, \frac{\sin nx}{n}, \dots$$

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0; f(x) = 0.$$

Область збіжності $(-\infty; +\infty)$.

ВПРАВИ. Знайти область збіжності і граничну функцію для функціональної послідовності.

$$1. \left\{ \frac{x^n}{1+x^n} \right\}. \text{ Відповідь. } (-\infty; +\infty) - \{-1\}; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 1, & |x| > 1; \\ 0, & |x| < 1. \end{cases}$$

$$2. \left\{ \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right\}. \text{ Відповідь. } (-\infty; +\infty) - \{-1\}; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

$$3. \left\{ \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \right\}. \text{ Відповідь. } (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); f(x) = \begin{cases} 0, & x = \pm 1; \\ -1, & |x| < 1; \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Узагальнення. Всі розглянуті означення зберігають силу для функціональних послідовностей, складених із функцій багатьох змінних: $f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots$

Вважатимемо, що функція $f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ визначена для m -вимірної D -області.

Заради стислості викладу позначимо $(x_1, x_2, \dots, x_m) = X$. Тоді послідовність запишемо у вигляді $f_1(X), f_2(X), f_3(X), \dots, f_n(X), \dots$, або $\{f_n(X)\}$, а граничну функцію у вигляді $f(X)$.

Приклад. Знайти граничну функцію для послідовності функцій двох змінних:

$$\ln(x^2 + y^2), \ln^2(x^2 + y^2), \dots, \ln^n(x^2 + y^2), \dots$$

Розв'язання. Послідовність визначена всюди на площині XOY , крім точки $O(0, 0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^n(x^2 + y^2) = 0, \text{ якщо } -1 < \ln(x^2 + y^2) < 1.$$

Розв'язуючи ці нерівності, знаходимо

$$\frac{1}{e} < x^2 + y^2 < e.$$

При $x^2 + y^2 = e$ маємо $\ln^n e = 1$.

Отже,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для } \frac{1}{e} < x^2 + y^2 < e; \\ 1 & \text{для } x^2 + y^2 = e. \end{cases}$$

Послідовність має область збіжності

$$e^{-1} < x^2 + y^2 \leq e \dots$$

В усіх інших точках послідовність розбігається.

ВПРАВИ. Знайти граничну функцію для послідовностей.

$$1. \{x^n y^n\}. \text{ Відповідь. } f(x, y) = \begin{cases} 0, & |x, y| < 1; \\ 1, & x = 1; y = 1; x = -1; y = -1. \end{cases}$$

$$2. \left\{ \frac{1+x^n}{1+y^n} \right\}. \text{ Відповідь. } f(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, |y| < 1; \\ 1, & x = 1, y = 1; \\ 0, & |x| < 1, |y| > 1 \text{ або } |y| > |x| > 1. \end{cases}$$

1.4. Рівномірна збіжність послідовностей функцій

Дамо означення збіжності послідовності функцій, аналогічне означенню збіжності числової послідовності (див. п. 1.2). Розглянемо послідовність функцій $\{f_n(X)\}$, де $X \in D$, а D є m -вимірною областю. Якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує натуральне число $N(\delta, X)$ таке, що для всіх $n > N(\delta, X)$ і $X \in D_1$ виконується нерівність

$$|f_n(X) - f(X)| < \delta \text{ для } X \in D_1 \subset D, \quad (1.4)$$

то послідовність $\{f_n(X)\}$ називається **збіжною** на D_1 до граничної функції $f(X)$. Якщо існує такий номер N , що залежить лише від δ і не залежить від X , і для всіх $X \in D_1$ і $n > N(\delta)$ виконується нерівність (1.4), то послідовність $\{f_n(X)\}$ називається **рівномірно збіжною** на D_1 .

У символах це можна записати таким чином: $\forall \delta > 0 \exists N(\delta)$ такий, що $\forall f_n(X)$ з $n > N(\delta)$ виконується нерівність

$$|f_n(X) - f(X)| < \delta \text{ для } X \in D_1 \subset D.$$

Роз'яснимо це, міркуючи таким чином. Нехай $X_1 \in D_1$ така, що числова послідовність $\{f_n(X_1)\}$ при $n > N_1(\delta, X_1)$ збігається. Припустимо аналогічно для $X_2 \in D_1$, що $\{f_n(X_2)\}$ збігається при $n > N_2(\delta, X_2)$ і т. д. Нехай із $N_1(\delta, X_1), N_2(\delta, X_2), \dots$ можна вибрати такий номер N , залежний лише від δ і не залежний від X_1 , що всі послідовності виду $\{f_n(X_i)\}$,

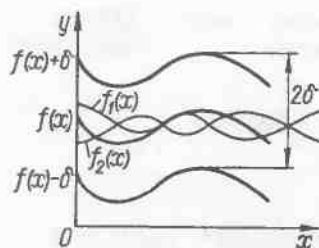


Рис. 3.1

де $X_i \in D_1$, є збіжними. Тоді послідовність $\{f_n(X)\}$ на D_1 збігається рівномірно.

Дамо геометричне тлумачення цього означення. Якщо існує смуга шириною 2δ , в окіл якої незалежно від значень X потрапляє нескінченна множина функцій, а поза нього – лише скінченне число, то послідовність функцій збігається рівномірно (рис. 3.1).

Приклади. 1. Довести, що послідовність $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\} = \sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \dots, \frac{\sin nx}{n}, \dots$ збігається рівномірно на $(-\infty; +\infty)$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$, то послідовність збігається на $(-\infty; +\infty)$. Для доведення рівномірної збіжності зазначимо, що $|\sin nx| \leq 1$ для $(-\infty; +\infty)$. Тоді

$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. Виберемо $\delta > 0$, а за δ знайдемо номер $N(\delta)$, не залежний від x , такий, щоб нерівність $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| < \delta$ виконувалася для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Для цього достатньо

вибрати n таким чином, щоб $\frac{1}{n} < \delta$. Тоді $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \delta$. Тепер $n > \frac{1}{\delta}$. Виберемо N ,

що дорівнює цілій частині $\frac{1}{\delta}$: $N(\delta) = E\left(\frac{1}{\delta}\right)$. Отже, вдалося знайти номер $N(\delta)$, не залежний від x , при якому для всіх $n > N(\delta)$ і $x \in (-\infty; \infty)$ виконується нерівність

$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| < \delta$. А це означає, що $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ на $(-\infty; +\infty)$ збігається рівномірно.

2. Показати, що послідовність $\{x^n\}$, збіжна на $(0; 1)$, збігається нерівномірно.

Розв'язання. Згідно з п. 1.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ для $x \in (0; 1)$.

Нехай дано $\delta > 0$. Знайдемо $n > N(\delta, x)$ таке, щоб $|x^n| < \delta$. Оскільки $x \in (0; 1)$, то

$x^n < \delta$, а $\frac{1}{x^n} > \frac{1}{\delta}$ або $\left(\frac{1}{x}\right)^n > \frac{1}{\delta}$; $n \ln \frac{1}{x} > \ln \frac{1}{\delta}$. Звідси $n > \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{x}}$. Отже, $N(\delta, x) =$

$$= E(\delta, x) = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\delta}}{\ln \frac{1}{x}} \right\rceil \text{ залежить від значення } x \in (0; 1).$$

1.5. Критерій (ознака) Коші рівномірної збіжності послідовності функцій

Теорема. Для того щоб функціональна послідовність $\{f_n(X)\}$ рівномірно збігалась в області D_1 , необхідно і достатньо, щоб за заданим $\delta > 0$ можна було вказати натуральне число $N(\delta)$, яке не залежить від X , таке, щоб при $n > N(\delta)$ і будь-якому цілому $p > 0$ виконувалася нерівність

$$|f_{n+p}(X) - f_n(X)| < \delta \text{ для } X \in D_1. \quad (1.5)$$

Доведення. Наведемо доведення лише необхідності. Отже, послідовність $\{f_n(X)\}$ збігається в D_1 рівномірно. Треба довести нерівність (1.5).

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} f_{n+p}(X) - f_n(X) &= f_{n+p}(X) - f_n(X) + f(X) - f(X) = \\ &= [f_{n+p}(X) - f(X)] + [f(X) - f_n(X)], \end{aligned}$$

причому

$$|f_{n+p}(X) - f_n(X)| < |f_{n+p}(X) - f(X)| + |f(X) - f_n(X)|.$$

Згідно з п. 1.4. для рівномірно збіжної послідовності виконуються умови

$$|f_{n+p}(X) - f(X)| < \frac{\delta}{2} \text{ і } |f(X) - f_n(X)| < \frac{\delta}{2} \text{ для } X \in D_1.$$

Тоді $|f_{n+p}(X) - f_n(X)| < \delta$ для $X \in D_1$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер числову послідовність $\{a_n\} = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Для цієї послідовності умову рівномірної збіжності запишемо у вигляді: $\forall \delta > 0 \exists N(\delta)$ такий номер, що $\forall n > N(\delta)$ і цілого додатного p виконується нерівність $|a_{n+p} - a_n| < \delta$. Отже, будь-яка збіжна числова послідовність збігається рівномірно. Критерій Коші дає змогу встановити рівномірну збіжність послідовності за двома загальними членами: $f_n(X)$ і $f_{n+p}(X)$, не знаючи граничної функції.

ВПРАВИ. 1. Дослідити на збіжність числові послідовності, задані своїми загальними членами, перевірити виконання умови (1.6):

$$a) \left\{ \frac{1}{(n-1)n(n+1)} \right\}; \quad б) \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}; \quad в) \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right\}.$$

Відповідь. а) збігається; б) збігається; в) збігається.

2. Дослідити на рівномірну збіжність функціональні послідовності, задані своїми загальними членами:

$$a) \left\{ \frac{\cos nx}{n} \right\}; \quad б) \left\{ \frac{\sin nx}{n^2} \right\}; \quad в) \left\{ \frac{n}{e^{nx}-1} \right\}; \quad г) \left\{ \cos^{2n} x \right\}; \quad д) \left\{ \frac{1}{x^{2n}+1} \right\}.$$

Відповідь. а) збігається рівномірно для $x \in (-\infty; +\infty)$; б) збігається рівномірно для $x \in (-\infty; +\infty)$; в) збігається для $x \in (0; +\infty)$; г) збігається нерівномірно:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq k\pi; \\ 1, & \text{якщо } x = k\pi, k \in \mathbf{Z}; \end{cases} \quad д) \text{ збігається нерівномірно: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |x| > 1; \\ 1, & \text{якщо } |x| < 1; \\ 1/2, & \text{якщо } |x| = 1. \end{cases}$$

§ 2. ЧИСЛОВІ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ

2.1. Означення ряду. Класифікація рядів

Розглянемо будь-яку послідовність — числову або функціональну — із загальним членом v_n :

$$\{v_n\} = v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

Знак алгебраїчного додавання між членами цієї послідовності дає вираз, що містить нескінченне число доданків і називається рядом:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + v_{n+1} + \dots \quad (2.1)$$

Якщо доданки є числами, то ряд називається **числовим**, а якщо функціями, — то **функціональним**. Загальний член ряду звичайно позначають через v_n, a_n або $f_n(X)$.

Числові і функціональні ряди можуть мати як дійсні, так і комплексні члени.

Числові ряди можуть бути знаковизначеними і знаковизначеними, з додатними членами, знаковизначеними, знакопереміжними, з комплексними членами.

У загальному вигляді будемо користуватися такими записами:
ряд з додатними членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2.2)$$

де $a_n > 0$;

знакопереміжний ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (2.3)$$

де $a_n > 0$;

знакозмінний ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2.4)$$

де a_n — дійсні числа будь-якого знака;

ряд з комплексними числами

$$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) + \dots + (x_n + jy_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + jy_n) \quad (2.5)$$

або

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (2.6)$$

де $z_n = x_n + jy_n$; $x_n = \operatorname{Re} z_n$; $y_n = \operatorname{Im} z_n$; $j = \sqrt{-1}$;

функціональний ряд

$$f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_n(X) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(X), \quad (2.7)$$

де $f_n(X)$ — функція однієї або багатьох змінних.

Функціональні ряди поділяються також на *дійсні* і *комплексно-значні*. Залежно від типу функції функціональні ряди можуть бути

степеневими, тригонометричними і т. д. Якщо для побудови функціонального ряду (2.7) використано функцію

$$f_n(x) = a_n x^n, n = \overline{0, \infty}, \quad (2.8)$$

то дістанемо степеневий ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.9)$$

Якщо твірною функціонального ряду (2.7) є функція

$$f_n(x) = a_n (x - x_0)^n, n = \overline{0, \infty},$$

де x_0 — фіксоване значення x , то дістанемо більш загальний степеневий ряд

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Якщо

$$f_n(x) = a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j, i, j = \overline{0, \infty}, \quad (2.11)$$

де $a_{ij} = \text{const}$, то дістанемо кратний степеневий ряд

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + \\ + a_{20}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Загальний тригонометричний ряд звичайно записують у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + \\ + b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Його дістають із ряду (2.7), якщо його членами будуть тригонометричні функції $\sin nx$ і $\cos nx$.

Комплекснозначні ряди у загальному вигляді записують таким чином:

$$\begin{aligned} [u_1(x) + jv_1(x)] + [u_2(x) + jv_2(x)] + \dots \\ \dots + [u_n(x) + jv_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) + jv_n(x)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

або

$$z_1(x) + z_2(x) + \dots + z_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x), \quad (2.15)$$

де $\text{Re } z_n(x) = u_n(x)$; $\text{Im } z_n(x) = v_n(x)$.

Загальний степеневий ряд з комплексною змінною $z = x + jy$ має вигляд

$$\begin{aligned} b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots + b_n(z - z_0)^n + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \end{aligned} \quad (2.16)$$

де $z_0 = x_0 + jy_0$.

Приклади. 1. Числовий ряд з додатними членами:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

де $v_n = a_n = \frac{1}{n} > 0$.

2. Числовий знакопереміжний ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Загальний член цього ряду $v_n = (-1)^{n-1} a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

3. Знакозмінний числовий ряд:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

4. Числовий ряд з комплексними членами:

$$(1 + j) + \left(2 + \frac{j}{2}\right) + \dots + \left(n + \frac{j}{n}\right) + \dots,$$

де $j = \sqrt{-1}$.

5. Функціональний ряд:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots,$$

загальний член якого $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$.

6. Функціональний тригонометричний ряд:

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots \quad (2.17)$$

7. Степеневий функціональний ряд:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (2.18)$$

Для утворення цього ряду використано функцію

$$f_n(x) = x^n. \quad (2.19)$$

Якщо

$$f_n(x) = (x-1)^n \quad (2.20)$$

— функція, що утворює функціональний ряд, то дістанемо степеневий ряд:

$$1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dots + (x-1)^n + \dots \quad (2.21)$$

8. Функціональний ряд, утворений із функцій двох змінних:

$$\ln(x^2 + y^2) + \ln^2(x^2 + y^2) + \dots + \ln^n(x^2 + y^2) + \dots \quad (2.22)$$

9. Якщо

$$f_n(x, y) = \frac{(x-1)^i (y-2)^j}{1+i+j}, \quad (2.23)$$

то дістанемо кратний степеневий ряд

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(x-1)^i (y-2)^j}{1+i+j}. \quad (2.24)$$

2.2. Визначення збіжності (розбіжності) рядів

Розглянемо довільний ряд (2.1)

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (2.25)$$

Якщо за будь-якою методикою здійснювати додавання членів ряду, то можуть виникати такі випадки: 1) сума дорівнює скінченному числу (для числових рядів); 2) сума є функцією, визначеною в D -області; 3) суми не існують або вона дорівнює нескінченності.

Нагадаємо, що лише для скінченного числа доданків можна стверджувати, що існує сума. Для нескінченного числа доданків, яким є ряд, це не є очевидним. Отже, якщо мають місце випадки 1) і 2), то ряд називається збіжним, а у випадку 3) — розбіжним.

Для того щоб дати стандартне означення збіжності або розбіжності ряду, введемо поняття **частинних (зрізаних) сум**.

Введемо суми:

$$S_1 = v_1;$$

$$S_2 = v_1 + v_2;$$

$$S_3 = v_1 + v_2 + v_3;$$

$$S_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4;$$

.....

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_n.$$

Їх називають частинними (зрізаними). Зазначимо, що для числових рядів

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad (2.26)$$

а для функціональних рядів

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x). \quad (2.27)$$

Побудуємо послідовність зрізаних сум

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \quad (2.28)$$

Якщо послідовність зрізаних сум має скінченну границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

то ряд називається **збіжним**, а S називається його сумою. Якщо ж послідовність (2.28) не має границі або вона дорівнює нескінченності, то ряд називається **розбіжним**.

Для функціональних рядів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = f(x). \quad (2.29)$$

Множина X , для якої існує границя (2.29), називається **областю збіжності функціонального ряду**, а множина X , для якої границі (2.29) не існує або вона дорівнює нескінченності, називається **областю розбіжності функціонального ряду**. Зазначимо, що функція $f(x)$ є граничною для послідовності $\{S_n(x)\}$ і сумою для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \text{ тобто}$$

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = f(x). \quad (2.30)$$

Рівність (2.30) можна тлумачити як зображення функції у вигляді ряду, що складається з функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$. Про рівність (2.30) кажуть, що **функція $f(x)$ розвинена в ряд за функціями $f_i(x), i = \overline{1, \infty}$** .

У зв'язку з цим доречно згадати вже відоме зображення функції за формулою Тейлора (див. ч. 1, гл. 4, § 26):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (2.31)$$

де $R_n(x)$ — залишковий член формули Тейлора. Якщо позначити кожний доданок праворуч в (2.31) відповідно через

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), R_n(x),$$

то дістанемо

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + R_n(x) \quad (2.32)$$

— розвинення функції $f(x)$ за функціями $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), R_n(x)$, але із скінченним числом членів.

2.3. Залишок ряду. Теорема про залишок

Нагадаємо, що

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \quad (2.33)$$

— залишковий член ряду, де $T_n(x)$ — многочлен Тейлора.

Введемо аналог $R_n(x)$ для рядів. Нехай ряд збігається, тоді для рядів існують S_n і S . Різниця $S - S_n = R_n$ називається залишком ряду. Поняття залишку ряду можна ввести для будь-яких (не обов'язково збіжних) рядів.

Нехай маємо ряд (2.1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \dots$$

Введемо позначення:

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = S_n;$$

$$v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+m} + \dots = R_n.$$

Тут R_n — залишок ряду. Таким чином, у загальному випадку **залишок ряду** називається ряд без його n перших членів. Для функціонального ряду його залишок є функцією від X .

Справедливою є така необхідна і достатня умова збіжності ряду: для того, щоб функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ збігався до $f(X)$ у деякій D -області, необхідно і достатньо, щоб у цій області D

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(X) = 0 \text{ для } X \in D. \quad (2.34)$$

Доведення є очевидним, тому його не наводимо.

Приклад. Дано ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Знайти суму його перших n членів; скориставшись означенням, довести збіжність ряду, знайти його суму.

Розв'язання. Розкладемо загальний член ряду на елементарні дроби

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді заданий ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Звідси

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Отже, ряд збігається і його сума $S = 1$.

ВПРАВИ. Знайти S_n і S рядів.

1. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$. *Відповідь.* $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$;

$$S = \frac{1}{2}.$$

2. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots$. *Відповідь.* $S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+3} \right)$; $S = \frac{11}{18}$.

3. $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots$. *Відповідь.* $S_n = \frac{1}{6} \left(\frac{23}{15} - \frac{1}{2n+5} \right)$;

$$S = \frac{23}{90}.$$

2.4. Геометричний ряд. Степеневий ряд і його збіжність. Радіус збіжності степеневого ряду

Розглянемо геометричну прогресію $\{a_0 q^n\}$ з нескінченним числом членів, першим членом $a_0 \neq 0$ і знаменником q . З'єднаємо члени цієї послідовності знаком алгебраїчного додавання:

$$a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + a_0 q^3 + \dots + a_0 q^n + \dots \quad (2.35)$$

У результаті дістанемо ряд, який називається **геометричним (рядом геометричної прогресії)**.

Дослідимо на збіжність ряд (2.35). Для цього побудуємо зрізану суму

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (2.36)$$

Знайдемо границю зрізаної суми

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_0}{1 - q} = S, \text{ якщо } |q| < 1. \quad (2.37)$$

Отже, ряд (2.35) при $|q| < 1$ збігається. Якщо $|q| > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q} \right) = \frac{a_0}{1 - q} - \frac{a_0}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \infty, \quad (2.38)$$

тобто ряд (2.35) розбігається.

Нехай $q = 1$. Тоді ряд (2.35) має вигляд $a_0 + a_0 + \dots + a_0 + \dots$.

$$S_n = na_0; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_0 \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty. \quad (2.39)$$

Отже, ряд (2.35) розбігається.

Нехай $q = -1$. Тоді ряд (2.35) має вигляд $a_0 - a_0 + a_0 - a_0 + \dots$, а $S_{2n} = 0; S_{2n-1} = a_0; \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = a_0$.

Отже, послідовність S_n не має границі і ряд при $q = -1$ розбігається.

Сформулюємо теорему.

Теорема. Геометричний ряд збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (2.40)$$



Рис. 3.2

Це геометричний ряд з $a_0 = 1$ і знаменником $q = x$. Тоді (2.40) збігається для $|x| < 1$ і розбігається для $|x| \geq 1$. Це можна довести геометрично (рис. 3.2).

Областю збіжності ряду є інтервал, симетричний відносно точки O . Половина довжини цього інтервалу називається **радіусом збіжності**

ряду. Щоб дати пояснення цієї назви, розглянемо ряд, аналогічний ряду (2.40), але з комплексною змінною:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, \quad (2.41)$$

для якого $a_0 = 1, q = x + jy$.

Ряд (2.41) збігається для $|z| < 1$ або $|x + jy| < 1$, але $|x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$, або $x^2 + y^2 < 1$. Це відкритий круг радіуса $R = 1$ (рис. 3.3). Звідси випливає і назва "**радіус збіжності**", або "**круг збіжності**".



Рис. 3.3

Розглянемо степеневий ряд (2.16) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, де $z = x + jy$,

$z_0 = x_0 + jy_0$, і порівняємо його з рядом геометричної прогресії (2.35)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n.$$

Ці ряди збігаються, якщо $b_n = a_0$ для будь-якого n , а $q = (z - z_0)$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 (z - z_0)^n$$

збігатиметься у крузі $|z - z_0| < 1$, або $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1$ і розбігатиметься при $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq 1$.

Для будь-якого степеневого ряду, наприклад виду (2.16), можна вказати таке дійсне число R ($0 \leq R < +\infty$), що ряд буде збіжним при $|z - z_0| < R$, і розбіжним при $|z - z_0| > R$. Число R називається **радіусом збіжності** степеневого ряду. Ряд (2.41) збігається при $|z| < 1$ і розбігається при $|z| > 1$. Означення має силу і для кратних степеневих рядів.

Вкажемо функції, до яких збігаються ряди (2.41) і (2.40). За формулою (2.37)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-x};$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad (2.42)$$

причому ця рівність має місце лише для $|x| < 1$. Для $|x| \geq 1$ ряд, що міститься праворуч в (2.42), розбігається і рівність (2.42) не має смислу. Якщо в (2.35) покласти $a_0 = 1, q = -x, q = x^2, q = -x^2$, то

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots; \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots; \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad (2.45)$$

причому ці рівності справедливі лише для $|x| < 1$. Для ряду (2.41), міркуючи аналогічно, маємо

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1. \quad (2.46)$$

Можна побудувати ряди, аналогічні (2.43)–(2.45), але вже з комплексною змінною. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots \quad (2.47)$$

Це геометричний ряд із знаменником $q = \frac{1}{x}$. За формулою (2.37)

він збігається, якщо $\left| \frac{1}{x} \right| < 1$, тобто $|x| > 1$, до функції $\frac{x}{x-1}$, яку

дістаємо з (2.37) при $a_0 = 1$ і $q = \frac{1}{x}$. Область збіжності складається

з двох інтервалів: $(-\infty; -1)$ і $(+1; +\infty)$ або $(-\infty; -1) \cup (+1; +\infty)$. За-

значимо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ не є степеневим.

Аналогічні твердження справедливі для рядів $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{1-z}$,

причому рівність справедлива для $|z| > 1$, тобто ряд збігається поза кругом радіуса $R = 1$ з центром у початку координат

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \frac{z-z_0}{1-(z-z_0)}, \quad \text{де } |z-z_0| > 1, \quad (2.48)$$

тобто ряд збігається поза кругом радіуса $R = 1$ з центром у точці z_0 .

Приклади. 1. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Розв'язання. За формулою (2.42) маємо

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

2. Обчислити суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|}{2^n}$.

Розв'язання. За формулою $S = \frac{a_0}{1-q}$ маємо $a_0 = |x|, q = \frac{1}{2}$, а

$$S = \frac{|x|}{1-\frac{1}{2}} = 2|x|.$$

Ця сума скінченна, якщо $|x| < \infty$.

ВПРАВИ. 1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду і його суму:

а) $10x + 100x^2 + \dots + 10^n x^n + \dots$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j\sqrt{3})^n}{2^{2n}} z^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$.

Відповідь. а) $R = \frac{1}{10}; S = \frac{10x}{1-10x}$; б) $R = 2; S = \frac{1}{1-\frac{1+j\sqrt{3}}{4}z}$; в) $R = 2;$

$$S = \frac{x}{8-x^3}.$$

2. Безпосереднім діленням за зростаючими степенями x дістати розвинення функції в геометричний ряд і знайти його область збіжності:

а) $\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots$; б) $\frac{1}{a-bx} = \frac{1}{a} + \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} + \dots + \frac{b^n x^n}{a^{n+1}} + \dots$;

в) $\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} + \dots$.

Відповідь. а) $|x| < \frac{1}{3}$; б) $|x| < \frac{a}{b}$; в) $|x| < \frac{a}{b}$.

Примітка. Щоб знайти розв'язок у прикладі а), треба виконати ділення кутом:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \frac{1-3x}{3x} \left| \frac{1-3x}{1+3x+9x^2+\dots} \right. \\ - \frac{3x-9x^2}{9x^2} \\ - \frac{9x^2-27x^3}{\dots} \end{array}$$

2.5. Загальні властивості рядів

Теорема 1 (про множення ряду). Якщо члени збіжного в D функціонального ряду помножити на обмежену в D функцію, то утворений ряд збігається в D . Нехай дано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X) \text{ і } |\Psi(X)| < M; 0 < M < +\infty. \quad (2.49)$$

Ряд (2.7) або (2.49) збігається в D :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(X) = f(X). \quad (2.50)$$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)\Psi(X) \quad (2.51)$$

також збігається в D .

Доведення. Складемо зрізану суму ряду (2.51):

$$\sigma_n(X) = \Psi(X) S_n(X), \text{ де } S_n(X) = \sum_{i=1}^n f_i(X).$$

Знайдемо границю $\sigma_n(X)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(X) S_n(X)] = \Psi(X) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(X) = \Psi(X) f(X). \quad (2.52)$$

Звідси випливає, що ряд (2.51) збігається.

Наслідок. Теорема має місце і для числового ряду. Якщо члени збіжного числового ряду помножити на число, то утворений ряд буде також збіжним.

Теорема 2 (про додавання рядів). Якщо два функціональних ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X) \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(X)$$

збігаються в D , то в D збігаються й ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f_n(X) \pm \Psi_n(X)].$$

Доведення не наводимо.

Наслідок. Теорема має місце і для числових рядів.

Теорема 3 (про відкидання скінченного числа членів ряду). Відкидання скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність.

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Позначимо $v_1 + v_2 + \dots + v_k$ через c . Тоді $S_n = c + \sigma_{n-k}$, де $\sigma_{n-k} = v_{k+1} + v_{k+2} + \dots + v_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$; $S = c + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}$,

тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = S - c = d$. Отже, ряд збігається. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

розбігається, то ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} v_n$ також розбігається.

2.6. Необхідна умова збіжності рядів

Теорема. Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$ збігається в D ,

то в цій області границя загального члена дорівнює нулю.

Ця теорема називається необхідною умовою збіжності ряду. Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X) \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(X) = f(X), X \in D. \quad (2.53)$$

Треба довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) = 0, X \in D. \quad (2.54)$$

Доведення.

$$S_{n-1}(X) = f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_{n-1}(X); \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}(X) = f(X);$$

$$S_n(X) = f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_{n-1}(X) + f_n(X);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(X) = f(X); f_n(X) = S_n(X) - S_{n-1}(X); X \in D.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(X) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}(X) = f(X) - f(X) = 0; X \in D. \quad (2.55)$$

Наслідок 1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) \neq 0$ для $X \in D$, то ряд (2.7) в D розбіжний.

Дійсно, у цьому випадку границі $S_n(X)$ і $S_{n-1}(X)$ мають бути різними, що вказує на відсутність спільної границі зрізаних сум.

Наслідок 2. Для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необхідна умова збіжності має вигляд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (2.56)$$

Приклади. 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$.

Розв'язання. Це числовий ряд. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності (2.56). Для цього запишемо загальний член ряду $a_n = \frac{n}{100n+1}$ і знайдемо його границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{100 + 1/n} = \frac{1}{100}. \quad \text{Оскільки}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то за наслідком 1 ряд розбіжний.

2. Розглянемо ряд (2.40) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, який збігається для $|x| < 1$, тобто для $x \in (-1; 1)$. Загальний член ряду $f_n(X) = x^n$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ для $x \in (-1; 1)$. Для $|x| > 1$ ряд розбігається і $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ дорівнює нескінченності.

ВПРАВИ. Дослідити ряди на збіжність.

1. $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Відповідь. Розбігається.

2. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$. Відповідь. Розбігається.

3. $x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots + (x^n)^n + \dots$. Відповідь. Збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| > 1$.

2.7. Гармонічний ряд і його розбіжність

Гармонічним називається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (2.57)$$

Для цього ряду границя загального члена дорівнює нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Проте ряд, як буде показано нижче, розбігається. Звідси випливає, що умова (2.56) є лише необхідною, тобто при її виконанні ряд може і збігатися, і розбігатися.

Переходимо до доведення розбіжності ряду (2.57).

Як відомо (див. ч. 1, гл. 3, п. 2.12.3), $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Звідси

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e; \quad n \ln \frac{n+1}{n} < 1; \quad \frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n},$$

тобто

$$\begin{aligned} 1 &> \ln 2; \\ \frac{1}{2} &> \ln 3 - \ln 2; \\ \frac{1}{3} &> \ln 4 - \ln 3; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{n} &> \ln(n+1) - \ln n. \end{aligned}$$

Якщо додати ці нерівності, здобудемо

$$S_n > \ln(n+1).$$

Проте $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, тобто ряд розбігається.

2.8. Рівномірна збіжність рядів

Якщо послідовність зрізаних сум ряду є рівномірно збіжною, то ряд називається **рівномірно збіжним**.

Функціональний ряд рівномірно збігається у тій області, де послідовність зрізаних сум рівномірно збігається. Використовуючи критерій Коші про рівномірну збіжність послідовності $\{S_n(X)\}$ для функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$, можна сформулювати **критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду**: для того щоб функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$ був рівномірно збіжним в області D ,

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\delta > 0$ можна було вказати незалежне від $X \in D$ натуральне число $N(\delta)$ таке, що для $n > N(\delta)$ і будь-якого додатного цілого $p > 0$ виконувалася нерівність

$$|f_{n+1}(X) + f_{n+2}(X) + \dots + f_{n+p}(X)| < \delta \text{ для } X \in D. \quad (2.58)$$

Дійсно, припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$ збігається в D рівномірно, тобто $\forall \delta > 0 \exists N(\delta) > 0$ таке, що для $\forall n > N(\delta)$ і $p > 0$ виконується нерівність

$$|S_{n+p}(X) - S_n(X)| < \delta, \quad X \in D, \quad (2.59)$$

але

$$S_{n+p}(X) = f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_n(X) + f_{n+1}(X) + \dots + f_{n+p}(X);$$

$$S_n(X) = f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_n(X).$$

тоді

$$S_{n+p}(X) - S_n(X) = f_{n+1}(X) + f_{n+2}(X) + \dots + f_{n+p}(X).$$

Із нерівності (2.59) випливає нерівність (2.58).

Звернемо увагу на таку обставину. Якщо будь-яка послідовність $\Psi_1(X), \Psi_2(X), \dots, \Psi_n(X), \dots$ збігається навіть рівномірно, то з цього зовсім не обов'язково має впливати, що утворений із цієї послідовності ряд буде збігатися рівномірно. Послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ збігається

рівномірно, проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Наприклад, послідовність

$\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ збігається всюди на осі рівномірно. Складемо ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots$$

Оскільки $|\sin nx| \leq 1$, то $\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. Тоді

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Ряд праворуч у нерівності є гармонічним. Отже, зовсім не зрозуміло, чи взагалі збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. Припустимо, що вказаний ряд збігається. Доведемо, що ця збіжність не є рівномірною.

Запишемо умову (2.58) для заданого ряду:

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{n+p}\right| < \delta$$

для $x \in (-\infty; +\infty)$. Якщо в цій умові покласти $p = n$ і всі вирази з $(n+1), (n+2), \dots$ замінити на $n+p$, то дістанемо

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{n+p}\right| >$$

$$> \left|\frac{\sin 2nx}{2n} + \frac{\sin 2nx}{2n} + \dots + \frac{\sin 2nx}{2n}\right| = \frac{n}{2n} |\sin 2nx| = \frac{1}{2} |\sin 2nx|.$$

Останній вираз показує, що умова (2.58) не виконується.

Значимо, що вираз

$$f_{n+1}(X) + f_{n+2}(X) + \dots + f_{n+p}(X)$$

іноді називають **зрізаним залишком ряду**. Критерій Коші дає змогу за зрізаним залишком (2.58) встановити рівномірну збіжність ряду. При цьому сума ряду може бути і невідомою. Вкажемо також на те, що коли числовий ряд збігається, то він збігається рівномірно.

ВПРАВИ. Використовуючи критерій Коші, дослідити на рівномірну збіжність ряди із загальним членом.

1. $f_n(x) = x^n$ для $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Відповідь. Рівномірна.
2. $f_n(x) = x^n$ для $0 \leq x \leq 1$. Відповідь. Нерівномірна.
3. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ для $0 < x < +\infty$. Відповідь. Рівномірна.

2.9. Абсолютно і умовно збіжні ряди

Теорема. Якщо ряд, утворений із абсолютних величин членів даного ряду, збігається, то цей ряд також збігається.

Доведення. Розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (2.60)$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|. \quad (2.61)$$

За умовою ряд (2.61) збігається, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = \sigma$. Зрізані суми n перших членів рядів (2.60) і (2.61) позначимо через S_n і σ_n . Серед v_n є додатні і від'ємні. Позначимо суму скінченного числа додатних v_n , що входять до S_n через S_n^+ , а суму модулів від'ємних — S_n^- . Тоді зрізані суми рядів (2.60) і (2.61) запишемо таким чином:

$$S_n = S_n^+ - S_n^-; \sigma_n = S_n^+ + S_n^-. \quad (2.62)$$

Границя σ_n існує і дорівнює σ , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. Тоді з (2.62) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ = S^+$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^- = S^-$, а також існує границя різниці $S_n^+ - S_n^-$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^+ - S_n^-) = S^+ - S^-$. Отже, існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^+ - S_n^-) = S^+ - S^-.$$

Теорему доведено.

Наприклад, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ збігається, оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається як ряд геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{1}{2}$. У зв'язку з цим вводять таке означення: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд, складений із абсолютних величин членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$, збігається.

Наприклад, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ для $x \in (-1; +1)$ є абсолютно збіжним, тобто ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ збігається на тому самому інтервалі $x \in (-1; +1)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ називається **умовно збіжним**, якщо ряд, складений із абсолютних величин ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$, розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ може збігатися лише умовно, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, складений із модулів даного ряду, розбігається.

Коли йдеться про абсолютну збіжність, то завжди доводиться говорити про збіжність рядів з додатними членами. У зв'язку з цим дуже важливо розглянути умови збіжності рядів з додатними членами.

2.10. Лема про збіжність рядів з невід'ємними членами

Розглянемо ряд з невід'ємними членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

Складемо зрізані суми

$$S_0 = a_0; S_1 = a_0 + a_1; \dots; S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n; \dots$$

Послідовність $\{S_n\}$ зрізаних сум монотонна $S_{n-1} \leq S_n$ і обмежена знизу $a_0 \leq S_n$. Припустимо, що S_n обмежена зверху числом a . Тоді послідовність $\{S_n\}$ за відомою теоремою про границю обмеженої і монотонної послідовності має границю. На цій підставі можна сформулювати лему.

Лема. Якщо послідовність зрізаних сум $\{S_n\}$ ряду з невід'ємними членами обмежена зверху, то ряд збігається.

Якщо як ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ розглядати ряд з модулів $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(X)|$ ряду $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$, то лема також має місце з посиланням на область D , в якій послідовність зрізаних сум

$$\left\{ S_n(X) = \sum_{k=0}^n |f_k(X)| \right\}$$

обмежена, а функції $f_n(X)$ неперервні. При цьому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ буде збігатися в D -області абсолютно.

Наслідок. Якщо існує D -область, в якій послідовність зрізаних сум $\{S_n(X)\}$, складена з модулів членів даного ряду, обмежена зверху, то даний функціональний ряд збігається абсолютно в D -області. При цьому функції, що входять до ряду, мають бути неперервними в D -області. Наприклад, ряд $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ збігається для $|x| < 1$ абсолютно, оскільки ряд $1 + |x| + |x|^2 + \dots + |x|^n + \dots$ збігається для $|x| < 1$. Тут D -областю є $(-1; +1)$.

2.11. Ознаки порівняння. Ознака Вейєрштрасса

Дано два ряди з невід'ємними функціями $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(X)$ і $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(X)$, для яких виконується умова $u_n(X) \leq v_n(X)$ у деякій D -області змінної X .

Перша ознака порівняння рядів з додатними членами: якщо існує D -область змінної X , в якій загальні члени рядів $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(X)$ і

$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(X)$ пов'язані співвідношенням $u_n(X) \leq v_n(X)$, то: 1) із збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(X)$ до неперервної у замкненій і обмеженій в D -області

функції $v(X)$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(X)$ в D -області; 2) із

розбіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(X)$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(X)$.

Доведемо, наприклад, п. 1). Для цього утворимо зрізані суми

$$\begin{aligned} S_n^u(X) &= u_0(X) + u_1(X) + \dots + u_n(X); \\ S_n^v(X) &= v_0(X) + v_1(X) + \dots + v_n(X). \end{aligned}$$

За умовою $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v(X) = v(X)$, де $X \in D$, а в силу неперервності

$v(X) < M$ для $X \in D$, де $M > 0$ і $S_n^v(X) < M$. За умовою

$u_n(X) \leq v_n(X)$ маємо $S_n^u(X) \leq S_n^v(X) < M$, що і вказує на збіжність

ряду $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(X)$.

Розглянемо тепер два функціональних ряди $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ і $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(X)$ з

неперервними функціями $f_n(X)$ і $\varphi_n(X)$ та відповідні ряди $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(X)|$ і

$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(X)|$. Для довільних функціональних рядів ознаку порівняння

можна сформулювати так: якщо існує D -область змінної X , в якій неперервні функції $f_n(X)$ і $\varphi_n(X)$, $n = 1, 2, \dots$, задовольняють умову

$$|f_n(X)| \leq |\varphi_n(X)|, \quad X \in D, \quad (2.63)$$

то: 1) із абсолютної збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(X)$ на D випливає

абсолютна збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$; 2) із абсолютної розбіж-

ності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ на D впливає абсолютна розбіжність

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(X).$$

Порівняємо тепер функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ з числовим рядом

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами. Нехай існує D -область, в якій

$$|f_n(X)| \leq a_n, X \in D. \quad (2.64)$$

Тоді зі збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ впливає абсолютна збіжність ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$. Доведемо, що в цьому випадку ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ збігається

ще й рівномірно. Дійсно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається рівномірно як числовий ряд з додатними числами. Тоді за критерієм Коші $\forall \delta > 0 \exists N(\delta) \text{ і } \forall p > 0, \forall n > N(\delta)$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \delta.$$

Звідси за (2.64)

$$|f_{n+1}(X) + f_{n+2}(X) + \dots + f_{n+p}(X)| < \delta \text{ для } X \in D, \quad (2.65)$$

що й означає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ збігається рівномірно. Доведене твердження називається **ознакою Вейерштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів**.

Якщо для ряду (2.7) з неперервними функціями $f_n(X)$ можна вказати збіжний числовий ряд з такими

додатними членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, що існує така D -область, в якій

$$|f_n(X)| < a_n, X \in D,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ збігається в D не тільки абсолютно, але й рівномірно.

Якщо для функціонального ряду можна встановити його рівномірну збіжність за ознакою Вейерштрасса, то ряд називається **правильно збіжним** в області збіжності. Очевидним є наступне твердження: будь-який правильно збіжний ряд збігається рівномірно. Проте не будь-який рівномірно збіжний ряд є правильно збіжним.

Приклад. Встановити збіжність функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Розв'язання. Для порівняння візьmemo ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Цей ряд збігається як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$. Оскільки

$\frac{|\sin nx|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ для $x \in (-\infty; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ збігається абсолютно і правильно

для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Друга ознака порівняння: якщо для рядів

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(X)$ і $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(X)$ у деякій D -області зміни змінної існує відмінна

від нуля границя відношення загальних членів $u_n(X)$ і $v_n(X)$, то характер їх збіжності однаковий. Цю ознаку порівняння приймаємо без доведення.

Наслідок. Ознаки порівняння мають силу і для числових рядів.

Приклад. Використовуючи ознаки порівняння, встановити збіжність ряду

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots \quad (2.66)$$

Розв'язання. Розглянемо ряд

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \dots + \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

Легко помітити, що $\sin \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2^n}$. Але ряд із загальним членом $\frac{\pi}{2^n}$ є збіжним як ряд геометричної прогресії, а тому й ряд (2.66) збігається.

Розглянемо функціональний ряд, аналогічний (2.66):

$$\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} + \dots + \sin \frac{x}{2^n} + \dots \quad (2.67)$$

Знайдемо умову його збіжності. Складемо ряд із абсолютних величин ряду (2.67):

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| + \left| \sin \frac{x}{4} \right| + \dots + \left| \sin \frac{x}{2^n} \right| + \dots \quad (2.68)$$

Тепер побудуємо ряд

$$\frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2^2} + \dots + \frac{|x|}{2^n} + \dots \quad (2.69)$$

Для рядів (2.68) і (2.69) виконується умова

$$\left| \sin \frac{x}{2^n} \right| \leq \frac{|x|}{2^n}$$

Ряд (2.69) збігається для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$ як ряд геометричної прогресії з $q = \frac{1}{2}$.

Отже, й ряд (2.68) збігається правильно для $|x| < \infty$.

ВПРАВИ. Використовуючи ознаки порівняння, встановити збіжність ряду.

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots$ *Відповідь.* Збігається.
- $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots$ *Відповідь.* Збігається для $|x| < 2$.
- $\frac{\cos x}{10} + \frac{\cos 2x}{10^2} + \dots + \frac{\cos nx}{10^n} + \dots$ *Відповідь.* Збігається всюди.

2.12. Ознака Д'Аламбера

Сформулюємо ознаку Д'Аламбера для числового ряду з додатними членами:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_n > 0.$$

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, то

при $\rho < 1$ ряд збігається;

при $\rho > 1$ ряд розбігається;

при $\rho = 1$ ряд може збігатися або розбігатися.

Доведення. За означенням границі $\forall \delta > 0 \exists N(\delta)$ такий, що $\forall n > N(\delta)$ виконується нерівність

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \delta \quad \text{або} \quad \rho - \delta < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \delta.$$

Виберемо N таким чином, щоб для $n > N$ виконувалося співвідношення $\rho + \delta = q < 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{a_{N+1}}{a_N} &< q; \\ a_{N+1} &< qa_N; \\ a_{N+2} &< qa_{N+1} < q^2 a_N; \\ a_{N+3} &< q^3 a_N; \\ &\dots; \\ a_{N+\mu} &< q^\mu a_N; \\ &\dots \end{aligned}$$

Ряд $a_N q + a_N q^2 + \dots + a_N q^\mu + \dots$ збігається, оскільки знаменник прогресії $q < 1$. Тоді за першою ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається.

Для $q > 1$ доведення аналогічне, треба лише розглянути

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho - \delta = q.$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Отже, ряд збігається.

ВПРАВИ. Дослідити на збіжність ряди

- $\frac{1}{e} + \frac{2^3}{e^2} + \frac{3^3}{e^3} + \dots + \frac{n^3}{e^n} + \dots$ *Відповідь.* Збігається.
- $\frac{2}{2} + \frac{2^2}{2 \cdot 3} + \frac{2^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2^n}{n(n+1)} + \dots$ *Відповідь.* Розбігається.
- $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} + \frac{2 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{n(n+1)}{2^n \cdot n!} + \dots$ *Відповідь.* Збігається.

2.13. Використання ознаки Д'Аламбера для визначення абсолютної збіжності довільних рядів

Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де a_n має числові значення будь-якого знака. Тоді можна побудувати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, в якому $|a_n| > 0$, і застосувати ознаку Д'Аламбера до цього ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$. Якщо $\rho < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно.

Розглянемо тепер функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$. Утворимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(X)|$, до якого можна застосувати ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(X)|}{|f_n(X)|} = \rho(X).$$

Нехай існує D -область, де $\rho(X) < 1$. Це і є область збіжності функціонального ряду. В цій області ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$ збігається абсолютно. Якщо $\rho(X) > 1$ для $X \in D_1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(X)$ розбігається на D_1 .

ВПРАВИ. Дослідити характер збіжності функціонального ряду

- $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$. *Відповідь.* Збігається для $|x| < 1$ (нерівномірно).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$. *Відповідь.* Збігається для $|x| \leq 1$ (рівномірно).
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$. *Відповідь.* Збігається для $0 < x < +\infty$ (скористатися ознакою порівняння).

2.14. Визначення радіуса збіжності степеневого ряду за допомогою ознаки Д'Аламбера

Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Утворимо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| |x^n|$.

Для визначення області збіжності останнього ряду скористаємося

ознакою Д'Аламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}| |x^{n+1}|}{|b_n| |x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$.

Введемо позначення $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = L$. Якщо

$$|x|L < 1 \text{ або } |x| < \frac{1}{L}; -\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}, \quad (2.70)$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ збігається абсолютно.

Для $|x|L > 1$ або $|x| < \frac{1}{L}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ розбігається. Радіус збіжності заданого ряду

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}. \quad (2.71)$$

Приклад. Знайти радіус збіжності ряду $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Розв'язання. Побудуємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$; $b_n = \frac{1}{n!}$; $b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Радіус збіжності ряду $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$. Отже, заданий ряд збігається абсолютно для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Зауваження. Викладене має місце і для рядів вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$. Для останнього ряду вираз (2.70) має вигляд $-\frac{1}{L} < x - x_0 < \frac{1}{L}$; $x_0 - \frac{1}{L} < x < x_0 + \frac{1}{L}$;

$-\frac{1}{L} < |z - z_0| < \frac{1}{L}$, де $\frac{1}{L} = R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}$.

ВПРАВИ. Дослідити характер збіжності рядів.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Відповідь.* Збігається скрізь.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-j)^n}{n \cdot 2^n}$. *Відповідь.* Збігається у крузі $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 4$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. *Відповідь.* Збігається скрізь.

2.15. Ознака Коші з коренем і її застосування

Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ з додатними членами $a_n > 0$.

Ознака Коші: якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд збігається, при $\rho > 1$ — розбігається, а при $\rho = 1$ визначити збіжність ряду по ознаці неможливо.

Доведення цієї ознаки аналогічне доведенню ознаки Д'Аламбера.

Ознака Коші з коренем застосовується для визначення абсолютної збіжності рядів у декількох випадках.

1. Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, де a_n набуває числових значень будь-якого знака. Побудуємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Застосовуючи до нього ознаку Коші, маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$. Тоді при $\rho < 1$ ряд збігається абсолютно, а при $\rho > 1$ — розбігається.

2. Розглянемо функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(X)|$. Застосовуючи до останнього ряду ознаку Коші, дістанемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(X)|} = |\rho(X)|$. Тоді для $|\rho(X)| < 1$, $X \in D$, заданий ряд збігається абсолютно, для $|\rho(X)| > 1$, $X \in D_1$, ряд розбігається.

3. Розглянемо степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ і $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| |x^n|$. Застосовуючи до останнього ряду ознаку Коші, дістанемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n| |x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = |x|L$, де $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$. Тоді, якщо $|x|L < 1$, або $|x| < \frac{1}{L}$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ збігається абсолютно.

При $|x|L > 1$ або $|x| > \frac{1}{L}$ ряд розбіжний. Отже, за радіус збіжності степеневого ряду можна взяти

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}. \quad (2.72)$$

Зауваження. Викладене виконується і для рядів $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$.

Приклади. Знайти радіус збіжності ряду.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

Розв'язання.

$$b_n = \frac{1}{n^n}; L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; R = \frac{1}{L} = \infty.$$

Ряд збігається всюди.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(2j + \frac{1}{n}\right)^n z^{2n}.$$

Розв'язання. Скористаємося умовою збіжності функціонального ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|2j + \frac{1}{n}\right|^n |z|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|2j + \frac{1}{n}\right| |z|^2 = |z|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} = 2|z|^2;$$

$$2|z|^2 < 1; |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}; R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ВПРАВИ. Дослідити характер збіжності ряду.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+j)^n z^n}{(n+1)(n+2)}. \text{ Відповідь. Збігається при } |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n. \text{ Відповідь. Збігається, } R = \frac{1}{2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x. \text{ Відповідь. Збігається при } |\sin x| < 1.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2n}. \text{ Відповідь. Збігається при } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}-1}.$$

2.16. Інтегральна ознака Коші збіжності рядів

Розглянемо числовий ряд з додатними членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$.

Теорема. Нехай члени ряду задовольняють такі умови:

1) утворюють монотонну незростаючу послідовність

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots;$$

2) можна побудувати монотонну незростаючу функцію $y = \varphi(x)$ таку, що $\varphi(0) = a_0$; $\varphi(1) = a_1$; ...; $\varphi(n) = a_n$; ...;

3) інтеграл

$$\int_1^{\infty} \varphi(x) dx \quad (2.73)$$

збігається, тоді заданий ряд також збігається. Якщо інтеграл (2.73) розбігається, то й ряд розбігається.

Доведення. Складемо зрізану суму $S_{n-1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$; $S_n = S_{n-1} + a_n$. Оскільки $a_i = \varphi(i) \cdot 1$, то

$$\begin{aligned} S_n &= \varphi(0) \cdot 1 + \varphi(1) \cdot 1 + \varphi(2) \cdot 1 + \dots + \varphi(n-1) \cdot 1 + \varphi(n) \cdot 1, \\ S_{n-1} &= \varphi(0) \cdot 1 + \varphi(1) \cdot 1 + \varphi(2) \cdot 1 + \dots + \varphi(n-1) \cdot 1. \end{aligned} \quad (2.74)$$

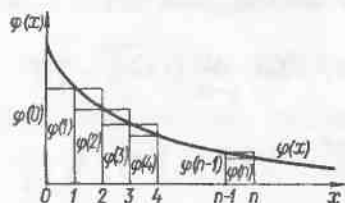


Рис. 3.4

Кожний доданок зрізаної суми (2.74) є площею прямокутника з основою, що дорівнює одиниці, і висотою, що дорівнює $\varphi(i)$ (рис. 3.4). Додавання до зрізаної суми нового члена ряду означає додавання нової площі, тому $S_{n-1} \leq S_n$, тобто послідовність зрізаних сум неспадна.

Розглянемо суму $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n - a_0$.

Кожний доданок цієї суми є площею прямокутника з основою, що дорівнює одиниці, і з меншою висотою. Тоді сума $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n - a_0$ є сумою площ прямокутників, розміщених під кривою $\varphi(x)$.

Розглянемо інтеграл

$$\int_1^n \varphi(x) dx = I_n.$$

З геометричної точки зору цей інтеграл є площею, обмеженою кривою $\varphi(x)$ при $0 \leq x \leq n$ і віссю Ox . Тоді відповідно до рис. 3.4 маємо

$$S_n - a_0 \leq I_n \leq S_n - a_n. \quad (2.75)$$

Звідси $S_n \leq I_n + a_0$, але згідно з (2.73) існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \varphi(x) dx = I,$$

тоді $S_n \leq I + a_0$. Отже, послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху, тому має границю, тобто ряд збігається.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$, то, виходячи з (2.75), маємо $S_n > I_n + a_n$.

Отже, ряд розбігається.

Доведена теорема називається **інтегральною ознакою Коші збіжності рядів**. Зазначимо, що ознака сформульована і доведена лише для числових рядів з додатними членами.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд Діріхле або узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1. \quad (2.76)$$

Розв'язання. Перепишемо ряд у формі $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$, $p > 1$.

Члени ряду утворюють монотонну послідовність $1 > \frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p} > \dots > \frac{1}{n^p} > \dots$

Отже, функцією $\varphi(x)$ буде $\frac{1}{x^p}$: $\varphi(x) = \frac{1}{x^p}$. Розглянемо інтеграли $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ і $\int_1^N \frac{dx}{x^p}$:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \int_1^N x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^N = \frac{N^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1};$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-p+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{при } p > 1; \\ \infty & \text{при } p < 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} 0 & \text{при } p > 1; \\ \infty & \text{при } p < 1. \end{cases}$$

Якщо $p = 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, розбіжність якого доведено в п. 2.7.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

ВПРАВИ. Дослідити на збіжність такі ряди.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} \quad 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$$

Відповідь. 1. Збігається. 2. Розбігається. 3. Збігається.

2.17. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів

Розглянемо знакопереміжний ряд $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$; $a_n > 0$.

Ознака Лейбніца. Якщо $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ є незростаючою послідовністю:

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то:

- 1) *знакопереміжний ряд збігається (умовно);*
- 2) *його сума не перевищує абсолютної величини першого члена ряду*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq a_0;$$

- 3) *сума залишку ряду не перевищує абсолютної величини першого члена залишку: $r_n \leq a_{n+1}$; $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ і має знак свого першого члена.*

Доведення. Побудуємо суму

$$S_{2n-1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}).$$

Оскільки будь-який вираз у дужках у цій сумі більше нуля, то

$$S_{2n-1} > 0; S_{2n+1} > 0 \quad \text{і} \quad S_{2n-1} < S_{2n+1}.$$

Отже, $S_1, S_3, S_5, S_7, \dots, S_{2n+1}, \dots$ — зростаюча послідовність.

Перегрупуємо побудований вираз:

$$S_{2n-1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2n-3} - a_{2n-2}) - a_{2n-1}. \quad (2.77)$$

Оскільки $S_{2n-1} > 0$ і будь-який вираз в дужках з (2.77) більше нуля, то $S_{2n-1} < a_0$. Отже, послідовність $\{S_{2n-1}\}$ збігається за лемою з п. 2.10, тобто існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = S$. Звідси $S \leq a_0$. Розглянемо вираз $S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = S + 0 = S \leq a_0.$$

Таким чином, $\{S_{2n-1}\}$ і $\{S_{2n}\}$ збігаються до S . Це означає, що $\{S_n\}$, де $n = \overline{0, \infty}$, також збігається до S . При цьому $S \leq a_0$.

Розглянемо тепер залишок ряду $r_n = (-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} + \dots$. Він є рядом. За доведеним він збігається і його сума не перевищує абсолютної величини першого члена, тобто $r_n < a_{n+1}$. Теорему доведено.

Приклади. 1. Розглянемо ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots \quad (2.78)$$

Це знакопереміжний ряд. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, утворений з модулів членів цього ряду, буде гармонічним, який, як відомо, розбігається. Чи збігається заданий ряд? Умови ознаки Лейбніца виконуються $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Звідси випливає, що ряд (2.78) збігається, але лише умовно.

2. Якщо розглянути ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots$, то хоча він і збігається до функції $\frac{\pi - x}{2}$, $x \in (0, 2\pi)$ (див. § 3), але довести його збіжність за ознакою Лейбніца не вдається. Це пов'язано з тим, що не можна довести монотонність (незростання) членів ряду. Ці самі міркування стосуються і ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 nx}{n}$.

ВПРАВИ. Дослідити на збіжність ряди.

1. $1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \dots$. *Відповідь.* Збігається умовно.
2. $2 - \frac{2}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} + \dots$. *Відповідь.* Розбігається.
3. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$. *Відповідь.* Збігається умовно.

2.18. Теорема Абеля про збіжність степеневих рядів

Теорема. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (2.79)$$

збігається у деякій точці $x = x_0 \neq 0$ числової осі, то він збігається, причому абсолютно для

$$|x| < |x_0|. \quad (2.80)$$

Доведення. За умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$ збігається; тоді за необхідною ознакою збіжності $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n x_0^n = 0$. Звідси випливає, що всі члени ряду за абсолютною величиною обмежені одним і тим самим додатним числом M :

$$|b_n x_0^n| < M. \quad (2.81)$$

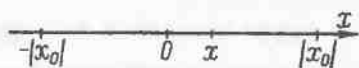


Рис. 3.5

Нехай $|x| < |x_0|$ (рис. 3.5). Ряд (2.79) можна записати у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n x_0^n) \left(\frac{x}{x_0}\right)^n. \quad (2.82)$$

Дослідимо на абсолютну збіжність ряд (2.82):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n; \quad (2.83)$$

за умовою (2.81)

$$|b_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

але ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

збігається як ряд геометричної прогресії, причому абсолютно, при $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, тобто $|x| < |x_0|$. За ознакою порівняння ряд (2.83), а з ним і ряд (2.79) також збігаються абсолютно. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо при $x = x_1$ ряд розбігається або умовно збігається, то він розбігається і при всіх $|x| > |x_1|$.

Дійсно, якщо припустити збіжність ряду для $|x_2| > |x_1|$, то за доведеною теоремою ряд збігається для $|x| < |x_2|$ зокрема у точці x_1 , що суперечить умові.

Наслідок 2. Для степеневих рядів з комплексною змінною $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ теорема не втрачає сили.

Наслідок 3. Теорема зберігає силу і для степеневих рядів виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n.$$

Теорема Абеля дає обґрунтування поняття радіуса збіжності степеневих рядів (п. 2.4).

2.19. Теорема про рівномірну збіжність степеневих рядів

Теорема. Якщо радіус R збіжності степеневих рядів $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ не дорівнює нулю: $R \neq 0$, то в будь-якому сегменті $[c, d] \subset (-R, R)$ степеневий ряд збігається рівномірно.

Доведення. Оскільки $R > 0$, то можна вибрати $\rho > 0$ таким чином, щоб $[c, d] \subset (-\rho, \rho) \subset (-R, R)$. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ для $x \in (-R, R)$ збігається, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \rho^n$ збігається, причому для $x \in [c, d]$: $|b_n| |x|^n < |b_n| \rho^n$. Тоді за ознакою Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ для $x \in [c, d]$ збігається рівномірно.

Наслідок. Теорема також має силу для степеневих рядів з комплексною змінною, а також для кратних степеневих рядів.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$.

Знайдемо радіус збіжності степеневих рядів, використовуючи формулу (2.71):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^p = 1.$$

Отже, при $|x| < 1$ ряд збігається, причому абсолютно. Якщо за x_0 взяти $x_0 = 0,999$, то при $|x| < 0,9$ ряд збігається абсолютно, а при $x_1 = 1,1$ і $|x| > 1,1$ ряд розбігається. Якщо взяти $\rho = 0,998$, то в $[-0,9; 0,9] \subset (-0,998; 0,998) \subset (-1; 1)$ ряд збігається рівномірно.

Дослідимо тепер поведінку ряду при $x = \pm 1$. При $x = +1$ ряд набирає вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ і, отже, збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$. При $x = -1$ ряд набирає вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$. При $p > 1$ ряд збігається абсолютно, а при $0 < p \leq 1$ збігається умовно (за ознакою Лейбніца).

ВПРАВИ. Визначити радіус і інтервал збіжності степеневих рядів. Дослідити поведінку ряду в граничних точках.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$. Відповідь. $R = \frac{1}{3}, \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, при $x = -\frac{4}{3}$ збігається

умовно, при $x = -\frac{2}{3}$ розбігається.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$. Відповідь. $R = \frac{1}{e}, \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$, при $x = \pm \frac{1}{e}$ розбігається.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$. Відповідь. $R = \frac{1}{e}, \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$.

2.20. Арифметичні властивості абсолютно збіжних рядів

Для абсолютно збіжних рядів справедливі такі арифметичні властивості.

1. Збіжність ряду не порушиться, якщо в ньому переставити доданки.

2. Збіжність ряду не порушиться через сполучення членів ряду.

3. Виконується розподільна властивість.

Для умовно збіжних рядів ці властивості не виконуються.

2.21. Функціональні властивості рівномірно збіжних рядів

Теорема 1 (про неперервність). Якщо для функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$ виконуються такі умови:

1) члени ряду є неперервними у замкненій D -області;

2) ряд рівномірно збігається для $X \in D$,

то такий ряд збігається до неперервної функції (тобто сума ряду є неперервною функцією).

Доведемо теорему про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду для D -області у вигляді сегмента $[c, d]$.

Дано: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(X)$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, $x \in [c, d]$. Ряд збігається рівномірно, тобто для $\forall \delta > 0 \exists N(\delta)$ такий, що $\forall n > N(\delta) \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \delta$ для $x \in [c, d]$. Треба довести, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta S = 0$.

Доведення. Оскільки $S(x) - S_n(x) = r_n(x)$, то $\forall \delta > 0 \exists N(\delta) > 0$ такий, що $\forall n > N(\delta) |r_n(x)| < \delta$. Тепер візьмемо Δx таке, щоб при $x \in [c, d]$, $x + \Delta x \in [c, d]$. Тоді $\forall \delta > 0 \exists N(\delta) > 0$ такий, що $\forall n > N(\delta)$:

$$|r_n(x + \Delta x)| < \delta, \quad x + \Delta x \in [c, d].$$

Виходячи із співвідношення

$$S(x) - S_n(x) = r_n(x), \quad (2.84)$$

записуємо

$$S(x + \Delta x) - S_n(x + \Delta x) = r_n(x + \Delta x). \quad (2.85)$$

Віднімаючи (2.84) від (2.85), дістаємо

$$S(x + \Delta x) - S(x) - [S_n(x + \Delta x) - S_n(x)] = r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

або

$$\Delta S = \Delta S_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

$$|\Delta S| \leq |\Delta S_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \quad (2.86)$$

Тепер візьмемо довільне $\epsilon > 0$, за ϵ знайдемо $\delta(\epsilon) > 0$, а за $\delta(\epsilon)$ знайдемо $N(\delta) > 0$ такий, що $\forall n > N(\delta) |r_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$:

$$|r_n(x + \Delta x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{і} \quad |r_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Приріст ΔS_n відповідає сумі скінченного числа неперервних функцій, тому задовольняє нерівність $|\Delta S_n| < \frac{\epsilon}{3}$. Тепер за (2.86) $|\Delta S| < \epsilon$ при $|\Delta x| < \delta$, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta S = 0$.

Наслідок. Якщо радіус збіжності степеневого ряду не дорівнює нулю, то степеневий ряд збігається до неперервної функції.

Приклад. Ряд $1 + x + \dots + x^n + \dots$ збігається до функції $\frac{1}{1-x}$, яка неперервна для $|x| < 1$, тобто для будь-якого $[c, d] \subset (-1; +1)$.

Теорема 2 (про інтегрування рівномірно збіжних рядів).

Якщо для функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ виконуються такі умови:

- 1) члени $f_n(x)$ неперервні в $[c, d]$ (замкненій D -області);
- 2) ряд рівномірно збігається в $[c, d]$ (замкненій D -області), то в $[c, d]$ (замкненій D -області) ряд можна почленно інтегрувати. При цьому здобутий ряд буде рівномірно збіжним.

Доведення. Дано: 1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно для $x \in [c, d]$ і $f_n(x)$ неперервні в $[c, d]$, $c < d$;

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x), x \in [c, d];$$

$$3) S(x) = S_n(x) + r_n(x);$$

$$4) S(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + r_n(x);$$

зінтегруємо суму 4) на $[c, x \leq d]$, це можна зробити, оскільки доданків скінченне число;

$$5) \int_c^x S(t) dt = \int_c^x f_0(t) dt + \int_c^x f_1(t) dt + \dots + \int_c^x f_n(t) dt + \int_c^x r_n(t) dt.$$

Отже, треба довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x r_n(t) dt = 0$. Застосуємо теорему про середнє:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a); \xi \in [a, b];$$

$$\int_c^x r_n(t) dt = r_n(\xi)(x-c); \xi \in [c, x].$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x r_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\xi) \lim_{n \rightarrow \infty} (x-c) = 0 \cdot (x-c) = 0.$$

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ можна почленно інтегрувати, оскільки $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Наслідок 1. Теорема виконується і для рядів з функціями багатьох змінних.

Наслідок 2. Степеневий ряд у замкненій області збіжності можна почленно інтегрувати, при цьому здобутий ряд має той самий радіус збіжності.

Із попередньої теореми випливає, що степеневий ряд можна почленно інтегрувати у замкненій області збіжності. Тому розглянемо

степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ з радіусом збіжності $R \neq 0$ і $[c, d] \in (-R, R)$,

а також ряд

$$\int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_c^x. \quad (2.87)$$

Треба довести, що радіус збіжності ряду (2.87): $R_1 = R$.

Доведення. Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (2.88)$$

і сегмент $[c, d] \in (-R, R)$. Для $t \in [c, d]$ ряд (2.88) можна почленно інтегрувати, тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_c^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{c^{n+1}}{n+1}. \quad (2.89)$$

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ можна обчислити за формулою

$$(2.71): R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|, \text{ а радіус збіжності ряду (2.89)}$$

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|(n+2)}{(n+1)|b_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$, то $R_1 = R$.

2.22. Розвинення функції $\operatorname{arctg} x$ в ряд. Число π

Розглянемо рівномірно збіжний ряд (2.45), який запишемо у вигляді

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

причому ця рівність справедлива для $|x| < 1$, а $R = 1$. Зінтегруємо:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt;$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (2.90)$$

Дістали розвинення функції $y = \operatorname{arctg} x$ в ряд, $R = 1$. Розглянемо ряд (2.90) для $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Це ряд із переміжними знаками. Він збігається за теоремою Лейбніца, тобто $\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$, але, з іншого боку, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, тому

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$$

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (2.91)$$

Це і є формула обчислення числа π . Ряд (2.91) потребує тривалих обчислень, оскільки "повільно збігається".

2.23. Логарифмічний ряд

Розглянемо рівномірно збіжні ряди (2.42) і (2.43), які запишемо у стислій формі:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

для $|x| < 1$ і зінтегруємо їх від 0 до x :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}; \quad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

але

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+x|; \quad \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-x|.$$

Тоді

$$\ln|1+x| = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

$$-\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (2.92)$$

Додамо ці логарифми. Маємо

$$\ln|1+x| - \ln|1-x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots;$$

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right); \quad |x| < 1,$$

або

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1. \quad (2.93)$$

Виконаємо у цьому виразі заміну $x = \frac{1}{2N+1}$, де $N = \overline{1, \infty}$ — ціле число, $|x| = \frac{1}{2N+1} < 1$. Тоді (2.93) запишемо у вигляді

$$\ln \frac{N+1}{N} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}};$$

$$\ln(N+1) = \ln N + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}. \quad (2.94)$$

Це і є формула для обчислення таблиць логарифмів. Якщо $N = 1$, то

$$\ln 2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^{2n+1}}.$$

2.24. Теорема про диференціювання рівномірно збіжних функціональних рядів

Теорема. Якщо для функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ виконуються такі умови:

1) ряд збігається на сегменті $[c, d]$ (замкненій D -області) до функції $S(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$; $x \in [c, d]$;

2) члени ряду $f_n(x)$ диференційовані для $x \in [c, d]$;

3) ряд, утворений із похідних від членів заданого ряду, рівномірно збігається в $[c, d]$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = S_1(x)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ можна диференціювати і

$$\frac{dS}{dx} = S_1(x), \quad x \in [c, d].$$

Доведення. За умовою 3) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = S_1(x)$ рівномірно збігається для $x \in [c, d]$. Тоді його можна зінтегрувати:

$$\int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t) dt = \int_c^x S_1(t) dt; \quad \int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x f'_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \Big|_c^x;$$

$$\int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(c) = S(x) - S(c).$$

Отже,

$$S(x) - S(c) = \int_c^x S_1(t) dt.$$

Візьмемо похідні від обох частин останньої рівності:

$$\frac{dS}{dx} = S_1(x).$$

Теорему доведено.

Наслідок. Степеневий ряд у замкненій області збіжності можна почленно диференціювати, при цьому здобутий ряд має той самий радіус збіжності.

Нехай ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ має радіус збіжності $R \neq 0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n x^{n-1}$ — радіус збіжності R_1 . Покажемо, що $R_1 = R$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|};$$

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n| n}{|b_{n+1}| (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{|b_{n+1}|} = R.$$

Приклади. 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = f(x) \quad (2.95)$$

збігається рівномірно на $(-\infty, +\infty)$, тому його можна почленно зінтегрувати:

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}. \quad (2.96)$$

Здобуті ряди (2.96) також збігаються рівномірно. Ряд (2.95) можна почленно диференціювати, оскільки ряд, утворений з похідних $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, збігається рівномірно.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{n^2}$ не можна диференціювати, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sin n^2 x)$, утворений із похідних, не збігається.

2.25. Розвинення функції $y = e^x$

Розглянемо ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.97)$$

радіус збіжності якого $R = \infty$. Нехай

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Побудуємо ряд з похідних членів ряду (2.97):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{dS}{dx}. \quad (2.98)$$

Оскільки ряди (2.97) і (2.98) співпадають, то $\frac{dS}{dx} = S(x)$. Із цього диференціального рівняння знаходимо $S(x)$ при $S(0) = 1$:

$$\frac{dS}{S} = dx; \ln|S(x)| = x + c_1; S(x) = e^x e^{c_1} = e^x c.$$

При $S(0) = 1$ маємо $1 = 1c$; $c = 1$; $S(x) = e^x$. Отже,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (2.99)$$

Приклад. Диференціюючи рівність

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \quad (2.100)$$

знайдемо суми таких розвинень:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1;$$

$$2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 5 \cdot x^3 + \dots + (n+1)(n+2)x^n + \dots = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1;$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + \dots + n(n+1)(n+2)x^{n-1} + \dots = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1.$$

Останню рівність запишемо у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)x^n}{3!} = \frac{1}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1.$$

Якщо вираз (2.100) помножити на x , то

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (2.101)$$

Диференціюючи (2.101), дістаємо

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.102)$$

Помноживши (2.102) на x , матимемо

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

ВПРАВА. Користуючись розвиненням (2.99), знайти розвинення для e^{-x} , $\text{ch } x$, $\text{sh } x$.

$$\text{Відповідь. } e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}; \text{ch } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}; \text{sh } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

2.26. Ряди Тейлора і Маклорена

Дано степеневий ряд

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (2.103)$$

Нехай радіус збіжності цього ряду $R \neq 0$. Це означає, що для всіх $x \in (-R, R)$, існує функція, що дорівнює степеневому ряду:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \quad x \in (a-R, a+R).$$

Знайдемо коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, вважаючи відомими значення функції $f(x)$ у точці a та її досить малому околі. Поклавши $x = a$, знаходимо $a_0 = f(a)$.

Оскільки степеневий ряд можна почленно інтегрувати або диференціювати в околі точки a за умови, що в околі точки a ряд збігається до $f(x)$, то в околі цієї точки a функція $f(x)$ має нескінченну множину похідних. Тоді, як відомо (див. ч. 1, гл. 4, § 26):

$$a_1 = f'(a); a_2 = \frac{f''(a)}{2!}; \dots; a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}; \dots \quad (2.104)$$

і

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots, \quad (2.105) \quad x \in (a-R, a+R).$$

Вираз

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \quad (2.106)$$

називається **рядом Тейлора функції $f(x)$ в околі точки a** .

Якщо $a = 0$, то ряд Тейлора перетворюється на **ряд Маклорена**:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i. \quad (2.107)$$

Якщо функція дорівнює ряду Тейлора або Маклорена, то кажуть, що її подано рядом Тейлора або Маклорена.

Розглянемо відрізок або n -ну зрізану суму ряду Тейлора

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Сума $S_n(x)$ називається **многочленом Тейлора**. Коефіцієнти

$$\frac{f'(a)}{1!}, \frac{f''(a)}{2!}, \frac{f'''(a)}{3!}, \dots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \dots$$

називаються **коефіцієнтами ряду** або **многочлена Тейлора**. Різниця $f(x) - S_n(x) = R_n(x)$ називається **залишком**, або **залишковим членом**.

Тепер $f(x)$ можна записати у вигляді

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (2.108)$$

або

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Останній вираз називається формулою Тейлора, а $R_n(x)$ — залишком формули Тейлора. Таким чином, формула Тейлора подає функцію через многочлени Тейлора, а ряд Тейлора подає функцію у вигляді степеневому ряду. Якщо функція $f(x)$ є многочленом n -го степеня, то $R_n(x) = 0$. Дійсно, нехай $f(x) = x^3$. Запишемо цю функцію у вигляді многочлена Тейлора за степенями різниці, наприклад $x - 1$, тобто

$$x^3 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3.$$

Поклавши тут $x = 1$, знайдемо $a_0 = 1$. Здиференціюємо:

$$3x^2 = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2.$$

Звідси $a_1 = 3$ при $x = 1$. Диференціюючи ще раз, дістаємо

$$6x = 2a_2 + 6a_3(x-1), \quad (2.109)$$

звідки $a_2 = 3$ при $x = 1$. Диференціюючи (2.109), дістаємо $6 = 6a_3$;

$a_3 = 1$. Тоді $x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. Звідси робимо висновок, що $R_n(x) = 0$.

Коли йдеться про формулу Тейлора, а коли про ряд Тейлора для функції $f(x)$? Якщо $f(x)$ має не більше n похідних, то можна говорити про зображення функції лише формулою Тейлора. Коли ж функція має нескінченну множину похідних, то можна говорити про зображення функції рядом Тейлора.

Має місце така теорема.

Теорема 1. Нехай функцію подано рядом Тейлора в інтервалі $x \in (a - R, a + R)$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i. \quad (2.110)$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для $x \in (a - R, a + R)$.

Дійсно,

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i, \quad f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Із того, що функцію подано рядом, випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

З іншого боку,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x); \quad f(x) = f(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x).$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{для } x \in (a - R, a + R).$$

Таким чином, якщо функцію подано степеневим рядом, то цей ряд є рядом Тейлора. Поставимо обернену задачу. Задано довільну функцію. Які умови треба накласти на функцію $f(x)$, щоб її можна було розвинути в околі точки a в ряд Тейлора? Це такі умови: 1) функція має бути визначена в околі точки a ; 2) в цьому околі функція має бути нескінченне число разів диференційованою.

Ці умови дають змогу побудувати ряд Тейлора (Маклорена) функції $f(x)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

і знайти для нього радіус збіжності R . Проте поставити знак рівності між функцією та її рядом не можна. Тому користуватимемося знаком відповідності:

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

Для вирішення питання, коли ж

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i,$$

скористаємося рівністю (2.108).

Щоб справджувалась рівність (2.110), треба, щоб послідовність $\{S_n(x)\}$ зрізаних сум мала границю $f(x)$, а це можливо, якщо існує множина $x \in \langle c, d \rangle$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Таким чином, має місце теорема.

Теорема 2. Якщо $f(x)$ визначена і диференційована в околі точки a та існує множина $x \in \langle c, d \rangle \subset (a-R, a+R)$, в якій $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то для $x \in \langle c, d \rangle$ має місце рівність (2.110), тобто, якщо існує інтервал (проміжок), в якому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то в інтервалі (проміжку) функція та її ряд Тейлора збігаються.

Справедливим є і обернене твердження: якщо існує інтервал (проміжок), в якому функція та її ряд Тейлора збігаються, то на цьому інтервалі (проміжку) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Отже, умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ є необхідною і достатньою умовою зображення функції $f(x)$ у вигляді ряду Тейлора в околі точки a .

З цієї теореми випливає також теорема єдиності.

Теорема 3. Якщо на деякому інтервалі $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то на цьому інтервалі існує єдиний ряд Тейлора, збіжний до цієї функції.

Іноді для практичних потреб цю теорему формулюють у такому вигляді: якщо існують два ряди, тотожно рівні між собою, збіжні на деякому інтервалі (проміжку) (α_1, α_2) до однієї і тієї самої функції, то коефіцієнти при однакових степенях $(x-a)$ рядів рівні між собою.

Наведені тут теореми виконуються і для рядів функцій багатьох змінних.

2.27. Достатні умови зображуваності функції рядом

Зображуваність функції $f(x)$ своїм рядом визначається, як встановлено, існуванням проміжку, в якому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. У зв'язку з цим запропоновано ряд формул, що виражають $R_n(x)$ у явному скінченному вигляді через змінну x . До таких формул належить (див. ч. 1, гл. 4, § 26) формула (форма) Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}; \quad (2.111)$$

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.112)$$

Вираз (2.111) залишкового члена дає змогу сформулювати теорему, що є достатньою умовою збіжності ряду (2.105).

Теорема (про можливість збігу ряду з функцією). Якщо у δ -околі деякої точки $a(0)$ всі похідні функції обмежені одним і тим самим числом, то в цьому околі функція та її ряд Тейлора збігаються.

Доведення. Дано: $|f^{(n+1)}(x)| < M, n = 0, 1, 2, \dots, x \in (a-\delta, a+\delta)$. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Оскільки $\xi = a + \theta(x-a)$, то $\xi \in (a-\delta, a+\delta)$ і $|f^{(n+1)}(\xi)| < M$. Тоді за (2.111)

$$|R_n(x)| < M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Побудуємо ряд із загальним членом:

$$\varphi_{n+1}(x) = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Це степеневий ряд. Доведемо його збіжність, виходячи, наприклад, із достатньої ознаки Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_{n+1}(x)|}{|\varphi_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|^{n+1} n!}{(n+1)! |x-a|^n} = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Отже, ряд збігається. У збіжному ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = 0$. Тоді

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для будь-якого $|x| < \infty$, тобто в тому числі і для $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Тепер можна визначити порядок розвинення функції в ряди Тейлора і Маклорена:

а) в ряди Тейлора і Маклорена можна розвинути лише функції, що мають похідні будь-якого порядку (знаходять ці похідні як функції від x , бажано у загальному вигляді);

б) визначають похідну $f^{(n)}(a)$ або $f^{(n)}(0)$ у точці, в околі якої виконують розвинення в ряд;

в) записують ряд Тейлора або Маклорена для заданої функції і визначають інтервал (радіус) збіжності цього ряду;

г) визначають інтервал, в якому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$; якщо такий інтервал існує, то (він може збігатися з інтервалом збіжності ряду) в цьому інтервалі функція і ряд збігаються.

2.28. Основні розвинення

1. Розвинення функції $y = e^x$ в ряд Маклорена. Скориставшись порядком розвинення функції в ряди, маємо:

а) $f^{(i)}(x) = e^x$;

б) $f^{(i)}(0) = 1$;

в) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$; $\varphi_n(x) = \frac{|x|^n}{n!}$; $\varphi_{n+1}(x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_{n+1}(x)|}{|\varphi_n(x)|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$; $R = \infty$. Ряд збігається для $|x| < \infty$.

г) $|e^x| < M$ для $|x| < \infty$.

Отже,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Це розвинення вже знайдене в п. 2.25, але іншим способом.

2. Розвинення функції $y = \sin x$ в ряд Маклорена.

а) $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$;

$(\sin x)''' = -\cos x$; $(\sin x)^{IV} = \sin x$; $(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 1\right)$;

$(\sin x)'' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$; ...; $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$;

б) $(\sin x)^{(n)} \Big|_{x=0} = \sin \frac{\pi}{2} n = \begin{cases} 0, & n - \text{парне}; \\ \pm 1, & n - \text{непарне}; \end{cases}$

в) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

г) $\left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right) \right| \leq 1 < 2$, $n = \overline{0, \infty}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $x \in (-\infty, +\infty)$, $R = \infty$. (2.113)

3. Розвинення функції $y = \cos x$. Міркуючи аналогічно п. 2, знаходимо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; R = \infty; x \in (-\infty, +\infty). \quad (2.114)$$

4. Біномний ряд. Поставимо задачу про розвинення функції $y = (1+x)^m$, де m — будь-яке дійсне число в околі точки $x = 0$.

Скориставшись порядком розвинення функції в ряд Маклорена, знаходимо:

а) $y' = m(1+x)^{m-1}$; $y'' = m(m-1)(1+x)^{m-2}$; ...

...; $y^{(n)} = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)](1+x)^{m-n}$;

б) $y^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]$;

в) $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots [m-(n-1)]}{n!} x^n + \dots$

Знайдемо радіус збіжності ряду в):

$$|\varphi_n(x)| = \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{n!} |x^n|;$$

$$|\varphi_{n+1}(x)| = \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)](m-n)}{(n+1)!} |x|^{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_{n+1}(x)|}{|\varphi_n(x)|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m-n}{n+1} = |x| \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right| = |x|, \quad R=1.$$

Отже, $(-1; 1)$ є інтервалом збіжності ряду:

$$r) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n)\theta^{m-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)(\theta x)^m}{(n+1)\theta^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Вираз для залишку ряду $R_n(x)$ можна записати у вигляді ряду

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots[m-(n-k)]}{(n+k)!} x^{n+k}.$$

Це степеневий ряд, тому при будь-якому фіксованому n ряд збігається в інтервалі $(-1; 1)$. Якщо $n \rightarrow \infty$, то для всіх $x \in (-1; 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Таким чином, для $x \in (-1; 1)$ і будь-якого m

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{n!} x^n + \dots; \quad |x| < 1. \quad (2.115)$$

Останній вираз називається **біномним рядом**.

5. Деякі окремі приклади із біномних рядів. Нехай $m = -1$, тоді

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Дістаємо відомий ряд (2.43), який збігається при $x \in (-1; 1)$.

Розглянемо ряди з $m = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \dots;$$

при $x = 1$ маємо

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$$

Останній ряд у порівнянні з рядом (2.91) "дуже швидко збігається".

2.29. Узагальнення. Розвинення функцій комплексної змінної в ряди

Насамперед зазначимо, що ряди Тейлора і Маклорена мають силу і для функцій багатьох змінних. Запишемо, наприклад, ряд Тейлора для функції $f(x, y)$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right] + \dots \quad (2.116)$$

Ряди Маклорена і Тейлора поширюються також і на функції комплексної змінної z :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (2.117)$$

де всі z належать кругу $|z - z_0| < R$, в якому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

Функція $f(z)$, яку можна подати степеневим рядом (2.117), називається **аналітичною**.

Знайдені раніше розвинення для функцій дійсної змінної залишаються в силі і для функцій комплексної змінної. Так,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots; \quad (2.118)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \quad (2.119)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots; |z| < \infty, R = \infty. \quad (2.120)$$

Розвинення справджуються для всіх точок комплексної площини.

2.30. Формули Ейлера

Застосуємо розвинення для e^z , поклавши $z = jx$ і $z = -jx$. Маємо

$$e^{jx} = 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j \frac{x^5}{5!} - \dots = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right] + j \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right] = \\ = \cos x + j \sin x; \quad (2.121)$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x; \quad (2.122)$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}. \quad (2.123)$$

Формули (2.121)–(2.123) називаються **формулами Ейлера**. Узагальнимо:

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z; \quad e^{-jz} = \cos z - j \sin z, \quad (2.124)$$

але

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z; \quad \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z. \quad (2.125)$$

Тепер

$$\operatorname{ch} jz = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos z; \quad \operatorname{ch} x = \cos jx; \quad (2.126)$$

$$\operatorname{sh} jz = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2} = j \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = j \sin z; \quad (2.127) \\ j \operatorname{sh} x = \sin jx.$$

ВПРАВИ. Скориставшись діями над степеневими рядами, знайти розвинення в ряди Маклорена.

1. $f(x) = (1+x)e^{-x}$. Відповідь. $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n; |x| < \infty.$

2. $f(x) = e^x \cos x$. Відповідь. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n; |x| < \infty.$

3. $f(x) = e^x \sin x$. Відповідь. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n; |x| < \infty.$

2.31. Ряд Лорана

Як уже зазначалося, функцію, аналітичну в крузі, можна розвинути в ряд Тейлора вигляду (2.117). Дістанемо цей ряд дещо іншим шляхом. Для цього доведемо теорему.

Теорема 1. Однозначну функцію $f(z)$, аналітичну в крузі $|z - z_0| < R$, можна розвинути у збіжний до неї степеневий ряд за степенями $|z - z_0|$.

Доведення. Нехай $f(z)$ — аналітична в крузі радіуса R функція. Опишемо всередині круга орієнтоване проти руху годинникової стрілки коло L радіуса $r < R$ з центром у точці z_0 . Візьмемо всередині круга радіуса r точку z (рис. 3.6), а на колі точку ξ . Тоді $f(z)$ буде аналітичною на L і все-

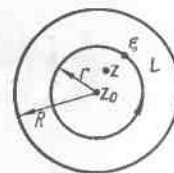


Рис. 3.6

редині круга радіуса r . За формулою Коші, яку приймаємо без доведення,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(z).$$

Розглянемо дріб

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}.$$

Оскільки $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1$, то $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$ можна розглядати як

суму збіжної геометричної прогресії. Тому

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^2 + \dots,$$

а дріб

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \dots$$

подано рівномірно збіжним рядом у крузі радіуса r . Помноживши цей дріб на $\frac{1}{2\pi j}$ та проінтегрувавши по L , при фіксованому z дістанемо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z};$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \dots$$

Позначивши

$$\frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = C_n, \quad (2.128)$$

дістанемо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (2.129)$$

— розвинення аналітичної у крузі R функції $f(z)$ в ряд Тейлора.

Порівнюючи ряд (2.129) з рядом (2.117), помічаємо, що

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \quad (2.130)$$

Аналогічно доведенню теореми 1 можна легко довести таку теорему.

Теорема 2. Якщо однозначна функція $f(z)$ аналітична поза кругом радіуса r з центром у точці z_0 , тобто $|z - z_0| < r$, то її можна зобразити рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_h \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n}, \quad (2.131)$$

де h — зорієнтоване проти руху годинникової стрілки коло радіуса r , який може бути і більшим за R .

Якщо позначити

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} = C_{-n}, \quad (2.132)$$

то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}. \quad (2.133)$$

Тепер можна довести теорему 3.

Теорема 3. Якщо однозначна функція $f(z)$ аналітична у кільці $r < |z - z_0| < R$, де $0 \leq r < R < \infty$, то її можна розвинути у збіжний ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z), \quad r < |z - z_0| < R. \quad (2.134)$$

При цьому

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R; \quad (2.135)$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad (|z - z_0| > r). \quad (2.136)$$

Ряд (2.134) називається **рядом Лорана**. Ряд (2.135) збігається у крузі $|z - z_0| < R$ до деякої функції $f_1(z)$. Цей ряд називається правильною частиною ряду Лорана. Ряд (2.136) збігається у зовнішній частині круга $|z - z_0| > r$ до аналітичної функції $f_2(z)$. Ряд (2.136) називається головною частиною ряду Лорана. Коефіцієнти ряду обчислюються за формулою

$$C_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots), \quad (2.137)$$

де ν – коло радіуса ρ , $r < \rho < R$, зорієнтоване проти руху годинникової стрілки.

Приклад. Розвинути в ряд Лорана функцію

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-4)} = \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-3}.$$

Розв'язання. У даної функції є дві точки: $z_1 = 3$ і $z_2 = 4$, в яких порушується аналітичність функції $f(z)$. Функція аналітична у кільці $3 < |z| < 4$ ($r = 3, R = 4$). Отже, її можна розвинути в ряд Лорана (2.134):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n.$$

де C_n обчислюються за (2.137), але ряд можна легко дістати і безпосередньо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-4} &= \frac{1}{-4\left(1-\frac{z}{4}\right)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{1}{4} \left[1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{4^2} + \frac{z^3}{4^3} + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \dots + \frac{3^n}{z^n} + \dots \right] = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n}.$$

Тоді ряд Лорана можна записати у вигляді

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n}. \quad (2.138)$$

З цього розвинення бачимо, що

$$c_0 = -\frac{1}{4}; c_1 = -\frac{1}{4^2}; c_2 = -\frac{1}{4^3}; \dots; \\ c_{-1} = 3^{-2}; c_{-2} = 3^{-3}; \dots; c_{-n} = 3^{-n-1}.$$

Тим самим вдалося уникнути складних обчислень коефіцієнтів ряду (2.134) за формулами (2.130) та (2.132). Слід зауважити, що задана функція аналітична в крузі

$|z| < 3$, де вона може бути розвинена у збіжний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, де $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, а також

у зовнішній частині круга $|z| > 4$, де вона розвивається в збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$.

2.32. Класифікація ізольованих особливих точок. Лишки

Особливою точкою функції $f(z)$, що визначена в замкненій області D , обмеженій жордановою кривою, називається точка $z = z_0 \in D$, в якій аналітичність функції $f(z)$ порушується. У розглянутому вище прикладі (див. п. 2.31) $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-4)}$ особливими є точки $z = 3$ і $z = 4$. Для функцій однієї дійсної змінної особливими є точки розриву функцій. Особлива точка $z = z_0$ функції $f(z)$, що визначена в крузі $0 < |z - z_0| < R$, називається **ізольованою**, якщо $f(z)$ всюди в крузі аналітична, крім самої точки $z = z_0$.

Залежно від поведінки функції $f(z)$ поблизу ізольованих особливих точок їх класифікують так.

1. Усувні особливі точки, для яких

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$$

(порівняйте усувний розрив для $y = f(x)$).

2. Якщо для особливої точки $z = z_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

то особлива точка називається **полюсом**.

3. Якщо для особливої точки $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує, то вона називається **істотною особливою точкою**.

Між видом розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана поблизу ізольованої особливої точки і типом цих точок існує такий зв'язок. Характер особливої точки визначається наявністю відмінних від нуля c_n для від'ємних n . Якщо всі $c_n = 0$, то точка називається **усувною особливою точкою**. У цьому разі розвинення для $f(z)$ запишеться у вигляді

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

звідки видно, що коли до визначити $f(z)$ так, щоб $f(z_0) = c_0$, то функція буде аналітична всюди в $|z - z_0| < R$, включаючи й точку z_0 .

Нехай c_{-n} для $n = \overline{1, m}$ не дорівнюють нулю, а для $n = m + 1, m + 2, \dots$ c_{-n} дорівнюють нулю. У цьому разі кажуть, що точка z_0 є полюсом порядку m або кратності m . При $m = 1$ полюс точки z_0 називають простим. Розвинення функції з полюсом кратності m має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (2.139)$$

Нехай усі c_{-n} відрізняються від нуля. У цьому разі кажуть, що функція $f(z)$ має у точці z_0 істотну особливість. Розвинення функції в цьому разі подано рядом (2.134).

Для розвинення (2.139) маємо

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_L f(z) dz. \quad (2.140)$$

Лишком функції $f(z)$, аналітичної у крузі $|z - z_0| < R$ з ізольованою особливою точкою z_0 , називається інтеграл

$$\frac{1}{2\pi j} \int_L f(z) dz = \text{лиш } f(z), \quad (2.141)$$

де L , як і раніше, — орієнтований проти руху годинникової стрілки контур у крузі $|z - z_0| < R$, що містить точку z_0 . Порівнюючи (2.140) та (2.141), знаходимо

$$c_{-1} = \text{лиш } f(z)_{z=z_0}.$$

Якщо полюс має кратність $m \geq 1$, то для обчислення $\text{лиш } f(z)_{z=z_0}$ використовується формула, яку приймемо без доведення:

$$\text{лиш } f(z)_{z=z_0} = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \quad (2.142)$$

Якщо в теоремі 3 (п. 2.31) r — будь-яке число, $0 \leq r < +\infty$, $z_0 = 0$, $R = \infty$, то в зовнішній частині круга $|z| > r$ функція $f(z)$ аналітична і, отже, допускає розвинення у ряд Лорана за степенями z :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > r.$$

Зовнішню частину круга $|z| > r$ часто називають **околом нескінченно віддаленої точки**. Функція $f(z)$ може бути в околі нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ аналітичною, крім самої точки $z = \infty$. Цю точку $z = \infty$ називають так само, як і для випадку $|z_0| < \infty$, ізольованою особливою точкою функції $f(z)$. Залежно від поведінки $f(z)$ в околі $z = \infty$ вводять **класифікацію нескінченно віддалених ізольованих точок**: а) усуні; б) полюс першого порядку; в) істотно особлива точка. Поняття лишку вводять за формулою

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{лиш } f(z)_{z=\infty}, \quad (2.143)$$

де γ — будь-який замкнутий контур, розміщений у зовнішній частині круга $|z| > r$ і зорієнтований за рухом годинникової стрілки.

2.33. Застосування рядів Лорана в операційному численні

Якщо зображення $F(p)$ розвивається в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}, \quad (2.144)$$

то можливий почленний перехід у простір оригіналів також за допомогою ряду

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n, \quad t > 0. \quad (2.145)$$

Нагадаємо, що $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Звідси випливає, що перша теорема розвинення (див. гл. 2, § 10) справджується і для рядів. Дамо узагальнення другої теореми розвинення. Це узагальнення іноді називають третьою теоремою розвинення.

Третя теорема розвинення. Якщо зображення $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ являє собою відношення двох цілих трансцендентних функцій, причому знаменник $F_2(p)$ має нескінченне число лише простих коренів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ у півплощині $\operatorname{Re} p = s < s_0$, то оригінал

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_1(\alpha_n)}{dF_2(\alpha_n)} e^{\alpha_n t}. \quad (2.146)$$

Останню формулу можна розглядати як узагальнення формули (10.6), наведеної у гл. 2, § 10. Якщо серед простих коренів $F_2(p)$ є один нульовий, тобто

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)},$$

то в умовах третьої теореми розвинення

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_1(\alpha_n)}{\alpha_n F_2'(\alpha_n)} e^{\alpha_n t}. \quad (2.147)$$

Якщо $F_1(p)$ та $F_2(p)$ — парні функції, то

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_1(\alpha_n)}{\alpha_n F_2'(\alpha_n)} \operatorname{ch} \alpha_n t, \quad (2.148)$$

а для непарної $F_1(p)$ і парної $F_2(p)$ функцій

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_1(\alpha_n)}{\alpha_n F_2'(\alpha_n)} \operatorname{sh} \alpha_n t. \quad (2.149)$$

Приклад. Знайти оригінал $f(t)$ для зображення

$$F(p) = \frac{\operatorname{th} p}{p} = \frac{\operatorname{sh} p}{p \operatorname{ch} p}.$$

Розв'язання. Тут $F_2(p) = \operatorname{ch} p$, але $\operatorname{ch} p = \cos ip$. Корені функції $F_2(p)$ знайдемо із рівняння $\cos ip = 0$: $\alpha_n = \pm \frac{2n-1}{2} \pi i$. Функція $F_1(p) = \frac{\operatorname{sh} p}{p}$ теж парна. Тому можна застосувати (2.148). Після ряду перетворень дістанемо

$$\frac{\operatorname{th} p}{p} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n-1}{2} \pi t}{(2n-1)^2}.$$

У § 6 (гл. 2) наведено формулу перетворення, що дає змогу за відомим зображенням $F(p)$ знайти функцію-оригінал $f(t)$. Ця формула зводиться обчислення оригіналу до обчислення невластного інтеграла від $e^{pt} F(p)$ вздовж прямої, паралельної уявній осі і розміщеної в області $\operatorname{Re} p > s$. Обчислення невластного інтеграла можна звести до обчислення лишків. Якщо p_k ($k = \overline{1, n}$) — особливі точки функції $e^{pt} F(p)$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{лиш} [e^{pt} F(p), p_k].$$

Ця формула є загальною формулою теорем розвинення, наведених у § 10 (гл. 2) і вище. Отже, форма зберігається і для $n = \infty$, якщо ряд, що при цьому дістали, збігається.

§ 3. РЯДИ ФУР'Є

У дослідженнях з механіки було знайдено, що будь-який довільний рух можна описати сукупністю функцій виду

$$f_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

які називають **простими гармоніками**. У зв'язку з цим у математиці була поставлена задача подання вже будь-якої функції (тобто не обов'язково періодичної) у вигляді сукупності простих гармонічних функцій типу (3.1).

Цю задачу поділяють на дві: подання періодичної функції сукупністю функцій виду (3.1) і подання неперіодичної функції тією самою сукупністю. Розв'язання цих двох задач розглядається в даному параграфі.

3.1. Періодичні функції та їхні властивості

Для розв'язання поставленої загальної задачі вивчимо найпростіші властивості періодичних функцій. Нагадаймо означення (див. ч. 1, гл. 3, п. 3.7): функція $f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке найменше додатне число T , що для всіх x з області визначення функції $f(x)$

$$f(x + T) = f(x).$$

Властивості періодичних функцій.

1. Якщо T — період функції $y = f(x)$, то $f(x) = f(x + T) = \dots = f(x + nT)$, де n — будь-яке ціле додатне чи від'ємне число.

2. Сума, добуток і частка від ділення періодичних функцій є функціями періодичними.

3. Якщо $y = f(x)$ — періодична функція з періодом T , то функція $u = f(ax)$ має період $\frac{T}{a}$. Справді, розглянемо функцію $\varphi(x) = f(ax)$:

$$\varphi\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T) = f(ax) = \varphi(x).$$

Наприклад, функція $y = \sin 7x$ має період $\frac{2\pi}{7}$:

$$\sin 7\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin(7x + 2\pi) = \sin 7x.$$

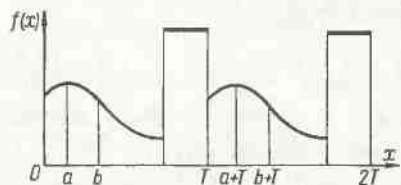


Рис. 3.7

4. Означений інтеграл від a до $a + T$ від періодичної функції з періодом T не залежить від вибору точки a :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

Справді, вважаючи $x = T + t$ (рис. 3.7) і враховуючи, що $f(x) = f(t + T)$, маємо

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx &= \left[\begin{array}{l} x = T + t; \quad dx = dt; \quad b + T = T + t_b; \\ a + T = T + t_a; \quad t_b = a; \quad t_a = b \end{array} \right] = \\ &= \int_a^b f(t + T) dt = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Тоді

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+T} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx.$$

3.2. Тригонометричний ряд і характер його збіжності

Нагадаємо, що функціональний ряд типу (2.13), який компактно можна записати у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3.2)$$

називається тригонометричним рядом;

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Щоб дослідити на збіжність ряд (3.2), оцінимо

$$|a_n \cos nx| \leq |a_n|; \quad |b_n \sin nx| \leq |b_n|.$$

Якщо ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

збігається, то збігається і ряд (3.2), притому рівномірно (див. п. 2.11). Зауважимо, що члени ряду є неперервними періодичними функціями з періодом 2π . Припустимо, що ряд (3.2) рівномірно збігається на $[-\pi, \pi]$. Тоді він збігається рівномірно всюди на числовій осі. Нехай сума цього ряду є $f(x)$. Функція $f(x)$ є неперервною функцією, бо, як відомо (див. п. 2.21), сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервна функція. Період $f(x)$ дорівнює 2π .

Якщо $f(x)$ помножити на неперервну на $[-\pi, \pi]$ функцію $\varphi(x)$, то рівномірна збіжність ряду (3.2) не порушиться. Справді, позначимо члени ряду (3.2) через u_n :

$$u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

З умови рівномірної збіжності ряду (див. формулу (2.58)) знайдемо, що за заданим $\delta > 0$ можна вказати таке ціле число, що для всіх $N(\delta)$ і при будь-якому цілому $p > 0$ нерівність

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \delta$$

виконується для всіх $x \in [-\pi, \pi]$.

Доведемо, що

$$|u_{n+1}(x)\varphi(x) + u_{n+2}(x)\varphi(x) + \dots + u_{n+p}(x)\varphi(x)| < \epsilon. \quad (3.3)$$

З умови неперервності $\varphi(x)$ на $[-\pi, \pi]$ випливає $|\varphi(x)| < M$, де $M > 0$. Умову (3.3) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(x)\varphi(x) + u_{n+2}(x)\varphi(x) + \dots + u_{n+p}(x)\varphi(x)| = \\ & = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| |\varphi(x)| < \delta M. \end{aligned}$$

Вважаючи $M\delta = \epsilon$, знайдемо, що умова (3.3) виконується для всіх $x \in [-\pi, \pi]$ при $n > N$ і будь-якому p . Отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\varphi(x)$ збігається рівномірно на $[-\pi, \pi]$ і його можна почленно інтегрувати. Тоді існує інтеграл

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\varphi(x)dx.$$

3.3. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є для 2π -періодичної функції

Нехай дано рівномірно збіжний до функції $f(x)$ тригонометричний ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3.4)$$

Вважаючи функцію $f(x)$ відомою, знайдемо коефіцієнти ряду

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

Якщо зінтегрувати рівність (3.4) в границях від $-\pi$ до π , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx,$$

а решта інтегралів обернеться на нуль. Тоді

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \quad (3.5)$$

Для визначення коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ помножимо ряд (3.4) на $\cos mx$, де $m = 1, 2, \dots, n, \dots$:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx).$$

Використовуючи відомі формули

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x];$$

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x];$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

дістанемо

$$\begin{aligned} f(x)\cos mx = \frac{1}{2} \left\{ a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n [\cos(n+m)x + \cos(m-n)x] + \right. \\ \left. + b_n [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]) \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Зінтегруємо (3.6) в границях від $-\pi$ до π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{1}{2} \left\{ a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \right. \\ \left. + \cos(m-n)x] dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x] dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Усі інтеграли, що входять до (3.7) праворуч, при $m \neq n$ обертаються на нуль, а при $m = n$, що відрізняється від нуля, залишиться тільки інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-n)x dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Тоді можна записати

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{2} a_n \cdot 2\pi,$$

звідки

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (3.8)$$

Щоб визначити коефіцієнти $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, помножимо (3.4) на $\sin mx$, де $m = 1, 2, \dots, n, \dots$ і, міркуючи аналогічно попередньому, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3.9)$$

Ряд (3.4), у якому коефіцієнти визначено за формулами (3.5), (3.8), (3.9), називається **тригонометричним рядом Фур'є**, а коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ називаються **коефіцієнтами Фур'є**. Таким чином, якщо 2π -періодична функція розвивається в рівномірно збіжній тригонометричний ряд (3.4), то коефіцієнти ряду визначаються за формулами (3.5), (3.8), (3.9), а ряд (3.4) перетворюється в ряд Фур'є.

Тепер нехай невідомо, що 2π -періодична функція, яка визначена в $[-\pi, \pi]$, розвивається в рівномірно збіжній тригонометричний ряд (3.4). Що в цьому разі можна стверджувати? Якщо $f(x)$ інтегрована в $[-\pi, \pi]$, то можна обчислити всі коефіцієнти

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

і побудувати ряд Фур'є. Проте невідомо, як зв'язаний ряд Фур'є з функцією, можна сказати лише, що ряд Фур'є "породжений" функ-

цією $f(x)$. Цей зв'язок ряду Фур'є з функцією звичайно позначають знаком відповідності:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де \sim — знак відповідності ("породження"). Щоб від відповідності перейти до рівності, треба знайти умови (ознаки) розвинення функції в ряд Фур'є. Ці ознаки є лише достатніми.

3.4. Достатні ознаки розвинення 2π -періодичної функції в ряд Фур'є

Нехай $f(x)$, яка визначена для $x \in (-\infty, +\infty)$, має період 2π і розвинена в ряд (3.4) на $[-\pi, +\pi]$. Тоді це розвинення зберігає силу для усіх $x \in (-\infty, +\infty)$, оскільки функції з цього ряду $\sin nx, \cos nx$ визначені для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Те саме стосується і коефіцієнтів, що обраховуються за формулами (3.5)–(3.9). Якщо функція визначена на $[-\pi, +\pi]$, то її можна довизначити на всю числову вісь, зберігаючи її періодичність. Останнє називається **періодичним продовженням функції**.

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену на всій числовій осі.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

- а) періодична з періодом 2π ;
- б) неперервна всюди на $[-\pi, \pi]$, крім, можливо, скінченного числа точок розриву першого роду;
- в) сегмент $[-\pi, \pi]$ можна поділити на скінченне число підсегментів (інтервалів), у кожному з яких функція обмежена і монотонна, то на $[-\pi, \pi]$ ряд Фур'є збігається і його сума

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

в точках неперервності дорівнює $f(x)$, а в точках розриву дорівнює $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

В інтервалах неперервності функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається рівномірно. Сформульована теорема 1 називається **теоремою Діріхле**.

Функція, що задовольняє умови б), в) (умови Діріхле), називається **кусково-монотонною**.

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$:

а) періодична з періодом 2π ;

б) неперервна на $[-\pi, \pi]$ всюди, крім, можливо, скінченного числа точок розриву першого роду, в яких

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2};$$

в) на кожному проміжку неперервності функція має неперервну похідну, тобто є гладкою, то ряд Фур'є (3.4) в точках неперервності функції збігається рівномірно до функції $f(x) = S(x)$, а в точках розриву функції сума ряду

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

В інтервалах, де $f'(x)$ неперервна, ряд (3.4) збігається рівномірно. Функція $y = f(x)$, що задовольняє умови б) та в) теореми 2, називається **кусково-гладкою**. Теореми 1 і 2 коротко можна сформулювати так: кусково-монотонні та кусково-гладкі функції розвиваються в ряд Фур'є.

3.5. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

Нагадаємо, що для парної і непарної функцій виконано такі умови: парної $f(x) = f(-x)$ і непарної $f(-x) = -f(x)$. Згадаємо про дві істотні властивості парних і непарних функцій:

- 1) добуток парної функції на непарну є непарною функцією;
- 2) добуток парної функції на парну є парною функцією.

Розглянемо далі інтеграл із симетричними щодо початку координат границями від функції $f(x)$, що інтегрується,

$$\int_{-c}^{+c} f(x) dx = \int_{-c}^0 f(x) dx + \int_0^c f(x) dx = \int_0^c [f(x) + f(-x)] dx.$$

Якщо $f(x)$ — парна функція, то

$$\int_{-c}^{+c} f(x) dx = 2 \int_0^c f(x) dx. \quad (3.10)$$

Якщо $f(x)$ — непарна функція, то

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 0. \quad (3.11)$$

Тепер запишемо ряд Фур'є для парної функції. З умов (3.10) та (3.11) і формул (3.5), (3.8) і (3.9) маємо $b_n = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad (3.12)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (3.13)$$

Ряд Фур'є для парної функції можна записати у вигляді

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Якщо $f(x)$ є непарною функцією, то всі $a_n = 0$, у тому числі і a_0 , коефіцієнти $b_n \neq 0$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3.14)$$

Ряд Фур'є для непарної функції можна записати у вигляді

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (3.15)$$

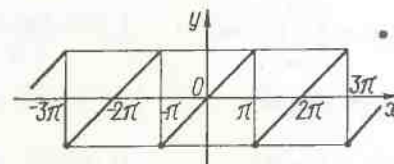


Рис. 3.8

Приклади. 1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ (рис. 3.8), що визначена на проміжку $(-\pi, \pi)$.

Послідовність розв'язання прикладів на розвинення функції в ряд Фур'є.

1) Встановлюємо період функції; в нашому прикладі період дорівнює 2π (рис. 3.8).

2) З'ясуємо, чи задовольняє функція умови теорем 1 і 2.

3) Періодично продовжуємо функцію на всю числову вісь.

4) Визначаємо, чи є задана функція парною або непарною; функція $y = f(x) = x$ є непарною і задовольняє умови теорем 1 і 2. Тоді ряд Фур'є для $y = x$ буде

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx.$$

Щоб визначити b_n , проведемо інтегрування частинами, прийнявши

$$x = u; \, dx = du; \, dv = \sin nx \, dx; \, v = -\frac{1}{n} \cos nx; \quad \left(\int u \, dv = uv - \int v \, du \right);$$

$$\frac{\pi}{2} b_n = -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{\pi}{n} \cos n\pi;$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}; \quad f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \dots \right);$$

у точках неперервності $f(x) = x$, а в точках розриву $x_k = \pi(2k+1)$, $k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ряд збігається до нуля.

2. Розвинути функцію $f(x) = e^{ax}$ у ряд Фур'є в проміжку $(-\pi, \pi)$, якщо $a = \text{const}$; $a \neq 0$.

Розв'язання. Функція належить до кусково-монотонних, тому допускає розвинення в ряд Фур'є.

За формулою (3.5)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \, dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = 2 \frac{\text{sh} a\pi}{a\pi}.$$

За формулою (3.8)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n \frac{2a}{a^2 + n^2} \frac{\text{sh} a\pi}{\pi}.$$

За формулою (3.9)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2n}{a^2 + n^2} \frac{\text{sh} a\pi}{\pi}.$$

Підставляючи результати, що дістали, в (3.4), матимемо

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \text{sh} a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right\} \quad \text{для } x \in (-\pi, \pi).$$

ВПРАВИ. Розвинути в ряд Фур'є функцію у проміжку $-\pi < x < \pi$ ($a \neq$ цілому числу).

1. $f_1(x) = \cos ax$ за косинусами. Відповідь. $\frac{\pi \cos ax}{2 \sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2}$.

2. $f_2(x) = \sin ax$ за синусами. Відповідь. $\frac{\pi \sin ax}{2 a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2}$.

3. $f_3(x) = \text{ch} ax$ за косинусами. Відповідь. $\frac{\pi \text{ch} ax}{2 \text{sh} a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2}$.

4. $f_4(x) = \text{sh} ax$ за синусами. Відповідь. $\frac{\pi \text{sh} ax}{2 \text{sh} a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}$.

3.6. Розвинення періодичних функцій з будь-яким періодом у ряд Фур'є. Розвинення парних і непарних 2ℓ -періодичних функцій у ряд Фур'є

Нехай задана періодична функція $y = f(x)$ з періодом $2l$, яка на сегменті $[-l, l]$ задовольняє умови теорем 1 і 2 (п. 3.4). Виконаємо в $y = f(x)$ заміну змінної, вважаючи $x = \frac{l}{\pi} t$. Тоді при $x = 0$ $t = 0$, при $x = 2l$ $t = 2\pi$. Отже, функція $y = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ періодична з періодом 2π і задовольняє умови теорем 1, 2 в $[-\pi, \pi]$. Функцію $y = f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ тепер можна розвинути в ряд Фур'є:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt \, dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin nt \, dt.$$

Замінімо $t = \frac{\pi}{l} x$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$. Дістанемо коефіцієнти Фур'є для $2l$ -періодичної функції:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \tag{3.16}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx; \quad (3.17)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx \quad (3.18)$$

і ряд для

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right). \quad (3.19)$$

Значимо, що коефіцієнти ряду Фур'є для абсолютно інтегрованих функцій обмежені. Наприклад, для a_n маємо

$$|a_n| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| \left| \cos \frac{\pi n}{l} x \right| dx < \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| dx < +\infty.$$

У разі парної функції

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.20)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad (3.21)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (3.22)$$

Якщо функція непарна, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x; \quad (3.23)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (3.24)$$

Зауваження. У багатьох задачах треба розвинути в ряд Фур'є функцію не на сегменті $[-l; +l]$, а на сегменті $[0; 2l]$.

У цьому разі в усіх формулах для обчислення коефіцієнтів Фур'є змінюються відповідні границі інтегрування:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx; \quad (3.25)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx; \quad (3.26)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (3.27)$$

Для будь-якого періоду $T = 2l$ після введення величини

$$\omega_n = \frac{\pi}{l} n = \frac{2\pi}{T} n, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (3.28)$$

останні формули можна записати у вигляді

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx; \quad (3.29)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega_n x dx; \quad (3.30)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \omega_n x dx. \quad (3.31)$$

Приклад. Розвинути функцію $y = |x|$ при $-2 < x < 2$ у ряд Фур'є.

Розв'язання. Функція $|x|$ парна (рис. 3.9), тому $b_n = 0$. Звідси

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x dx = 2; \quad a_n = \int_0^2 x \cos \frac{\pi n}{2} x dx =$$

$$= \left[\begin{aligned} x = u; \cos \frac{\pi n}{2} x dx = dv \\ dx = du; v = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} x \end{aligned} \right] =$$

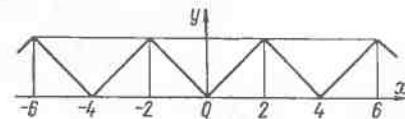


Рис. 3.9

$$= \frac{2x}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} x dx = \frac{4}{\pi n} \sin \pi n + \frac{4}{(\pi n)^2} \cos \frac{\pi n}{2} x \Big|_0^2 = \frac{4}{(\pi n)^2} (\cos \pi n - 1)$$

Однак $\cos \pi n = (-1)^n$, тоді

$$a_{2n} = 0; \quad a_{2n-1} = -\frac{8}{[\pi(2n-1)]^2}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Шуканий ряд можна записати у вигляді

$$|x| \sim 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^2} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x.$$

ВПРАВИ. Розвинути в ряд Фур'є функції.

1. $f(x) = x$ в інтервалі $(a; a+l)$. Відповідь. $a+l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi n a}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x - \cos \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$.

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{якщо } 1 < x < 2; \\ 3-x, & \text{якщо } 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \text{ Відповідь. } \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi n x}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

$$3. f(x) = 1 - \frac{x}{2} \text{ в інтервалі } (-2; 2). \text{ Відповідь. } 3. \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} x.$$

3.7. Розвинення неперіодичної функції, заданої на скінченному проміжку, в ряд Фур'є

Нехай задано кусково-монотонну, або кусково-гладку, функцію $f(x)$, що визначена на скінченному сегменті $[a, b]$. Ставиться завдання розвинення функції в ряд Фур'є. Розглянемо функцію $f^*(x)$, визначену таким чином:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } a \leq x \leq b; \\ f_1(x), & \text{якщо } a_1 \leq x < a; \\ f_2(x), & \text{якщо } b < x \leq a_1 + 2l. \end{cases}$$

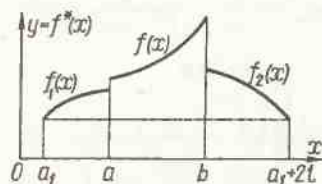


Рис. 3.10

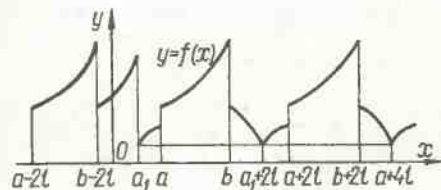


Рис. 3.11

Оберемо $x = a_1$ так, щоб $f^*(a_1) = f^*(a_1 + 2l)$, де $2l$ – період, а функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ задовольняють вимоги теорем 1 і 2 з п. 3.4 (рис. 3.10). Таке продовження функції $f(x)$ до $f^*(x)$ називається її продовженням до $2l$ -періодичної. Отже, $f^*(x)$ є періодичним продовженням $f(x)$. Тепер періодично продовжимо $f^*(x)$ на всю числову вісь (рис. 3.11), після чого для $f^*(x)$ можна побудувати ряд Фур'є, який на $[a, b]$ в точках неперервності збігатиметься з $f(x)$.

Оскільки функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ обирають довільно, то поза $[a, b]$ для $f(x)$ можна побудувати нескінченну множину рядів Фур'є, що її подають. Якщо функція $f(x)$ визначена на $[0, m]$, то зручно продовжити функцію парним або непарним способом. Функція $f^*(x)$, визначена законом відповідності

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } 0 < x \leq m; \\ f(-x), & \text{якщо } -m \leq x < 0; \\ f(0), & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

називається **парним продовженням функції $f(x)$** на $[-m, m]$ (рис. 3.12). **Непарне продовження функції** визначається умовою

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } 0 < x \leq m; \\ -f(-x), & \text{якщо } -m < x < 0; \\ f(0), & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

На рис. 3.13 показано непарне продовження функції, що зображена на рис. 3.12 (для $x \in [0, m]$).

Приклади. 1. Розвинути функцію

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

у ряд Фур'є (рис. 3.14).

Розв'язання. Як видно з рис. 3.14, функція непарна, тому

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi};$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi n} (\cos \pi n - 1); \quad \cos \pi n = (-1)^n;$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}; \quad b_2 = 0; \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}; \quad \dots; \quad b_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)\pi}.$$

У точках неперервності

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

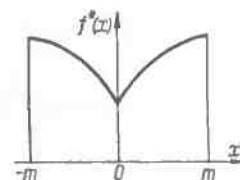


Рис. 3.12

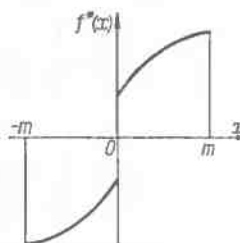


Рис. 3.13

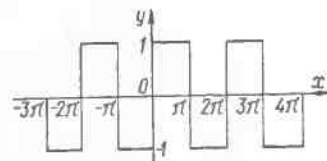


Рис. 3.14

2. Розвинути функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi); \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi); \\ 1/2, & x = 0, x = \pi \end{cases}$$

у ряд Фур'є (рис. 3.15).
Розв'язання.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(x \Big|_0^{\pi} \right) = 1; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad n \neq 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos \pi n);$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \dots \right].$$

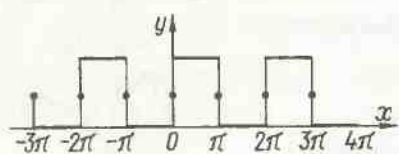


Рис. 3.15

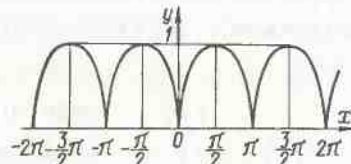


Рис. 3.16

3. Розвинути функцію $y = |\sin x|$ у ряд Фур'є (рис. 3.16).

Розв'язання. Графік такої функції дістають із графіка функції $y = \sin x$ на $(0; \pi)$ парним продовженням в $(-\pi; 0)$. Тому

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(1-n)x] dx = \\ &= - \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right] \Big|_0^{\pi} = - \frac{2}{\pi(n^2-1)} [(-1)^n + 1] = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ - \frac{4}{\pi(n^2-1)}, & \text{якщо } n \text{ парне;} \end{cases} \end{aligned}$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \dots \right).$$

ВПРАВИ. 1. Функція $f(x) = 2$ задана в інтервалі $(0; \pi)$. Розвинути дану функцію в ряд Фур'є, продовжити її в інтервалі $(-\pi; 0)$ непарно. Відповідь. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

2. Те саме проробити з функцією $f(x) = x$, заданою в $(0; 1)$, продовжити її в $(-1; 0)$ непарно. Відповідь. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \pi n x$.

3. Розвинути функцію $y = |\cos x|$ в ряд Фур'є. Відповідь. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \times \cos 2nx$.

3.8. Різні варіанти запису ряду Фур'є

Якщо позначити ряд Фур'є через R_{Φ} , то можна записати:

$$1) R_{\Phi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

$$2) R_{\Phi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right). \quad (3.32)$$

Позначивши $\frac{\pi n}{l} = \omega_n, n = \overline{1, \infty}$, дістанемо

$$R_{\Phi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x). \quad (3.33)$$

Величини ω_n, a_n, b_n — спектр функції $f(x)$; ω_n — частотна частина спектра; a_n, b_n — амплітудна частина спектра.

3.9. Наближене зображення функції за допомогою тригонометричного полінома

У курсах вищої математики кілька разів ставиться задача наближення функції $f(x)$ за допомогою якоїсь іншої функції $\phi(x)$. Так, у степеневих рядах ставлять задачу заміни функції многочленом Тейлора. Щоразу при цьому виникає задача оцінки припущеної помилки під час заміни функції іншою. Оцінку цієї помилки проводять за максимумом різниці $|f(x) - \phi(x)|$, яка називається відхиленням.

Проте чи завжди це вигідно? Розглянемо графік функції $f(x)$ (рис. 3.17). Нехай функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ — функції наближення. Яка з цих функцій точніше являє собою функцію $f(x)$? Зрозуміло,

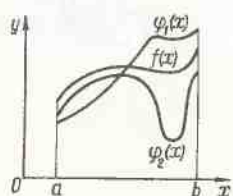


Рис. 3.17

що $\varphi_2(x)$, хоча відхилення функції $\varphi_2(x)$ більше, ніж $\varphi_1(x)$. У зв'язку з цим було запропоновано оцінювати помилку заміни даної функції на іншу або за середнім відхиленням, або за середнім квадратичним відхиленням. Для функції $f(x)$, визначеної на $[a; b]$, середнє відхилення визначається за формулою

$$\delta_1 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx,$$

а середнє квадратичне відхилення

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx.$$

Останнє розглянемо далі. Якщо за $\varphi(x)$ прийняти будь-який тригонометричний поліном

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^k (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

то δ визначатиметься вибором коефіцієнтів полінома α_n і β_n і числом його складових k . Можна довести, що квадратичне відхилення буде найменшим, якщо за коефіцієнти α_n і β_n вважати коефіцієнти Фур'є. Нехай $f(x)$ — це 2π -періодична функція, що задовольняє вимоги теорем 1 і 2 (п. 3.4), тоді

$$\delta_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right]^2 dx.$$

Якщо виконати операції, зазначені в цій формулі, то дістанемо

$$\delta_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2).$$

Оскільки $\delta_k^2 \geq 0$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.34)$$

Остання нерівність дістала назву **нерівності Бесселя**. Знак рівності в (3.34) поставимо, якщо $k \rightarrow \infty$. В результаті дістанемо **рівність Парсеваля–Ляпунова**. Цю рівність часто використовують як умову розвинення функції в ряд Фур'є. Як відомо, середнє значення $2l$ -періодичної функції за період

$$F_c = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

За аналогією вводять середнє квадратичне значення періодичної функції за період T :

$$F_{c.k} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}. \quad (3.35)$$

Іноді $F_{c.k}$ називають діючим значенням періодичної функції (в електротехніці, наприклад, діюче значення струму). Діюче значення $2l$ -періодичної функції можна оцінити знизу, використовуючи (3.34) і (3.35):

$$F_{c.k} \geq \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^k \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k F_n^2},$$

де $F_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

3.10. Елементи гармонічного аналізу. Оцінка залишку ряду Фур'є

Операція розвинення функції в тригонометричний ряд називається **гармонічним аналізом**. У практиці трапляється, що функція $f(x)$ або так задана аналітично, що від неї інтеграл в елементарних функціях не можна виразити, або задана таблицею, графіком. Труднощі в розвиненні такої функції в тригонометричний ряд зводяться до обчислення коефіцієнтів Фур'є, тобто інтегралів. Для обчислення

інтегралів використовуються відомі наближені методи. Так, якщо треба відшукати $\int_0^T f(x) dx$, то розбивають сегмент $[0; T]$ на m частин точками $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = T$ і беруть значення

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_m) = y_m.$$

Ці значення звичайно знаходять за таблицею і графіком. Інтеграл обчислюють наближено (за формулою прямокутників, трапеції і т. д.); використовуючи (3.28)–(3.31) і означення інтеграла, знаходять

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \approx \frac{2}{T} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta x_i;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega_n x dx \approx \frac{2}{T} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \cos \omega_n \xi_i \Delta x_i;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \omega_n x dx \approx \frac{2}{T} \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \sin \omega_n \xi_i \Delta x_i.$$

З метою спрощення сегмент $[0; T]$ звичайно поділяють на m рівних частин так, що $\Delta x_i = \frac{T}{m}$. Тепер можна застосувати, наприклад, формулу прямокутників (див. ч. 1, гл. 6, п. 13.1):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{m} [y_1 + y_2 + \dots + y_m].$$

Тоді

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \approx \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y_i;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega_n x dx \approx \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y_i \cos \omega_n x_i;$$

$$b_n \approx \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y_i \sin \omega_n x_i.$$

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є розроблено цілий ряд практичних рекомендацій, шаблонів.

Розглянемо питання про збіжність ряду Фур'є у випадку, коли функція $f(x)$ має похідну порядку $m+1$. Має місце така теорема.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ і всі її похідні до порядку m неперервні на сегменті $[-\pi, \pi]$, причому $f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(-\pi)$, $k = \overline{1, m}$, а похідна $f^{(m+1)}(x)$ кусково-неперервна на $[-\pi, \pi]$, то зрізана сума $S_n(x)$ ряду Фур'є для $f(x)$ відрізняється від $f(x)$ на величину $O\left(N^{-\frac{m+1}{2}}\right)$ при $N \rightarrow \infty$.

Так, якщо $m = 0$, то

$$f(x) - S_N(x) = O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Якщо $f(x)$ періодична, а кусково-гладка функція на $[-\pi, \pi]$ має скінченне число точок розриву, в яких $f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, і в точках неперервності має неперервну другу похідну, то в як завгодно малому околі точки розриву можна знайти такі точки, що при будь-якому $n > N$

$$\left| S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| > L \left| f(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| \approx L \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

де $L > 1$ — деяка стала.

Така аномальна поведінка зрізаних сум ряду Фур'є називається **явищем Гіббса**.

3.11. Комплексна форма ряду Фур'є для 2π - і 2ℓ -періодичної функції

Нехай дана 2π -періодична функція $y = f(x)$ кусково-гладка, або кусково-неперервна в $[-\pi, \pi]$. Тоді в точках неперервності

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Замінімо тут за формулами Ейлера $\cos nx$ і $\sin nx$:

$$\cos nx = \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2}; \quad \sin nx = \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j},$$

де $j = \sqrt{-1}$. Тоді

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} + b_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j}.$$

Об'єднаємо члени з e^{-jnx} і e^{jnx} :

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = e^{jnx} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jnx} \frac{a_n + jb_n}{2}.$$

Позначимо

$$\frac{a_n - jb_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + jb_n}{2} = c_{-n}.$$

Тоді

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{jnx} + c_{-n} e^{-jnx}.$$

Розглянемо суму зі скінченним числом доданків:

$$\sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^N (c_n e^{jnx} + c_{-n} e^{-jnx}) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jnx}.$$

Перейдемо до границі $N \rightarrow \infty$ і дістанемо

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnx}. \quad (3.36)$$

Коефіцієнт c_n з урахуванням (3.5), (3.8), (3.9) визначається так:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - j \sin nx) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-jnx} \, dx; \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} \, dx; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx. \quad (3.38)$$

Аналогічно можна знайти

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{jnx} \, dx. \quad (3.39)$$

Формули (3.37), (3.38), (3.39) можна записати у вигляді однієї:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} \, dx. \quad (3.40)$$

Вираз (3.36) називається **комплексною формою ряду Фур'є для 2π -періодичної функції**. Як зазначалось у п. 3.8, сукупність чисел a_n, b_n називається амплітудним спектром функції $f(x)$. Величини

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$$

також називаються **амплітудним і фазовим спектром функції $f(x)$** . Зображуються ці спектри у вигляді відрізків:

$$a_n = \psi(n); \quad b_n = \lambda(n); \quad F_n = \gamma(n).$$

Розглянемо комплексну форму ряду Фур'є для $2l$ -періодичної функції. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови теореми 1 чи 2 (див. п. 3.4) у скінченному інтервалі $T = 2l$. Тоді підстановка $x = \frac{l}{\pi} t$ дає функцію $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ з періодом 2π , яку можна подати рядом Фур'є виду (3.36) з коефіцієнтами (3.40):

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) e^{-int} \, dt.$$

Замінивши тут t на $\frac{\pi}{l} x$, матимемо

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{\pi n}{l} x}, \quad (3.41)$$

де

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-j \frac{\pi n}{l} x} \, dx. \quad (3.42)$$

Якщо згадати введені раніше позначення (див. формулу (3.33)) $\frac{\pi n}{l} = \omega_n$, $T = 2l$, то формули (3.41), (3.42) можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} x}; \quad (3.43)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-j\omega_n x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-j \frac{2\pi n}{T} x} dx. \quad (3.44)$$

Вирази (3.41), (3.42) називаються **комплексною формою ряду Фур'є для 2l-періодичної функції**. Числа $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$, $n = \overline{0, \infty}$ називаються **спектральними**, або **хвильовими числами функції f(x)**. Числа c_n називаються **комплексними амплітудами функції f(x)**. У будь-якої функції, що може бути розвинена в ряд Фур'є і визначена на скінченному інтервалі, **спектр є дискретним**.

Для ряду $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n x}$ побудуємо зрізану суму

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{j\omega_k x}.$$

Якщо існує границя $S_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для даного значення x , то кажуть, що ряд (3.43) збігається в розумінні головного значення, на відміну від випадків, коли існує

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{k=-m}^{k=n} c_k e^{j\omega_k x}$$

при m і n , що прямують до ∞ незалежно одне від одного.

§ 4. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ДОВІЛЬНОЮ ОРТОГОНАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

4.1. Поняття про простір Гільберта

Розглянемо дві функції: $f(x)$ і $g(x)$, що визначені у скінченному чи нескінченному проміжку: $\langle a, b \rangle$ ($a < b$).

Введемо поняття скалярного добутку двох функцій за формулою

$$(f \cdot g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (4.1)$$

Неважко перевірити, що всі властивості скалярного добутку векторів (див. ч. 1, гл. 1, п. 2.14) повністю переносяться й на скалярний добуток двох функцій. Наприклад, очевидно, що:

- 1) $(f \cdot g) = (g \cdot f)$;
- 2) $(f \cdot f) \geq 0$, причому $(f \cdot f) = 0$, якщо $f(x) = 0$, виключаючи, можливо, скінченне число точок x ;
- 3) $(\alpha f + \beta g) \cdot \varphi = \alpha(f \cdot \varphi) + \beta(g \cdot \varphi)$.

Функції, як відомо, можуть утворювати лінійний простір, а функції, для яких введено поняття скалярного добутку за (4.1), утворюють евклідовий простір. Скалярний добуток (4.1) є збіжним інтегралом, якщо

$$(f \cdot f) = \int_a^b f^2(x)dx < \infty. \quad (4.2)$$

Це впливає з того, що

$$2|f(x) \cdot g(x)| \leq f^2(x) + g^2(x) = (f \cdot f) + (g \cdot g).$$

Функції, що задовольняють умову (4.2), називаються **квадратично сумованими функціями**. Сукупність функцій, що задовольняють умову (4.2) зі скалярним добутком (4.1), називається **простором Гільберта** і позначається L_2 . Для утворення простору слід вказати базис. Для цього введемо поняття ортогональності функцій у просторі L_2 .

Якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0, \quad (4.3)$$

то функції називаються **ортогональними**. При цьому передбачається, що інтеграл (4.3) так само, як і (4.1), якщо він невласний, абсолютно збіжний.

Система функцій називається **ортогональною на деякому проміжку** $\langle a, b \rangle$, якщо дві будь-які функції, що належать цій системі, ортогональні. Наприклад:

1) система функцій

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (4.4)$$

на $[-\pi; \pi]$ ортогональна, оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0$$

для будь-яких $m, n = 0, \infty$ і $m \neq n$ (див. п. 3.3);

2) системи функцій

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos mx, \dots; \quad (4.5)$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx, \dots \quad (4.6)$$

ортогональні на сегменті $[0; \pi]$ (це перевірено в п. 3.5);

3) система функцій

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{\pi n}{l} x, \sin \frac{\pi n}{l} x, \dots \quad (4.7)$$

ортогональна на $[-l, +l]$;

4) якщо в (4.7) вважати, що $2l = T$, то дістанемо систему функцій

$$1, \cos \frac{2\pi}{T} x, \sin \frac{2\pi}{T} x, \cos \frac{4\pi}{T} x, \sin \frac{4\pi}{T} x, \dots, \cos \frac{2\pi n}{T} x, \sin \frac{2\pi n}{T} x, \dots,$$

ортогональну на $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$ або $[0; T]$;

5) системи функцій

$$\left\{ \cos \frac{\pi n}{l} x \right\} = 1, \cos \frac{\pi}{l} x, \dots, \cos \frac{\pi n}{l} x, \dots;$$

$$\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\} = \sin \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots, \sin \frac{\pi n}{l} x, \dots,$$

ортогональні на $[0, l]$.

Запишемо умову ортогональності будь-якої системи функцій на проміжку $\langle a, b \rangle$.

Нехай задана система функцій

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots \quad (4.8)$$

з абсолютно збіжним в $\langle a, b \rangle$ інтегралом (4.3). Якщо

$$\int_a^b g_i(x) \cdot g_j(x) dx = 0 \quad \text{для } i \neq j, \quad (4.9)$$

а

$$\int_a^b g_i^2 dx < +\infty \quad \text{для } i = j,$$

то система функцій $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$ називається ортогональною на проміжку $\langle a, b \rangle$. Позначимо

$$(g_i \cdot g_i) = \int_a^b g_i^2(x) dx = \lambda_i. \quad (4.10)$$

Тоді з (4.2) матимемо $\lambda_i > 0$. За умови

$$(g_i \cdot g_i) = 1 \quad (i = \overline{1, \infty}) \quad (4.11)$$

система (4.8) називається **нормованою**. Якщо умови (4.11) не виконані, то при бажанні можна перейти до системи функцій

$\left\{ \frac{g_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \right\}$, яка вже буде нормованою. Так, якщо кожену функцію (4.4) поділити на $\sqrt{\pi}$, то вона буде нормованою. Система (4.8) називається ортонормованою системою функцій тоді, коли вона задовольняє умови (4.9) і (4.11), тобто коли

$$(g_i \cdot g_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{для } x \in \langle a, b \rangle.$$

Будь-яка скінченна ортогональна система функцій $g_1, g_2, \dots, g_N \in L_2$ лінійно незалежна (див. гл. 1, п. 5.3–5.5), тобто з умови

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(x) = 0 \quad \text{для } x \in \langle a, b \rangle \quad (4.12)$$

впливає, що $\alpha_i = 0$. Справді, помноживши (4.12) на $g_j(x)$ та інтегруючи, з урахуванням (4.10) знаходимо

$$\alpha_i \lambda_i = 0, \text{ де } \lambda_i \neq 0, i = \overline{1, N}.$$

Тому, якщо умова (4.12) виконується для будь-якого N , то система нескінченного числа функцій $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$, що задовольняють умови (4.9), (4.10), є лінійно незалежною.

Базисом гільбертового простору L_2 називатимемо будь-яку нескінченну послідовність функцій $\{g_n(x)\}$, що задовольняє такі умови:

- 1) функції $g_n(x)$ лінійно незалежні для $x \in \langle a, b \rangle$.
- 2) послідовність функцій $\{g_n(x)\}$ має повноту в тому розумінні, що не існує ніякої функції, яка була б ортогональна одночасно до всіх функцій послідовності;
- 3) будь-яку функцію $f(x)$, що належить L_2 , можна виразити через функції $\{g_n(x)\}$ у вигляді ряду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x), \text{ для } x \in \langle a, b \rangle.$$

Порівняємо означення базису для n -вимірного евклідового простору (ч. 1, гл. 1, п. 2.13).

З означення базису гільбертового простору випливає, що базисом може бути лише ортогональна система функцій. Число функцій, що входять у базис, нескінченно велике. Внаслідок цього розмірність гільбертового простору вважається нескінченною. При заданні базису, крім функцій, що входять у базис, треба вказувати область інтегрування.

4.2. Поліноми Лежандра

Як приклади ортогональних систем функцій вище подано лише тригонометричні функції. Ортогональні системи можуть утворюватися й іншими функціями. Розглянемо таку систему функцій:

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots, \quad x \in [-1, 1].$$

Побудуємо на базі цих функцій ортогональну систему многочленів (поліномів).

Функції 1 та x ортогональні на $x \in [-1, 1]$. Справді,

$$\int_{-1}^{+1} 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{+1} = 0.$$

Тому приймемо $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$. Проте x^2 вже не ортогональний до 1, оскільки

$$\int_{-1}^{+1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

За $P_2(x)$ візьмемо лінійну комбінацію $1, x, x^2$, тобто $P_2(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c$. Доберемо коефіцієнти a_1, b_1, c так, щоб $P_2(x)$ було ортогональним $P_0(x) = 1$ і $P_1(x)$, тобто

$$\int_{-1}^{+1} (a_1 x^2 + b_1 x + c) \cdot 1 dx = 0; \quad \int_{-1}^{+1} (a_1 x^2 + b_1 x + c) x dx = 0.$$

Звідси знаходимо, що $P_2(x) = (-3x^2 + 1)c$. Значення c доберемо так, щоб $P_2(1) = 1$, тоді $c = -\frac{1}{2}$, отже, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Поліном $P_3(x)$ шукаємо у вигляді

$$P_3(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d,$$

де коефіцієнти визначаються з умови ортогональності $P_3(x)$ до $1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ і $P_3(1) = 1$. Як наслідок дістанемо $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. Аналогічно можна побудувати $P_4(x), P_5(x), \dots$.

Побудовані поліноми $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ називаються **поліномами Лежандра**.

Таким чином, вказано такі послідовності конкретних функцій, що задовольняють визначення базису в гільбертовому просторі.

1. $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, x \in [-\pi, \pi]$.
2. $1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots, \sin n \frac{\pi}{l} x, \cos n \frac{\pi}{l} x, \dots, x \in [-l, l]$.

$$3. 1, \cos \frac{2\pi}{T} x, \sin \frac{2\pi}{T} x, \cos \frac{4\pi}{T} x, \sin \frac{4\pi}{T} x, \dots, \cos \frac{2n\pi}{T} x, \sin \frac{2n\pi}{T} x, \dots,$$

$$x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \text{ або } x \in [0, T].$$

$$4. 1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots, x \in [0, \pi].$$

$$5. \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots, x \in [0, \pi].$$

$$6. 1, \cos \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots, \cos \frac{n\pi}{l} x, \dots, x \in [0, l].$$

$$7. \sin \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots, \sin \frac{n\pi}{l} x, \dots, x \in [0, l].$$

$$8. P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots \text{ — поліноми Лежандра, } x \in [-1, +1].$$

4.3. Ряди за ортогональними функціями

Використовуючи наведені вище системи функцій, можна написати такі розвинення для функцій $f(x)$, що належать L_2 .

$$1. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, x \in [-\pi, \pi].$$

$$2. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, x \in [-l, l].$$

$$3. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} x, x \in [0, T].$$

$$4. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, x \in [0, \pi], \text{ де } f(x) \text{ — парна функція.}$$

$$5. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in [0, \pi], \text{ де } f(x) \text{ — непарна функція.}$$

$$6. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), x \in [-1, 1].$$

$$7. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x), x \in [a, b]. \quad (4.13)$$

Тому, якщо ряд (4.13) містить у собі всі наведені вище ряди 1–6, то далі йтиметься про ряд (4.13). Насамперед встановимо, як збігається ряд (4.13) до функції $f(x)$.

За умовою (4.2) можна записати

$$\int_a^b f^2(x) dx < +\infty, \text{ або } \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x) \right)^2 dx < +\infty. \quad (4.14)$$

Однак

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x) \right)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n^2 g_n^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n < +\infty, \quad (4.15)$$

$$\text{де } \lambda_n = \int_a^b g_n^2(x) dx.$$

Отже, ряд, складений з коефіцієнтів ряду (4.13), збігається, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=0}^k c_n g_n(x) \right)^2 dx = 0.$$

Замість останнього виразу використовують інший запис:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=0}^k c_n g_n(x) \right)^2 dx} = 0. \quad (4.16)$$

Про цей запис кажуть, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x)$ збігається до функції

$f(x)$, що належить L_2 в середньому квадратичному. Тим самим доведено, що в просторі L_2 будь-який ряд за ортогональними функціями збігається до функції $f(x)$, що належить L_2 в середньому квадратичному. Те саме стосується рядів 1–6. Ряд (4.13) називається **узагальненим рядом Фур'є**, а його коефіцієнти c_n — **узагальненими коефіцієнтами ряду**. Ряди 1–6 називаються просто **рядами Фур'є**, a_0, a_n, b_n — **коефіцієнтами Фур'є**.

Поставимо завдання визначення коефіцієнтів c_n ряду (4.13). Вважатимемо, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x) = f(x) \text{ для } x \in [a, b],$$

збіжний до $f(x)$ на $[a, b]$ рівномірно, тобто виконується умова

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k c_n g_n(x) \right| = 0, x \in [a, b]. \quad (4.17)$$

Тоді коефіцієнти c_n однозначно визначаються множенням (4.13) на $g_n(x)$ та інтегруванням добутку

$$\int_a^b f(x)g_n(x)dx = c_n \int_a^b g_n^2(x)dx;$$

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)g_n(x)dx}{\int_a^b g_n^2(x)dx}. \quad (4.18)$$

Використовуючи формулу (4.18), з урахуванням базисів 1–5 легко знайти коефіцієнти a_0, a_n, b_n для рядів 1–5. Насамперед нагадаємо, що

$$\int_a^b g_n^2(x)dx = \lambda_n. \quad (4.18a)$$

Тоді для ряду 1:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx =$$

$$= \pi + \frac{1}{2} \left. \frac{\sin 2nx}{2n} \right|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi.$$

Для ряду 2:

$$\int_{-l}^l \cos^2 x \frac{n\pi}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{1 + \cos \frac{2n\pi}{l} x}{2} dx = l,$$

$$\int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \frac{1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x}{2} dx = l.$$

Ряд 3 дістанемо з ряду 2 при $T = 2l$, тому

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2n\pi}{T} x dx = \frac{1}{2} T; \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} T.$$

Для рядів 4, 5:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \pi,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \pi.$$

Тепер, використовуючи ці результати і базиси 1–7, матимемо формули для коефіцієнтів у рядах 1–7. Ці формули дістали раніше, але трохи іншим шляхом: для коефіцієнтів ряду 1: (3.5), (3.8), (3.9); для рядів 4, 5: (3.12)–(3.14); для рядів 3, 4: (3.16)–(3.18), (3.29)–(3.31).

Для ряду 7 формулу (4.18) з урахуванням позначень (4.18a) звичайно записують у вигляді

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x)g_n(x)dx.$$

Нехай відомо, що функція $f(x)$ не належить простору Гільберта. Чи можливий її розвиток за базисами простору Гільберта? Відповідь, природно, позитивна, тобто можна побудувати ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x)$, $x \in [a, b]$, в якому визначена функція $f(x)$, і

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x); \quad c_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x)g_n(x)dx.$$

Щоб замінити рівністю відповідність між рядом і функцією, треба дослідити, чи збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, а якщо збігається, то за яких умов можна вважати

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x).$$

При цьому головну роль відіграють теореми Діріхле (див. п. 3.4). Говорячи про збіжність ряду з ортогональних функцій до функції $f(x)$, можна вести мову про абсолютну, умовну, рівномірну збіжність.

Тут також вводять збіжності залежно від виду відхилення, введеного у п. 3.9, — середнього і середнього квадратичного. Ряд (4.13) збігається до функції $f(x)$ в середньому, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=0}^k c_n g_n(x) \right| dx = 0. \quad (4.19)$$

Якщо ряд збігається рівномірно на $[a, b]$ до $f(x)$, то він збігається і в середньому, і в середньому квадратичному. Згадаємо, що в п. 3.9 розглядалася збіжність ряду Фур'є в середньому квадратичному. Для функцій $g_n(x)$ і $f(x)$ можна дістати нерівність Бесселя аналогічно тому, як це робилось у п. 3.9 для ортогональної системи функцій типу (4.4). Для будь-якої системи функцій $\{g_n(x)\}$ нерівність Бесселя запишеться у вигляді

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \sum_{n=0}^k c_n^2 \int_a^b g_n^2(x) dx. \quad (4.20)$$

При $k \rightarrow \infty$ (4.20) переходить у рівність Парсеваля–Ляпунова

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \int_a^b g_n^2(x) dx, \quad (4.21)$$

справедливу для всіх функцій L_2 . Для ряду (3.2) рівність (4.21) має вигляд

$$\int_a^b f^2(x) dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (4.22)$$

звідки з урахуванням (4.2) випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (4.23)$$

Введемо таке означення. Ортогональна система функцій (4.8) називається повною в L_2 , якщо ряд Фур'є (4.17) для будь-якої функції $f(x) \in L_2$ збігається в розумінні середнього квадратичного до функції $f(x)$, тобто має місце рівність (4.16). Однак рівність (4.16) справджується тоді, коли має місце рівність (4.21), звідси випливає теорема. **Теорема.** Для того щоб ортогональна система (4.8) була повною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої функції $f(x) \in L_2$ виконувалась рівність (4.21).

5.1. Інтеграл Фур'є

Раніше було показано, що для будь-якої кусково-гладкої або кусково-монотонної функції, визначеної на якомусь скінченному інтервалі, можна знайти відповідний ряд Фур'є. А чи можна висловити таку саму або аналогічну думку відповідно функцій, визначених не на скінченному інтервалі, а всюди на числовій осі від $-\infty$ до $+\infty$. Виявляється, що можна. З цією метою вважатимемо, що ряд Фур'є зображає функцію на $[-l, +l]$. Підставивши замість коефіцієнтів ряду a_n і b_n їхні вирази (3.16), (3.17), (3.18), знайдемо

$$\begin{aligned} R_{\Phi} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos \omega_n t \cos \omega_n x dt + \int_{-l}^{+l} f(t) \sin \omega_n t \sin \omega_n x dt \right); \\ R_{\Phi} &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos \omega_n (t-x) dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Щоб дістати зображення функції, визначеної всюди на числовій осі у вигляді ряду, треба у виразі (5.1) перейти до границі при $l \rightarrow \infty$. Для цього позначимо

$$\omega_n = \frac{\pi}{l} n = u_n, \quad (5.2)$$

тоді

$$\omega_{n+1} = \frac{\pi}{l} (n+1) = u_{n+1}. \quad (5.3)$$

Побудуємо на числовій осі послідовність (рис. 3.18)

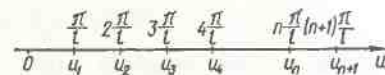


Рис. 3.18

Позначимо $u_{n+1} - u_n = \Delta u_n$. Разом з тим

$$\Delta u_n = \frac{\pi}{l} (n+1) - \frac{\pi}{l} n = \frac{\pi}{l}; \quad \Delta u_n = \frac{\pi}{l}, \quad (5.4)$$

тобто, якщо $\Delta u_n \rightarrow 0$, то $l \rightarrow \infty$. Далі знадобиться одне означення, яке і введемо.

Функція називається **абсолютно інтегрованою**, якщо інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ дорівнює скінченному числу Q , тобто збігається:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = Q.$$

Тепер повернемося до розвинення (5.1) і перейдемо в ньому до границі при $l \rightarrow \infty$. Розглянемо перший доданок ряду

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(t) dt = \frac{\Delta u_n}{2\pi} \int_{-l}^{+l} f(t) dt.$$

Вважаємо, що функція абсолютно інтегровна. Тоді

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\Delta u_n}{2\pi} \int_{-l}^{+l} f(t) dt \leq \lim_{\Delta u_n \rightarrow 0} \frac{\Delta u_n}{2\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |f(t)| dt = 0, Q = 0.$$

Тепер розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos \omega_n(t-x) dt.$$

Оскільки $\frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi}$ і $\omega_n = u_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos \omega_n(t-x) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta u_n}{\pi} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos u_n(t-x) dt.$$

Покладемо

$$\int_{-l}^{+l} f(t) \cos u_n(t-x) dt = F(u_n, x),$$

вважаючи x фіксованим. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos u_n(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(u_n, x) \Delta u_n;$$

$$\lim_{\Delta u_n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} F(u_n, x) \Delta u_n \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(u, x) du,$$

де

$$F(u, x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos u_n(t-x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt.$$

Невласний інтеграл взято тому, що спектр u_n розміщений всюди на числовій осі праворуч від нуля:

$$\lim_{\Delta u_n \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \cos u_n(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt \right] du. \quad (5.5)$$

Вираз (5.5) називається **інтегралом Фур'є**. Таким чином, функцію, що задана всюди на числовій осі, можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt \right] du \quad (5.6)$$

у точках неперервності. У точках розриву функції $f(x)$ ліва частина виразу (5.5) дорівнює середньому значенню стрибка на $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$. Позначивши вираз (5.5) через I_{Φ} , дістанемо

$$I_{\Phi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt \right] du =$$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{— у точках неперервності,} \\ \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)] & \text{— у точках розриву.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Таким чином, якщо функція $y = f(x)$, визначена всюди на числовій осі, абсолютно інтегровна і на будь-якому скінченному проміжку кусково-монотонна або кусково-гладка, то для функції існує інтеграл Фур'є і виконується рівність (5.7). Якщо $f(x) \in L_2$, то $f(x)$ є абсолютно інтегрованою і для неї справедлива рівність (5.7).

5.2. Різні форми зображення інтеграла Фур'є

Запишемо в (5.6) $\cos u(t-x)$ у вигляді

$$\cos u(t-x) = \cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux.$$

Тоді в точках неперервності $f(x)$ матимемо

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux] du, \quad (5.8)$$

де

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut dt; \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut dt. \quad (5.9)$$

Якщо $f(x)$ — парна, то $b(u) = 0$, а

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t)\cos ut dt \quad \text{і} \quad f(x) = \int_0^{+\infty} a(u)\cos ux du$$

або

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ux \left[\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut dt \right] du. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) називається **косинус-формулою Фур'є**.

Якщо $f(x)$ парна, абсолютно інтегровна, визначається всюди на числовій осі і на будь-якому скінченному інтервалі кусково-монотонна або кусково-гладка, то в точках неперервності $f(x)$ справджується рівність (5.10). Якщо $f(x)$ задовольняє названі умови, але непарна, то

$$a(u) = 0; \quad b(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t)\sin ut dt; \quad (5.11)$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(u)\sin ux du$$

або

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ux \left[\int_0^{+\infty} f(t)\sin ut dt \right] du. \quad (5.12)$$

Остання формула називається **синус-формулою Фур'є**.

5.3. Комплексна форма інтеграла Фур'є

Замінімо у формулі (5.7) $\cos ux, \sin ux$, що входять до складу $\cos u(t-x)$, за формулами Ейлера. Тоді з огляду на (5.9) матимемо

$$I_{\Phi} = \int_0^{+\infty} \left[e^{jux} \frac{a(u) - jb(u)}{2} + e^{-jux} \frac{a(u) + jb(u)}{2} \right] du. \quad (5.13)$$

Позначимо

$$\frac{a(u) - jb(u)}{2} = c(u); \quad \frac{a(u) + jb(u)}{2} = c(-u) \quad (5.14)$$

і, замінивши тут $a(u), b(u)$ за формулами (5.9), знайдемо

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jut} dt; \quad c(-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{jut} dt. \quad (5.15)$$

Тепер (5.13) можна записати у вигляді

$$I_{\Phi} = \int_0^{+\infty} [c(u)e^{jux} + c(-u)e^{-jux}] du. \quad (5.16)$$

У точках неперервності $f(x)$: $I_{\Phi} = f(x)$. Розглянемо

$$\int_0^A [c(u)e^{jux} + c(-u)e^{-jux}] du = I_{\Phi}(A),$$

де A — скінченне число.

Зобразимо $I_{\Phi}(A)$ у вигляді суми інтегралів:

$$I_{\Phi}(A) = \int_0^A c(u)e^{jux} du + \int_0^A c(-u)e^{-jux} du.$$

Візьмемо $v = -u$, тоді

$$I_{\Phi}(A) = \int_0^A c(u)e^{jux} du - \int_A^0 c(v)e^{-jvx} dv.$$

Вважаючи тепер $v = u$, дістанемо

$$I_{\Phi}(A) = \int_{-A}^A c(u)e^{jux} du. \quad (5.17)$$

Вираз (5.16) за означенням невласного інтеграла можна записати у вигляді

$$I_{\Phi} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A [c(u)e^{jux} + c(-u)e^{-jux}] du.$$

Використовуючи (5.17), матимемо

$$I_{\Phi} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} c(u)e^{jux} du = \int_{-\infty}^{+\infty} c(u)e^{jux} du. \quad (5.18)$$

Вираз (5.18) називається **інтегралом Фур'є в комплексній формі**. Вважаючи, що невласний інтеграл (5.18) існує, знайдемо

$$I_{\Phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} c(u)e^{jux} du = f(x)$$

в точках неперервності $f(x)$. Коефіцієнт $c(u)$ обчислюється, як видно з (5.15), за формулою

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jut} dt. \quad (5.19)$$

Підставивши цей вираз у (5.18), в точках неперервності $f(x)$ дістанемо

$$I_{\Phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ju(t-x)} dt \right] du = f(x); \quad (5.20)$$

$$I_{\Phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jut} dt \right] du = f(x). \quad (5.21)$$

Рівність (5.21) справджується і для $f(x) \in L_2$.

5.4. Перетворення Фур'є

Вираз у квадратних дужках (5.21) є функцією від u . Позначимо цю функцію $F(ju)$ або $S(ju)$:

$$F(ju) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jut} dt. \quad (5.22)$$

Тоді з урахуванням (5.21)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(ju)e^{jux} du. \quad (5.23)$$

Вирази (5.22), (5.23) називаються відповідно **прямим і оберненим перетвореннями Фур'є**. Якщо функція $f(t) = 0$ при $t < 0$, то дістанемо однобічне перетворення Фур'є

$$F(ju) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-jut} dt; \quad (5.24)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(ju)e^{jux} du. \quad (5.25)$$

Так, звертаючись до формул (5.9)–(5.12), можна ввести однобічні косинус- і синус-перетворення Фур'є:

$$F_k(ju) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos ut dt; \quad (5.26)$$

$$F_c(ju) = \int_0^{+\infty} f(t)\sin ut dt \quad (5.27)$$

і обернене:

$$f_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_k(ju)\cos ux du; \quad (5.28)$$

$$f_c(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(ju)\sin ux du. \quad (5.29)$$

Функції $F(ju)$, $F_k(ju)$, $F_c(ju)$ ще називаються **зображеннями за Фур'є функції**, або **спектральною густиною функції $f(t)$** . Рівності (5.23)–(5.29) зберігають силу і для $f(x) \in L_2$.

5.5. Зв'язок між перетворенням Фур'є і перетворенням Лапласа

Раніше було введено перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (5.30)$$

при цьому на $f(t)$ було накладено такі умови:

1) $f(t)$ визначена і неперервна на числовій осі $t \in (-\infty, +\infty)$, за виключенням скінченного числа точок розриву не вище першого роду на будь-якому скінченному проміжку осі t ;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) існують два числа: $M > 0$ і $s_0 \geq 0$ такі, що для всіх $t \geq 0$

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}. \quad (5.31)$$

Якщо відмовитися від умов 2) і 3), що накладаються на функцію $f(t)$, і вважати, що $f(t)$ набуває довільних значень при $t < 0$, то замість (5.30) можна розглянути

$$S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.32)$$

Вираз (5.30) називається однобічним, а (5.32) — двобічним перетворенням Лапласа.

Якщо в (5.30) і (5.32) вважати $p = a + ju$ і $\operatorname{Re} p = a = 0$, то матимемо

$$S_0(ju) = \int_0^{+\infty} e^{-jut} f(t) dt; \quad (5.33)$$

$$S_q(ju) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jut} f(t) dt \quad (5.34)$$

— відповідно однобічне і двобічне перетворення Фур'є, які вище позначено через $F(ju)$.

Для існування перетворення Фур'є функція $f(t)$ має задовольняти такі умови:

1) визначена на всій осі $t \in (-\infty, +\infty)$ і неперервна на цій осі, за винятком лише скінченного числа точок розриву не вище першого роду на будь-якому скінченному проміжку осі t ;

2) будь-який скінченний проміжок осі t можна поділити на скінченне число проміжків, у кожному з яких функція або кусково-гладка, або кусково-монотонна (умови Діріхле, див. п. 3.4);

3) для перетворення Фур'є функція має бути абсолютно інтегрованою:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = Q, \quad (5.35)$$

а це можливо, якщо

$$|f(t)| < M e^{-s_0 |t|}. \quad (5.36)$$

Звідси зауважимо, що з існування перетворення Лапласа не випливає існування перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є існує для вужчого класу функцій, ніж перетворення Лапласа. Так, перетворення Фур'є для сталої і гармонічних функцій не існує. Справді,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c dt = \infty \text{ для } f(t) = \text{const} = c,$$

а

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin t| dt = \infty \text{ для } f(t) = \sin t.$$

Якщо $f(t) = 0$ при $t < 0$ і перетворення Фур'є для $f(t)$ існує, то його можна дістати з таблиці оригіналів та зображень (див. гл. 2 §13) для перетворення Лапласа шляхом заміни p на ju . Однак при цьому завжди слід попередньо впевнитися в тому, що $F(p)$ не обертається на нескінченність праворуч від уявної осі і на ній самій.

Якщо $f(t) \neq 0$ при $t < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jut} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{-jut} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-jut} f(t) dt,$$

але

$$\int_{-\infty}^0 e^{-jut} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{jut} f(-t) dt.$$

Ввівши позначення

$$F_1(ju) = \int_0^{+\infty} e^{-jut} f(t) dt; \quad F_2(-ju) = \int_0^{+\infty} e^{jut} f(-t) dt,$$

дістанемо

$$F(ju) = F_1(ju) + F_2(-ju).$$

Іноді спектральну густину виражають через синус- і косинус-перетворення:

$$S_0(ju) = \int_0^{+\infty} e^{-jut} f(t) dt = \int_0^{+\infty} (\cos ut - j \sin ut) f(t) dt = F_c(ju) - jF_s(ju).$$

У зв'язку з викладеним можна вказати два шляхи відшукування спектральної густини: 1) безпосереднє обчислення інтеграла (5.34); 2) використання перетворення Лапласа.

5.6. Безпосереднє обчислення спектральної густини для абсолютно інтегровних функцій

Спектральну густину $F(j\omega)$ в загальному випадку можна уявити як деяку комплексну функцію дійсного змінного ω в показниковій формі

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\psi(\omega)}, \quad (5.37)$$

де $|F(j\omega)|$ — амплітудне значення спектральної густини, а $\psi(\omega)$ — її фазовий кут, або в алгебраїчній формі

$$F(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega). \quad (5.38)$$

Тоді

$$|F(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}; \quad (5.39)$$

$$\psi(\omega) = -\arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}. \quad (5.40)$$

Для безпосереднього обчислення спектральної густини знаходять інтеграл (5.22), а потім за (5.39) і (5.40) визначають $|F(j\omega)|$ і $\psi(\omega)$.

Приклади. 1. Знайти спектральну густину прямокутного імпульсу (рис. 3.19).

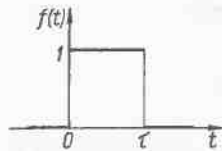


Рис. 3.19

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0; \\ 1, & \text{якщо } 0 < t < \tau; \\ 0, & \text{якщо } t > \tau. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\tau} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau} - 1) = \\ &= \frac{1}{\omega} (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau - 1); \end{aligned}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{\omega} [\sin \omega\tau + j(\cos \omega\tau - 1)].$$

З останнього виразу маємо

$$a(\omega) = \frac{\sin \omega\tau}{\omega}; \quad b(\omega) = \frac{\cos \omega\tau - 1}{\omega}.$$

Амплітудне значення спектральної густини

$$|F(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\sin^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau - 2 \cos \omega\tau + 1};$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \sqrt{2 - 2 \cos \omega\tau} = \frac{1}{\omega} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}};$$

$$|F(j\omega)| = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}.$$

Фазовий кут

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= -\arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)} = -\arctg \frac{\cos \omega\tau - 1}{\sin \omega\tau} = \arctg \frac{2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \frac{\omega\tau}{2}} = \\ &= \arctg \operatorname{tg} \frac{\omega\tau}{2} = \frac{\omega\tau}{2}, \end{aligned}$$

тобто

$$\psi(\omega) = \frac{\omega\tau}{2}.$$

Нарешті, можна записати

$$F(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

2. Дана функція (рис. 3.20)

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{якщо } -1 < t \leq -\frac{1}{2}; \\ 1, & \text{якщо } |t| < \frac{1}{2}; \\ -t+1, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq t < 1; \\ 0, & \text{якщо } |t| \geq 1. \end{cases}$$

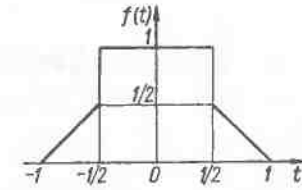


Рис. 3.20

Знайти спектральну густину.

Розв'язання. Для розв'язання задачі розіб'ємо нескінченний проміжок інтегрування на п'ять частин:

$$(-\infty; -1), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right), (1; +\infty);$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (1+t) e^{-j\omega t} dt + \\ &+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) e^{-j\omega t} dt + \int_1^{+\infty} 0 \cdot e^{-j\omega t} dt; \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (1+t) e^{-j\omega t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t) e^{-j\omega t} dt; \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)e^{-jut} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-jut} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^{-jut} dt;$$

$$F(j\omega) = \int_{-1}^{+1} e^{-jut} dt + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} t e^{-jut} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^{-jut} dt;$$

$$\int_{-1}^{+1} e^{-jut} dt = -\frac{1}{ju} e^{-jut} \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{ju} (e^{-ju} - e^{ju}) = \frac{2}{u} \sin u.$$

Решту інтегралів знайдемо, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$\int t e^{-jut} dt = \left[\begin{array}{l} t = W; dv = e^{-jut} dt \\ dt = dW; v = -\frac{1}{ju} e^{-jut} \end{array} \right] = -\frac{te^{-jut}}{ju} + \int \frac{e^{-jut}}{ju} dt =$$

$$= \frac{jt e^{-jut}}{u} + \frac{e^{-jut}}{u^2};$$

$$\int t e^{-jut} dt = \frac{1}{u^2} e^{-jut} (jut + 1);$$

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} t e^{-jut} dt = \frac{1}{u^2} e^{-jut} (jut + 1) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{u^2} \left[e^{\frac{ju}{2}} \left(-\frac{ju}{2} + 1 \right) - e^{ju} (-ju + 1) \right];$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t e^{-jut} dt = \frac{1}{u^2} \left[e^{-ju} (ju + 1) - e^{-\frac{ju}{2}} \left(\frac{ju}{2} + 1 \right) \right];$$

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} t e^{-jut} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^{-jut} dt = \frac{1}{u^2} \left(e^{\frac{ju}{2}} + e^{-\frac{ju}{2}} \right) + \frac{j}{2u} \left(-e^{\frac{ju}{2}} + e^{-\frac{ju}{2}} \right) -$$

$$-\frac{2}{u} \frac{e^{ju} - e^{-ju}}{2j} - \frac{1}{u^2} (e^{ju} + e^{-ju}) = \frac{2}{u^2} \cos \frac{u}{2} + \frac{1}{u} \sin \frac{u}{2} - \frac{2}{u} \sin u - \frac{2}{u^2} \cos u.$$

Вираз для спектральної густини тепер можна записати у вигляді

$$F(j\omega) = \frac{2}{u} \sin u + \frac{2}{u^2} \cos \frac{u}{2} + \frac{1}{u} \sin \frac{u}{2} - \frac{2}{u} \sin u - \frac{2}{u^2} \cos u;$$

$$F(j\omega) = \frac{2}{u^2} \left(\cos \frac{u}{2} - \cos u \right) + \frac{1}{u} \sin \frac{u}{2}.$$

5.7. Відшукування спектральної густини для неабсолютно інтегровних функцій

Спектральна густина (пряме перетворення Фур'є) для неабсолютно інтегровних функцій не існує, оскільки не виконується умова 3) його існування (див. п. 5.5). Однак при цьому перетворення Лапласа існує. Пряме перетворення Фур'є потрібне в таких двох випадках.

1. Для полегшення процесу розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. Це можливо, якщо забезпечені умови відновлення функції за формулами (5.23) або (5.25). Отже, мають існувати як пряме, так і обернене перетворення.

2. Для дослідження амплітудної та частотної характеристик неперіодичної функції-оригіналу, визначеної всюди на числовій осі, що досить часто потрібно для практичної мети, наприклад в автоматичній електромеханіці. У цьому разі не потрібно обернене перетворення.

У зв'язку з викладеним введемо такі означення спектральної густини для неабсолютно інтегровних функцій.

Якщо для заданої функції $y = f(t)$ існує неперервне зображення за Фур'є $F(j\omega)$, то спектральною густиною цієї функції назвемо зображення функції за Лапласом при $p = j\omega$.

Звернімося до випадку, коли треба знайти не лише пряме, але й обернене перетворення функцій $f(t)$, що неабсолютно інтегровні, типу $f_1(t) = \text{const}$, $f_2(t) = \sin t$, $f_3(t) = \cos t$. Введемо таку функцію $\varphi(t) = f(t) e^{-\alpha|t|}$, де $\alpha > 0$, яка за рахунок множника $e^{-\alpha|t|}$ стає абсолютно інтегровною.

Спектральною густиною $F_1(j\omega)$ неабсолютно інтегровної функції $f(t)$ називаємо границю від спектральної густини $F_2(j\omega, \alpha)$ абсолютно інтегровної функції

$$\varphi(t, \alpha) = f(t) e^{-\alpha|t|} \text{ при } \alpha \rightarrow 0;$$

$$F_1(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_2(j\omega, \alpha).$$

Нагадаємо, що цей граничний перехід здійснюється в просторі зображень, а не в просторі, де визначено функції $\varphi(t, \alpha)$ і $f(t)$. Щоб дістати функцію $f(t)$ за функцією $\varphi(t, \alpha)$, використаємо границю

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(t, \alpha) = f(t).$$

Приклади до цього означення наведемо в наступному пункті.

5.8. Зображення функції Дірака

Функцією Дірака $\delta(t)$ або дельта-функцією називається функція, що визначається такою умовою:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \neq 0; \\ \infty, & \text{якщо } t = 0, \text{ але } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \end{cases} \quad (5.41)$$

За допомогою такої функції описуються удари, густина маси в точці, густина джерела теплоти в точці, сила, прикладена в точці, точковий електричний заряд і т. д. За допомогою аналітичних дійсних функцій δ -функцію можна уявити, наприклад, так.

Розглянемо функцію з параметром λ :

$$\gamma(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)}. \quad (5.42)$$

Знайдемо

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \neq 0; \\ \infty, & \text{якщо } t = 0. \end{cases}$$

Однак

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} dt &= \frac{1}{\pi} \arctg \lambda t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} [\arctg \infty - \arctg(-\infty)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma(t, \lambda) = \delta(t). \quad (5.43)$$

Зміщена функція Дірака $\delta(t - \tau)$ визначається рівністю

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \neq \tau; \\ \infty, & \text{якщо } t = \tau, \text{ але } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \end{cases} \quad (5.44)$$

Знайдемо похідну по t від функції (5.42):

$$\gamma'_t(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{-2\lambda^2 t}{(1 + \lambda^2 t^2)^2} \right) = -\frac{2\lambda^3 t}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)^2}; \quad (5.45)$$

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma'_t(t, \lambda)$ називається похідною від δ -функції

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma'_t(t, \lambda) = \delta'(t). \quad (5.46)$$

Аналогічно можна побудувати такі похідні від $\delta(t)$. Розглянемо функцію

$$\alpha(t, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \lambda t. \quad (5.47)$$

Знайдемо границю

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha(t, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases} \quad (5.48)$$

Таким чином, дістали функцію Хевісайда

$$\sigma(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha(t, \lambda). \quad (5.49)$$

Знайдемо похідну від $\alpha(t, \lambda)$ по t :

$$\alpha'_t(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} = \gamma(t, \lambda). \quad (5.50)$$

Перейдемо до границі

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha'_t(t, \lambda) = \sigma'(t).$$

Таким чином,

$$\sigma'(t) = \delta(t). \quad (5.51)$$

Отже, показано зв'язок між функціями $\sigma(t)$ і $\delta(t)$. Вкажемо ще на так звану фільтрувальну властивість δ -функції. Вона являє собою вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (5.52)$$

Справді,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(t)\delta(t-\tau)dt,$$

де $\varepsilon > 0$. Враховуючи означення $\delta(t-\tau)$ і $\varepsilon \rightarrow 0$, бачимо, що функцію $f(t)$ можна обчислювати лише в точці τ , тому

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)dt = f(\tau).$$

Зокрема,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0).$$

Іноді вираз (5.52) приймають як означення δ -функції. Тепер знайдемо спектральну густину $L[\delta(t)]$:

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1; \quad (5.53)$$

$$L[\delta(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega\tau}.$$

Зауважимо, що δ -функція належить L_2 , тобто абсолютно інтегровна. Її можна розвинути в ряд (4.13).

Приклади. 1. Знайти спектральну густину суми двох зміщених δ -функцій $\delta(t-\tau)$ і $\delta(t+\tau)$.

Розв'язання.

$$L[\delta(t-\tau) + \delta(t+\tau)] = e^{-j\omega\tau} + e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau + \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau = 2 \cos \omega\tau.$$

Дістанемо

$$L[\delta(t-\tau) + \delta(t+\tau)] = 2 \cos \omega\tau.$$

2. Знайти спектральну густину функції $f(t) = A \cos \omega_1 t$.

Розв'язання. Функція $A \cos \omega_1 t$ не є абсолютно інтегровою. Щоб вона стала абсолютно інтегровою, помножимо її на $e^{-\alpha|t|}$. Тоді

$$L[A \cos \omega_1 t] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} L[A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha|t|}];$$

$$\begin{aligned} L[A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha|t|}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} (\cos \omega_1 t \cos \omega t - j \cos \omega_1 t \sin \omega t) dt = \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cos \omega_1 t \cos \omega t dt - Aj \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cos \omega_1 t \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Другий інтеграл в останньому ряду дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції. Перший інтеграл можна замінити на два інтеграли в межах від 0 до $+\infty$, і, природно, відмовитися від знака модуля при t :

$$L[A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha|t|}] = 2A \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t \cos \omega t dt. \quad (5.54)$$

Оскільки

$$\cos \omega_1 t \cos \omega t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 - \omega)t + \cos(\omega_1 + \omega)t],$$

то

$$L[A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha|t|}] = A \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} [\cos(\omega_1 - \omega)t + \cos(\omega_1 + \omega)t] dt.$$

Однак (див. ч. 1, гл. 6, § 10)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \xi t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}.$$

Тоді

$$L[A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha|t|}] = F_2(j\omega, \alpha) = A \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_1 - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_1 + \omega)^2} \right). \quad (5.55)$$

Розглянемо

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_1 - \omega)^2} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{(\omega_1 - \omega)^2}{\alpha^2}}. \quad (5.56)$$

Вважаючи у (5.56) $\frac{1}{\alpha} = \lambda$, а $\omega_1 - \omega = t$, дістанемо

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_1 - \omega)^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 t^2} = \pi \gamma(t, \lambda) \quad (5.57)$$

з точністю до π функцію (5.42). При цьому, якщо $\lambda \rightarrow \infty$, то $\alpha \rightarrow 0$. Тому

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_1 - \omega)^2} = \pi \delta(\omega_1 - \omega). \quad (5.58)$$

Аналогічно

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_1 + \omega)^2} = \pi \delta(\omega_1 + \omega). \quad (5.59)$$

Тоді

$$F_1(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_2(j\omega, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} L[A \cos \omega_1 t \cdot e^{-\alpha t}] = \pi A [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]. \quad (5.60)$$

Якщо задано періодичну функцію

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_1 t,$$

то її спектральна густина

$$F_1(j\omega) = L[f(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \pi A_n [\delta(\omega - n\omega_1) + \delta(\omega + n\omega_1)].$$

3. Знайти спектральну густина одиничної функції

$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спектральну густина $F_2(j\omega, \alpha)$ функції $\varphi(t, \alpha) = f(t)e^{-\alpha t}$:

$$F_2(j\omega, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt;$$

$$F_2(j\omega, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega t dt - j \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin \omega t dt.$$

Застосовуючи до кожного з інтегралів двічі формулу інтегрування частинами, знайдемо

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \omega t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Тепер зображення $\varphi(t, \alpha)$ запишеться так:

$$F_2(j\omega, \alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Границя

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 \omega^2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega \neq 0; \\ \infty, & \text{якщо } \omega = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega); \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & \text{якщо } \omega \neq 0; \\ \infty, & \text{якщо } \omega = 0. \end{cases}$$

За означенням

$$F_1(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_2(j\omega, \alpha) = \pi \delta(\omega) - \frac{j}{\omega} = \begin{cases} -\frac{j}{\omega}, & \text{якщо } \omega \neq 0; \\ \infty, & \text{якщо } \omega = 0. \end{cases}$$

Тому, якщо $\omega \neq 0$, то $F_1(j\omega) = -\frac{j}{\omega}$. При цьому амплітуда $|F_1(j\omega)| = \frac{1}{|\omega|}$ (рис. 3.21), а фазовий кут $\psi(\omega) = -\text{arctg} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.22), оскільки $a = 0, b = -\frac{1}{\omega}$.

Порівняймо зображення $\sigma(t)$ за Лапласом (див. гл. 2) $L_{\text{Л}}\sigma(t)$ з її зображенням за Фур'є $L_{\text{Ф}}\sigma(t)$.

З формули (2.2) з гл. 2 маємо $L_{\text{Л}}\sigma(t) = \frac{1}{p}$. При $p = \alpha + j\beta$ $L_{\text{Л}}\sigma(t) = \frac{1}{\alpha + j\beta}$ або $L_{\text{Л}}\sigma(t) = \frac{\alpha - j\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Якщо

вважати, що $\alpha = 0$, а $\beta \neq 0$, то $L_{\text{Л}}\sigma(t) = -\frac{j}{\beta}$. При $\beta = \omega$ дістанемо

$$L_{\text{Л}}\sigma(t) = L_{\text{Ф}}\sigma(t).$$

4. Знайти спектральну густина функції

$$f(t) = \begin{cases} e^{-jt}, & \text{якщо } t \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перевіримо задану функцію на абсолютну інтегровність:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \int_0^{+\infty} |\cos t - j \sin t| dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot dt = \infty.$$

Щоб відшукати спектральну густина, введемо функцію

$$\varphi(t, \alpha) = f(t)e^{-\alpha t} = e^{-jt} e^{-\alpha t}.$$

Ця функція буде абсолютно інтегровною, оскільки

$$|\varphi(t, \alpha)| = |f(t)e^{-\alpha t}| = |e^{-jt} e^{-\alpha t}| = e^{-\alpha t}.$$

Спектральна густина $F_2(j\omega, \alpha) \doteq \varphi(t, \alpha)$:

$$F_2(j\omega, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-jt} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j(\omega+1)t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} [\cos(\omega+1)t - j \sin(\omega+1)t] dt.$$

Використаємо результати попереднього прикладу і знайдемо

$$F_2(j\omega, \alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega+1)^2} - j \frac{\omega+1}{\alpha^2 + (\omega+1)^2}$$

Перейдемо до границі і знайдемо

$$F_1(j\omega) = \pi \delta(\omega+1) - \frac{j}{\omega+1} = \begin{cases} -\frac{j}{\omega+1}, & \text{якщо } \omega \neq -1; \\ \infty, & \text{якщо } \omega = -1. \end{cases}$$

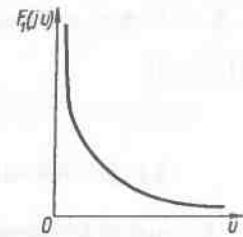


Рис. 3.21

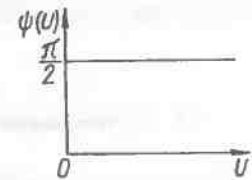


Рис. 3.22

ВПРАВИ. Знайти спектральну густину таких функцій.

1. $A \sin \omega_1 t$. Відповідь. $\frac{A\pi}{j} [\delta(u - \omega_1) - \delta(u + \omega_1)]$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t$. Відповідь. $\frac{\pi}{j} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\delta(u - n\omega_1) - \delta(u + n\omega_1)]$.

3. $A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t$. Відповідь. $\frac{A\pi}{j} [\delta(u - \omega_1) - \delta(u + \omega_1)] + B\pi \delta[(u - \omega_1) + \delta(u + \omega_1)]$.

§ 6. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ І ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Числові і функціональні ряди широко застосовуються для обчислення різноманітних сталих (див. п. 2.22, 2.28), функцій, інтегралів, що не зображаються через елементарні функції, при розв'язанні алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь.

6.1. Застосування рядів до обчислення функцій та інтегралів

Для обчислення функцій використовуються звичайно степеневі ряди. Функція розвивається в ряд Тейлора в околі тієї точки, в якій нас цікавить значення функції. Будується оцінка решти ряду. Потім обчислюється значення функції з наперед заданим ступенем точності. Аналогічно обчислюються інтеграли з тією лише різницею, що в степеневий ряд розвивається підінтегральна функція. Визначаються умови інтегровності цього ряду (див. п. 2.21), а також оцінюється залишок ряду після інтегрування.

Приклади. 1. Обчислити $\sqrt[5]{245}$.

Розв'язання. Подамо число 245 у вигляді $245 = 243 + 2$, тоді $\sqrt[5]{245} = 3 \left(1 + \frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$. Застосуємо до обчислення біномний ряд (див. формулу (2.115)), вважаючи, що в ньому $m = \frac{1}{5}$; $x = \frac{2}{3^5}$. Дістанемо

$$\sqrt[5]{245} = 3 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{2}{3^5} - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 5^2} \frac{2^2}{3^{10}} + \dots\right).$$

Вираз у дужках — це знакопереміжний ряд, для якого оцінка помилки заміни ряду скінченною сумою, тобто залишку, відома (див. п. 2.17).

Якщо вважати

$$\sqrt[5]{245} \approx 3 \left(1 + \frac{2}{5 \cdot 3^5}\right),$$

то знайдена помилка буде меншою, ніж $\frac{3 \cdot 2^3}{5^2 \cdot 3^{10}} < 0,0001$.

2. Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,00002.

Розв'язання. Функція e^{-x^2} розвивається в ряд (див. формулу (2.99)):

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots,$$

рівномірно збіжний в $(-\infty, +\infty)$. Отже, ряд можна почленно інтегрувати:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \dots$$

При $x = 1$ збережемо вісім членів ряду:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} + \frac{1}{72600}.$$

При цьому виявиться помилка, що не перевищує значення восьмого члена: $\frac{1}{72600} < 0,00002$.

6.2. Метод малого параметра наближеного розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь

Що таке малий параметр? Нехай задано алгебраїчне рівняння $x^3 - 0,01x^2 + 1 = 0$, коефіцієнти якого 1; $-0,01$; 1. Число 0,01 мале порівняно з 1. Воно й називається **малим параметром**. Якщо малий параметр позначимо через μ , то рівняння матиме вигляд

$$x^3 - \mu x^2 + 1 = 0. \quad (6.1)$$

Якщо вважати, $\mu = 0$, то рівняння набере вигляду $x^3 + 1 = 0$. Шукаємо розв'язок останнього рівняння у класі дійсних чисел: $x_0 = -1$. Цей розв'язок (при $\mu = 0$) називається **незбуреним**, або **породжувальним**. Вважатимемо, що дійсним коренем рівняння є функція від μ : $x = \varphi(\mu)$.

Розвинемо $\varphi(\mu)$ в ряд Маклорена по μ :

$$x = \varphi(0) + \frac{\dot{\varphi}(0)}{1!}\mu + \frac{\ddot{\varphi}(0)}{2!}\mu^2 + \dots, \quad (6.2)$$

де $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$, $\ddot{\varphi}(0)$ — невідомі коефіцієнти, які далі позначимо так:

$$\varphi(0) = a_0; \quad \frac{\dot{\varphi}(0)}{1!} = a_1; \quad \frac{\ddot{\varphi}(0)}{2!} = a_2; \dots, \quad (6.3)$$

тоді

$$x = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + \dots \quad (6.4)$$

Для визначення a_0 вважатимемо, що в (6.4) $\mu = 0$, тоді x перетворюється в $x_0 = -1$ і $a_0 = -1$:

$$x = -1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + \dots \quad (6.5)$$

Вираз (6.4) чи (6.5) називається **збуреним розв'язком рівняння**. Збурений розв'язок тоді буде розв'язком рівняння, коли

$$x \rightarrow -1 \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

За додержання цієї умови розв'язок x називається **стійким**. Щоб знайти коефіцієнти a_1, a_2, a_3, \dots у розвиненні x , використовуються саме рівняння та метод порівняння коефіцієнтів при однакових степенях μ .

Підставимо у початкове рівняння вираз (6.5):

$$(-1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots)^3 - \mu(-1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \dots)^2 + 1 = 0.$$

Виконаємо відповідні дії і дістанемо

$$(3a_1 - 1)\mu + (3a_2 - 3a_1^2 + 2a_1)\mu^2 + \dots = 0.$$

Остання рівність можлива, якщо коефіцієнти при всіх степенях μ дорівнюють нулю. Звідси дістанемо послідовність рівнянь, з яких визначаються коефіцієнти a_1, a_2, \dots :

$$3a_1 - 1 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{3};$$

$$3a_2 - 3a_1^2 + 2a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{3a_1^2 - 2a_1}{3} = -\frac{1}{9} \text{ і т. д.}$$

Згідно з цим матимемо **наближене значення кореня**:

нульове наближення $x_0 = -1$;

перше наближення $x_1 = -1 + \frac{1}{3}\mu$;

друге наближення $x_2 = -1 + \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{9}\mu^2$ і т. д.

Оцінка точності розв'язання визначається оцінкою залишку ряду або нев'язкою.

Наведемо загальні міркування за методом малого параметра розв'язання рівняння.

Припустимо, що задане рівняння

$$f(x, \mu) = 0, \quad (6.6)$$

де x — нелінійна функція щодо μ .

1. Шукаємо розв'язок

$$f(x, 0) = 0, \quad \mu = 0. \quad (6.7)$$

Вважаємо, що розв'язок цього рівняння можна знайти точно. Розв'язок рівняння (6.7) x_0 називається породжувальним, або незбуреним.

2. Розв'язок (6.7) у вигляді

$$x = x_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + \dots + a_n\mu^n + \dots \quad (6.8)$$

можна шукати лише за умови, що $x \rightarrow x_0$ при $\mu \rightarrow 0$. У протилежному разі метод не підходить для використання.

3. Коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ визначають підстановкою (6.8) в рівняння (6.6) і порівнянням коефіцієнтів при однакових степенях μ .

Якщо ліва частина рівняння (6.6) — трансцендентна функція, то для зручності цю функцію слід розвинути в ряд за степенями x .

6.3. Застосування рядів до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі змінними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = Q(x) \quad (6.9)$$

або $L(y) = Q(x)$, де L — лінійний диференціальний оператор.

Є відомий спосіб розв'язання цього рівняння зі сталими коефіцієнтами. Проте як знайти функцію, що задовольняє це рівняння, коли коефіцієнтом є функція від x ?

У загальному випадку точного способу відшукування функції, що задовольняє рівняння (6.9), немає. Наближено це можна зробити, коли коефіцієнти, що стоять у лівій частині рівняння, і функція $Q(x)$ розвиваються в степеневі ряди з відмінним від нуля радіусом збіжності в околі деякої точки.

Додамо до (6.9) початкові умови:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (6.10)$$

Матимемо задачу Коші.

Нехай

$$a_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{1j}(x-x_0)^j; R_1 \text{ — радіус збіжності;}$$

$$a_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{2j}(x-x_0)^j; R_2 \text{ — радіус збіжності;}$$

$$a_3(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{3j}(x-x_0)^j; R_3 \text{ — радіус збіжності;}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{nj}(x-x_0)^j; R_n \text{ — радіус збіжності;}$$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(x-x_0)^j; R_Q \text{ — радіус збіжності.}$$

Серед $R_1, R_2, \dots, R_n, R_Q$ знайдемо найменший. Позначимо його через R ; тоді розв'язок диференціального рівняння (6.9) можна подати у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(x-x_0)^j, \quad |x-x_0| < R. \quad (6.11)$$

Можна довести таку теорему.

Теорема. Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (6.9) і його права частина розвиваються в степеневі ряди з відповідними радіусами збіжності в околі початкового значення, то і розв'язок диференціального рівняння подамо степеневим рядом в

околі початкового значення з радіусом збіжності, що дорівнює найменшому з радіусів збіжності $R_1, R_2, \dots, R_n, R_Q$.

Приймаємо без доведення.

Зуваження. Ця теорема справджується для будь-якої лінійної нормальної системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Для нелінійних систем рівнянь чи одного рівняння цією теоремою теж можна користуватися, але збіжність ряду (6.11) треба встановлювати в кожному конкретному випадку окремо.

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - xy = 0; y(0) = 1; y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Порівнюючи з (6.9), маємо: $Q(x) = 0; a_1(x) = 0; a_2(x) = -x$.

Радіус збіжності R правої і лівої частин рівняння дорівнює ∞ (вся числова вісь). Початкове значення $x_0 = 0$. Отже, ряд (6.11), що є розв'язком, можна записати у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + \dots \quad (6.12)$$

Знайдемо загальний вираз d_n . Якщо точної формули для d_n знайти не можна, то вважається, що розв'язок знайдено наближено:

$$y'' = xy; y(0) = d_0; d_0 = 1.$$

Скористаємося теоремою про диференційовність ряду:

$$1) \quad y'(x) = d_1 + 2d_2 x + 3d_3 x^2 + \dots + n d_n x^{n-1} + \dots,$$

але $y'(0) = 1$, тоді $y'(0) = d_1; d_1 = 1$;

$$2) \quad y''(x) = 2d_2 + 6d_3 x + 12d_4 x^2 + \dots + n(n-1)d_n x^{n-2} + \dots;$$

$$3) \quad y'' = xy; 2d_2 + 6d_3 x + 12d_4 x^2 + \dots + n(n-1)d_n x^{n-2} + \dots = d_0 x + d_1 x^2 + d_2 x^3 + d_3 x^4 + d_4 x^5 + \dots + d_n x^{n-1} + \dots$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , дістанемо

$$d_2 = 0; 6d_3 = d_0; d_3 = \frac{1}{6}; 12d_4 = d_1; d_4 = \frac{1}{12}; 20d_5 = 0; d_5 = 0 \dots$$

Тепер (6.12) можна записати у вигляді

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \dots \quad (6.13)$$

Розв'язок (6.12) можна записати також у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

в якому невідомими є $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, ..., $y^{(n)}(0)$, ... Ці невідомі можна знайти диференціюванням заданого рівняння. Однак відомі тільки $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Використовуючи рівняння, знайдемо $y''(x) = xy$. Тоді $y''(0) = 0$. Для визначення $y'''(x)$ здиференціюємо обидві частини рівняння:

$$\begin{aligned} y''' &= xy; \\ y'''(x) &= y + xy'; \quad y'''(0) = y(0) + 0 \cdot y'(0); \quad y'''(0) = 1; \\ y^{IV}(x) &= y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 2y'(0) + 0 \cdot y''(0); \quad y^{IV}(0) = 2. \end{aligned}$$

Виявилось, що розв'язок $y(x) = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \dots$ збігається з (6.13).

Викладена методика розв'язання диференціальних рівнянь переноситься і на системи рівнянь. Для ілюстрації розглянемо розв'язок такої задачі Коші:

$$\begin{cases} x' = x \cos t - y \sin t, & x(0) = 1; \\ y' = x \sin t + y \cos t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Це лінійна однорідна система зі змінними коефіцієнтами $\sin t$, $\cos t$. Відомо, що $\sin t$, $\cos t$ розвиваються в степеневі ряди (2.113) і (2.114), радіус збіжності R кожного з яких $R = \infty$.

Запишемо ряди Маклорена:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots; \\ y(t) &= y(0) + \frac{y'(0)}{1!}t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}t^n + \dots \end{aligned}$$

(записуємо не один ряд, а стільки, скільки є в системі невідомих). Для визначення $x'(0)$ використаємо перше рівняння:

$$x'(0) = x(0)\cos 0 - y(0)\sin 0 = 1.$$

Щоб знайти $y'(0)$, використаємо друге рівняння:

$$y'(0) = x(0)\sin 0 + y(0)\cos 0 = 1.$$

Для визначення x'' , y'' здиференціюємо початкові рівняння:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos t - x \sin t - y' \sin t - y \cos t; \\ y'' &= x' \sin t + x \cos t + y' \cos t - y \sin t. \end{aligned}$$

Підставляючи замість t нуль, дістаємо

$$x''(0) = 1 - 1 = 0; \quad y''(0) = 1 + 1 = 2.$$

Тепер розв'язок системи запишеться у вигляді

$$x(t) = 1 + t + \dots; \quad y(t) = 1 + t + t^2 + \dots$$

6.4. Метод послідовних наближень розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Оскільки збіжність рядів пов'язана зі збіжністю послідовності зрізаних сум ряду, то природною модифікацією методу рядів є метод, у якому розв'язок рівняння шукають у вигляді послідовності функцій. Ця модифікація дістала назву **методу послідовних наближень**.

Нехай задано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0.$$

Запишемо його у вигляді

$$dy = f(x, y)dx.$$

Візьмемо інтеграл від обох частин рівняння:

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx; \quad y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y)dx.$$

У результаті дістанемо рівняння Вольтерра

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y)dt.$$

Використовуючи початкову умову, дістаємо

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0)dt \quad \text{— перший наближений розв'язок;}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1)dt \quad \text{— другий наближений розв'язок;}$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1})dt \quad \text{— } n\text{-й наближений розв'язок.}$$

Дістали функціональну послідовність наближень $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ... Якщо послідовність має граничну функцію, то ця функція є точним розв'язком: $y_n(x) \rightarrow y(x)$. Дуже рідко можна записати у вигляді загальної формули $y_n(x)$. Частіше обчислення припиняють на деякому k -му кроці і дістають деякий k -й наближений розв'язок.

Метод послідовних наближень поширюється на випадок систем нелінійних диференціальних рівнянь.

Розглянемо, наприклад, систему

$$\begin{cases} y'(x) = f_1(x, y, z), & y(x_0) = y_0; \\ z'(x) = f_2(x, y, z), & z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

де $y(x), z(x)$ — шукані функції, а x — незалежна змінна. Систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(t, y, z) dt; \\ z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x f_2(t, y, z) dt. \end{cases}$$

Відповідні наближення запишуться у вигляді

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(t, y_0, z_0) dt; \\ z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^x f_2(t, y_0, z_0) dt; \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(t, y_1, z_1) dt; \\ z_2(x) = z_0 + \int_{x_0}^x f_2(t, y_1, z_1) dt; \\ \dots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(t, y_{n-1}, z_{n-1}) dt; \\ z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^x f_2(t, y_{n-1}, z_{n-1}) dt. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = y^2 + x^2$. Це рівняння не має точного розв'язку.

Розв'язання. Прийємо початкову умову $y(0) = 0$. Функція $f(x, y) = y^2 + x^2$. Інтегральне рівняння Вольтерра

$$y(x) = \int_0^x (t^2 + y^2) dt.$$

Перше наближення

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + 0) dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{3};$$

друге наближення

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{3^2} \right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 3^2} \right) \Big|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 3^2};$$

третє наближення

$$y_3(x) = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7 \cdot 3^2} \right)^2 \right] dt$$

і т. д.

6.5. Застосування рядів у граничних задачах для звичайних диференціальних рівнянь

Тут розглядатимемо лише рівняння другого порядку. Запишемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (6.14)$$

де λ — деякий параметр. Додамо до рівняння умови

$$y(0) = 0 \text{ і } y(l) = 0, \quad (6.15)$$

де 0 і l — деякі значення аргументу. Ці умови називаються **граничними**, або **крайовими** (див. гл. 1, п. 1.2).

Можна замість лінійного рівняння (6.14) розглядати нелінійне, наприклад:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \lambda \sin \varphi = 0; \quad \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=l} = 0. \quad (6.16)$$

Як лінійна, так і нелінійна задачі мають тривіальний розв'язок: $y(x) = 0$; $\varphi(t) = 0$. Ті значення параметра λ , при яких гранична задача має нетривіальні розв'язки, називаються **власними значеннями (числами)**. Нетривіальні розв'язки, що відповідають власному числу λ_0 , називаються **власними функціями**.

Якщо $\lambda > 0$, то розв'язком (6.14) буде (див. гл. 1, п. 5.9)

$$y(x) = C_1 \sin x\sqrt{\lambda} + C_2 \cos x\sqrt{\lambda}. \quad (6.17)$$

Замість умов (6.15) задля спрощення припустимо $l = \pi$, тобто $y(0) = 0, y(\pi) = 0$. Тоді для визначення C_1 і C_2 матимемо систему

$$\begin{cases} C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0; \\ C_1 \sin \pi\sqrt{\lambda} + C_2 \cos \pi\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння дістаємо $C_2 = 0$. Вважаючи $C_1 \neq 0$, з другого рівняння дістаємо, що власні значення мають задовольняти рівняння

$$\sin \pi\sqrt{\lambda} = 0, \quad (6.18)$$

звідки $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \dots; \lambda_n = n^2; \dots$

Відповідні власні функції такі:

$$\varphi_1(x) = \sin x; \varphi_2(x) = \sin 2x; \dots; \varphi_n(x) = \sin nx; \dots \quad (6.19)$$

Розв'язок рівняння з точністю до сталої запишеться у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx. \quad (6.20)$$

Як зазначалось вище (див. формули (4.5), (4.6)), функції (6.19) ортогональні на $[0, \pi]$. При цьому, якщо функція $f(x)$ неперервно диференційовна на $[0, \pi]$, причому $f(0) = f(\pi) = 0$, то вона розвивається у рівномірно збіжний на $[0, \pi]$ ряд за власними функціями

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x); C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (6.21)$$

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння

$$y'' + \lambda_0 y = f(x) \quad (6.22)$$

з граничними умовами

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (6.23)$$

де λ_0 — власне число граничної задачі (6.14), (6.15) із власною функцією $\varphi_0(x)$. Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[0, \pi]$ і задовольняє граничні умови, тобто $f(0) = f(\pi) = 0$.

Для того щоб неоднорідна гранична задача (6.22), (6.23) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб функція $f(x)$ була ортогональною до власної функції $\varphi_0(x)$, тобто

$$\int_0^{\pi} f(x) \varphi_0(x) dx = 0. \quad (6.24)$$

При виконанні умов (6.24) функція $y(x)$, що є розв'язком задачі (6.22), (6.23), має вигляд

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \varphi_n(x)}{\lambda_0 - \lambda_n}, \quad (6.25)$$

де

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \varphi_n(x) dx.$$

У формулі (6.25) треба знехтувати доданком, для якого $\lambda_0 = \lambda_n$ (це позначено штрихом біля знака суми).

§ 7. МЕТОДИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Більшість сучасних аналітичних методів наближеного розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь ґрунтується на пошуку розв'язку, поданого у вигляді ряду за малим параметром. Нижче наведено методику побудови таких розв'язків.

7.1. Метод малого параметра Пуанкаре–Ляпунова для граничних задач

А. Пуанкаре та О. Ляпунов незалежно один від одного запропонували так званий метод збурень розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь.

Проілюструємо цей метод спочатку на конкретному прикладі граничної задачі

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \frac{4}{3} y^3; \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Якщо в (7.1) відкинути праву частину, то дістанемо лінійну задачу (6.14) і відповідний набір власних чисел $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$. Нехай λ набуває значення, досить близького до одного з власних чисел, наприклад $\lambda_1 = 1$, тобто $\lambda - 1 = \mu^2$, де μ — мале порівняно з одиницею. Тоді задача (7.1) запишеться так:

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{4}{3} y^3 - \mu^2 y; \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (7.2) у вигляді ряду за степенями малого параметра:

$$\begin{aligned} y(x) &= \mu y_1(x) + \mu^3 y_3(x) + \mu^5 y_5(x) + \dots; \\ y_i(0) &= y_i(\pi) = 0, \quad i = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

Підставивши ряд (7.3) в рівняння (7.2), дістанемо

$$\begin{aligned} \mu[y_1'' + y_1] + \mu^3\left[y_3'' + y_3 + y_1 - \frac{4}{3}y_1^3\right] + \\ + \mu^5\left[y_5'' + y_5 + y_3 - 4y_1^2 y_3\right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Це справджується, якщо виконуються послідовно граничні задачі для функцій $y_1(x), y_3(x), y_5(x), \dots$:

$$\begin{cases} y_1''(x) + y_1(x) = 0; \\ y_1(0) = y_1(\pi) = 0; \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} y_3''(x) + y_3(x) = \frac{4}{3}y_1^3 - y_1; \\ y_3(0) = y_3(\pi) = 0; \end{cases} \quad (7.5)$$

$$\begin{cases} y_5''(x) + y_5(x) = 4y_1^2 y_3 - y_3; \\ y_5(0) = y_5(\pi) = 0 \text{ і т. д.} \end{cases} \quad (7.6)$$

Розв'язання граничної задачі (7.4) нам відомо:

$$y_1(x) = C \sin x, \quad (7.7)$$

де $\sin x$ — власна функція задачі (6.14), що відповідає власному числу $\lambda = 1$; C — довільна стала, яка залишається невизначеною під час розв'язування задачі (7.4). Стала C визначається із задачі (7.5). Справді, підставивши (7.7) у (7.5), дістанемо

$$y_3''(x) + y_3(x) = \frac{4}{3}C^3 \sin^3 x - C \sin x.$$

Враховуючи, що

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,$$

рівняння для $y_3(x)$ запишемо

$$y_3''(x) + y_3(x) = (C^3 - C) \sin x - \frac{1}{3}C^3 \sin 3x; \quad (7.8)$$

$$y_3(0) = y_3(\pi) = 0.$$

Задача (7.8) розв'язувана, якщо функція

$$f(x) = (C^3 - C) \sin x - \frac{1}{3}C^3 \sin 3x$$

ортогональна власній функції $\varphi_0(x) = \sin x$. Проте функція $\sin 3x$ ортогональна $\sin x$. Тому функція $f(x)$ ортогональна $\sin x$, якщо коефіцієнт $C^3 - C = 0$. Це дає $C_1 = 0$; $C_{2,3} = \pm 1$. При $C_1 = 0$ маємо тривіальний розв'язок $y_3(x) = 0$. З C_2 і C_3 беремо лише $C_3 = +1$, оскільки розв'язання для $C_2 = -1$ відрізнятиметься лише знаком. Тоді рівняння (7.8) набере вигляду

$$\begin{cases} y_3''(x) + y_3(x) = -\frac{1}{3} \sin 3x; \\ y_3(0) = y_3(\pi) = 0, \end{cases} \quad (7.9)$$

а розв'язок (7.7) — вигляду $y_1(x) = \sin x$.

Знайдемо частинний розв'язок $y_3^*(x)$ рівняння (7.9). Вважатимемо $y_3^*(x) = A \sin 3x$, тоді $(y_3^*)' = 3A \cos 3x$; $(y_3^*)'' = -9A \sin 3x$. Отже,

$$-9A \sin 3x + A \sin 3x = -\frac{1}{3} \sin 3x; \quad -8A = -\frac{1}{3}; \quad A = \frac{1}{24}.$$

Частинний розв'язок $y_3^*(x) = \frac{1}{24} \sin 3x$. Загальний розв'язок граничної задачі (7.9) складатиметься із загального розв'язку однорідної задачі і частинного розв'язку неоднорідної задачі:

$$y_3(x) = D \sin x + \frac{1}{24} \sin 3x, \quad (7.10)$$

де D — нова довільна стала, що визначається з розв'язуваності граничної задачі (7.6). Підставимо (7.10) і (7.7) при $C=1$ у (7.6), і, враховуючи, що

$$\sin^2 x \sin 3x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 5x - \frac{1}{4} \sin x,$$

дістанемо

$$\begin{cases} y_5'' + y_5 = \left(2D - \frac{1}{24}\right) \sin x + \left(\frac{1}{24} - D\right) \sin 3x - \frac{1}{24} \sin 5x; \\ y_5(0) = y_5(\pi) = 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

Гранична задача розв'язувана, якщо функція, що стоїть у правій частині рівняння (7.11), ортогональна $\varphi_0(x) = \sin x$. А це можливо, якщо $2D - \frac{1}{24} = 0$, звідки $D = \frac{1}{48}$. Підставивши значення D у (7.10), матимемо

$$y_3(x) = \frac{1}{48} \sin x + \frac{1}{24} \sin 3x. \quad (7.12)$$

Аналогічно знаходимо розв'язок $y_5(x), y_7(x), \dots$. Тепер ряд (7.3), що є розв'язком нелінійної граничної задачі (7.2), запишеться у вигляді

$$y(x) = \mu \sin x + \mu^3 \left(\frac{1}{48} \sin x + \frac{1}{24} \sin 3x \right) + \dots \quad (7.13)$$

При цьому існують значення μ такі, що при $|\mu| < \mu_0$, де $\mu_0 > 0$, ряд (7.13) є збіжним.

Можна довести, що коли при деякому μ функція $y(x)$, яка обчислюється за виразом (7.13), дає розв'язок граничної задачі (7.2), то $-y(x)$ також буде розв'язком цієї задачі. При цьому вираз для функції $-y(x)$ дістаємо з (7.13) заміною μ на $-\mu$. Таким чином, формула (7.13) дає два розв'язки граничної задачі (7.2): один при $\mu > 0$, а інший при $\mu < 0$. Гранична задача (7.1) має тривіальний розв'язок $y(x) = 0$ для всіх

$$\lambda \in (-\infty, +1),$$

крім того, в околі $\lambda = 1 + \mu^2$ є ще два розв'язки, що обчислюються за (7.13). Про це кажуть так: в околі власного значення $\lambda_1 = 1$ відбувається розгалуження розв'язків. Можна показати, що розгалуження розв'язків відбувається в околі кожного власного числа. При цьому характер розгалуження граничних задач типу

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = F(x, y, y'); \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

істотно залежить від характеру нелінійності, тобто функції $F(x, y, y')$.

Ідея методу Пуанкаре–Ляпунова, що викладена на прикладі задачі (7.1), історично виникла у зв'язку із задачею відшукування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальні процеси. У зв'язку з цим викладемо метод збурення для відшукування періодичних розв'язків.

7.2. Метод збурень (метод Пуанкаре–Ляпунова) наближеного відшукування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь

Нелінійне диференціальне рівняння n -го порядку

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

за умови, що функція f задовольняє умови існування розв'язку, може мати найрізноманітніші розв'язки. Для багатьох практичних задач досить знайти періодичні розв'язки. Для відшукування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь розроблено досить

багато методів. Всі вони ґрунтуються на припущенні, що нелінійне рівняння містить малий параметр μ . Якщо такий параметр є, то періодичний розв'язок подається розвиненням в ряд за малим параметром. Коефіцієнтами в такому ряду будуть невідомі функції.

Тут розглядатиметься метод збурень (Пуанкаре–Ляпунова).

Суть методу проілюструємо на прикладі диференціального рівняння другого порядку, для якого вважаємо зручним запис у вигляді

$$\ddot{x} + x = \mu f(t, x, \dot{x}, \mu), \quad (7.14)$$

де μ — малий параметр з початковими умовами

$$x(0) = A; \dot{x}(0) = B.$$

Розглянемо розв'язок рівняння при $\mu = 0$. Це буде лінійне рівняння. Його розв'язок можна записати у вигляді $x = x_0(t)$. Це періодичний розв'язок з періодом 2π .

Розв'язок рівняння (7.14) шукаємо у вигляді ряду, розвиненого за малим параметром:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \dots + x_n(t)\mu^n + \dots \quad (7.15)$$

Підставляючи ряд (7.15) у рівняння і розвиваючи (що не завжди є необхідним, наприклад, коли у функції f немає малого параметра) $f(t, x, \dot{x}, \mu)$ за μ у ряд Маклорена, прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях μ . Дістанемо систему лінійних рівнянь з невідомими функціями $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Розв'язуючи ці рівняння з урахуванням початкових умов та умов періодичності, знаходимо $x(t)$. Із загального опису не можна зробити висновок про всі ускладнення, що виникають при цьому. Щоб ці ускладнення були зрозумілими, розглянемо два окремих випадки цього загального рівняння.

1. Автономна система, тобто система, в якій права частина явно не залежить від t :

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}); \quad x(0) = A; \dot{x}(0) = 0. \quad (7.16)$$

Розв'язок цього рівняння при $\mu = 0$

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0; \quad x_0 = A_0 \cos t + B_0 \sin t$$

має період $T = 2\pi$, але період розв'язку при $\mu \neq 0$ невідомий. Позначимо частоту невідомого періодичного розв'язку ω і перейдемо в

рівнянні до безрозмірних параметрів $\tau = \omega t$. Тоді стосовно до змінного τ , $x(t)$ матиме період 2π . Тепер рівняння запишеться так:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{dx}{d\tau} = \omega x_\tau; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \ddot{x}_\tau; \quad (7.17)$$

$$\omega^2 \ddot{x}_\tau + x(\tau) = \mu f(x, \omega \dot{x}_\tau).$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$x(\tau) = x_0(\tau) + x_1(\tau)\mu + x_2(\tau)\mu^2 + \dots \quad (7.18)$$

і невідому частоту

$$\omega = \omega_0 + \omega_1\mu + \omega_2\mu^2 + \dots \quad (7.19)$$

При цьому $\dot{x}(0) = 0$ і $x(\tau + 2\pi) = x(\tau)$.

Подальші дії проілюструємо на прикладі.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \mu x^3 = 0; \quad x(0) = A; \dot{x}(0) = 0.$$

Розв'язання. Перейдемо від змінної t до змінної τ і дістаємо

$$\omega^2 \ddot{x}_\tau + x + \mu x^3 = 0. \quad (7.20)$$

Підставивши (7.18), (7.19) у (7.20), матимемо

$$\begin{aligned} & (\omega_0 + \omega_1\mu + \omega_2\mu^2 + \dots)^2 (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1\mu + \ddot{x}_2\mu^2 + \dots) + \\ & + x_0 + x_1\mu + x_2\mu^2 + \dots + \mu(x_0 + x_1\mu + x_2\mu^2 + \dots)^3 = 0; \\ & (\omega_0^2 + \omega_1^2\mu^2 + \omega_2^2\mu^4 + \dots + 2\mu\omega_0\omega_1 + 2\mu^2\omega_0\omega_2 + \dots \\ & \dots + 2\omega_1\omega_2\mu^3 + \dots)(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1\mu + \ddot{x}_2\mu^2 + \dots) + x_0 + x_1\mu + x_2\mu^2 + \dots \\ & \dots + \mu(x_0^3 + x_1^3\mu^3 + x_2^3\mu^6 + \dots + 3x_0^2x_1\mu + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ , дістанемо систему лінійних рівнянь, аналогічну до систем (7.4)–(7.6). Розв'яжемо ці рівняння і знайдемо $x_i(\tau)$ ($i = \overline{1, \infty}$), а з ним і розв'язок (7.18).

2. Неавтономна система, тобто система, в якій права частина явно залежить від часу:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t). \quad (7.21)$$

Вважаємо, що $f(x, \dot{x}, t)$ має період 2π , тобто частоту, що дорівнює одиниці і збігається з основною частотою. Щоб дістати періодичний

розв'язок у рівнянні (7.21), переходимо до нової змінної $\tau = t - \delta$, де δ — початкова фаза. У цьому разі рівняння переписеться у вигляді

$$\ddot{x}_\tau + x = \mu f(x, \dot{x}_\tau, \tau + \delta), \quad (7.22)$$

де диференціювання виконується вже по τ . Розв'язок (7.22) і невідому фазу шукаємо у вигляді рядів

$$x(\tau) = x_0(\tau) + x_1(\tau)\mu + x_2(\tau)\mu^2 + \dots + x_n(\tau)\mu^n + \dots; \quad (7.23)$$

$$\delta = \delta_0 + \delta_1\mu + \delta_2\mu^2 + \dots, \quad (7.24)$$

де $x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau), \dots$ — періодичні функції з періодом 2π , а $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots$ — невідомі сталі. Підставимо (7.23) та (7.24) у (7.22) і дістанемо послідовність диференціальних рівнянь для функцій $x_0(\tau), x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)$... і $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots$.

Для розв'язання диференціальних рівнянь використовуються початкові умови $x(0) = A; \dot{x}(0) = 0$ і умови періодичності

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau).$$

Рівність $\dot{x}(0) = 0$ означає, що всі $\dot{x}_i(0) = 0$ ($i = \overline{1, \infty}$).

Далі методику знаходження періодичних розв'язків проілюструємо на конкретному прикладі.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\ddot{x} + x = \mu [-\alpha x - \beta x^3 + F \cos(\tau + \delta)]. \quad (7.25)$$

Підставляючи (7.23) і (7.24) у (7.25), матимемо

$$\ddot{x}_0 + x_0 + (\ddot{x}_1 + x_1)\mu + (\ddot{x}_2 + x_2)\mu^2 + \dots = \mu [-\alpha(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) - \beta(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots)^3 + F \cos(\tau + \delta_0 + \mu \delta_1 + \mu^2 \delta_2 + \dots)]. \quad (7.26)$$

Звернемося до

$$\cos[(\tau + \delta_0) + \mu(\delta_1 + \mu \delta_2 + \dots)] = \cos(\tau + \delta_0) \cos \mu(\delta_1 + \mu \delta_2 + \dots) - \sin(\tau + \delta_0) \sin \mu(\delta_1 + \mu \delta_2 + \dots) \approx \cos(\tau + \delta_0) - \sin(\tau + \delta_0) \sin \mu(\delta_1 + \mu \delta_2 + \dots). \quad (7.27)$$

Підставивши (7.27) у (7.26), дістанемо

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 + (\ddot{x}_1 + x_1)\mu + (\ddot{x}_2 + x_2)\mu^2 + \dots = & -\mu \alpha x_0 - \alpha x_1 \mu^2 - \alpha x_2 \mu^3 - \dots \\ & - \beta x_0^3 \mu - \beta x_1^3 \mu^4 - \beta x_2^3 \mu^7 - 3x_0^2 x_1 \beta \mu^2 - 3x_0^2 x_1 \mu^3 + \dots \\ & \dots + \mu F \cos(\tau + \delta_0) - F \mu^2 \delta_1 \sin(\tau + \delta_0) - F \mu^3 \delta_2 \sin(\tau + \delta_0) + \dots \end{aligned} \quad (7.28)$$

З останньої рівності маємо

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + x_0 = 0; \\ \ddot{x}_1 + x_1 = -\alpha x_0 - \beta x_0^3 + F \cos(\tau + \delta_0); \\ \ddot{x}_2 + x_2 = -\alpha x_1 - 3\beta x_0^2 x_1 - F \delta_1 \sin(\tau + \delta_0). \end{cases} \quad (7.29)$$

Розв'язуючи перше рівняння, дістаємо

$$x_0 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau.$$

Використовуючи початкову умову $\dot{x}(0) = 0$, можна записати

$$x_0 = C_1 \cos \tau, \text{ або } x_0 = A_0 \cos \tau,$$

де A_0 — довільна стала. Розв'язок, що знайшли, підставимо в друге рівняння (7.29):

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\left(\alpha A_0 + \frac{3}{4} \beta A_0^3 - F \cos \delta_0\right) \cos \tau - F \sin \delta_0 \sin \tau - \frac{1}{4} \beta A_0^3 \cos 3\tau.$$

Умова періодичності для x_1

$$\alpha A_0 + \frac{3}{4} \beta A_0^3 - F \cos \delta_0 = 0; \quad F \sin \delta_0 = 0.$$

Ці рівняння дають змогу визначити δ_0 і амплітуду A_0 :

$$\delta_0 = 0; \quad \alpha A_0 + \frac{3}{4} \beta A_0^3 - F = 0; \quad A_0 = \Phi(\alpha, \beta, F).$$

Тепер друге рівняння (7.29) запишеться у вигляді

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{1}{4} \beta A_0^3 \cos 3\tau. \quad (7.30)$$

Використаємо початкову умову $\dot{x}_1(0) = 0$, і розв'язок однорідного рівняння для x_1 запишемо у вигляді

$$x_1 = A_1 \cos \tau,$$

де A_1 — невідома стала. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7.30) запишемо

$$x_1^* = M \cos 3\tau + N \sin 3\tau; \quad \dot{x}_1^* = -9(M \cos 3\tau + N \sin 3\tau).$$

Використовуючи рівняння (7.30)

$$-9(M \cos 3\tau + N \sin 3\tau) + M \cos 3\tau + N \sin 3\tau = -\frac{1}{4} \beta A_0^3 \cos 3\tau,$$

знайдемо $N = 0; M = \frac{1}{32} \beta A_0^3$ та розв'язок

$$x_1 = A_1 \cos \tau + \frac{1}{32} \beta A_0^3 \cos 3\tau.$$

Підставимо розв'язок, що дістали, у третє рівняння (7.29):

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\left(\alpha A_1 + \frac{9}{4}\beta A_0^2 A_1 + \frac{3}{128}\beta^2 A_0^5\right)\cos\tau - F\delta_1 \sin\tau - \\ - \frac{1}{4}\beta A_0^2\left(3A_1 + \frac{1}{8}\alpha A_1 + \frac{3}{16}\beta A_0^3\right)\cos 3\tau - \frac{3}{128}\beta^2 A_0^5 \cos 5\tau.$$

Умова періодичності розв'язку x_2 :

$$\alpha A_1 + \frac{9}{4}\beta A_0^2 A_1 + \frac{3}{128}\beta^2 A_0^5 = 0; F\delta_1 = 0; \\ A_1 = -\frac{3\beta^2 \cdot A_0^5}{128\left(\alpha + \frac{9}{4}\beta A_0^2\right)}; \delta_1 = 0.$$

Розв'язок x_2 :

$$x_2 = A_2 \cos\tau + \frac{1}{32}\beta A_0^2\left(3A_1 + \frac{1}{8}\alpha A_0 + \frac{3}{16}\beta A_0^3\right)\cos 3\tau + \frac{3}{3072}\beta^2 A_0^5 \cos 5\tau,$$

де A_2 — нова стала, що визначається на наступному кроці.

7.3. Метод межового шару

Назва методу пов'язана із задачами, в яких описується рух тіла в рідині (газі). Істотний вплив рідини (газу) на рух тіла поблизу контуру тіла, коли товщина шару рідини мала (порівняно з одиницею, за яку беруть характерний розмір тіла). Цей шар рідини (газу) дістав назву межового шару. Товщину шару звичайно приймають за малий параметр, а розв'язок задачі знаходять у вигляді ряду за цим параметром.

Проілюструємо ідею **методу межового шару** на прикладі такої задачі Коші:

$$\mu y'(x) = -y(x) - f(x); y(0) = 0. \quad (7.31)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (7.31) у вигляді ряду

$$y(x) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \mu^2 y_2(x) + \dots + \mu^n y_n(x) + \dots \quad (7.32)$$

Підставляючи (7.32) у (7.31), знайдемо, що

$$y(x) = -f(x) - \mu f'(x) - \mu^2 f''(x) - \dots - \mu^n f^{(n)}(x) - \dots \quad (7.33)$$

Ряд збігається, якщо виконуються такі умови:

- 1) існує $f^{(n)}(x)$ та $|f^{(n)}(x)| < C$ для $x \in \langle a, b \rangle$, де $C = \text{const}$;
- $\langle a, b \rangle$ — область, у якій функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку;
- 2) $|\mu| < 1$.

Розв'язок (7.33) не задовольняє початкову умову $y(0) = 0$, тобто ряд зумовлює розв'язок далеко від межового шару. Щоб розв'язок (7.33) задовольняв початкову умову з точністю до $O(\mu^n)$, при $\mu \rightarrow 0$ (так зване асимптотичне наближення) вводять функцію межового шару, що швидко спадає далеко від межового шару, і при $\mu \rightarrow 0$ розв'язок $y(x) \rightarrow 0$. Такою функцією для нашої задачі є

$$U(x, \mu) = e^{-x/\mu}, \quad (7.34)$$

що задовольняє такі умови:

$$U(x, 0) = 0; U(0, \mu) = 1.$$

Тепер шукатимемо розв'язок рівняння (7.31) у вигляді ряду

$$y_1(x, \mu) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e^{-x/\mu} \right] \mu^k = \\ = -\left[f(x) - f(0)e^{-x/\mu} \right] - \left[f'(x) - f'(0)e^{-x/\mu} \right] \mu - \dots \quad (7.35)$$

Легко перевірити, що $y_1(x, \mu)$ з (7.35) задовольняє початкову умову $y_1(0, \mu) = 0$. Більше того, має місце асимптотична збіжність: при $\mu \rightarrow 0$ різниця між точними розв'язком $y_1(x, \mu)$ та n -ю частковою сумою (7.35), що прямує до нуля швидше, ніж μ^n :

$$\left| y_1(x, \mu) + \sum_{k=0}^n \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)e^{-x/\mu} \right] \mu^k \right| \leq C_0 \mu^{n+1}.$$

Звичайно $y(x, \mu)$ знаходять у вигляді зрізаної суми ряду (7.35) з наперед заданим номером n і деякою функцією $z(x, \mu)$:

$$y(x, \mu) = - \sum_{k=0}^n \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) e^{-x/\mu} \right] \mu^k + z(x, \mu).$$

Легко перевірити, що функція $z(x, \mu)$ задовольняє диференціальне рівняння $\mu \frac{dz}{dx} = -z - \mu^{n+1} f^{(n+1)}(x)$ з початковою умовою $z(0, \mu) = 0$.

Розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді

$$z(x, \mu) = \mu^n \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\mu}} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Оскільки

$$|f^{(n+1)}(x)| < C, \text{ то } |z(x, \mu)| \leq C\mu^{n+1}.$$

Тепер розв'язок задачі (7.31) запишеться у вигляді

$$y(x, \mu) = - \sum_{k=0}^n \left[f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) e^{-x/\mu} \right] \mu^k + \mu^n \int_0^x e^{-\frac{x-t}{\mu}} f^{(n+1)}(t) dt.$$

7.4. Асимптотичні методи розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь

Асимптотичний метод дає змогу дістати наближений аналітичний розв'язок досить складних нелінійних диференціальних рівнянь, що містять малий параметр. Застосування асимптотичного методу найефективніше для побудови наближених розв'язків нелінійних рівнянь, які при рівності нулю малого параметра вироджуються в лінійні, що описують гармонічний коливальний процес. Наприклад, рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}) \quad (7.36)$$

при $\mu = 0$ вироджується в рівняння

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0, \quad (7.37)$$

що має гармонічний розв'язок

$$x_0 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Вважаючи

$$C_1 = a \cos \theta; C_2 = -a \sin \theta,$$

де

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \theta = -\arctg \frac{C_2}{C_1},$$

знайдемо

$$x_0 = a \cos(\omega t + \theta), \text{ або } x_0 = a \cos \psi, \quad (7.38)$$

де

$$\psi = \omega t + \theta.$$

Звідси зрозуміло, що при $\mu = 0$ лінійне рівняння описує гармонічний коливальний процес з амплітудою a і фазовим кутом $\psi = \omega t + \theta$. При цьому $\frac{da}{dt} = 0$; $\frac{d\psi}{dt} = \omega$. Амплітуда a і початкова фаза θ визначаються початковими умовами. При $\mu \neq 0$ відшуковують періодичний розв'язок з періодом 2π у вигляді ряду

$$x(t) = a \cos \psi + \mu U_1(a, \psi) + \mu^2 U_2(a, \psi) + \dots \quad (7.39)$$

Тут $U_1(a, \psi), U_2(a, \psi), \dots, U_n(a, \psi), \dots$ — періодичні функції кута ψ з періодом у 2π , a і ψ — функції, що визначаються з диференціальних рівнянь:

$$\frac{da}{dt} = \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \dots + \mu^n A_n(a) + \dots; \quad (7.40)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \dots + \mu^n B_n(a) + \dots \quad (7.41)$$

Задача полягає в тому, щоб визначити функції $U_i(a, \psi)$, де a і ψ задовольняють рівняння (7.40) та (7.41) так, щоб ряд (7.39) був розв'язком рівняння (7.36). Визначення функцій $U_i(a, \psi), i = \overline{1, \infty}$, не викликає принципових ускладнень, оскільки вони задовольняють рівняння, аналогічні рівнянням (7.4)–(7.6) методу Пуанкаре–Ляпунова. Однак внаслідок дуже швидкого ускладнення формул, що визначають $U_i(a, \psi)$, практично знаходять лише перші два-три наближення.

Тому застосування методу визначається не властивостями збіжності рядів (7.39)–(7.41) при $n \rightarrow \infty$, а їх асимптотичними властивостями для невеликого n і $\mu \rightarrow 0$.

У зв'язку з цим в асимптотичному методі ставиться задача про знаходження таких функцій $U_i(a, \psi)$, щоб ряди (7.39)–(7.41) при фіксованому n задовольняли рівняння (7.36) до величин порядку малюзи μ^{n+1} . Ця задача неоднозначна. Тому для визначення функцій $U_i(a, \psi)$ на них накладаються додаткові умови, аналогічні умовам ортогональності в методі Пуанкаре–Ляпунова. Тут звичайно ставиться умова відсутності перших гармонік у функціях $U_i(a, \psi)$, $i = \overline{1, \infty}$.

У першому наближенні приймають, що розв'язок рівняння (7.36) дорівнює (7.38), де a і ψ мають задовольняти рівняння (7.40) і (7.41) у першому наближенні, тобто

$$\frac{da}{dt} = \mu A_1(a); \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \mu B_1(a),$$

де

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi; -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi;$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi; -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.$$

Аналогічно будується друге наближення.

Нагадаємо, що рівняння (7.36) належить до автономних. Якщо права частина рівняння (7.36) залежатиме ще й від часу, то в розв'язках (7.39)–(7.41) функції U_i, A_i, B_i залежатимуть ще й від часу. Ускладниться процедура пошуку наближених розв'язків, з'явиться потреба враховувати резонансний і нерезонансний випадки.

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

§ 1. ПОНЯТТЯ ПРО РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. ГРАНИЧНІ, ПОЧАТКОВІ УМОВИ. МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ХВИЛЬОВИМИ РІВНЯННЯМИ

Більшість фізичних задач описується математичними методами. Наприклад, у гл. 1 описано математичними методами коливання матеріальної точки. Математичною моделлю коливань матеріальної точки виявилися звичайні диференціальні рівняння. Однак якщо описувати коливання не точки, а тіла, то математичною моделлю будуть вже диференціальні рівняння з частинними похідними.

Наведемо приклади побудови таких рівнянь для фізичних систем. За найпростішу фізичну систему візьмемо струну, тобто тіло, довжина якого значно більша, ніж уся її решта розмірів. Тому опором при згині струни можна знехтувати порівняно з натягом.

Щоб довести рівняння руху струни, введемо такі умови. Нехай струна закріплена в точках A і B . У статичному стані струна перебуває на відрізку AB . Проведемо через AB вісь Ox , прийнявши за точку O точку A . Вісь Oy напрямляємо по вертикалі (рис. 4.1) угору. Нехай струна виведена зі стану рівноваги так, що її динамічне зміщення залишилось у площині xOy . Зміщення струни залежатиме від часу та координати $x \in AB$. Позначимо через $u(x, t)$ зміщення струни в точці (перерізі) x в момент часу t . Вважатимемо зміщення невідомою функцією. Знайдемо диференціальне рівняння, яке ця функція задовольняє. Це рівняння, як уже не раз зазначалось, можна знайти з другого закону Ньютона, який для проекції на вісь Oy запишеться так:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = F_y. \quad (1.1)$$

Знайдемо сили F_y , що діють на струну в динамічному стані. Вважатимемо, що в будь-якій точці x інтервалу AB в момент часу t до струни прикладено силу $\bar{F}(x, t)$. Внутрішньою силою буде натяг

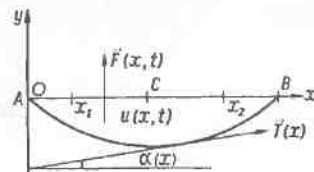


Рис. 4.1

струни. Якщо розрізати струну в точці $C(x)$, то вплив AC на CB виразиться силою $\vec{T}(x)$, напрямленою по дотичній до струни в цій точці. Позначимо кут між напрямом дії сили $\vec{T}(x)$ і віссю Ox через $\alpha(x)$. Виділимо ділянку струни, що визначається координатами x_1 та x_2 (рис. 4.2). Її довжину позначимо $\Delta x = x_2 - x_1$. У точках x_1 та x_2 на відокремлену ділянку діють дві сили: $\vec{T}(x_1)$ і $\vec{T}(x_2)$. Їхніми

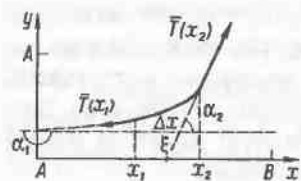


Рис. 4.2

проекціями на вісь Oy будуть $|\vec{T}(x_2)| \sin \alpha_2$ і $|\vec{T}(x_1)| \sin \alpha_1$. Оскільки α, α_1 і α_2 є кутами між дотичними до динамічної кривої струни в точках x, x_1, x_2 , то синуси цих кутів визначимо через тангенси за відомою формулою

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (1.2)$$

Однак $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, тому

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}. \quad (1.3)$$

Нехтуємо $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ порівняно з одиницею. За (1.3) $\sin \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}$. Приймемо

$|\vec{T}(x)| = T(x)$. Тоді $|\vec{T}(x_1)| \sin \alpha_1 = T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$;

$|\vec{T}(x_2)| \sin \alpha_2 = T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2}$. Знайдемо натяг, що діє на ділянку Δx .

Це буде різниця $\left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right)$. Застосуємо до цієї різниці теорему Лагранжа про середнє:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in [a, b],$$

де $b = x_2; a = x_1; b - a = \Delta x; f(x) = T(x) \frac{\partial u}{\partial x}; \xi \in \Delta x$ (рис. 4.2).

Похідна $f'(\xi)$ — це частинна похідна по x . Отже, якщо замінити ξ на x , то $T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta x$. Таким чином, до ділянки Δx струни прикладено дві сили:

$$F(x, t) \Delta x \quad \text{і} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta x;$$

$$F_y = F(x, t) \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta x. \quad (1.4)$$

Застосуємо рівняння (1.1) до відрізка Δx струни. Тоді $m = \rho(x) \Delta V$, але $\Delta V = S \Delta x$. Приймемо, що тут $S = 1$. Ми це вже фактично передбачили під час запису виразу (1.4). Тепер $m = \rho(x) \Delta x$, а другий закон Ньютона запишеться так:

$$\rho(x) \Delta x \frac{d^2 u}{dt^2} = F(x) \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta x.$$

Після скорочення на Δx дістанемо динамічне рівняння коливань струни під впливом зовнішнього навантаження $F(x, t)$:

$$\rho(x) \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(x, t). \quad (1.5)$$

Знайдемо

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}; \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (1.7)$$

Нехтуючи в (1.6) та (1.7) добутками $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}$, дістаємо

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1.8)$$

Рівняння коливань струни за цих умов запишеться так:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + F(x, t). \quad (1.9)$$

Звичайно натяг струни $T(x) = \text{const}$, а також $\rho(x) = \text{const} = \rho$.

Тоді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (1.10)$$

Якщо зовнішнє навантаження $F(x, t) = 0$, тобто його немає, то рівняння струни має вигляд

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.11)$$

Після ділення на ρ і позначення $\frac{T}{\rho} = a^2$ рівняння (1.11) можна записати так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.12)$$

Це найпростіше рівняння коливань струни. Звертаємо увагу на фізичний зміст: a — швидкість звуку в струні.

Використовуючи наведені міркування, можна відразу записати рівняння коливань мембрани, що перебуває у стані рівноваги в площині xOy . Зміщення тепер буде функцією від трьох змінних: $u(x, y, t)$. Те саме стосується і зовнішнього навантаження $F(x, y, t)$. Натяг T буде функцією від двох змінних, те саме стосується і $\rho(x, y)$.

Аналогом рівняння (1.9) для мембрани буде таке:

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[T(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + F(x, y, t), \quad (1.13)$$

а рівнянь (1.10), (1.12):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F(x, y, t);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (1.14)$$

У тривимірному просторі рівняння, що описують коливання тіла, відрізнятимуться від рівнянь (1.13) — (1.14) наявністю похідної по координаті z .

Позначимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u \right], \quad (1.15)$$

де Δu — оператор Лапласа. Запишемо з використанням цього оператора рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + \frac{F(t, x, y, z)}{\rho}. \quad (1.16)$$

Наведені рівняння коливань належать до лінійних рівнянь, оскільки невідомі функції і похідні від них входять у рівняння в першому степені.

Рівняння коливань мають численні розв'язки, що містять довільні функції. Для опису реальної системи завжди бажано дістати єдиний розв'язок. Щоб дістати такий розв'язок, треба задати певні умови. Якщо вибрати умови за аналогією зі звичайними диференціальними рівняннями, то таких умов має бути чотири: дві відносно часу, дві відносно координат. Це означає, що задається значення функції та її похідні у початковий момент часу t_0 :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) \Big|_{t=t_0} = \varphi(x, y, z); \quad (1.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\partial u}{\partial t} = u'_t(x, y, z, t) \Big|_{t=t_0} = \psi(x, y, z). \quad (1.18)$$

Ці умови називаються початковими. Задача з умовами (1.17), (1.18) називається задачею Коші з початковими умовами. Для рівняння (1.12) умови (1.17), (1.18) можна записати так:

$$u(x, t) \Big|_{t=t_0} = \varphi(x); \quad u'_t(x, t) \Big|_{t=t_0} = \psi(x); \quad x \in AB = l.$$

Умови за координатами — це такі, які накладаються на невідому функцію та її похідні по координатах на границі області визначення рівняння. Наприклад, для рівняння (1.12) ці умови запишуться так:

$$\lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = u(x, t) \Big|_{x=+0} = \psi_1(t);$$

$$\lim_{x \rightarrow l-0} u(x, t) = u(x, t) \Big|_{x=l-0} = \psi_2(t). \quad (1.19)$$

Замість умов (1.19) можуть бути умови, накладені на похідні:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=+0} = \psi_1(t);$$

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l-0} = \psi_2(t), \quad (1.20)$$

а також на координати і похідні одночасно:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \Big|_{x=+0} = \gamma_1(t); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \Big|_{x=l-0} = \gamma_2(t). \quad (1.21)$$

Умови (1.19)–(1.21) граничні, причому (1.19) — умови першого роду, (1.20) — другого роду, (1.21) — змішані граничні умови, або граничні умови третього роду. У виразах (1.19)–(1.21) величина l є довжиною відрізка AB , α — задана стала, функції $\varphi, \psi, \varphi_1, \varphi_2,$

$\psi_1, \psi_2, \gamma_1, \gamma_2$ вважаються заданими.

Тепер проведемо аналогію для рівнянь коливання струни. Зазначимо, що такими самими рівняннями описуються поздовжні коливання стержня, крутильні коливання валів, балок, коливання газу, швидкість протікання пального в трубопроводах високого тиску і т. д.

Тепер відповімо на запитання, що треба розуміти під розв'язанням диференціального рівняння з частинними похідними? Відповідь аналогічна поняттям розв'язку звичайного диференціального рівняння (див. гл. 1, п. 1.1). Функція, задана в деякій області D зміни незалежних змінних (у даному разі це x, y, z , а D — тривимірна область), що має всі похідні, які входять до рівняння (причому похідні неперервні в D), задовольняє рівняння в кожній точці області D , тобто при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність, називається розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними. Такий розв'язок для рівняння з частинними похідними називається класичним розв'язком (інтегралом). Розглядається ще так званий узагальнений розв'язок. Цей розв'язок є границею послідовності класичних розв'язків. Вимога до узагальненого розв'язку виявляється менш жорсткою, ніж до класичного. Зокрема, узагальнений розв'язок може мати похідні не в усіх точках D -області.

За аналогією з розв'язками звичайних диференціальних рівнянь для рівнянь з частинними похідними розрізняють загальний і частинний розв'язки (загальний і частинний інтеграл), які містять, як правило, довільні функції. Частинний розв'язок із загального дістають за допомогою задання граничних і початкових умов типу (1.17)–(1.21). У загальному випадку як початкові, так і граничні умови задаються у вигляді зв'язків між невідомими функціями та похідними від них при деяких значеннях незалежних змінних, що дають змогу визначити конкретну функцію — частинний розв'язок рівняння. Наведені вище рівняння (1.14), (1.16) вивчаються в розділі математики, який називається математичною фізикою.

У математичній фізиці вивчаються моделі, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними, інтегральними рівняннями, а також комбінаціями їх. При цьому рівняння можуть бути лінійними і нелінійними. У математичній фізиці найзагальніші

результати дістали для лінійних рівнянь другого порядку з частинними похідними:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(X) u = F(X), \quad (1.22)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n -вимірного простору; $u(X)$ — невідома функція; $a_{ij}(X), b_i(X), C(X), F(X)$ — функції, задані в області D n -вимірного простору. За допомогою рівняння (1.22) можна описати багато фізичних процесів. Якщо в (1.22) $F(X) = 0$, то лінійне рівняння називається однорідним, у противному разі — неоднорідним (див. гл. 1, п. 5.3).

Деякі методи пошуку розв'язків рівнянь з частинними похідними описуватимуться в § 5–8.

§ 2. МОДЕЛІ, ОПИСУВАНІ РІВНЯННЯМИ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, ДИФУЗІЇ, МАКСВЕЛЛА

Насамперед виведемо рівняння поширення теплоти в однорідному прямолінійному стержні завдовжки l (рис. 4.3).

Температуру в точці x в момент часу t позначимо через $u(x, t)$. За законом Фур'є для густини теплового потоку \bar{q} маємо

$$\bar{q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

де λ — коефіцієнт пропорційності; T — температура.

Для одновимірного випадку при $T = u(x, t)$ маємо

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Покладемо $\lambda = kS$, де S — площа поперечного перерізу стержня; k — коефіцієнт теплопровідності.

З одного боку, виділимо елемент стержня з абсцисами x_1 , та $x_2 = x_1 + \Delta x$. Кількість теплоти ΔQ_1 , що пройшла через переріз з абсцисою x_1 за час Δt по (2.1) буде:

$$\Delta Q_1 = -kS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \Delta t. \quad (2.2)$$

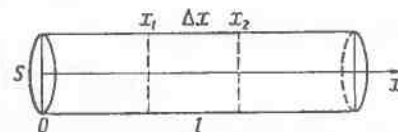


Рис. 4.3

Те саме для перерізу з абсцисою x_2 :

$$\Delta Q_2 = -kS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} \Delta t.$$

Потік теплоти за проміжок Δt

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} S \Delta t + k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} S \Delta t.$$

За теоремою Лагранжа про середнє

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x S \Delta t. \quad (2.3)$$

З іншого боку, приріст теплоти $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ за час Δt привів до підвищення температури в елементі Δx на деяку величину Δu , тому

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \Delta x S \Delta u, \quad (2.4)$$

де c — теплоємність речовини стержня; ρ — його густина.

Прирівнюємо (2.3) та (2.4) і дістаємо

$$c\rho \Delta x S \Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x S \Delta t,$$

або

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2.5)$$

Перейдемо до границі, тоді

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2.6)$$

Величина k — звичайна функція координат, те саме стосується c і ρ . Якщо величини k , c , ρ сталі, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.7)$$

де

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}. \quad (2.8)$$

Вираз (2.7) називається рівнянням поширення теплоти в однорідному стержні, або рівнянням теплопровідності стержня. Якщо врахувати пружні властивості стержня з коефіцієнтом q , а також дію джерела теплоти $F(x, t)$, то рівняння (2.6) запишеться так:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu + F(x, t). \quad (2.9)$$

Рівняння поширення теплоти можна аналогічно записати стосовно двох інших осей. Тоді математичною моделлю поширення теплоти в просторі буде рівняння

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) - qu + F(x, y, z, t), \quad (2.10)$$

або коротко

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } u) - qu + F(x, y, z, t). \quad (2.11)$$

У рівняннях (2.10), (2.11) $u(x, y, z, t) = u(x, t)$ — температура середовища в точці $X = (x, y, z, t)$ на момент часу t ; $\rho(X)$, $c(X)$ і $k(X)$ — відповідно густина, питома теплоємність і коефіцієнт теплопровідності простору; $q(X)$ — пружна характеристика середовища, в якому поширюється теплота; $F(X, t)$ — зовнішнє джерело теплоти. Якщо $\rho(X)$, $c(X)$, $k(X)$ — сталі, то рівняння (2.10) набирає вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{q}{c\rho} u + \frac{F}{c\rho}.$$

Нехай $\frac{k}{c\rho} = a^2$, $\frac{q}{c\rho} = q_1$; $\frac{F}{c\rho} = f$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - q_1 u + f, \quad (2.12)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u - q_1 u + f.$$

Рівняння (2.12) описує процес поширення теплоти під впливом зовнішньої дії f у тривимірному просторі з пружною характеристикою q_1 . Якщо зовнішньої дії немає ($f = 0$), а $q_1 = 0$, тобто пружність середовища не впливає на поширення теплоти, то рівняння (2.12) переходить у рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \text{ або коротко } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \quad (2.13)$$

Останнє називається рівнянням теплопровідності в просторі.

Для знаходження єдиного розв'язку рівняння теплопровідності треба задати початкові і граничні умови.

Нехай у тілі, що має об'єм V з площею поверхні σ , відбувається поширення теплоти. При цьому в початковий момент $t = t_0$ значення температури в тілі задано функцією $\varphi(x, y, z)$, тобто $u(x, y, z, t_0) = \varphi(x, y, z)$. Це й буде початкова умова, аналогічна умові (1.17). Крім

того, має бути відома температура в будь-якій точці $M(x, y, z)$ поверхні σ у будь-який момент часу $t > t_0$:

$$u(M, t) \Big|_{\sigma} = \psi(M, t) \Big|_{\sigma} = \psi(x_0, y_0, z_0, t). \quad (2.14)$$

Це й буде гранична умова, аналогічна умові (1.19). Якщо об'єм V збіжний з усім простором, то можна довести, що обмежений розв'язок рівняння теплопровідності при $t > t_0$ єдиним чином визначається початковою умовою. Замість того, щоб задавати значення функції $u(x, t)$ на межі σ при $t > t_0$, можна задати похідну $\frac{\partial u}{\partial n}$ по зовнішній нормалі до межі поверхні σ . До такої граничної умови ми прийдемо в разі визначення температури тіла всередині об'єму V , коли відома кількість теплоти, що передається через кожную точку поверхні σ всередину тіла від оточуючого об'єму V простору. В цьому разі йдеться про теплообмін між об'ємом V та навколишнім середовищем.

Якщо немає теплообміну через межу σ , то $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma} = 0$. Можна, на решті, за граничну умову при $t > t_0$ на межі σ взяти лінійну комбінацію $k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u$, де k_1 — коефіцієнт теплопровідності при переході від навколишнього середовища до тіла об'єму V ; k — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла. До такої математичної задачі приходимо в тому разі, коли визначаємо температуру $u(X, t)$ всередині тіла при відомій температурі u_1 навколишнього середовища. Тоді, на підставі теплового балансу дістанемо, що на межі σ виконуватиметься рівність

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u \right) \Big|_{\sigma} = k_1 u_1. \quad (2.15)$$

Якщо функція $u(X, t)$ залежить лише від двох координат x і y , то рівняння теплопровідності в площині пластинки має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.16)$$

Початкові і граничні умови дістанемо з виразів (2.14), (2.15), враховуючи, що функції, які в них діють, залежать лише від двох координат.

Іноді доводиться розглядати стаціонарний процес, тобто процес, в якому u , F не належать від t . Тоді в рівняннях (1.13), (1.16), (2.7),

(2.10) ліва частина дорівнює нулю, і ці рівняння можуть за певних умов збігатися.

Наприклад, рівняння (1.16) у стаціонарному випадку набирає вигляду

$$a^2 \Delta u + \frac{F(x, y, z)}{\rho} = 0, \quad (2.17)$$

а рівняння (2.10)

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu + F(x, y, z) = 0. \quad (2.18)$$

Якщо $F(x, y, z) = 0$, $q = 0$ і $k = \text{const}$, то

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = k \Delta u.$$

Рівняння (2.17), (2.18) тепер запишуться так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (2.19)$$

де під u можна розуміти як зміщення в точці x у момент t , так і температуру. Рівняння (2.19) називається рівнянням Лапласа. Хвильове рівняння, рівняння теплопровідності, а також рівняння Лапласа називаються **основними типами рівнянь математичної фізики**.

Тепер розглянемо аналогії рівнянню теплопровідності. Перша аналогія — дифузія. Якщо порівняти тепловий потік \bar{q} , визначений формулою

$$\bar{q} = -\lambda \operatorname{grad} u,$$

з потоком маси

$$\bar{I} = -D \operatorname{grad} c,$$

то легко помітити, що коефіцієнту λ рівняння теплопровідності відповідає D — коефіцієнт молекулярної дифузії, температурі T — концентрація маси c , або густина дифузного потоку в точці X у момент t , $cp(X) = m$ — маса потоку, $q(X)$ — характеризує вбираючу здатність середовища, $F(X, t)$ — зовнішні дії.

З урахуванням цих позначень запишемо рівняння дифузії

$$m \frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} c) - qc + F(x, y, z, t). \quad (2.20)$$

Якщо скористатись законом Дарсі (фільтрації), в якому густина потоку рідини пропорційна градієнту тиску p :

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad (2.21)$$

де k — коефіцієнт фільтрації, то рівняння фільтрації в рідині твердих частинок запишеться аналогічно. При цьому слід провести заміну величин в рівнянні теплопровідності: $\lambda \rightarrow \frac{k}{\mu}$; $T \rightarrow p$ (тиск); $c_p \rightarrow l$ (пористість); $q \rightarrow V_k$ — швидкість конвекції рідкої фази; μ — кінематична в'язкість.

Зазначимо, що аналогічними рівняннями описуються процеси сушіння дисперсних матеріалів, проникнення композиційних матеріалів, взагалі будь-які процеси, де є масоперенесення.

Звернемось тепер до рівнянь Максвелла, або рівнянь електромагнітного поля в потенціалах.

В енергетичних системах існують електричні та магнітні поля, причому є два види електричних полів: електростатичне (поле нерухомих зарядів) і стаціонарне електричне (поле постійних струмів). Обидва електричних поля можна охарактеризувати вектором напруженості \vec{E} , що визначається як сила, яка діє на одиничний позитивний заряд. Якщо відмовитися від стаціонарності поля, то \vec{E} буде функцією точки $M(x, y, z)$, а також часу, тобто $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$. Те саме можна сказати і про магнітні поля.

Класична теорія дифракції електромагнітного поля ґрунтується на рівняннях Максвелла або рівняннях змінного електромагнітного поля в потенціалах. Як відомо, заряди і струми в середовищі створюють електричне і магнітне поля $\vec{E}(X, t)$ і $\vec{H}(X, t)$ (напруженість електричного і магнітного полів у точці $X = (x_1, x_2, x_3)$ в момент часу t). Між нерухомими і рухомими зарядами, розміщеними в середовищі, і функціями \vec{E} і \vec{H} існує досить складний зв'язок. Як показав Максвелл, такий зв'язок існує лише у вигляді похідних від векторних полів \vec{E} і \vec{H} . Оскільки кожне векторне поле має просторові похідні (скалярну — дивергенцію і векторну — ротор), то для повного опису полів \vec{E} і \vec{H} треба мати чотири диференціальні рівняння, які називаються рівняннями Максвелла:

$$\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 4\pi\rho; \quad \text{div } \mu \vec{H} = 0; \quad (2.22)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \vec{H})}{\partial t}; \quad (2.23)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{I}, \quad (2.24)$$

де ϵ — діелектрична стала середовища; $\rho(X)$ — густина зарядів; μ — коефіцієнт магнітної проникності середовища; $\vec{I}(X, t)$ — сила струму провідності.

Задача розв'язку рівнянь (2.22)–(2.24) значно спрощується введенням двох допоміжних функцій: скалярного електричного потенціалу ϕ і векторного магнітного потенціалу \vec{A} , що задовольняють такі умови:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}; \quad (2.25)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad (2.26)$$

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{умова Лоренца}). \quad (2.27)$$

Підставляючи (2.25)–(2.27) у рівняння Максвелла при $\epsilon = \mu = 1$, дістанемо два диференціальних рівняння для кожного з потенціалів:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho; \quad (2.28)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{I}. \quad (2.29)$$

Рівняння (2.28) через похідні по координатах записуються так:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (2.30)$$

або в символічній формі

$$\square \phi = -4\pi\rho, \quad (2.31)$$

де \square — оператор Д'Аламбера.

У разі стаціонарного процесу $u(x, t) = u(x)$ рівняння (2.30) переходить у рівняння Пуассона

$$\Delta \phi = -4\pi\rho. \quad (2.32)$$

Коли в електричному полі немає зарядів, тобто $\rho = 0$, рівняння (2.28) переходить у хвильове рівняння

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Якщо $\rho = 0$, $\epsilon = \text{const}$, $\mu, \lambda = \text{const}$, $\vec{I} = \lambda \vec{E}$ (закон Ома), то з системи (2.22)–(2.24) для компонент \vec{I} та \vec{H} дістаємо окремий випадок так званого телеграфного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{4\pi\lambda}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (2.33)$$

де u — компонента вектора напруженості \vec{H} або сили струму \vec{I} .

Наприклад, нехай дано рівняння виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.34)$$

в якому невідомою є функція двох змінних: x та y . Розв'язком цього рівняння є функція, що являє собою класичний загальний розв'язок:

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + c_1xy + c_2x + c_3y + c_4,$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — сталі. Для відокремлення частинного розв'язку слід задати умови, що можуть містити значення функції та її похідних при x_0, y_0 .

§ 3. РІВНЯННЯ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Розглянемо тверде тіло, на яке діє сила. Для опису руху окремих частин тіла (опису деформацій тіла) його поділяють на нескінченно малі об'єми (елементи), кожний з яких можна вважати фізичною матеріальною точкою (частинкою).

Розглянемо сили, прикладені до такої частинки (рис. 4.4) з боку інших частинок, які її оточують, через поверхню стикання $\Delta\sigma$ із зовнішньою нормаллю \vec{n} . Нехай \vec{F}_n — сила, віднесена до одиниці площі, тобто сила, що діє в точці. Тоді $\vec{F}_n \Delta\sigma$ — сила, з якою оточуючі частинки діють на поверхню $\Delta\sigma$. Напрямок дії сили \vec{F}_n у загальному

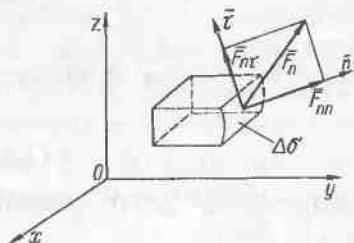


Рис. 4.4

випадку може і не збігтися з зовнішньою нормаллю, тобто силу можна розкласти на складові, що напрямлені по нормалі \vec{n} і дотичній $\vec{\tau}$: \vec{F}_{nn} і $\vec{F}_{n\tau}$.

У системі координат x, y, z зобразимо поверхню $\Delta\sigma$ у вигляді трикутника ABC (рис. 4.5). Знайдемо вираз \vec{F}_n , якщо відома нормаль \vec{n} площини $\Delta\sigma$. Тоді площі граней утвореного тетраедра відповідно виражатимуться

$$\Delta\sigma \cos(\vec{n}, x), \Delta\sigma \cos(\vec{n}, y), \Delta\sigma \cos(\vec{n}, z).$$

Якщо скласти добутки сил $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$, що діють у кожній точці бічних граней, на площі цих граней, то дістанемо

$$\vec{F}_n \Delta\sigma = \vec{F}_x \Delta\sigma \cos(\vec{n}, x) + \vec{F}_y \Delta\sigma \cos(\vec{n}, y) + \vec{F}_z \Delta\sigma \cos(\vec{n}, z).$$

Після скорочення на $\Delta\sigma$ матимемо

$$\vec{F}_n = \vec{F}_x \cos(\vec{n}, x) + \vec{F}_y \cos(\vec{n}, y) + \vec{F}_z \cos(\vec{n}, z).$$

Розкладемо сили $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ по осях координат з одиничними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{F}_x = p_{11}\vec{i} + p_{21}\vec{j} + p_{31}\vec{k}; \quad \vec{F}_y = p_{12}\vec{i} + p_{22}\vec{j} + p_{32}\vec{k}; \quad \vec{F}_z = p_{13}\vec{i} + p_{23}\vec{j} + p_{33}\vec{k}.$$

Тут p_{11}, p_{21}, p_{31} — компоненти сили \vec{F}_x , що діє на одиницю площинки із зовнішньою нормаллю, напрямленою по осі Ox . Нехай $\Delta y \Delta z$ — площа цієї площинки, тоді $p_{11} \Delta y \Delta z, p_{21} \Delta x \Delta z, p_{31} \Delta x \Delta y$ — сили, що діють на площинку відповідно в напрямках осей Ox, Oy, Oz . Аналогічний зміст мають p_{12}, p_{22}, p_{32} — компоненти сили \vec{F}_y та p_{13}, p_{23}, p_{33} — компоненти \vec{F}_z . Компоненти p_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) називаються напруженнями. Вони створюють у кожній точці тіла, що деформується, напружений стан. При цьому напруження p_{11}, p_{22}, p_{33} називаються нормальними, а $p_{12}, p_{21}, p_{13}, p_{31}, p_{23}, p_{32}$ — дотичними. Напруження є функцією від координат точки, а може бути й часу. З дев'яти величин p_{ik} незалежними є лише шість, тобто $p_{ik} = p_{ki}, i \neq k$ ($i, k = 1, 2, 3$).

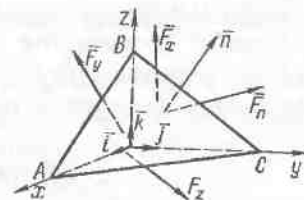


Рис. 4.5

Тіло, що деформується, або суцільне середовище, може бути подане сукупністю розглянутих вище матеріальних точок (частинок). Тому загальні рівняння руху суцільного середовища можна дістати з другого закону Ньютона. В результаті матимемо систему трьох рівнянь:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + \varphi_i \rho + F_i = \rho \frac{du_i}{dt^2}; \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

або

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + \varphi_i \rho + F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}; \quad p_{ik} = p_{ki},$$

що виражають рівняння динамічної рівноваги нескінченно малого об'єму. Тут для компактності запису осі нерухомої системи координат позначені x_1, x_2, x_3 .

Нагадаємо, що

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \dot{x}_3.$$

Оскільки тіло (середовище) суцільне, то треба забезпечити нерозривність його нескінченно малих об'ємів. Це називається також умовою збереження маси і виражається у вигляді рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0; \quad (3.2)$$

$$v_i = \frac{du_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3.$$

У цих рівняннях: ρ — густина елемента об'єму, φ_i — густина зовнішніх масових сил (наприклад, ваги), F_i — зовнішня дія, u_i — переміщення елемента об'єму. Всі величини вважаються функціями часу та координат елемента об'єму або фізичної матеріальної точки. Невідомими є p_{ik}, u_i, ρ — всього десять. Це нелінійні рівняння. Якщо крім деформаційних процесів у середовищі відбуваються істотні термодинамічні процеси, то до рівнянь (3.1) і (3.2) треба додати термодинамічне рівняння енергії (перше начало термодинаміки):

$$\rho \frac{dE}{dt} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial I_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \left(v_i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right), \quad (3.3)$$

де E — внутрішня енергія, віднесена до одиниці об'єму (маси) фізичної матеріальної точки (питома внутрішня енергія); $\vec{I}(\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3)$ —

вектор густини потоку теплоти, що передається у процесі теплопередачі.

До вже зазначених рівнянь слід додати початкові умови, а також граничні умови поведінки зміщень та напружень на поверхні розглядуваного тіла. З десяти невідомих, що входять до рівнянь (3.1) і (3.2), можна із самих рівнянь знайти лише чотири.

Для замикання рівнянь (3.1) і (3.2) вводять матрицю деформацій

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \Pi_d, \quad (3.4)$$

поєднуючи деформації ϵ_{ik} з переміщеннями u_i у лінійному вигляді за формулами

$$\epsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i \neq k. \quad (3.5)$$

Компоненти матриці деформацій задовольняють умови нерозривності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ii}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{kk}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad i \neq k;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{ii}}{\partial x_k \partial x_i}, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Математичні рівняння нерозривності означають, що деформації мають бути двічі диференційовними функціями часу і координат. Якщо ввести матрицю напружень

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \Pi_n, \quad (3.7)$$

то рівняння

$$f(T, u, t, \Pi_d, \dot{\Pi}_d, \Pi_n, \dot{\Pi}_n) = 0 \quad (3.8)$$

буде умовою замикання рівнянь (3.1) та (3.2). Воно звичайно називається реологічним рівнянням.

Матриці (3.4), (3.7) ще називають **тензорами**. У рівнянні (3.8) тензор деформації може виражатися через переміщення і нелінійно, самі деформації можуть бути і нескінченно малими, пружними і непружними. В рівнянні (3.8): u — історія стану деформацій та напру-

жень, t — час і T — температура. Реологічне рівняння записується також у вигляді

$$\dot{f}_{ik} \left(\varepsilon_{ik}, \frac{d\varepsilon_{ik}}{dt}, p_{ik}, \frac{dp_{ik}}{dt}, T, t, u \right) = 0; \quad (3.9)$$

$$\dot{f}_{ik} = \dot{f}_{ki} \quad (i, k) = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Для ізотропних тіл тензори деформацій та напружень звичайно розмежовуються на два: 1) тензор деформацій e_v , зв'язаний зі зміною об'єму, і тензор напружень R_v , що відповідає цій деформації; 2) тензори e_0 та R_0 зв'язані зі зміною форми. Для ізотропних тіл рівняння (3.8) можна записати у вигляді двох рівнянь:

$$\varphi(\mu, t, T, R_v, e_v, \dot{R}_v, \dot{e}_v) = 0; \quad (3.11)$$

$$\psi(\mu, t, T, R_0, e_0, \dot{R}_0, \dot{e}_0) = 0, \quad (3.12)$$

одне з яких зв'язане зі зміною об'єму, а інше — форми. Звичайно замість рівнянь (3.11), (3.12) розглядають рівняння виду

$$\varphi(\mu, R_v, e_v, \dot{R}_v, \dot{e}_v) = 0; \quad (3.13)$$

$$\psi(\mu, R_0, e_0, \dot{R}_0, \dot{e}_0) = 0. \quad (3.14)$$

Якщо в рівняннях (3.13), (3.14) зв'язки між величинами, що входять до них, лінійні, то й теорія відповідно називається лінійною, в протилежному разі — нелінійною. Слід зазначити, що різниця між тілами найбільше виявляється в рівняннях формозміни. З рівнянь (3.13), (3.14) дістають реологічні моделі. Рівняння чисто об'ємної деформації в передбаченні, що напруження, які відповідають початковому стану тіла, дорівнюють нулю і не залежать від історії, записуються у вигляді

$$R_v = -k e_v, \quad (3.15)$$

де k — модуль об'ємної деформації (розширення, стискання), або в термінах напружень

$$p_c = -k \varepsilon_c; \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (3.17)$$

де V — об'єм тіла; ΔV — його зміна.

Розглянемо тепер пружне тіло, у якого відбувається лише формозміна. У цьому разі в (3.14) вважають

$$R_0 = 2\mu e_0, \quad (3.18)$$

або в термінах напружень і деформацій, які в цьому разі позначимо через p'_{ik} , ε'_{ik} :

$$p'_{ik} = 2\mu \varepsilon'_{ik} = 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_c \delta_{ik} \right).$$

Якщо вважати справедливими рівняння (3.16), то дістанемо

$$p_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \left(k - \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_c \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k; \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

де δ_{ik} — символ Кронекера. Замінюючи в останньому виразі ε_{ik} на вираз (3.5), а

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{u},$$

дістанемо

$$p_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \text{div } \vec{u} \delta_{ik},$$

де $\lambda = k - \frac{2}{3} \mu$.

Знайдемо $\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$ при сталих λ і μ :

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_k} \text{div } \vec{u} \delta_{ik}.$$

Підставимо останній вираз у формулу (3.1) і дістанемо відоме рівняння пружного тіла (рівняння Ламе):

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \rho \vec{\varphi} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}$$

$$\left(\Delta \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_3^2} \right),$$

де $\vec{F} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ — сили зовнішньої дії.

Звичайно похідну $\frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$ замінюють на частинну $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ (див. формули (1.6)–(1.8)) і останнє рівняння записують у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho \vec{\varphi} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}. \quad (3.19)$$

Рівняння (3.19) і (3.2) складають замкнену систему рівнянь. Якщо ρ , λ , μ — відомі сталі, то рівняння (3.19) лінійне. У разі пружно-

в'язкого середовища рівняння (3.13) і (3.14) звичайно записують так:

$$R_v = R_{0v} + ke_v + \xi \dot{e}_v; \quad (3.20)$$

$$R_v = 2\mu e_0 + 2\eta \dot{e}_0, \quad (3.21)$$

де R_{0v} — тензор напружень, що відповідає стану початку деформації; так, для рідини, наприклад, $R_{0v} = -P$, ξ і η — коефіцієнти в'язкості. Для ідеальної рідини всі реологічні коефіцієнти k , ξ , μ , η — дорівнюють нулю, для в'язкої нестискуваної рідини є лише один відмінний від нуля коефіцієнт η (така рідина називається ньютонівською). Пружно-в'язке стискуване тіло має чотири реологічні коефіцієнти. Якщо в рівняннях (3.20) і (3.21) перейти до напружень і деформацій, то дістанемо

$$p_{ik} = \left[-P + \left(\xi - \frac{2}{3} \eta \right) \dot{\epsilon}_c \right] \delta_{ik} + \left(k - \frac{2}{3} \mu \right) \epsilon_c \delta_{ik} + 2\mu \epsilon_{ik} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ik}. \quad (3.22)$$

Якщо це рівняння перенести у (3.1), то дістанемо рівняння пружно-в'язкого стискуваного середовища. При цьому праву частину рівняння слід виражати через швидкості, оскільки в більшості випадків для рідин можна обмежитися пошуком поля швидкостей. Зокрема, для ідеальної рідини ($\xi = \eta = k = \mu = 0$) вираз (3.22) перетворюється в рівняння

$$p_{ik} = -P\delta_{ik}, \quad (3.23)$$

а рівняння (3.1) запишеться у вигляді

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{\varphi} - \text{grad} P + \vec{F}. \quad (3.24)$$

Величину P визначають з граничних умов. Нехай зв'язок (3.23) зберігає силу і при відмінних від нуля сталих k , ξ , μ , η . Тоді до рівняння (3.24) слід додати рівняння (3.2) і рівняння стану рідини (3.17) у вигляді

$$P[T, V] = -\frac{k_0}{V} [V - V(T_0)] + \alpha k_0 (T - T_0). \quad (3.25)$$

Рівняння стану газу має такий вигляд:

$$P = \frac{R}{M} T \rho, \quad (3.26)$$

де R — газова стала; M — молекулярна вага. Якщо враховується також рівняння (3.3), то для повноти слід додати рівняння енергії

$$E = E(\rho, T),$$

а також рівняння стану для вектора густини потоку теплоти

$$\vec{I} = -\alpha \text{grad} T. \quad (3.27)$$

У цьому разі рівняння (3.24)–(3.27) називаються **рівняннями Ейлера**. Для в'язкої стискуваної рідини рівняння (3.22) має вигляд

$$p_{ik} = \left[-P + \left(\xi - \frac{2}{3} \eta \right) \dot{\epsilon}_c \right] \delta_{ik} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ik} + k \epsilon_c \delta_{ik},$$

а рівняння (3.1) запишеться так:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{\varphi} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v} + (\xi + \eta) \text{grad} \text{div} \vec{v} + k \text{grad} \text{div} \vec{u} + \vec{F}. \quad (3.28)$$

Для в'язкої нестискуваної рідини

$$\epsilon_c = 0; \quad \dot{\epsilon}_c = 0; \quad \text{div} \vec{v} = 0; \quad \text{div} \vec{u} = 0;$$

$$p_{ik} = -P\delta_{ik} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ik}.$$

Підставимо останнє в рівняння (3.1) і дістанемо **рівняння Нав'є–Стокса**

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{\varphi} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}; \quad \text{div} \vec{v} = 0. \quad (3.29)$$

В усіх випадках при виведенні рівнянь передбачалось, що реологічні коефіцієнти стали. Зазначимо, що до рівняння (3.28) слід додати рівняння стану (3.25), а також (3.2). Якщо рівняння розглядається з урахуванням (3.3), то слід розглянути ще й рівняння (3.26)–(3.27). Якщо в рівнянні стану (3.25) чи (3.27) $P(T, \rho)$ є лише функція густини, що має місце в ізотермічних ($T = \text{const}$) або адіабатичних ($T = T(\rho)$) процесах, то рідину називають баротропною. Якщо швидкості точок малі, то в зазначених рівняннях (3.25), (3.28), (3.29) повну похідну від швидкості можна замінити на частинну:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Розглянемо за цих умов рівняння (3.19). Припустимо, що тут $\bar{\varphi} = 0$ (відсутня густина масових сил), $\text{div } \bar{u} = 0$. Нехай до тіла прикладена зовнішня сила

$$\bar{F}(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{F}(X, t).$$

Тоді рівняння запишеться так:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \bar{u} + \bar{F}(X, t). \quad (3.30)$$

Вважаючи $\rho = \text{const}$, рівняння (3.30) можна записати так:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \bar{u} + \bar{f}, \quad (3.31)$$

$$\text{де } a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \bar{f} = \frac{\bar{F}}{\rho}.$$

Останнє рівняння збігається з тривимірним хвильовим рівнянням (1.16). Нагадаємо, що при $\bar{f} = 0$ рівняння (3.31) однорідне, а при $\bar{f} \neq 0$ неоднорідне. Якщо в рівнянні $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$, то рівняння називається рівнянням Пуассона:

$$a^2 \Delta \bar{u} + \bar{f} = 0, \quad \text{або} \quad a^2 \Delta \bar{u} = -\bar{f}. \quad (3.32)$$

Якщо в (3.32) $\bar{f} = 0$, то здобудемо рівняння (2.19)

$$\Delta \bar{u} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_3^2} = 0. \quad (3.33)$$

Функції, що задовольняють (3.33) у деякій D -області, називаються гармонічними.

Дамо пояснення, чому рівняння (3.31) і (3.33) називаються хвильовими: коли \bar{f} — періодичне збурення, то рівняння задовольняє функції виду

$$\bar{u} = \bar{a} \cos [\omega t - (\bar{b} \cdot \bar{r}) + \alpha],$$

де \bar{a} , ω , \bar{b} , α є сталими, а $\bar{r} = \bar{r}(x_1, x_2, x_3)$.

§ 4. КАНОНІЧНІ ФОРМИ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ РІВНЯННЯ. КЛАСИФІКАЦІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Якщо в рівнянні (1.22) вважати простір двовимірним, координати точки в якому позначимо через x, y , а коефіцієнти сталими, то рівняння набирає вигляду

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \quad (4.1)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ — стали; $u(x, y)$ — невідома функція; $F(x, y)$ — задана функція. Замінюючи в (4.1) змінні x, y на нові ξ, η так, щоб $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, можна впевнитися в тому, що стосовно змінних ξ, η рівняння (4.1) також лінійне і матиме такий вигляд:

$$\alpha_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F(\xi, \eta), \quad (4.2)$$

де коефіцієнти при похідних відшукуються відомими способами. Формули для обчислення похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

дістають диференціюванням функцій $u(x, y)$ та $u(\xi(x, y), \eta(x, y))$, з яких $u(x, y)$ — проста, а $u(\xi, \eta)$ — складна функції двох змінних.

А чи не можна вибрати нові змінні ξ та η так, щоб у перетвореному рівнянні (4.2) деякі коефіцієнти при других похідних дорівнювали б нулю? Виявляється, що ця задача пов'язана з розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$a_1 dy^2 + 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) називається характеристичним для вихідного диференціального рівняння з частинними похідними, а його інтеграли — характеристиками. Рівняння (4.3) зберігається і для випадку, коли коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{22} є функціями від x, y .

Якщо $\varphi(x, y) = c_1$ — загальний інтеграл рівняння (4.3), то, вважаючи, що $\xi = \varphi(x, y)$, дістанемо, що перетвориться на нуль коефіцієнт при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$. Якщо ж $\psi(x, y) = c_2$ є другим спільним інтегралом рівнян-

ня (4.3), незалежним від $\varphi(x, y)$, тобто таким, що $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, то, вважаючи $\eta = \psi(x, y)$, можна обернути на нуль також коефіцієнт a_{22} при $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$.

Характеристичне рівняння (4.3) можна записати так:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

Якщо в цьому рівнянні невідомим вважати $\frac{dy}{dx}$, то маємо квадратне рівняння, розв'язавши яке, знайдемо два вирази для $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (4.4)$$

Якщо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, то інтеграли характеристичного рівняння $\varphi(x, y) = c_1$ та $\psi(x, y) = c_2$ дійсні і різні. Поклавши $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, приведемо рівняння (4.2) до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (4.5)$$

Це рівняння називають рівнянням гіперболічного типу. Якщо тепер покласти $\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi - \eta}{2}$, то рівняння (4.5) набере вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi_1 \left(\alpha, \beta, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, u \right). \quad (4.6)$$

Якщо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, то характеристичне рівняння має лише один загальний інтеграл: $\varphi(x, y) = c$.

Нехай $\eta(x, y)$ — будь-яка функція, що не залежить від $\varphi(x, y)$. Тоді покладемо $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ і приведемо рівняння (4.2) до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (4.7)$$

У цьому разі рівняння (4.7) називають рівнянням параболічного типу.

Якщо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то рівняння (4.3) має комплексні (спряжені) загальні інтеграли $\varphi(x, y) = c_1$ та $\varphi^*(x, y) = c_2$. Покладемо $\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}$, $\beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2}$ і приведемо рівняння до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\alpha, \beta, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, u \right). \quad (4.8)$$

У цьому разі вираз (4.8) називається рівнянням еліптичного типу. Якщо коефіцієнти лінійного рівняння (4.1) стали, то рівняння (4.4) має розв'язок

$$y = \frac{-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + c_3; \quad (4.9)$$

$$y = \frac{-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + c_4. \quad (4.10)$$

1. При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ рівняння (4.2) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f,$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f \quad (\text{гіперболічний тип}).$$

2. При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ рівняння (4.2) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = f \quad (\text{параболічний тип}).$$

3. При $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ рівняння (4.2) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f \quad (\text{еліптичний тип}).$$

Якщо замість функції u ввести нову функцію v , вважаючи, що $u = ve^{\lambda \xi + \mu \eta}$, де λ і μ — сталі, то при відповідному виборі λ і μ матимемо такі канонічні форми рівнянь другого порядку з частинними похідними та сталими коефіцієнтами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma v &= f_1 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= f_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{гіперболічний тип}); \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial v}{\partial \eta} = f_1 \quad (\text{параболічний тип}); \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \gamma v = f_1 \quad (\text{еліптичний тип}), \quad (4.13)$$

де γ і b — сталі; f_1 — задана функція двох змінних.

Зазначимо, що рівняння (2.19), (2.28), (2.24), (2.31)–(2.33) належать до гіперболічних рівнянь, рівняння дифузії і теплопровідності — до параболічних, а стаціонарні рівняння, тобто рівняння, в яких немає похідних по часу, — до еліптичних. Таким чином, розподіл рівнянь з частинними похідними другого порядку на три типи пов'язаний з відмінністю фізичних процесів, які вони описують.

Відповідно до цього розрізняють три види крайових (граничних) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Задача Коші для рівнянь гіперболічного та параболічного типу — задаються початкові умови, граничні умови відсутні. Область визначення рівняння та розв'язку його — весь простір. Так, для струни нескінченної довжини, що описується рівнянням (1.1), невідома функція $u(x, y)$ визначена для $-\infty < x < +\infty$ і $t > 0$. Задаються лише початкові умови (1.4). Так само, як і для звичайних диференціальних рівнянь, задача Коші для рівнянь з частинними похідними не завжди має розв'язок і навіть смисл.

2. Крайова, або гранична, задача для рівнянь еліптичного типу — задаються граничні умови на межі S області визначення невідомої функції, початкові умови відсутні. Так, для стаціонарного рівняння, що впливає з виразу (2.11):

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + gu = F(x), \quad (4.14)$$

можна сформулювати такі граничні умови:

а) на межі σ підтримується заданий розподіл температури u_0 :

$$u|_{\sigma} = u_0. \quad (4.15)$$

Задача такого типу називається задачею Діріхле, або першою крайовою задачею;

б) на σ підтримується заданий потік теплоти:

$$-k \frac{\partial u}{\partial n}|_{\sigma} = u_1, \quad (4.16)$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}$ — похідна по нормалі до поверхні, що описується функцією $u(x, t)$. Задача такого типу називається задачею Неймана, або другою крайовою задачею;

в) на σ відбувається теплообмін згідно із законом

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) \right] \Big|_{\sigma} = 0. \quad (4.17)$$

Задача розв'язання рівняння (4.14) разом з умовою (4.17) називається третьою крайовою задачею.

Якщо рівняння (4.14) описує процес поширення теплоти всередині (поза) об'єму V , то таку граничну задачу називають внутрішньою (зовнішньою). Класичний розв'язок, що задовольняє граничні умови, називається точним розв'язком. Отже, точним розв'язком граничної задачі називається функція, яка після підстановки її замість шуканої функції в основне диференціальне рівняння (4.14) і граничні умови перетворює їх на тотожність.

Як приклад розглянемо граничну задачу рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \cos \frac{4\pi x}{a} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{8\pi^2}{a^2} \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right), \quad (4.18)$$

у замкнутій області $(-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b)$. Граничні умови:

на сторонах $x = \pm a$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, x) = 0, \quad (4.19)$$

де $\cos(\hat{n}, x)$ — косинус кута між додатним напрямом осі x і напрямом зовнішньої нормалі до межі;

на сторонах $y = \pm b$

$$u = 0. \quad (4.20)$$

Точним розв'язком є функція

$$u = \cos \frac{4\pi x}{a} \left(\frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (4.21)$$

Пропонуємо переконатись у цьому самостійно підстановкою функції u та її відповідних похідних у рівності (4.18)–(4.20).

3. Змішана задача для рівнянь гіперболічного та параболічного типів — задаються початкові та граничні умови.

§ 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ
КОЛИВАННЯ СТРУНИ МЕТОДОМ Д'АЛАМБЕРА

Розв'язування більшості крайових задач усіх типів пов'язане із серйозними математичними труднощами. Тому основними є наближені методи розв'язування цих задач. Разом з тим розроблено також точні методи розв'язання деяких крайових задач. Наприклад, метод характеристик, який ще у XVIII ст. розробив Д'Аламбер.

Розглянемо розв'язування рівняння (1.12)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

з початковими умовами

$$u(x; t) \Big|_{t=+0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=+0} = \psi(x), \quad (5.2)$$

тобто розв'язування задачі Коші для нескінченної струни. Виконаємо в рівнянні (5.1) таку заміну змінних:

$$\xi = x - at; \quad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta); \quad (5.3)$$

$$\eta = x + at; \quad t = \frac{1}{2a}(\eta - \xi). \quad (5.4)$$

Виразивши похідні від u по x і t через похідні по ξ та η з урахуванням (5.3), (5.4), знайдемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right). \quad (5.6)$$

Підставимо (5.5), (5.6) у (5.1) і дістанемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (5.7)$$

це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \text{ або } \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Звідси випливає, що $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ залежить лише від ξ , а $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ — лише від η :

$$u(\xi, \eta) = F_1(\xi) + F_2(\eta), \quad (5.8)$$

де F_1 і F_2 — довільні диференційовні функції. Враховуючи (5.3), (5.4), розв'язок (5.8) можна записати так:

$$u(x, t) = F_1(x - at) + F_2(x + at). \quad (5.9)$$

Вираз (5.9) є загальним розв'язком рівняння (5.1) і називається розв'язком Д'Аламбера. Врахуємо початкові умови (5.2):

$$\varphi(x) = F_1(x) + F_2(x) = u(x, t) \Big|_{t=+0}; \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x - at)}{\partial t} + \frac{\partial F_2(x + at)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(x - at)}{\partial x}(-a) + \frac{\partial F_2(x + at)}{\partial x}(a);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=+0} = \frac{dF_1(x)}{dx}(-a) + \frac{dF_2(x)}{dx}(a) = \psi(x). \quad (5.11)$$

При $t = +0$ функції F_1 і F_2 залежать лише від x , тому частинні похідні замінимо на звичайні. Отже, функції $F_1(x)$ та $F_2(x)$ задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{dF_1}{dx} - \frac{dF_2}{dx} = -\frac{\psi(x)}{a}.$$

Інтегруючи в межах від нуля до x , матимемо

$$F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(z) dz + c. \quad (5.12)$$

Довільну сталу інтегрування c можна вважати рівною нулю, оскільки рівності (5.10) та (5.11) зберігають силу при будь-якому c . Приєднуючи до рівняння (5.12) ще рівняння (5.10)

$$F_1(x) + F_2(x) = \varphi(x),$$

знайдемо $F_1(x)$ та $F_2(x)$:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz;$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz.$$

Підставимо вирази, що дістали для $F_1(x)$ та $F_2(x)$, у формулу (5.9) і знайдемо розв'язок задачі Коші

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(z) dz - \int_0^{x-at} \psi(z) dz \right].$$

Після групування матимемо остаточну відповідь

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (5.13)$$

Розв'язок (5.13) використовується тоді, коли цікавляться рухом віддалених кінців ділянок струни протягом часу малого порівняно з часом поширення сигналу від одного кінця струни до іншого. Розглянемо фізичну суть розв'язку (5.13). Насамперед зауважимо, що розв'язок (5.13) є сумою двох функцій:

$$u(x, t) = \psi_1(x - at) + \psi_2(x + at).$$

Вважатимемо тут $\psi_2 = 0$. Тоді зміщення струни в точці x у момент t дорівнює $u_1 = \psi_1(x - at)$.

Покажемо, що те саме зміщення спостерігатиметься в іншій точці з координатою $x + \Delta x$ через проміжок часу $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$.

Знайдемо аргумент функції ψ_1 в момент часу $t + \Delta t$:

$$x + \Delta x - a(t + \Delta t) = x + \Delta x - at - a\Delta t = x - at + a\Delta t - a\Delta t = x - at,$$

тобто аргумент функції ψ_1 залишається незмінним, звідки випливає, що

$$u_2 = \psi_1[x + \Delta x - a(t + \Delta t)] = \psi_1(x - at) = u_1.$$

Це означає, що відбувається поширення зміщення вздовж осі струни зі швидкістю $a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Цей процес і є хвилею.

Таким чином, якщо на ділянці струни відбувається зміщення, що задовольняє співвідношення $u(x, 0) = \varphi(x)$, то через час t цей розподіл зміщення пересувається вздовж осі струни зі швидкістю a , не змінюючи своєї форми. Тому прийнято говорити про поширення прямої плоскої хвилі зміщення у додатному напрямі осі Ox .

Аналогічно можна показати, що функція $\psi_2(x + at)$ відповідає поширенню зворотної хвилі у від'ємному напрямі осі Ox .

§ 6. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗМІШАНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ МЕТОДОМ РОЗПОДІЛУ ЗМІННИХ (МЕТОД ФУР'Є)

Метод Фур'є (див. гл. 1 п. 2.5) полягає в пошуку розв'язку рівняння у вигляді добутку двох функцій. Цей метод особливо зручний для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними, в яких невідомою є функція двох змінних $u(x, y)$. Тоді частинний розв'язок рівняння відшукується у вигляді

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Задовольняючи граничні та початкові умови, вдається знайти розв'язок $u(x, y)$. Цим методом можна розв'язувати, наприклад, хвильові рівняння, рівняння теплопровідності. Проілюструємо метод Фур'є на прикладі коливання струни і задачі Діріхле.

Нехай потрібно розв'язати рівняння (1.12) для струни скінченної довжини l при граничних

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (6.1)$$

і початкових умовах

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \quad (6.2)$$

Шукаємо нетривіальний частинний розв'язок рівняння (1.12), що задовольняє умови (6.1) та (6.2), у формі

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (6.3)$$

тобто виразимо його добутком двох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

Підставивши розв'язок (6.3) в рівняння (1.12), матимемо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad \text{або} \quad X(x) \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} T(t).$$

Поділивши цю рівність на $a^2 X T$, дістанемо

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (6.4)$$

Ліва частина рівняння (6.4) залежить тільки від змінної t , права — від змінної x , знак рівності між ними може мати зміст лише у тому разі, коли обидві частини рівняння дорівнюють сталій величині. Позначимо цю сталу через λ , приймаючи спочатку $\lambda > 0$, знайдемо

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda. \quad (6.5)$$

Звідси дістанемо два диференціальних рівняння:

$$T'' + \lambda a^2 T = 0; \quad (6.6)$$

$$X'' + \lambda X = 0. \quad (6.7)$$

Рівняння (6.6) та (6.7) є однорідними диференціальними рівняннями другого порядку типу $z'' + k^2 z = 0$ (див. гл. 1, п. 5.9), в якому для (6.6) $k^2 = \lambda a^2$, а для (6.7) $k^2 = \lambda$, тому їхній загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x; \\ T(t) &= C \cos a\sqrt{\lambda} t + D \sin a\sqrt{\lambda} t, \end{aligned} \quad (6.8)$$

де A, B, C, D — довільні сталі. Знайдемо їх. Підставимо вираз (6.8) у граничні умови (6.1) і з урахуванням того, що $T(t)$ ніде на нуль не перетворюється, дістанемо

$$X(0) = 0; \quad X(l) = 0. \quad (6.9)$$

Умови (6.9) з огляду на (6.8) можна записати у вигляді

$$X(0) = A \cos 0 + B \sin 0; \quad (6.10)$$

$$X(l) = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (6.11)$$

З виразу (6.10) дістанемо $A = 0$, а у (6.11)

$$B \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (6.12)$$

Константа B не може дорівнювати нулю, оскільки знаходимо нетривіальний розв'язок ($u(x, t) \neq 0$). Отже, $\sin \sqrt{\lambda} l$ має дорівнювати нулю. У цьому рівнянні невідомим є $\sqrt{\lambda}$, тоді

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (6.13)$$

Тут не можна взяти $n = 0$, оскільки в цьому разі було б $X \equiv 0$ і $u \equiv 0$; тоді

$$X(x) = B \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (6.14)$$

Підставимо вираз (6.13) для $\sqrt{\lambda}$ у вираз (6.8) для $T(t)$:

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (6.15)$$

Функції $X(x)$ і $T(t)$ утворюють послідовність частинних розв'язків, що відповідають $n = \overline{1, \infty}$:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad T_n(t) = C'_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D'_n \sin \frac{an\pi}{l} t.$$

Підставимо ці функції в (6.3) і дістанемо частинний розв'язок рівняння (1.12)

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right), \quad (6.16)$$

де C_n і D_n містять B_n, C'_n, D'_n .

Оскільки рівняння (1.12) однорідне і лінійне, то сума розв'язків (6.16) також є розв'язком цього рівняння, тому ряд (див. гл. 3, п. 6.5)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

або

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (6.17)$$

може за певних умов розглядатися як розв'язок рівняння (1.12), причому розв'язок такий, що задовольняє граничні умови (6.1). Цією умовою є рівномірна збіжність ряду (6.17) та рядів, що дістали почленним подвійним диференціюванням по x і t вказаного ряду, а це накладає додаткові умови на значення параметрів C_n і D_n .

Значення λ , які дістають за формулою (6.13), називаються власними числами задачі (1.12) (див. гл. 1, п. 6.5), а функції $X_n(x)$, $T_n(t)$ — власними функціями.

Якщо взяти замість $-\lambda$ вираз $+\lambda = k^2$, то рівняння (6.7) набере вигляду $X'' - k^2 X = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння $X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$. У такому вигляді $X(x)$ не може задовольнити умови (6.1).

Розв'язок (6.17) має задовольняти ще й початкові умови (6.2). Підставимо у вираз (6.17) значення $t = +0$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x). \quad (6.18)$$

Рівність (6.18) справджується, якщо ряд Фур'є функції $f(x)$ збіжний і параметри C_n є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (6.19)$$

Здиференціюємо тепер почленно по t ряд у правій частині (6.17) і запишемо з урахуванням другої умови (6.2) при $t = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x). \quad (6.20)$$

Аналогічно з тих самих міркувань величини $D_n \frac{an\pi}{l}$ визначимо як коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

звідки

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (6.21)$$

Таким чином, доведено, що ряд (6.17) з коефіцієнтами C_n, D_n (див. формули (6.19), (6.21)) є розв'язком рівняння (1.12), і задовольняє граничні (6.1) і початкові (6.2) умови, якщо цей ряд є подвійно диференційовним.

§ 7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КРУЗІ МЕТОДОМ ФУР'Є

Нехай у крузі радіуса R із центром у початку координат треба знайти подвійно диференційовну функцію, що задовольняє всередині круга рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7.1)$$

а на межі σ кола — граничну умову

$$u|_{\sigma} = f(x, y). \quad (7.2)$$

Таким чином, маємо справу з еліптичним рівнянням. Для розв'язання задачі перейдемо в рівнянні від декартових координат x, y до полярних r, φ : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Замінімо незалежні змінні x, y у функції $u(x, y)$ і перейдемо до функції $u(r, \varphi)$. Знайдемо рівняння, яке задовольняє функція u як функція від r, φ . Дістанемо рівняння Лапласа в полярних координатах. Для цього в рівнянні (7.1) похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ слід виразити за формулами (див.

§ 4), прийнявши в них $\xi = r$, $\eta = \varphi$.

Рівняння Лапласа в полярних координатах записується у вигляді

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (7.3)$$

а гранична умова: $u|_{\sigma} = f$ при $r = R$. Шукатимемо частинний розв'язок задачі у вигляді

$$u = F(\varphi)p(r). \quad (7.4)$$

Підставимо вираз (7.4) в рівняння (7.3) і дістанемо

$$r^2 F(\varphi) \frac{d^2 p}{dr^2} + 2F(\varphi) \frac{dp}{dr} + \frac{d^2 F}{d\varphi^2} p = 0,$$

або інакше

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} = - \left[r^2 \frac{d^2 p}{dr^2} + r \frac{dp}{dr} \right]. \quad (7.5)$$

Функція в лівій частині (7.5) залежить лише від змінної φ , а в правій частині — від змінної r . Тому знак рівності може мати місце за умови, що обидві частини дорівнюють якійсь константі, позначимо її через $-k^2$. Рівняння (7.5) розпадається на два:

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + k^2 F = 0, \quad (7.6)$$

$$r^2 \frac{d^2 p}{dr^2} + r \frac{dp}{dr} - k^2 p = 0. \quad (7.7)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.6) виражається у вигляді

$$F = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi. \quad (7.8)$$

Розв'язок рівняння (7.7) шукатимемо у формі

$$p = r^m. \quad (7.9)$$

Підставимо вираз (7.9) у рівняння (7.7):

$$r^2 m(m-1) r^{m-2} + r m r^{m-1} + k^2 r^m = 0 \quad (7.10)$$

і після зведення подібних матимемо $m^2 - k^2 = 0$. Звідси дістаємо два частинних лінійно незалежних розв'язки рівняння (7.7): r^k і r^{-k} . Загальний розв'язок рівняння (7.7) буде

$$p(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}. \quad (7.11)$$

Підставимо (7.2) і (7.11) в (7.4):

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) (C_k r^k + D_k r^{-k}). \quad (7.12)$$

Функція (7.12) є розв'язком рівняння (7.3) при будь-якому k , що відрізняється від нуля. При $k = 0$ рівняння (7.6), (7.7) набирають вигляду

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0; \quad r^2 \frac{d^2 p}{dr^2} + r \frac{dp}{dr} = 0, \quad (7.13)$$

а їхній розв'язок

$$F(\varphi) = A_1 + B_0 \varphi; \quad p(r) = C_0 + D_0 \ln r,$$

звідки розв'язок рівняння (7.3) при $k = 0$ виражається функцією

$$u_0 = (A_1 + B_0 \varphi) (C_0 + D_0 \ln r). \quad (7.14)$$

Функція u_0 має бути періодичною функцією від φ , оскільки при одному й тому самому значенні r розв'язки (7.14) мають збігатися при φ та $\varphi + 2\pi$, тому що маємо справу з однією й тією самою точкою круга (r, φ) і $(r, \varphi + 2\pi)$. Тому в (7.14) B_0 має дорівнювати нулю.

Згідно з поставленою задачею функція u має бути неперервною і скінченною всюди в крузі, включаючи його центр, тобто при $r = 0$ розв'язок має бути скінченним. Це можливо, якщо в (7.14) $D_0 = 0$, а в (7.12) $D_k = 0$. Тепер (7.14) запишеться $u_0 = A_1 C_0$. Позначаючи

$A_1 C_0$ через $\frac{A_0}{2}$, дістанемо $u_0 = \frac{A_0}{2}$. Складатимемо розв'язок рівняння (7.3) у вигляді суми розв'язків (7.12), домагаючись періодичності розв'язку, а це можливо за умови, що C набуває тільки цілих значень. При цьому можна обмежитися лише цілими додатними значеннями $k = 1, 2, \dots, n, \dots$, оскільки внаслідок довільності сталих, що входять до розв'язку (7.12), від'ємні значення k нових частинних розв'язків не дають. Тоді

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n \quad (7.15)$$

(стала C_n вміщена в A_n, B_n). Зазначимо, що коли (7.5) прирівняти до сталої, яка дорівнює $+k^2$, то періодичних розв'язків не матимемо. Сталі A_n і B_n доберемо так, щоб задовольнялась гранична умова (7.2). При підстановці в (7.15) заданої величини R замість r згідно з граничною умовою дістанемо

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) R^n = f(\varphi). \quad (7.16)$$

Щоб рівність (7.16) виконувалась, треба аби функція $f(\varphi)$ розвивалася в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi, \pi)$, а величини $A_n R^n, B_n R^n$ дорівнювали коефіцієнтам Фур'є цієї функції, тобто

$$A_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad B_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt.$$

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt; \\ B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt. \end{cases} \quad (7.17)$$

Функція (7.15) з коефіцієнтами A_n, B_n , які визначаються формулами, виражає шуканий розв'язок задачі Діріхле.

Підставимо вираз (7.17) у праву частину (7.15) і після деяких перетворень дістанемо

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t - \varphi) dt; \\ u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t - \varphi) \right] dt. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Можна довести, що вираз у квадратних дужках (7.18) дорівнює

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t - \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2}. \quad (7.19)$$

Підставивши (7.19) у (7.18), дістанемо

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} dt. \quad (7.20)$$

Інтеграл у формулі (7.20) називається інтегралом Пуассона. Аналіз цієї формули дає змогу обґрунтувати той факт, що коли функція $f(\varphi)$ неперервна, то функція $u(r, \varphi)$ задовольняє рівняння (7.3) та $u(r, \varphi) \rightarrow f(\varphi)$ при $r \rightarrow R$. Отже, ця функція є розв'язком задачі Діріхле для круга.

§ 8. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У гл. 2 показано, що операційним методом розв'язок звичайних диференціальних рівнянь зводиться до розв'язку скінченних рівнянь. Природно сподіватись, що застосування цього методу для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними приведе до перетворення однієї зі змінних у просторі оригіналів до параметра в просторі зображень. Так, якщо в розглядуваному рівнянні невідомою є функція двох змінних, то застосування операційного методу до однієї зі змінних приведе до звичайного диференціального рівняння зображення за

другою змінною. Якщо це зображувальне рівняння знову перетворити, то матимемо скінченне зображувальне рівняння щодо другого параметра. Розв'язуючи це рівняння і переходячи в простір оригіналів, дістанемо відповідь. Отже операційний метод розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними має значні переваги і перспективу. Проілюструємо сказане на конкретному прикладі.

Для простоти міркувань покладемо, що шукана функція $u = u(x, t)$ залежить лише від двох змінних: x і t . Нехай вона задовольняє рівняння

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (8.1)$$

де a, b, c, a_1, b_1 — неперервні функції, що залежать лише від x , задані в деякому проміжку $0 \leq x \leq l$. Нехай треба знайти розв'язок рівняння (8.1) $u(x, t)$ для напівнескінченної смуги: $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t < +\infty$, що задовольняє задані початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=+0} = \psi(x) \quad (8.2)$$

і граничні умови

$$u(x, t) \Big|_{x=+0} = f(t); \quad (8.3)$$

$$\left[\alpha \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] \Big|_{x=l-0} = \gamma u(x, t) \Big|_{x=l-0},$$

де α, β, γ — довільні сталі.

Задача (8.1)–(8.3) нестационарна, оскільки шуканий розв'язок істотно залежить від початкових умов (8.2) і описує так званий неусталений перехідний режим фізичного процесу.

Застосуємо перетворення Лапласа до функції $u(x, t)$ за змінною t , позначивши її зображення через $v(x, p)$. Таким чином,

$$v(x, p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt.$$

Якщо вважати, що оригіналом є не тільки $u(x, t)$, а й її частинні похідні, можна записати ще такі співвідношення:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{dv}{dx}; \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

У позначених похідних пишемо d , тому що в зображенні вихідного рівняння (8.1) похідні по p не будуть траплятися, оскільки вважаємо,

що його коефіцієнти не залежать від t . Для знаходження зображень частинних похідних по t застосуємо теорему про диференціювання оригіналу (див. гл. 2, п. 3.6), тому

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = pv(x, p) - u(x, 0);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = p^2 v(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}.$$

Якщо в останніх виразах використати початкові умови (8.2), то можна записати

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = pv(x, p) - \varphi(x);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = p^2 v(x, p) - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Вважатимемо також, що $f(t)$ — оригінал, тоді граничні умови в просторі зображень матимуть вигляд

$$v(x, p) \Big|_{x=+0} = F(p);$$

$$\left[\alpha \frac{dv}{dx} + \beta(pv - \varphi(x)) \right] \Big|_{x=l-0} = \gamma v(x, p) \Big|_{x=l-0},$$

$$\text{де } F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

З цього випливає, що операційний метод приводить розв'язок поставленої нестационарної задачі для рівняння (8.1) з частинними похідними до розв'язку звичайного диференціального рівняння

$$a \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{dv}{dx} + Av + B = 0, \quad (8.4)$$

де $A = c + a_1 p^2 + b_1 p$; $B = -a_1 p \varphi(x) - a_1 \psi(x) - b_1 \varphi(x)$; p — комплексний параметр. При цьому граничні умови набирають вигляду

$$v \Big|_{x=+0} = F(p); \quad \left[\alpha \frac{dv}{dx} + (pb - \gamma)v - \beta \varphi \right] \Big|_{x=l-0} = 0. \quad (8.5)$$

Задачу (8.4), (8.5) можна розв'язати у загальному вигляді. Однак для ілюстрації методики розв'язку рівнянь з частинними похідними розглянемо конкретні приклади.

Приклади.

1. Знайти розв'язок лінійного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

у напівскінченній смугі $0 \leq x \leq l$; $0 \leq t < +\infty$

при початкових умовах

$$u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

та граничних умовах

$$u(0, t) = A; \quad u(l, t) = 0,$$

де a і A — сталі величини.

Розв'язання. Позначимо

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = v(x, p),$$

тобто

$$u(x, t) = v(x, p);$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = pv(x, p) - u(x, 0) = pv(x, p);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = p^2 v(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = p^2 v(x, p);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d^2 v(x, p)}{dx^2}.$$

Застосуємо перетворення Лапласа до граничних умов:

$$v(l, p) = 0; \quad v(0, p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} A dt = \frac{A}{p}.$$

Таким чином, у просторі зображень вихідну задачу можна записати у вигляді

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} v = 0 \quad (8.6)$$

з граничними умовами

$$v|_{x=0} = \frac{A}{p}; \quad v|_{x=l} = 0. \quad (8.7)$$

Зображувальне рівняння (8.6) належить до лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння для нього

$$k^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0; \quad k_1 = +\frac{p}{a}; \quad k_2 = -\frac{p}{a}.$$

Отже, загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$v(x, p) = c_1 e^{-\frac{p}{a}x} + c_2 e^{\frac{p}{a}x}.$$

Використовуючи граничні умови (8.7), складемо систему

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{A}{p}; \\ c_1 e^{-\frac{pl}{a}} + c_2 e^{\frac{pl}{a}} = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему щодо c_1 і c_2 . З другого рівняння

$$c_1 = -c_2 e^{\frac{2pl}{a}},$$

тому

$$c_2 \left(1 - e^{\frac{2pl}{a}} \right) = \frac{A}{p},$$

або

$$c_1 = -\frac{Ae^{\frac{2pl}{a}}}{p \left(1 - e^{\frac{2pl}{a}} \right)}; \quad c_2 = +\frac{A}{p \left(1 - e^{\frac{2pl}{a}} \right)}.$$

Отже, розв'язок зображувального рівняння запишеться у вигляді

$$v(x, p) = -A \frac{e^{-\frac{x-p}{a}}}{p \left(1 - e^{\frac{2pl}{a}} \right)} + \frac{Ae^{\frac{xp}{a}}}{p \left(1 - e^{\frac{2pl}{a}} \right)}.$$

Останній вираз можна подати у вигляді

$$v(x, p) = \frac{A \operatorname{sh} \frac{p}{a} (x-l)}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{a}} = A \frac{\varphi(p)}{\gamma(p)}.$$

Застосуємо до цього виразу третю теорему розвинення (див. гл. 3, формула (2.146)).

Корені рівняння $p \operatorname{sh} \frac{pl}{a} = 0$ знайдемо, замінивши $\operatorname{sh} \frac{pl}{a} = \sin \frac{pl}{a} j$. Розв'язавши рівняння

$p \sin \frac{pl}{a} j = 0$, знайдемо $p_0 = 0$, $p_k = \pm j \omega_k = \pm j \frac{\pi a}{l} k$, $k = \overline{0, \infty}$. Дістали нескінченну множину коренів. І всі вони прості. Третя теорема розвинення справджується для цього випадку. Звідси знайдемо шукану функцію в просторі оригіналів у вигляді

$$u(x, t) = A \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n a t}{l}}{n} \right).$$

2. Розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при початкових умовах $u(x, 0) = 0$, $0 < x < \infty$, та граничних умовах $u(0, t) = u_0$, $t > 0$.

Розв'язання. Вважатимемо $u(x, t) = v(x, p)$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pv(x, p) - u(x, 0).$$

Враховуючи початкову умову $u(x, 0) = 0$, маємо $\frac{\partial u}{\partial t} = pv(x, p)$. Далі $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dv}{dx}$ і

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 v}{dx^2}, \text{ оскільки змінна } p \text{ фіксована.}$$

Зображувальне рівняння

$$a^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = pv(x, p), \text{ або } \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{p}{a^2} v = 0.$$

Звідси

$$v(x, p) = c_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

Оскільки $u(x, t)$ і $v(x, p)$ при $x \rightarrow \infty$ мають бути обмежені, то $c_1 = 0$ і $v(x, p) =$

$= c_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}$. Для визначення c_2 переведемо граничну умову $u(0, t) = u_0$ у простір зображень. З цією метою запишемо цю умову у вигляді

$$u(0, t) = u(0, t) \sigma(t).$$

Нагадаємо, що $\sigma(t)$ — функція Хевісайда, що має зображення $\frac{1}{p}$. Тоді початковою

умовою для зображувального рівняння буде $v(0, p) = \frac{u_0}{p}$. Отже, $c_2 = \frac{u_0}{p}$, а розв'язок

$$v(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

Використовуючи формулу обернення (гл. 2, §6), знайдемо

$$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} d\tau;$$

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} = \frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$

Оригіналом є

$$u(x, t) = \frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ

§ 1. ОЗНАЧЕННЯ. ПОНЯТТЯ СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ. АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ

При створенні приладів, конструкцій, машин, що відповідають певним умовам, треба знати, як поводитиметься об'єкт при невеликих перерозподілах сил або зміні початкових умов. Той об'єкт, експлуатаційні параметри якого не реагують на ці зміни, називається стійким. Наприклад, при різних відхиленнях маятника від положення рівноваги (різних початкових умовах) рух маятника має бути стійким, періодичним. Крило літака має зберегти початкове положення навіть при найменшій зміні початкових умов.

Фізично задача про стійкість може бути поставлена так: розглядається деякий рух, що відповідає заданим початковим умовам. Змінимо початкові умови на малу величину. Якщо далі характер руху залишається попереднім чи зміниться мало, то такий рух називається стійким за Ляпуновим. У цьому тлумаченні стійкості залишалось невизначеним поняття «мала величина».

Підійдемо до питання більш строго. Рух кожного об'єкта описується системою диференціальних рівнянь (гл. 1, § 6) першого порядку, записаних у нормальній формі:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

Якщо об'єкт має один степінь вільності, то його рух описується системою:

нелінійною

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2); \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2); \end{cases} \quad (1.2)$$

лінійною

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2; \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

У системі (1.1) невідомими є функції часу $y_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, в системах (1.2) і (1.3) — $y_1(t)$ та $y_2(t)$. Нехай функції $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ визначені в n -вимірній кулі радіуса R : $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \leq R^2$ для $t > t_0$ і задовольняють там деякі умови, що гарантують існування неперервно диференційованих функцій

$$y_1(t, c_1, c_2, \dots, c_n), y_2(t, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, y_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

які є розв'язком системи (1.1). Доповнимо систему (1.1) початковими умовами. При $t = t_0 \geq 0$ існує набір чисел $\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, \dots, \xi_{n0}$, взятих з n -вимірної кулі $\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 + \dots + \xi_{n0}^2 < R^2$, що дає змогу тільки одним чином дістати c_1, c_2, \dots, c_n . Функції

$$y_1(t, c_1, c_2, \dots, c_n), y_2(t, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, y_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

при цьому переходять у єдину систему частинних розв'язків системи (1.1):

$$\begin{aligned} y_1(t, \xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0}, t_0) &= \xi_1(t); \\ y_2(t, \xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0}, t_0) &= \xi_2(t); \\ \dots & \\ y_n(t, \xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0}, t_0) &= \xi_n(t). \end{aligned}$$

Надалі треба буде змінювати початкові умови і відповідно частинні розв'язки. При цьому вважаємо, що ці зміни не виводять функції $\xi_i(t)$ та початкові умови з області визначення правої частини рівняння (1.1). Дамо означення стійкості розв'язку системи (1.1). Нехай відомий частинний розв'язок системи (1.1) $\xi_i(t)$, що відповідає початковим умовам при $t = t_0 \geq 0$; $\xi_i(t_0) = \xi_{i0}$, $i = \overline{1, n}$. Змінимо початкові умови при $t = t_0 \geq 0$; $y_i(t_0) = \bar{\xi}_{i0}$. Частинний розв'язок, що відповідає цим новим умовам, позначимо $\bar{\xi}_i(t)$. Функції $\xi_i(t)$ описують так званий **незбурений розв'язок**, а $\bar{\xi}_i(t)$ — **збурений розв'язок**.

Розв'язок $\xi_i(t)$ системи (1.1) називається **стійким за Ляпуновим**, якщо для будь-якого заданого як завгодно малого додатного

числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке мале додатне число $\delta(\varepsilon) > 0$, що при

$$|\bar{\xi}_{i0} - \xi_{i0}| < \delta \quad (1.4)$$

для всіх $t > t_0$ та $i = \overline{1, n}$ справджується нерівність

$$|\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

Якщо при виконанні всіх умов (1.4) хоч для одного $i = k$ не виконується умова (1.5), тобто $|\bar{\xi}_k(t) - \xi_k(t)| \geq \varepsilon$, то розв'язок називається **нестійким**. Якщо при виконанні умов (1.4), (1.5) виконано ще й умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)| = 0 \quad (1.6)$$

для всіх $i = \overline{1, n}$, то розв'язок називається **асимптотично стійким**. Якщо серед рівностей (1.6) хоч би одна, наприклад для $i = k$, не виконана, але виконані всі умови (1.5), то розв'язок $\xi_i(t)$ називається **неасимптотично стійким**. Якщо $\xi_1(t) = 0, \xi_2(t) = 0, \dots, \xi_n(t) = 0$, то йдеться про стійкість нульового розв'язку (точки спокою). Якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке мале додатне число $\delta(\varepsilon) > 0$, яке залежить від ε , що при

$$|\bar{\xi}_{i0}| < \delta \quad (1.7)$$

для всіх $t > t_0$ та $i = \overline{1, n}$ виконуються нерівності

$$|\bar{\xi}_i(t)| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.8)$$

то нульовий розв'язок $\xi_i(t) = 0$ називається стійким за Ляпуновим. Якщо при виконанні (1.7) для всіх $t > t_0$ хоч би одна з умов (1.8) не виконується, то нульовий розв'язок $\xi_i(t) = 0$ називається **нестійким**.

Якщо при виконанні умов (1.7) та (1.8) виконуються ще й умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\xi}_i(t)| = 0 \quad (1.9)$$

для всіх $i = \overline{1, n}$, то нульовий розв'язок називається асимптотично стійким.

Якщо при виконанні умов (1.7) та (1.8) не всі умови (1.9) виконуються, то нульовий розв'язок називається неасимптотично стійким.

Якщо говорити про стійкість при зміні силової дії, то зміна сил відбивається на зміні коефіцієнтів диференціальних рівнянь, що описують рух. Ті системи, розв'язок яких не змінюється при незначній зміні коефіцієнтів, називаються грубими. Грубі системи є стійкими.

Приклади. 1. Дано рівняння $\dot{y} + y = t$ з початковою умовою $y(0) = 1$. Дослідити розв'язок, що задовольняє цю умову, на стійкість.

Розв'язання. Застосувавши метод варіації довільної сталої, дістанемо

$$\frac{dz}{dt} + z = 0; \frac{dz}{z} = -dt; \ln|z| = -t + c_2; |z| = e^{-t+c_2}; z = e^{c_2} e^{-t};$$

$$e^{c_2} = c_1; z = c_1 e^{-t}; y = c_1(t) e^{-t}; \dot{y} = \dot{c}_1(t) e^{-t} - c_1(t) e^{-t};$$

$$c_1(t) = \int t e^t dt + c; c_1(t) = e^t(t-1) + c;$$

$$y(t) = c e^{-t} + t - 1. \quad (1.10)$$

При

$$t = 0; y(0) = 1; 1 = c - 1; c = 2; \quad (1.11)$$

$$\xi(t) = 2e^{-t} + t - 1. \quad (1.12)$$

Отже, незбурений розв'язок описується функцією (1.12).

Введемо розв'язок $\bar{\xi}(t)$, що відповідає збуреним початковим умовам $\bar{\xi}(0)$, тоді з виразу (1.10), вважаючи $t = 0$, а $y(0) = \bar{\xi}(0)$, матимемо $\bar{\xi}(0) = c + 0 - 1$; $c = 1 + \bar{\xi}(0)$.

Збурений розв'язок також матимемо з виразу (1.10), вважаючи $y(t) = \bar{\xi}(t)$:

$$\bar{\xi}(t) = [1 + \bar{\xi}(0)] e^{-t} + t - 1.$$

Згідно з (1.4) та (1.5) при $i = 1$ $\bar{\xi}_1(t) = \bar{\xi}(t)$; $\xi_1(t) = \xi(t)$; $\xi_{i0}(t) = \xi(0) = y(0) = 1$; $\bar{\xi}_{i0} = \bar{\xi}(0)$ знайдемо

$$|\bar{\xi}_1(t) - \xi_1(t)| = |\bar{\xi}(t) - \xi(t)| = |[1 + \bar{\xi}(0)] e^{-t} + t - 1 - (2e^{-t} + t - 1)| = |[\bar{\xi}(0) - 1] e^{-t};$$

$$|\bar{\xi}_{i0} - \xi_{i0}| = |\bar{\xi}(0) - 1|$$

Нехай

$$|\bar{\xi}(0) - 1| < \delta = \epsilon.$$

Тоді

$$|\bar{\xi}(t) - \xi(t)| = |\bar{\xi}(0) - 1| e^{-t} \leq |\bar{\xi}(0) - 1| < \epsilon,$$

тобто умова (1.5) виконується і, отже, розв'язок (1.12) стійкий. Цей розв'язок асимптотично стійкий, оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\xi}(t) - \xi(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\xi}(0) - 1| e^{-t} = 0.$$

2. Розглянемо рівняння $\dot{y} - y = t$ з початковою умовою $y(0) = 1$. Його загальний розв'язок запишеться

$$y(t) = c e^t - t - 1,$$

а частинний розв'язок, що відповідає початковій умові $\bar{\xi}(0) = 1$:

$$\xi(t) = 2e^t - t - 1.$$

Якщо задати початкову умову $\bar{\xi}(0) \neq 1$, то можна знайти аналогічно до попереднього прикладу $\bar{\xi}(t) = [\bar{\xi}(0) - 1] e^t - t - 1$. Умови (1.4) запишемо у вигляді

$$|\bar{\xi}(0) - 1| < \delta, \quad (1.13)$$

а умову (1.5) - у вигляді

$$|\bar{\xi}(t) - \xi(t)| = |\bar{\xi}(0) - 1| e^t. \quad (1.14)$$

Для $t > 0$ умова (1.14) може виконуватись для будь-якого наперед заданого числа ϵ навіть при виконанні умови (1.13), тобто

$$|\bar{\xi}(t) - \xi(t)| = |\bar{\xi}(0) - 1| e^t > \epsilon.$$

Таким чином, умова (1.5) не виконується, а отже, розв'язок $\xi(t) = 2e^t - t - 1$ є нестійким.

3. Дано систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Очевидно, частинним розв'язком цієї системи є $x(t) = 0, y(t) = 0$ - нульовий розв'язок (точка спокою). Ставиться задача - дослідити на стійкість нульовий розв'язок (точку спокою).

Спочатку знайдемо загальний розв'язок системи, звівши її до одного рівняння другого порядку: $\ddot{x} = \dot{y}; \ddot{x} + x = 0$.

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t; \\ y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases} \quad (1.15)$$

Покажемо, що нульовий розв'язок є стійким. Нехай $\bar{\xi}_1(0) \neq 0$ та $\bar{\xi}_2(0) \neq 0$ – початкові умови, тоді $c_1 = \bar{\xi}_1(0)$, а $c_2 = \bar{\xi}_2(0)$, отже, розв'язки (1.15) запишуться так:

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1(t) = \bar{\xi}_1(0) \cos t + \bar{\xi}_2(0) \sin t; \\ \bar{\xi}_2(t) = -\bar{\xi}_1(0) \sin t + \bar{\xi}_2(0) \cos t. \end{cases} \quad (1.16)$$

Для стійкості треба, щоб при виконанні нерівностей

$$|\bar{\xi}_1(0)| < \delta, \quad |\bar{\xi}_2(0)| < \delta \quad (1.17)$$

для $t > 0$ виконувались нерівності

$$|\bar{\xi}_1(t)| < \varepsilon, \quad |\bar{\xi}_2(t)| < \varepsilon. \quad (1.18)$$

Умови (1.18) запишуться так:

$$|\bar{\xi}_1(0) \cos t + \bar{\xi}_2(0) \sin t| \leq |\bar{\xi}_1(0)| |\cos t| + |\bar{\xi}_2(0)| |\sin t| \leq |\bar{\xi}_1(0)| + |\bar{\xi}_2(0)| < 2\delta;$$

$$|-\bar{\xi}_1(0) \sin t + \bar{\xi}_2(0) \cos t| \leq |\bar{\xi}_1(0)| |\sin t| + |\bar{\xi}_2(0)| |\cos t| \leq |\bar{\xi}_1(0)| + |\bar{\xi}_2(0)| < 2\delta.$$

Якщо $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то умови (1.17), (1.18) виконуються, отже, нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично, оскільки при $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}_1(t) \neq 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}_2(t) \neq 0.$$

§ 2. ОЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ В ТЕРМІНАХ РУХУ

Система диференціальних рівнянь завжди описує рух певного об'єкта. Тому розв'язок $\xi_i(t)$ можна називати незбуреним рухом, а $\bar{\xi}_i(t)$ – збуреним. Те саме стосується і початкових умов. Нульовому розв'язку зручно поставити у відповідність положення рівноваги або точку спокою. Різниця $\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)$ іноді називають відхиленнями від незбуреного руху. Означення (1.4) – (1.6) в термінах руху можна сформулювати так.

Незбурений рух називається стійким за Ляпуновим, якщо при будь-яких достатньо малих змінах заданих умов (початкового поло-

ження та початкових швидкостей) всі відхилення від незбуреного руху в увесь наступний час залишаються малими. Рух називається нестійким за Ляпуновим, якщо навіть при як завгодно малих відхиленнях від заданих початкових умов хоч би деякі відхилення від незбуреного руху в наступні моменти часу не залишаються малими. Отже, у випадку нестійкості знайдеться принаймні одне із значень $i = k$ таке, що $|\bar{\xi}_k(t) - \xi_k(t)| > \varepsilon$ при $|\bar{\xi}_{k0} - \xi_{k0}| < \delta$.

Незбурений рух називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий і, більше того, всі відхилення від незбуреного руху при $t \rightarrow \infty$ прямують до нуля, тобто нескінченно малі. Можна сформулювати це означення і в такій формі: незбурений рух називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий і при цьому всі збурені рухи при $t \rightarrow \infty$ мають своєю границею незбурений рух. Незбурений рух називається неасимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий за Ляпуновим і при цьому існує хоча б один збурений рух, який при $t \rightarrow \infty$ не має своєю границею незбурений рух.

Рівновага (точка спокою) називається стійкою, якщо всі відхилення від положення рівноваги увесь наступний час залишаються малими. Якщо хоча б одне з відхилень від положення рівноваги (точки спокою) у наступний час зростає, то рівновага буде нестійкою.

Досить часто різниця $\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)$ ($\bar{\xi}_i(t_0) - \xi_i(t_0) = \bar{\xi}_{i0} - \xi_{i0}$) називаються збуреними (початковими) і позначаються відповідно через $x_i(t)$ ($x_i(t_0) = x_{i0}$).

Тоді умови (1.4), (1.5), (1.6) відповідно можуть бути записані так:

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

при

$$|x_{i0}| < \delta \quad (2.2)$$

і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t)| = 0. \quad (2.3)$$

Порівняння умов (2.1), (2.2), (2.3) з умовами (1.7), (1.8), (1.9) дає змогу питання про дослідження стійкості руху звести до питання про стійкість рівноваги (точки спокою). Умови (2.1), (2.2) можуть бути прочитані так: рівновага називається стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при всіх $t > t_0$

і виконанні умов (2.2) усі збурення задовольняють нерівність (2.1). Якщо при цьому виконано умови (2.3), то рівновага асимптотично стійка. Доведемо, що умови (2.1), (2.2), (2.3) є умовами стійкості точки спокою. Насамперед побудуємо рівняння, яке задовольняють функції $x_i(t)$. Оскільки

$$x_i(t) = \tilde{\xi}_i(t) - \xi_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.4)$$

то

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} - \frac{d\xi_i}{dt}; \quad \tilde{\xi}_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t).$$

Однак $\xi_i(t)$, $\tilde{\xi}_i(t)$ за умовою задовольняють систему рівнянь (1.1):

$$\frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} = f_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n); \quad (2.5)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); \quad (2.6)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, \xi_1 + x_1, \xi_2 + x_2, \dots, \xi_n + x_n) - f_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (2.7)$$

Позначимо

$$f_i(t, x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_n + \xi_n) - f_i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.8)$$

Функції φ_i є функціями лише збурень, оскільки незбурений рух уже обраний. Це, зрозуміло, не означає, що функції $\varphi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ не залежать від $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$. Тоді маємо

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Рівняння (2.9) називаються диференціальними рівняннями збурень. Покажемо, що розв'язком системи (2.9) є функції $x_i(t) = 0$. Як видно з (2.8), функції $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ задовольняють умову

$$\varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0 \quad \text{при } t > t_0.$$

а функції $x_i(t) = 0, i = \overline{1, n}$, задовольняють рівняння (2.9) при $t > 0$.

Справді, з одного боку, $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d0}{dt} = 0$, а з іншого — $\varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

Якщо $\xi_i(t)$ — стійкий розв'язок системи (1.1), то виконуються умови (1.4) — (1.6), які можна записати у вигляді (2.1) — (2.3), а це означає, що нульовий розв'язок $x_i(t) = 0$ або положення рівноваги є стійким. Очевидно й обернене: при виконанні умов (2.1) — (2.3) виконуються також умови (1.4) — (1.6), тобто розв'язок $\xi_i(t)$ стійкий. Тим самим доведено таку теорему.

Теорема. Для того щоб розв'язок $\xi_i(t)$ системи (1.1) був стійким, необхідно і достатньо, щоб нульовий розв'язок рівнянь збурень був стійким.

Отже, при зміні функцій за формулою (2.4) рух, що описується системою функцій $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$, перейшов у положення рівноваги $0, 0, \dots, 0$ для нової системи рівнянь (2.9). Тепер можна замість задачі (1.4) — (1.6) розглядати задачу про стійкість нульового розв'язку системи

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.10)$$

з нульовими початковими умовами

$$x_i(t_0) = x_{i0} = 0. \quad (2.11)$$

Наведемо ще один різновид запису визначення стійкості. Введемо вектори \vec{Y} з координатами $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ та \vec{F} з координатами f_1, f_2, \dots, f_n . Координати f_1, f_2, \dots, f_n самі є функціями від координат t, y_1, y_2, \dots, y_n . Функція \vec{F} називається **матрицею-функцією**. У такому розумінні рівняння (1.1) можна записати як:

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}) \quad (2.12)$$

з початковою умовою

$$\vec{Y}(t_0) = \vec{Y}_0. \quad (2.13)$$

Якщо ввести вектор $\bar{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та вектор $\bar{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, то (2.10) і (2.11) можна записати як

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{\Phi}(t, \bar{X}) \quad (2.14)$$

з нульовою початковою умовою

$$\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0 = \bar{0}. \quad (2.15)$$

Форма запису рівнянь (2.12) – (2.15) називається **векторною**, або **матричною**. Рівняння (2.14) є векторною формою рівнянь збурення. Умови (1.4) – (1.6) стійкості за Ляпуновим накладають обмеження на поведінку координат введених векторів. Тому умови (1.4) – (1.6) легко замінити умовами, що накладаються на довжину вектора, або на так звану норму вектора.

Норма вектора визначається за формулою

$$\|\bar{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (2.16)$$

Як видно з означення (2.16), норма – це довжина вектора, початок якого збігається з початком координат.

У термінах норми можна дати означення стійкості за Ляпуновим. Виконаємо останнє стосовно системи (2.14) – (2.15). Нульовий розв'язок системи (2.14) називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого додатного $\epsilon > 0$ можна вказати таке $\delta(\epsilon) > 0$, що з нерівності

$$\|\bar{X}(t_0)\| < \delta \quad (2.17)$$

при всіх $t > t_0$ виконується нерівність

$$\|\bar{X}(t)\| < \epsilon. \quad (2.18)$$

Якщо при виконанні умови (2.17) умова (2.18) не виконується, то нульовий розв'язок називається нестійким. Якщо при виконанні умов (2.17), (2.18)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{X}(t)\| = 0,$$

то нульовий розв'язок (точка спокою) називається асимптотично стійким.

Приклад. Дано систему n матеріальних точок $M_1(\bar{r}_1), M_2(\bar{r}_2), \dots, M_n(\bar{r}_n)$. Нехай її положення в даний момент визначається радіусами-векторами $\bar{r}_{i0}, i = \overline{1, n}$, і швидкостями \bar{v}_{i0} . Записати означення стійкості системи.

Розв'язання. Початкові збурення тут складатимуться з початкових зміщень

$$\Delta \bar{r}_{i0} = \bar{r}_{i0}(t_0) - \bar{r}_i(t_0), i = \overline{1, n}, \quad (2.19)$$

і приросту початкових швидкостей

$$\Delta \bar{v}_{i0} = \frac{d\bar{r}_{i0}}{dt} - \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{v}_{i0} - \bar{v}_i. \quad (2.20)$$

Збурення подано зміщеннями

$$\Delta \bar{r}_i = \bar{r}_i(t) - \bar{r}_i(t) \quad (2.21)$$

і приростами швидкостей

$$\Delta \bar{v}_i = \bar{v}_i(t) - \bar{v}_i(t). \quad (2.22)$$

Запишемо означення стійкості за Ляпуновим: якщо за $\epsilon > 0$ знайдеться

$$\delta(\epsilon) > 0$$

таке, що при $t \geq t_0$ і

$$|\Delta \bar{r}_{i0}| < \delta \quad (\|\Delta \bar{r}_0\| < \delta), \quad (2.23)$$

$$|\Delta \bar{v}_{i0}| < \delta \quad (\|\Delta \bar{v}_0\| < \delta), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.24)$$

то виконуються нерівності

$$|\Delta \bar{r}_i(t)| < \epsilon \quad (\|\Delta \bar{r}(t)\| < \epsilon); \quad (2.25)$$

$$|\Delta \bar{v}_i(t)| < \epsilon \quad (\|\Delta \bar{v}(t)\| < \epsilon). \quad (2.26)$$

Якщо при цьому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta \bar{v}_i(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta \bar{r}_{i0}(t)| = 0, \quad (2.27)$$

то рух стійкий асимптотично.

§ 3. ФАЗОВИЙ ПРОСТІР. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ

Дамо геометричне тлумачення означення стійкості за Ляпуновим, для чого введемо поняття фазового простору. Нехай дано систему (1.1) з відповідними початковими умовами, знайдено частинні розв'язки

$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$. Щоб можна було провести реальну побудову, покладемо $n = 2$. Розглянемо, наприклад, одновимірний рух матеріальної точки маси m на пружині жорсткості C (рис. 5.1). Диференціальне рівняння руху точки запишеться у вигляді (див. гл. 1, п. 5.16):

$$\ddot{z} + k^2 z = 0. \quad (3.1)$$

Нехай
$$z = \xi_1(t), \quad \dot{z} = \xi_2(t), \quad (3.2)$$

тоді рівняння (3.1) запишеться у вигляді системи
$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = -k^2 \xi_1; \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Рис. 5.1

Нехай відомі початкові умови

$$z(0) = \xi_1(0), \quad \dot{z}(0) = \xi_2(0). \quad (3.4)$$

Розв'язок системи (3.3) з урахуванням (3.4) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \xi_1(0) \cos kt + \frac{\xi_2(0)}{k} \sin kt; \\ \xi_2(t) = -k \xi_1(0) \sin kt + \xi_2(0) \cos kt. \end{cases} \quad (3.5)$$

Повернемося тепер до загальних міркувань. Система функцій

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1(t); \\ \xi_2 = \xi_2(t); \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n = \xi_n(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

є лінійно незалежною, тому змінні $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ становлять n -вимірний простір. З іншого боку, систему функцій (3.6) можна розглядати як параметричні рівняння кривої (траєкторії) у n -вимірному просторі $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, в яких параметром є час. Ця крива називається **фазовою траєкторією (кривою)** системи (1.1). Можна уявити точку $M(t)$ з координатами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, яка, здійснюючи рух, описує цю траєкторію. При початковому значенні t матимемо початкову точку $M_0(\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0})$. Змінюючи положення початкової точки, дістане-

мо різні фазові траєкторії. Сім'я всіх фазових траєкторій системи (1.1) називається **фазовим портретом**, а n -вимірний простір $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, в якому розміщена сім'я фазових траєкторій, називається **фазовим простором**. Точка $M(t)$ називається **зображувальною точкою**. Швидкість зображувальної точки називається **фазовою швидкістю**.

У випадку $n = 2$ площина $z = \xi_1(t), v = \dot{z}(t) = \xi_2(t)$ називається **фазовою площиною**. Знайдемо фазову траєкторію розв'язку (3.5).

Для цього вилучимо з (3.5) час t , піднісши до квадрата $\xi_1(t)$ і $\frac{\xi_2(t)}{k}$ та склавши їх:

$$\begin{aligned} \xi_1^2(t) &= \xi_1^2(0) \cos^2 kt + \frac{\xi_1(0)\xi_2(0)}{k} \sin 2kt + \frac{\xi_2^2(0)}{k^2} \sin^2 kt \\ + \left(\frac{\xi_2(t)}{k}\right)^2 &= \xi_1^2(0) \sin^2 kt - \frac{\xi_1(0)\xi_2(0)}{k} \sin 2kt + \frac{\xi_2^2(0)}{k^2} \cos^2 kt \\ \hline \xi_1^2(t) + \left(\frac{\xi_2(t)}{k}\right)^2 &= \xi_1^2(0) + \left(\frac{\xi_2(0)}{k}\right)^2 = \rho_0^2, \quad \rho_0 > 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\xi_1^2(t)}{\rho_0^2} + \frac{\xi_2^2(t)}{(\rho_0 k)^2} = 1. \quad (3.7)$$

Отже, фазовою траєкторією є еліпс (при $k \neq 1$) з півосями ρ_0 і $\rho_0 k$ та коло радіуса ρ_0 при $k = 1$ (рис. 5.2). На рис. 5.2 стрілочкою показано напрям руху зображувальної точки в будь-який момент часу. Проекції швидкості $\dot{\xi}_1(t)$ і $\dot{\xi}_2(t)$ зображувальної точки обчислюються за системою (3.3). Для $M(t): \xi_2 > 0$, а

$\xi_1 < 0$. Тоді за системою (3.3) $\dot{\xi}_1(t) > 0$; $\dot{\xi}_2(t) = -k^2 \xi_1(t) > 0$. Тому рух зображувальної точки відбувається за годинниковою стрілкою. Розглянемо тепер простір t, ξ_1, ξ_2 . У цьому просторі частинний розв'язок (3.5) можна записати у вигляді

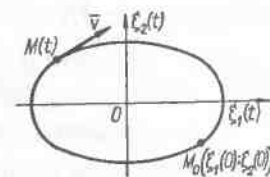


Рис. 5.2

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \xi_1(0) \cos kt + \frac{\xi_2(0)}{k} \sin kt; \\ \xi_2(t) = -k\xi_1(0) \sin kt + \xi_2(0) \cos kt; \\ \xi_3(t) = t \end{cases} \quad (3.8)$$

і уявити геометрично гвинтовою лінією. Нехай точка N починає свій рух від точки $N_0(0, \xi_1(0), \xi_2(0))$ і зі зростанням часу рухається по гвинтовій лінії так, що її координати збігаються з координатами зображувальної точки $M(t)$. Крива (3.8) у просторі t, ξ_1, ξ_2 називається інтегральною кривою системи (3.3). Ця інтегральна крива у фазовій площині ξ_1, ξ_2 описується рівняннями (3.5). Отже, проекцією інтегральної кривої на фазову площину як і в загальному випадку є фазова траєкторія. Якщо до рівнянь (3.6) додати рівняння і побудувати відповідну криву, то матимемо інтегральну криву системи (1.1) з відповідними початковими умовами. Крива в просторі $t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, що є розв'язком системи (1.1) з початковими умовами $t_0, \xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0}$, називається інтегральною кривою системи (1.1). Тому якщо параметричне задання фазового простору визначається системою (3.6), то проекція інтегральної кривої на фазовий простір збігається з фазовою траєкторією. Введенням фазового простору завдання вивчення поведінки інтегральних кривих даного диференціального рівняння або системи рівнянь можна звести до задачі стійкості фазових траєкторій. Рух $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ з початковими умовами $\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{n0}$ стійкий за Ляпуновим, якщо фазові траєкторії стійкі. Фазова траєкторія Γ стійка, якщо всі криві Γ' , що потрапляють в її ϵ -оکیل у момент $t = t_0$, і далі залишатимуться в ньому. Якщо при $t \rightarrow \infty$ криві Γ' наближаються до Γ , то має місце асимптотична стійкість. Нульовий розв'язок, або точка спокою, називається стійким за Ляпуновим, якщо рухома точка (розв'язок), що впливає з кулі $\|\vec{X}(t_0)\| < \delta$, не покидає кулі $\|\vec{X}(t)\| < \epsilon$ і не досягає її межі. Якщо при $t \rightarrow \infty$ ϵ -сфера прямує до нуля, то нульовий розв'язок асимптотично стійкий.

Система функцій $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$, що задає параметрично фазову траєкторію, є розв'язком диференціальних рівнянь (1.1).

Тому цю систему називають **параметричною системою диференціальних рівнянь фазових траєкторій**.

У випадку двох рівнянь першого порядку, що не містять у правій частині параметр t (див. формулу (1.1)):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2); \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2), \end{cases} \quad (3.9)$$

диференціальне рівняння фазової траєкторії легко дістати діленням одного рівняння на інше:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_1(y_1, y_2)}{f_2(y_1, y_2)} \quad \text{або} \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2(y_1, y_2)}{f_1(y_1, y_2)}. \quad (3.10)$$

Для рівняння (3.10) теорема існування і єдиності може бути не виконана в точках, де $f_1(y_1, y_2) = 0, f_2(y_1, y_2) = 0$. Ці точки дістали назву **особливих**. Точки, в яких рівняння (3.10) має єдиний розв'язок, називаються **регулярними**.

Система рівнянь

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = 0; \\ f_2(y_1, y_2) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

дає змогу визначити координати особливої точки. Поставимо у відповідність особливої точці положення рівноваги. Тоді за напрямом руху зображувальної точки по фазових траєкторіях, що оточують особливу точку, можна судити про стійкість чи нестійкість положення рівноваги. Якщо швидкість зображувальної точки напрямлена до особливої точки і з часом зображувальна точка прагне до положення рівноваги, то положення рівноваги, або особливої точки, будуть асимптотично стійкими. Якщо швидкість зображувальної точки напрямлена від положення рівноваги і протягом часу зображувальна точка віддаляється у нескінченність, то положення рівноваги, або особливої точки, будуть нестійкими. Якщо зображувальна точка рухається по замкнутій кривій, то положення рівноваги буде стійке, але неасимптотично.

Тут наведено кілька варіантів означень стійкості за Ляпуновим. Однак цей список можна було б продовжити, оскільки досі єдиного означення стійкості не існує.

Приклади. 1. Знайти фазові траєкторії розв'язку (1.15).
Розв'язання.

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2 = c^2 = R^2.$$

Це коло радіуса $R = c$ із центром у точці спокою. Нехай $c^2 < \delta^2 = \varepsilon^2$, тобто $x^2(t_0) + y^2(t_0) = c^2 < \delta^2 = \varepsilon^2$. Тоді $x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$. Точка спокою $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ стійка. Очевидно, асимптотичної стійкості немає, оскільки ε^2 не прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$.

2. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x; \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Розв'язання. Частинним розв'язком системи є $x(t) = 0$, $y(t) = 0$. Загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t}; \\ y = c_2 e^{-t}. \end{cases}$$

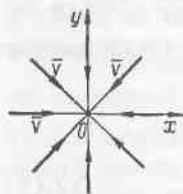


Рис. 5.3

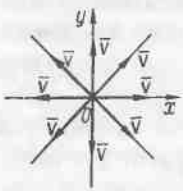


Рис. 5.4

Фазові траєкторії $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1} = k$; $y = kx$ — це сім'я прямих, що виходять з точки спокою (рис. 5.3). Фазова швидкість $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Проекції фазової швидкості на фазові осі $\dot{x} = -x$; $\dot{y} = -y$, тобто зображується точка по всіх, без винятку, траєкторіях рухається до точки спокою. При $t \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow 0$; $y(t) \rightarrow 0$, що означає асимптотичну стійкість точки спокою.

3. Дослідити на стійкість точку спокою системи $\dot{x} = x$; $\dot{y} = y$.
Розв'язання. Загальний розв'язок системи

$$x = c_1 e^t; y = c_2 e^t.$$

Фазові траєкторії $y = kx$ (рис. 5.4). Швидкість зображуваної точки $v = e^t \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ має напрям від точки спокою і $v \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Отже, нульова точка спокою нестійка.

§ 4. РІВНЯННЯ ЗБУРЕНОГО РУХУ

Як зазначалося, рівняння (2.9) чи (2.10)

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

або (2.14)

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{\Phi}(t, \bar{X}) \quad (4.2)$$

називаються **рівняннями збурень**.

З означень (2.1) – (2.3) випливає, що питання про стійкість руху за Ляпуновим або стійкості розв'язку системи (1.1) зводиться до питання про стійкість розв'язків рівнянь збурень. Однак, якщо говорити про стійкість точки спокою $x_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n}$, то в рівняннях (2.10), (2.14) $\bar{X}(t) [x_i(t)]$ є функції, що описують збурений рух. Тому рівняння (2.10), (2.14) стосовно досліджуваного положення рівноваги називаються рівняннями збуреного руху. Знайдемо рівняння збуреного руху для лінійної системи. Нехай рівняння (1.1) мають вигляд

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j + \psi_i(t). \quad (4.3)$$

Нехай відомий частинний розв'язок $\xi_i(t)$ системи (1.1), що відповідає початковим умовам

$$y_i(t_0) = \xi_{i0}. \quad (4.4)$$

Тоді розв'язок $\xi_i(t)$ задовольняє систему (1.1)

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\xi_j + \psi_i(t). \quad (4.5)$$

Збурений рух описується функціями $\bar{\xi}_i(t)$ з початковими умовами $\bar{\xi}_i(t_0) = \bar{\xi}_{i0}$. Функції $\bar{\xi}_i(t)$ задовольняють рівняння (4.3)

$$\frac{d\bar{\xi}_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\bar{\xi}_j + \psi_i(t). \quad (4.6)$$

Віднімаючи (4.5) від (4.6) і враховуючи, що $\bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t) = x_i(t)$, матимемо рівняння збуреного руху для лінійних систем

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (4.7)$$

або

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Порівнюючи (4.3) з (4.8), бачимо, що рівняння збурень для лінійних систем не залежать від виду функцій, які описують незбурений рух, що дає змогу рівняння (4.8) називати рівняннями збуреного руху, відносячи збурення до точки спокою. Рівняння (4.8) збігаються з однорідними рівняннями для системи (4.3). Отже, щоб побудувати рівняння збуреного руху для лінійної системи, треба в останній відкинути вільні члени та невідомі функції замінити на збурення.

Приклад. Дано систему

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 = -4\xi_1 + 4t^2 + 2. \end{cases}$$

Скласти рівняння збурень.

Розв'язання. Оскільки система лінійна, то рівняння збурень збігаються з рівняннями збуреного руху і записуються у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -4x_1. \end{cases}$$

Очевидно, для нелінійних систем такого положення не буде. Для наочності використаємо рівняння збурень для математичного маятника (рис. 5.5)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (4.9)$$

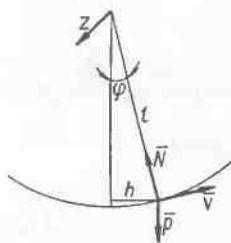


Рис. 5.5

Таким чином, рух маятника описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку (див. гл. 1, формула 5.148). Можна було б для складання рівнянь збурень перейти від рівняння (4.9) до системи рівнянь першого порядку. Це рівняння можна дістати і безпосередньо. Нехай початкові умови $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$. Незбурений рух описується функцією $\varphi(t)$, а збурений — $\tilde{\varphi}(t)$ з початковими умовами $\tilde{\varphi}_0$, $\dot{\tilde{\varphi}}_0$. Збурення $x(t) = \tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)$. Функція $\tilde{\varphi}(t)$ задовольняє рівняння (4.9): $\ddot{\tilde{\varphi}} + \frac{g}{l} \sin \tilde{\varphi} = 0$. Змінюючи тут

$\tilde{\varphi} = \varphi(t) + x(t)$, матимемо

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin[\varphi(t) + x(t)] &= 0; \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi; \\ \ddot{x} &= -\frac{g}{l} [\sin(x + \varphi) - \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Однак $\sin(x + \varphi) = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi$. Замінивши тут

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin(x + \varphi) = \cos \varphi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin \varphi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

і підставивши в (4.10), дістанемо рівняння збурень

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \left(x \cos \varphi - \frac{x^3}{3!} \cos \varphi + \dots - \frac{x^2}{2!} \sin \varphi + \frac{x^4}{4!} \sin \varphi + \dots \right). \quad (4.11)$$

Це рівняння залежить від виду функції, що описує незбурений рух.

Зауваження. Якщо в праву частину всіх рівнянь (2.10) збурень не входить явно час, то збурення називається **стаціонарним**. Так, якщо в (4.8) всі коефіцієнти a_{ij} не залежать від часу, тобто є сталими, то збурення будуть стаціонарними. Якщо ж до правої частини хоч одного рівняння (2.10) входить явно час, то збурення будуть нестаціонарними. У рівнянні (4.11) збурення нестаціонарні, оскільки функція $\varphi(t)$ залежить від часу.

§ 5. РІВНЯННЯ ПЕРШОГО НАБЛИЖЕННЯ

Розглянемо систему рівнянь збурення (2.10). Припустимо, що $\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ має обмежені частинні похідні будь-якого порядку за змінними x_1, x_2, \dots, x_n в околі точки $A(t, 0, 0, \dots, 0)$. Тоді функції $\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна розкласти в ряд Маклорена в околі точки A . Для функції двох змінних ряд Маклорена дістали раніше

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(0,0) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \right) f(0,0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \right)^2 f(0,0) + \dots \end{aligned}$$

За аналогією можна написати розвинення для функції трьох змінних:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(0,0,0) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} x_3 \right) f(0,0,0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} x_3 \right)^2 f(0,0,0) + \dots, \end{aligned}$$

а також n змінних:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(0, 0, \dots, 0) + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j} x_j \right) + \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} x_j \right)^2 + \dots + \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^k f(\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n)}{\partial x_j^k} x_j \right)^{k+1}$$

Якщо останнє розвинення застосувати до функції $\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то коефіцієнти $f, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ будуть функціями часу:

$$\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j^2} x_j \right)^2 + \dots + \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^k \varphi_i(t, \theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n)}{\partial x_j^k} x_j \right)^{k+1}$$

Покладемо тут $k=1$, тоді

$$\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j} x_j + \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i(t, \theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n)}{\partial x_j^2} x_j \right)^2$$

Позначимо

$$\frac{\partial \varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j} = a_{ij}(t);$$

$$\varphi_i(t, 0, 0, \dots, 0) + \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i(t, \theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n)}{\partial x_j^2} x_j \right)^2 = H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Функції $H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ містять функції x_1, x_2, \dots, x_n в степені, що відрізняється від одиниці, тобто $H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ є нелінійною функцією координат x_1, x_2, \dots, x_n .

Тепер систему (2.10) можна записати у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.1)$$

Система

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)z_j(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (5.2)$$

називається **системою рівнянь першого наближення** для рівнянь (5.1).

Приклади. 1. Дано диференціальне рівняння $\dot{x} = xt^2 - x^2$ з початковою умовою $x(0) = 0$. Написати рівняння першого наближення.

Розв'язання. Рівняння першого наближення – це лінійне щодо невідомої рівняння, тому

$$\dot{z} = t^2 z.$$

2. Дано систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2tx_1 + tx_1^3 + 3x_2^2, & x_1(0) = 0; \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 - x_1^4, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Написати рівняння першого наближення.

Розв'язання.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2tz_1, & z_1(0) = 0; \\ \dot{z}_2 = 3z_1 + 4z_2, & z_2(0) = 0. \end{cases}$$

О. М. Ляпунов довів, що за певних умов питання про стійкість точки спокою нелінійної системи (5.1) може бути розв'язане на підставі стійкості точки спокою рівняння (5.2) першого наближення.

Очевидно, що для лінійних систем рівняння першого наближення і рівняння збуреного руху збігаються. Метод переходу від рівнянь (2.10) до рівнянь (5.1) та (5.2) називається **лінеаризацією рівнянь** (2.10).

§ 6. ТЕОРЕМИ ЛЯПУНОВА ПРО СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

Сформулюємо теореми Ляпунова про стійкість нульового розв'язку систем для випадку, коли коефіцієнти a_{ij} щодо t стали, тобто йдеться про систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

і її наближення

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.2)$$

Теорема 1. Якщо всі функції H_i системи (6.1) обмежені по t , розвиваються в ряди за степенями x_1, x_2, \dots, x_n в деякій n -вимірній кулі радіуса R , тобто $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2$, причому розвинення починаються членами не нижче другого порядку і всі корені характеристичного рівняння системи (6.2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (6.3)$$

мають від'ємні дійсні частини, то n -вимірна точка спокою $x_i(t) = 0, i = \overline{1, n}$, системи (6.1), (6.2) є асимптотично стійкою. У цьому разі можливе дослідження стійкості за першим наближенням. Визначник (6.3) називається характеристичним поліномом (многочленом).

Теорема 2. Якщо функції H_i задовольняють умови теореми 1 і хоч би один з коренів характеристичного рівняння (6.3) має додатну дійсну частину, то точка спокою $x_i(t) = 0$ системи (6.1), (6.2) є нестійкою. Отже, у цьому разі також можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.

Зауваження. Якщо функції H_i задовольняють умови теореми 1, але серед коренів характеристичного рівняння (6.3) є такі, дійсні частини яких не додатні, і достовірно відомо, що дійсна частина хоч би одного кореня дорівнює нулю, то дослідження стійкості за першим наближенням, взагалі кажучи, неможливе. Треба використати додаткові відомості про функції H_i .

Доведення теорем 1 та 2 в загальному вигляді — дуже складне завдання, тому ми його не розглядаємо. Деякі пояснення цих теорем наводимо на прикладі лінійної системи двох рівнянь.

Нехай дано систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \quad (6.4)$$

З'ясуємо, яку умову мають задовольняти коефіцієнти a_{ij} ($i, j = 1, 2$), щоб нульовий розв'язок (точка спокою) $x_1(t) = 0, x_2(t) = 0$ був стійким.

Шукатимемо розв'язок системи (6.4) у вигляді

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2(t) = \alpha_2 e^{kt}. \quad (6.5)$$

Підставимо в систему (6.4) і знайдемо

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0; \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Щоб дістати відмінні від нуля розв'язки α_1, α_2 , потрібно

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (6.6)$$

Це і є характеристичне рівняння системи (6.4). Рівняння першого наближення збігається із системою (6.4).

Далі зручно систему (6.4) замінити одним рівнянням другого порядку:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2; \\ \ddot{x}_1 = a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \end{cases}$$

але

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}(\dot{x}_1 - a_{11}x_1),$$

тому

$$\ddot{x}_1 = (a_{11} + a_{22})\dot{x}_1 + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_1.$$

Позначивши $x_1(t) = x(t)$, матимемо

$$\ddot{x} - (a_{11} + a_{22})\dot{x} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x = 0. \quad (6.7)$$

Характеристичним рівнянням для рівняння (6.7) є

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (6.8)$$

Позначимо $x_2(t) = y(t)$.

Розглянемо можливі випадки.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні. При цьому можливі такі варіанти:

а) $k_1 < 0, k_2 < 0$. Загальний розв'язок рівняння (6.7)

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}; \quad (6.9)$$

$$y = \frac{1}{a_{12}} [c_1 (k_1 - a_{11}) e^{k_1 t} + c_2 (k_2 - a_{11}) e^{k_2 t}]. \quad (6.10)$$

Оскільки $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, то маємо асимптотичну стійкість.

б) $k_1 > 0, k_2 > 0$. Якщо $|x(t_0)| < \delta$ і $|y(t_0)| < \delta$, то для $t > t_0$ можна завжди вказати таке t , починаючи з якого

$$|x(t)| > M, |y(t)| > M, \quad (6.11)$$

де M — будь-яке наперед задане число. Точка спокою нестійка.

в) $k_1 > 0, k_2 < 0$. При цьому за рахунок доданка, що містить $e^{k_1 t}$, в (6.9), (6.10) завжди можна домогтися виконання умови (6.11), тобто і в цьому випадку точка спокою нестійка.

Позначимо

$$A_1 = -(a_{11} + a_{22}); A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (6.12)$$

Тоді для того, аби система (6.4) мала асимптотично стійку точку спокою, необхідно і достатньо, щоб $k_1 < 0, k_2 < 0$. При цьому

$$k_1 + k_2 < 0; a_{11} + a_{22} < 0; A_1 > 0;$$

$$k_1 k_2 > 0; k_1 k_2 = A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Отже, для асимптотичної стійкості точки спокою лінійної системи (6.4) необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти A_1 і A_2 характеристичного рівняння

$$k^2 + A_1 k + A_2 = 0 \quad (6.13)$$

були додатними.

Точка спокою буде нестійкою, якщо $k_1 > 0, k_2 > 0$. Однак $k_1 + k_2 = a_{11} + a_{22} = -A_1$, тобто має бути $A_1 < 0, A_2 > 0$.

При $k_1 > 0, k_2 < 0$ сума $k_1 + k_2$ може мати будь-який знак. Проте $k_1 k_2 < 0$, тому при $A_2 < 0$ і будь-якому значенні A_1 рух нестійкий.

Отже, щоб точка спокою лінійної системи (6.4) була нестійкою, необхідно і достатньо, аби виконувалась умова $A_1 < 0, A_2 > 0$ або $A_2 < 0$ і $A_1 \geq 0$.

2. Корені дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$. У цьому разі розв'язок рівняння (6.7) запишеться у вигляді

$$x = e^{k_1 t} (c_1 t + c_2); \quad (6.14)$$

$$y = \frac{1}{a_{12}} e^{k_1 t} [(k_1 - a_{11})(c_1 t + c_2) + c_1]. \quad (6.15)$$

Розглянемо такі окремі варіанти:

а) $k_1 = k_2 < 0$, тобто $A_1 > 0; A_2 = k_1^2 > 0$. Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0; \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Отже, точка спокою асимптотично стійка.

б) $k_1 = k_2 > 0$, тобто $A_1 < 0, A_2 = k_1^2 > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty; \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty.$$

Отже, точка спокою нестійка.

3. Корені k_1 і k_2 комплексні: $k_1 = \alpha + j\beta, k_2 = \alpha - j\beta$. У цьому разі

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t); \quad (6.16)$$

$$y(t) = \frac{e^{\alpha t}}{a_{12}} [(\alpha c_1 + \beta c_2 - a_{11} c_1) \cos \beta t + (\alpha c_2 - \beta c_1 - a_{11} c_2) \sin \beta t] \quad (6.17)$$

При цьому можливі такі варіанти:

а) $\alpha < 0, \beta \neq 0$, тоді з (6.16) і (6.17) маємо при $t \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow 0$. Точка спокою асимптотично стійка.

б) $\alpha > 0; \beta \neq 0$, тоді з (6.16) і (6.17) випливає, що для $t > t_0$ можна знайти такі t , починаючи з яких справедливі умови (6.11). Точка спокою нестійка.

в) $\alpha = 0; \beta \neq 0$.

Стійкість при $\alpha = 0; \beta \neq 0$ можна довести, використовуючи означення стійкості, за поведінкою зображувальної точки на фазовій траєкторії. Позначимо коефіцієнти при $\cos \beta t$ і $\sin \beta t$ у виразі (6.18) для $y(t)$ через c_3 і c_4 :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t; \\ y(t) = c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t. \end{cases} \quad (6.18)$$

Знайдемо $\cos \beta t$ і $\sin \beta t$ з (6.18), вважаючи

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0; \quad \cos \beta t = \frac{c_4 x - c_2 y}{\Delta}, \quad \sin \beta t = \frac{c_1 y - c_3 x}{\Delta}. \quad (6.19)$$

Піднісши (6.19) до квадрата і додавши, дістанемо рівняння фазової траєкторії

$$\frac{(c_4 x - c_2 y)^2 + (c_1 y - c_3 x)^2}{\Delta^2} = 1. \quad (6.20)$$

Легко бачити, що рівняння (6.20) зображає замкнену криву (див. гл. 3, формула (3.8)), отже, нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично. Розглянуті випадки **1**, **2**, **3** коренів характеристичного рівняння системи (6.4) ілюструють теореми 1, 2 Ляпунова про стійкість за першим наближенням. Однак випадок **3**, в) є винятком і належить до зауваження. Разом з тим вдалося довести, що для лінійної системи (6.4) у випадку нульової дійсної частини коренів характеристичного рівняння має місце неасимптотична стійкість.

Наведені міркування виявляються справедливими для лінійних систем з будь-якою кількістю степенів вільності, тобто розглядається система (6.1), у якій H_i дорівнюють нулю.

Теорема 3. Якщо в системі (6.1) усі H_i дорівнюють нулю, тобто обмежені за t , а характеристичний визначник (6.3) має прості корені з нульовою дійсною частиною, тобто простий нульовий корінь або прості чисто уявні корені, або нульовий корінь і прості чисто уявні корені, а решта коренів (якщо вони є) мають від'ємні дійсні частини, то точка спокою стійка, але не асимптотично.

Приклади. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x - y; \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Розв'язання. Система лінійна. Рівняння першого наближення збігаються з заданою системою. Порівнюючи задану систему з системою (6.4), запишемо рівняння (6.6):

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 5 = 0$:

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm j.$$

Його корені комплексні з додатною дійсною частиною. За теоремою Ляпунова нульовий розв'язок нестійкий.

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z; \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z; \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння (6.6):

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 & 2 \\ 5 & -3-k & 3 \\ -1 & 0 & -2-k \end{vmatrix} = 0;$$

$$(k+1)(k^2 + 2k + 1) = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = -1.$$

Усі три корені однакові дійсні і від'ємні. За теоремою 1 Ляпунова нульова точка спокою асимптотично стійка.

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin x; \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

Рівняння першого наближення

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 - z_2; \\ \dot{z}_2 = z_1 + z_2. \end{cases}$$

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0;$$

$$k^2 - 2k + 2 = 0; k_{1,2} = 1 \pm j.$$

За теоремою 2 нульовий розв'язок нестійкий.

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 10 \sin x - 29y + 3y^3; \\ \dot{y} = 5x - 14 \sin y + y^2. \end{cases}$$

Розвинемо в околі (0, 0) $\sin x$ і $\sin y$ в ряди:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots;$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots$$

Тоді

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 29y - \frac{10}{3!}x^3 + \frac{x^5}{3 \cdot 4} - \dots + 3y^3; \\ \dot{y} = 5x - 14y + \frac{14}{3!}y^3 - \frac{14}{5!}y^5 + \dots + y^2. \end{cases}$$

Система рівнянь першого наближення для заданої системи запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 10z_1 - 29z_2; \\ \dot{z}_2 = 5z_1 - 14z_2. \end{cases}$$

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 10 - k & -29 \\ 5 & -14 - k \end{vmatrix} = 0; \quad k_{1,2} = -2 \pm j.$$

За теоремою 1 точка спокою заданої системи асимптотично стійка.

ВПРАВИ. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок таких систем.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y; \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases} \quad \text{Відповідь. Нестійкий.}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z; \\ \dot{y} = x + y - 3z; \\ \dot{z} = x - 5y - 3x. \end{cases} \quad \text{Відповідь. Нестійкий.}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y; \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases} \quad \text{Відповідь. Стійкий, але не асимптотично.}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z; \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z; \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases} \quad \text{Відповідь. Нестійкий.}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2; \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases} \quad \text{Відповідь. Нестійкий.}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2; \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases} \quad \text{Відповідь. Стійкий.}$$

§ 7. ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО РІВНЯННЯ n -ГО ПОРЯДКУ

Нехай дано рівняння n -го порядку, розв'язуване щодо старшої похідної:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (7.1)$$

разом з початковими умовами

$$y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0; y''(t_0) = y''_0; \dots; y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (7.2)$$

Нехай функція $f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ така, що рівняння (7.1) має єдиний розв'язок при будь-якому наборі початкових умов. Побудуємо поняття стійкості цього розв'язку. Для цього є два шляхи. Перший з них ґрунтується на тому, що рівняння (7.1) еквівалентне системі n рівнянь першого порядку і, отже, завдання зводиться до питання про стійкість уже відомого розв'язку системи. Другий ґрунтується на безпосередньому введенні поняття стійкості розв'язку (7.1).

Нехай задано два набори початкових умов:

$$\xi(t_0) = \xi_0; \xi'(t_0) = \xi'_0; \dots; \xi^{(n-1)}(t_0) = \xi_0^{(n-1)}; \quad (7.3)$$

$$\bar{\xi}(t_0) = \bar{\xi}_0; \bar{\xi}'(t_0) = \bar{\xi}'_0; \dots; \bar{\xi}^{(n-1)}(t_0) = \bar{\xi}_0^{(n-1)}. \quad (7.4)$$

Позначимо частинний розв'язок (7.1), що відповідає кожному з цих наборів, відповідно $\xi(t)$ і $\bar{\xi}(t)$. Тоді частинний розв'язок $\xi(t)$ буде стійким за Ляпуновим, якщо з будь-якого заданого $\epsilon > 0$ можна вказати $\delta(\epsilon) > 0$ таке, що при виконанні умов

$$|\bar{\xi}_0 - \xi_0| < \delta, |\bar{\xi}'_0 - \xi'_0| < \delta, \dots, |\bar{\xi}_0^{(n-1)} - \xi_0^{(n-1)}| < \delta \quad (7.5)$$

для всіх $t > t_0$ виконано умови

$$|\bar{\xi}(t) - \xi(t)| < \epsilon, |\bar{\xi}'(t) - \xi'(t)| < \epsilon, \dots, |\bar{\xi}^{(n-1)}(t) - \xi^{(n-1)}(t)| < \epsilon. \quad (7.6)$$

Умови (7.5) і (7.6) у скороченій формі можна записати у вигляді

$$|\bar{\xi}_0^{(i)} - \xi_0^{(i)}| < \delta; \quad |\bar{\xi}^{(i)}(t) - \xi^{(i)}(t)| < \epsilon, \quad i = \overline{0, (n-1)}.$$

Якщо при виконанні умов (7.5), (7.6) виконано ще й умови

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\xi}^{(i)}(t) - \xi^{(i)}(t)| = 0 \quad (7.7)$$

для всіх $i = \overline{0, (n-1)}$, то розв'язок $\xi(t)$ є стійким асимптотично. Якщо хоч одна з умов (7.7) не буде виконана, але виконані всі умови (7.5) і (7.6), то розв'язок буде стійким, але не асимптотично. Можна всі означення стійкості, наведені в § 1, перенести на випадок розв'язку рівняння (7.1). Якщо ввести збурення $x(t)$ так, що

$$x^{(i)}(t) = \bar{\xi}^{(i)}(t) - \xi^{(i)}(t), \quad i = \overline{0, (n-1)}, \quad (7.8)$$

то для $x(t)$ дістанемо рівняння збурень

$$x^{(n)} = \varphi(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad (7.9)$$

звідки і випливає, що питання про стійкість будь-якого розв'язку (7.1) можна звести до дослідження стійкості нульового розв'язку (7.9) при нульових початкових умовах.

Якщо рівняння (7.1) лінійне, то рівняння збурень також лінійне. Якщо провести лінеаризацію рівняння (7.9), то можна дістати рівняння, аналогічне (5.1):

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x + H(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = 0, \quad (7.10)$$

де функція $H(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ містить $x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}$ у другому та вищих степенях.

Аналогом рівняння першого наближення (5.2) в цьому разі буде рівняння

$$a_0(t)z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \dots + a_n(t)z = 0. \quad (7.11)$$

Теореми 1, 2, 3 Ляпунова зберігають силу і в цьому випадку. Характеристичне рівняння першого наближення, як це видно з (7.11), при сталих $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ буде

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (7.12)$$

Приклади. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок таких рівнянь.

1. $y''' + y'' + y' + y = 0.$

Розв'язання. Задане рівняння — лінійне. Функція $H(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) = 0.$

Рівняння першого наближення (7.11) збігається із заданим рівнянням. Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — сталі. Складемо характеристичне рівняння (7.12) і знайдемо його корені:

$$k^3 + k^2 + k + 1 = 0;$$

$$(k+1)(k^2+1) = 0;$$

$$k_1 = -1; k_{2,3} = \pm j,$$

тобто один корінь дійсний і від'ємний, два інших — чисто уявні, прості. Тоді за теоремою 3 Ляпунова нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

2. $y^{IV} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння (7.12)

$$k^4 + 2k^2 + 8k + 5 = 0.$$

Коренем цього рівняння буде $k_1 = -1$. Дійсно,

$$(-1)^4 + 2(-1)^2 + 8(-1) + 5 = 0.$$

Поділивши многочлен $k^4 + 2k^2 + 8k + 5$ на $k+1$, дістанемо

$$k^3 - k^2 + 3k + 5 = 0.$$

Рівняння $k^3 - k^2 + 3k + 5 = 0$ також має корінь $k_2 = -1$. Після ділення на $k+1$ матимемо $k^2 - 2k + 5$.

Коренями рівняння $k^2 - 2k + 5 = 0$ будуть числа $k_{3,4} = 1 \pm 2j$. Отже, корені $k_{1,2}$ мають від'ємну дійсну частину, а $k_{3,4}$ — додатну. За теоремою 2 Ляпунова нульовий розв'язок нестійкий.

ВПРАВИ. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок таких рівнянь.

1. $y'' - 7y' + 12y = 0.$ *Відповідь.* Нестійкий.

2. $y'' + 7y' + 12y = 0.$ *Відповідь.* Асимптотично стійкий.

3. $y'' + 4y = 0.$ *Відповідь.* Стійкий, але не асимптотично.

4. $y'' + 5y' = 0.$ *Відповідь.* Стійкий, але не асимптотично.

§ 8. УМОВИ ВІД'ЄМНОСТІ ДІЙСНОЇ ЧАСТИНИ КОРЕНІВ
ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ

8.1. Необхідна умова від'ємності дійсної частини коренів характеристичного рівняння. Випадок рівняння першого і другого степенів

Для розгляду стійкості за першим наближенням треба мати точні відомості про знаки дійсної частини коренів характеристичного визначника чи рівняння (6.3) або (7.12)

$$f(k) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (8.1)$$

Геометрично це означає, що треба знати розміщення коренів на комплексній площині відносно уявної осі. Якщо всі корені характеристичного рівняння лежать ліворуч від уявної осі, то розв'язок асимптотично стійкий, праворуч — розв'язок нестійкий. Якщо ж хоча б один корінь лежить на уявній осі, то в нелінійному випадку за першим наближенням про стійкість судити не можна, а в лінійному випадку справедлива теорема 3 (§ 6).

Якщо розкрити визначник (6.3), то дістанемо рівняння n -го степеня щодо k , яке можна записати як рівняння (8.1). Воно також називається характеристичним. Далі вважатимемо, що коефіцієнти a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, характеристичного визначника (6.3), а також коефіцієнти a_μ , $\mu = \overline{0, n}$, у рівнянні (8.1) — дійсні числа. Не порушуючи спільності міркувань, можна вважати $a_0 > 0$. Для судження про знаки дійсних частин коренів рівняння (8.1) Е. Раус, А. Гурвіц, Л. Михайлов та інші запропонували кілька необхідних і достатніх умов (критеріїв). Далі наведемо доведення і формулювання деяких із цих умов. Доведемо насамперед, що необхідною (але недостатньою) умовою того, що корені рівняння (8.1) лежать ліворуч від уявної осі або мають від'ємну дійсну частину, є додатні значення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Для рівнянь першого і другого степенів ця умова є достатньою. Покажемо це. У разі рівняння першого порядку характеристичне рівняння має вигляд $a_0 k + a_1 = 0$.

При цьому $k = -\frac{a_1}{a_0} < 0$, якщо $a_0, a_1 > 0$. Для рівняння другого порядку характеристичне рівняння запишеться у вигляді

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Нехай коефіцієнти $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$, тоді

$$k_1 + k_2 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{a_2}{a_0},$$

де k_1, k_2 — дійсні числа.

Оскільки $\frac{a_2}{a_0} > 0$, то k_1, k_2 задовольняють умови $k_1 < 0, k_2 < 0$ або $k_1 > 0, k_2 > 0$. Однак сума $k_1 + k_2$ має бути меншою за нуль, тому $k_1 < 0, k_2 < 0$. У разі комплексних коренів під k_1 і k_2 слід розуміти їхні дійсні частини.

У загальному випадку розкладемо рівняння (8.1) на множники:

$$f(k) = a_0 (k - \alpha_1)(k - \alpha_2) \dots (k - \alpha_\nu)(k^2 + p_1 k + q_1) \dots (k^2 + p_\mu k + q_\mu),$$

де $\alpha_i, i = \overline{1, \nu}$ — від'ємні дійсні корені, а комплексні корені мають від'ємні дійсні частини, тобто $p_i, q_i, i = \overline{1, \mu}$ — додатні.

Вираз для $f(k)$ можна записати у вигляді

$$f(k) = a_0 (k + c_1)(k + c_2) \dots (k + c_\nu)(k^2 + p_1 k + q_1) \dots (k^2 + p_\mu k + q_\mu),$$

де $c_i = -\alpha_i > 0$. Розкривши дужки, матимемо поліном n -го степеня, коефіцієнти k при будь-якому степені якого будуть додатними.

Тим самим доведено таку теорему: якщо нульовий розв'язок системи (6.1) чи рівняння (7.10) стійкий, то всі коефіцієнти характеристичного рівняння (8.1) додатні.

8.2. Умова (критерій) Рауса—Гурвіца

Складемо так звану матрицю Гурвіца. На її головній діагоналі розмістимо коефіцієнти, починаючи з a_1 до a_n . Столпці складемо по черзі з коефіцієнтів тільки з непарними або тільки з парними індексами, включаючи a_0 . Решта клітинок (місця) з індексами, більшими за n чи меншими від 0, замінимо нулями:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

З матриці складаємо головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = |a_1|;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix};$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Умова Рауса—Гурвіца читається так: якщо всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца додатні ($\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \dots; \Delta_n > 0$), то всі корені полінома (8.7) лежать ліворуч від уявної осі, тобто в лівій півплощині.

Оскільки $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, то умову $\Delta_n > 0$ можна замінити на умову $a_n > 0$.

Приклади. 1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^5 + k^4 + 7k^3 + 4k^2 + 10k + 3 = 0.$$

Усі коефіцієнти рівняння додатні:

$$a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 7; a_3 = 4; a_4 = 10; a_5 = 3.$$

Складемо головні мінори:

$$\Delta_1 = |a_1| = 1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8; \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24.$$

Отже, $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 > 0$. Нульовий розв'язок стійко асимптотичний.

$$2. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. $k^4 + 2k^3 + 4k^2 + 2k + 5 = 0; a_0 = 1; a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 2; a_4 = 5; n = 4;$

$$\Delta_1 = |a_1| = 2 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Далі розрахунки припиняємо. Розв'язок $y(x) = 0$ нестійкий.

3. При яких значеннях α буде стійким нульовий розв'язок рівняння $y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0$?

Розв'язання. Коефіцієнти $a_0 = 1; a_1 = \alpha; a_2 = 2; a_3 = 1$. Характеристичне рівняння

$$k^3 + \alpha k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = |\alpha| > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 1 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \Delta_2 > 0; \alpha > \frac{1}{2}.$$

При $\alpha > \frac{1}{2}$ нульовий розв'язок рівняння буде асимптотично стійким.

8.3. Умова Льснара—Шипара

При користуванні умовою Рауса—Гурвіца (особливо у випадку високого порядку вихідного рівняння чи системи рівнянь) багато часу витрачається на обчислення.

Льенару і Шипару вдалося дістати умову від'ємності дійсних частин коренів рівняння (8.1), що потребує трохи менше обчислень. Для того щоб рівняння (8.1) мало всі корені з від'ємними частинами, необхідно і достатньо, щоб були додатними:

1) всі коефіцієнти в рівнянні (8.1):

$$a_0 > 0; a_1 > 0; \dots; a_n > 0. \quad (8.3)$$

2) головні мінори матриці Гурвіца:

$$\Delta_{n-1} > 0; \Delta_{n-3} > 0; \dots \quad (8.4)$$

Приклади. 1. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Умова 1): $a_0 = 1 > 0; a_1 = 2 > 0; a_2 = 4 > 0; a_3 = 2 > 0; a_4 = 5 > 0$.

Умова 2): $\Delta_{4-1} = \Delta_3 = -8 < 0$.

Далі розрахунки припиняємо. Розв'язок нестійкий. (Якщо в методі Рауса—Гурвіца для встановлення цього результату довелося обчислювати два визначника, то при користуванні методом Льенара—Шипара — лише один.)

2. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0; a_0 = 1; a_1 = 6; a_2 = 11; a_3 = 6$.

Розв'язання. Умова 1) виконана. Умова 2) виконана:

$$\Delta_{3-1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 60 > 0.$$

Розв'язок $y(x) = 0$ стійкий асимптотично.

ВПРАВИ. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівнянь.

1. $2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
2. $3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$. *Відповідь.* Нестійкий.
3. $y^V + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
4. $y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
5. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
6. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
7. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
8. $y^{IV} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
9. $y^{IV} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.
10. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$. *Відповідь.* Стійкий.

8.4. Умова Михайлова

Нехай корені рівняння (8.1) k_1, k_2, \dots, k_n , тоді

$$f(k) = a_0(k - k_1)(k - k_2) \dots (k - k_n), \quad (8.5)$$

Розглянемо (8.5) як функцію від k і покладемо $k = j\omega$, де ω може змінюватися, як і k від $-\infty$ до $+\infty$. Тоді (8.5) запишеться у вигляді

$$f(j\omega) = a_0(j\omega - k_1)(j\omega - k_2) \dots (j\omega - k_n). \quad (8.6)$$

Вираз (8.6) можна розглядати як функцію від ω , причому, якщо при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ $j\omega \neq k_v, v = \overline{1, n}$, то характеристичне рівняння не має чисто уявних коренів. Функцію $f(j\omega)$ можна подати у вигляді

$$f(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n = \\ = (a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots) + j(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots); \quad (8.7)$$

$$f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega);$$

$$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots; \quad (8.8)$$

$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \quad (8.9)$$

Як і будь-яке комплексне число, функцію $f(j\omega)$ можна в комплексній площині u, v зобразити вектором (рис. 5.6) $\vec{f}(j\omega)$. Це буде вектор-функція скалярного аргументу ω . Якщо змінювати ω від $-\infty$ до $+\infty$, то вектор $\vec{f}(j\omega)$ опише деяку криву, яка називається **кривою Михайлова**. Ця крива є годографом вектор-функції $\vec{f}(j\omega)$. Якщо $\vec{f}(j\omega) = 0$, тобто крива Михайлова проходить через початок координат комплексної площини u, v , то рівняння (8.6) має уявні корені. У цьому разі про стійкість розв'язків системи (6.1) з першого наближення нічого сказати не можна, якщо рівняння збурень нелінійні.

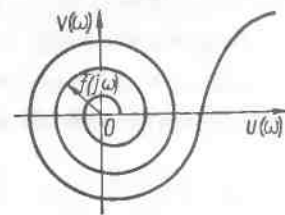


Рис. 5.6

Якщо ж крива не проходить через початок координат, то залишається з'ясувати умову перебування коренів окремо в лівій або правій півплощині u, v .

Для вирішення цього питання розглянемо початкову комплексну площину s : $s = j\omega + \alpha$ (рис. 5.7,а).

Розглянемо

$$z_v = j\omega - k_v, \quad v = \overline{1, n}. \quad (8.10)$$

Нехай корінь $k_v = -\beta_v + j\gamma_v$ (де $\beta > 0$, γ — будь-яке число) має від'ємну дійсну частину. Тоді $z_v = \beta_v + j(\omega - \gamma_v)$. Побудуємо вектори

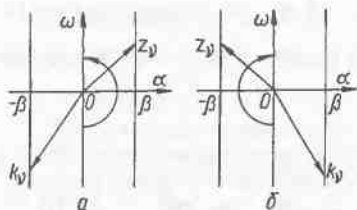


Рис. 5.7

\bar{z}_v і \bar{k}_v . При зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$ вектор \bar{z}_v повернеться на 180° проти стрілки годинника, тобто на $+\pi$. Нехай корінь $k_v = \beta_v + j\gamma_v$ (рис. 5.7,б) має додатну дійсну частину. Тоді $z_v = -\beta_v + j(\omega - \gamma_v)$ і вектор \bar{z}_v при зміні від $-\infty$ до $+\infty$ повернеться на 180° за стрілкою годинника на $-\pi$.

У зв'язку з тим що функція $u(\omega)$, як це

видно з виразу (8.8), парна, то крива Михайлова симетрична щодо осі Ou , тому досить побудувати криву Михайлова для значень ω , що змінюються від 0 до $+\infty$. Це дає змогу відмовитися від розгляду нижньої півплощини площини $s = \alpha + j\omega$, тобто якщо корінь рівняння (8.1) має від'ємну дійсну частину, то при зміні ω від 0 до $+\infty$ аргумент комплексного числа $z_v = j\omega - k_v$ зміниться на $+\pi/2$. Якщо ж корінь рівняння (8.1) має додатну дійсну частину, то при зміні ω від 0 до $+\infty$ аргумент комплексного числа z_v зміниться на $-\pi/2$. Із виразів (8.6) і (8.10) маємо

$$f(j\omega) = a_0 z_1 z_2 \dots z_n,$$

а кут φ , на який повернеться функція $\bar{f}(j\omega)$ при зміні від 0 до $+\infty$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$$

(при множенні комплексних чисел їх аргументи додаються), де φ_v — кут повороту комплексного числа z_v ($v = \overline{1, n}$) при зміні ω від 0 до $+\infty$, причому φ_v за доведеним дорівнює $-\pi/2$ при $\beta > 0$ і $+\pi/2$ при $\beta < 0$. Якщо рівняння (8.1) має m коренів з додатними дійсними частинами, а $n - m$ з від'ємними, то

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(n - m) + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}.$$

Щоб усі корені були з від'ємними дійсними частинами, необхідно і достатньо, щоб $\varphi = n\pi/2$.

Умова Михайлова формулюється так: для того щоб корені рівняння (8.1) мали від'ємну дійсну частину, необхідно і достатньо, щоб:

1) крива Михайлова не проходила через початок координат площини u, v ;

2) вектор $\bar{f}(j\omega)$, що описує криву Михайлова, при зміні ω від 0 до $+\infty$ повернувся на кут $\varphi = n\pi/2$ проти руху стрілки годинника, тобто, починаючи з додатної дійсної півосі крива проходить послідовно в додатному напрямі n квадрантів. Поворот відбувається навколо початку координат.

Якщо вектор $\bar{f}(j\omega)$ повертається на $n\pi/2$, то він проходить послідовно всі квадранти, а отже, сама крива по чергово перетинає осі $u(\omega)$ та $v(\omega)$.

Це дає змогу трохи інакше сформулювати умову Михайлова: для того щоб корені рівняння (8.1) мали від'ємну дійсну частину, необхідно і достатньо, щоб виконувались дві умови:

1) вектор $\bar{f}(j\omega)$ при зміні ω від 0 до $+\infty$ обертався проти руху стрілки годинника;

2) корені рівнянь $u(\omega) = 0$ та $v(\omega) = 0$ були дійсними і чергувалися один з одним, тобто, щоб між двома будь-якими коренями функції $u(\omega)$ містився корінь функції $v(\omega)$.

Умова Михайлова ще називається **геометричним критерієм стійкості**.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок $y(x) = 0$ рівняння

$$y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0.$$

Розв'язання. Складемо $f(k) = k^4 + 3k^3 + 4k^2 + 3k + 1$ і побудуємо $f(j\omega)$:

$$f(j\omega) = \omega^4 - 3j\omega^3 - 4\omega^2 + 3j\omega + 1;$$

$$f(j\omega) = (\omega^4 - 4\omega^2 + 1) + j(3\omega - 3\omega^3);$$

$$f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega);$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1; \quad (8.11)$$

$$v(\omega) = 3\omega(1 + \omega)(1 - \omega). \quad (8.12)$$

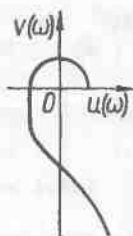


Рис. 5.8

Побудуємо криву Михайлова. Її будують звичайно за характерними точками (табл. 8.1, рис. 5.8), використовуючи рівняння (8.11) і (8.12). Дослідимо їх і знайдемо, що при $\omega > 1$,

$u(\omega) < 0$, а при $\omega > \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $u(\omega) > 0$ (корені рівняння $u(\omega) = 0$, $\omega = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$). Отже, при $\omega > \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ знаки $u(\omega) > 0$ і

$v(\omega) < 0$ не змінюються. Крива Михайлова $\omega > \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ залишається весь час у четвертому квадранті. Тепер дізнаємось, як поводить себе крива Михайлова при зміні ω від 0 до $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Складемо табл. 8.1. Надамо ω значень, вказаних в таблиці, і побудуємо

за таблицею криву Михайлова, бачимо, що крива проходить усього чотири квадранти, саме стільки, скільки потрібно за критерієм для стійкості, оскільки кут повороту $\tilde{f}(j\omega): \varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = (n - 2m) \cdot \frac{\pi}{2}$. Звідси $2\pi = 2\pi - 2m$; $m = 0$. Отже, всі корені рівняння лежать у лівій півплощині. Точка спокою стійка.

Таблиця 8.1

ω	0	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	2	10
$u(\omega)$	1	0	-2	0	+	+
$v(\omega)$	0	$3(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	0	$-3(3 + \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	-	-

ВПРАВИ. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння, використовуючи критерій Михайлова.

- $y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0$. Відповідь. Стійкий.
- $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$. Відповідь. Стійкий.
- $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$. Відповідь. Стійкий.
- $y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$. Відповідь. Стійкий.

§ 9. D-РОЗБИТТЯ

У практичних задачах на стійкість деякі з коефіцієнтів характеристичного визначника (6.3) або полінома (8.1) можуть залежати від деяких параметрів або самі коефіцієнти можуть змінюватися. У цьому разі виникає задача про те, при яких значеннях згаданих коефіцієнтів розв'язок рівняння стійкий, а при яких нестійкий.

Для виконання поставленого завдання розглядатимемо характеристичний поліном як функцію від коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$f(k) = f(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n. \quad (9.1)$$

Кожну задану сукупність коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ розглядатимемо як точку $(n+1)$ -вимірного простору. Одній точці $N(a_0, a_1, \dots, a_n)$ відповідає певна сукупність коренів рівняння k_1, k_2, \dots, k_n . Таким чином, корені можна розглядати як функції від коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n або як функції точки N . Якщо всі корені k_1, \dots, k_n мають від'ємну дійсну частину, то точку N називатимемо стійкою. Сукупність таких точок складе **область стійкості**, а та поверхня, яка обмежує цю область, називається границею області стійкості. Область, що відповідає точкам N , для яких не всі корені k_1, k_2, \dots, k_n мають від'ємну дійсну частину, називається **областю нестійкості**. Процес розбиття простору коефіцієнтів на стійкі та нестійкі області називається **D-розбиттям простору коефіцієнтів**.

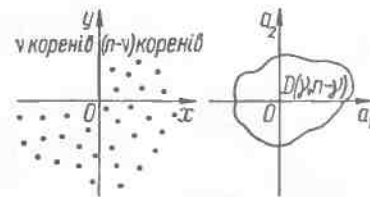


Рис. 5.9

Нехай, наприклад, у характеристичному поліномі всі коефіцієнти — відомі числа, крім двох: a_1 і a_2 . Тоді всі корені k_1, k_2, \dots, k_n будуть функціями цих параметрів:

$$k_i(a_1, a_2) = x_i(a_1, a_2) + jy_i(a_1, a_2). \quad (9.2)$$

Побудуємо в площині x, y всі корені k_i . При певних значеннях a_1, a_2 частина коренів v виявиться в лівій півплощині, а частина $n - v$ в правій (рис. 5.9).

Побудуємо тепер площину параметрів a_1, a_2 і виділимо в ній область, що відповідає тим значенням a_1, a_2 , в яких характеристичний многочлен має v коренів, що лежать ліворуч від уявної осі, і $n - v$ коренів, що лежать праворуч від неї. Таку область позначають $D(v, n - v)$. Очевидно, в стійкій області мають бути всі n коренів, що лежать у лівій півплощині, тобто $v = n$. Так, для рівняння третього порядку можна побудувати області $D(3;0); D(2;1); D(1;2); D(0;3)$, з яких лише перша буде стійкою. Для диференціального рівняння n -го порядку можна побудувати $(n + 1)$ D -областей, з яких лише одна $D(n;0)$ буде областю стійкості. Побудова областей $D(v, n - v)$ ґрунтується на неперервній залежності коренів рівняння від коефіцієнтів. Межа області $D(n;0)$ відповідає образу уявної осі площини x, y .

Приклади. 1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + y = 0.$$

Розв'язання. Область стійкості $D(3;0)$ визначається поведінкою коефіцієнтів a_1, a_2 характеристичного рівняння

$$f(k) = k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + 1. \quad (9.3)$$

Визначимо межу області $D(3;0)$, вважаючи $k = j\beta$:

$$f(j\beta) = -j\beta^3 - a_1\beta^2 + a_2j\beta + 1 = 0.$$

Остання рівність можлива, якщо

$$-a_1\beta^2 + 1 = 0; \quad -\beta^3 + a_2\beta = 0.$$

$$a_1 = \frac{1}{\beta^2}; \quad a_2 = \beta^2; \quad \beta \neq 0.$$

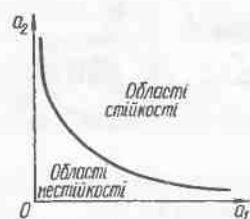


Рис. 5.10

З останніх рівностей випливає, що $a_1 \geq 0; a_2 \geq 0$. Рівняння $a_1 = \frac{1}{\beta^2}, a_2 = \beta^2$ є параметричними рівняннями межі області. Вилучимо параметр β і матимемо $a_1 a_2 = 1$ — рівняння гіперболи (рис. 5.10). В силу того, що $a_1 \geq 0; a_2 \geq 0$, залишаємо лише одну гілку гіперболи — верхню. Тому вся площина a_1, a_2 поділилась на дві області D . Для визначення характеру цих областей виберемо конкретні значення a_1, a_2 і дослідимо на стійкість рівняння, що дістали відомими методами Рауса—Гурвіца, Михайлова тощо.

Нехай $a_1 = 0; a_2 = 0$. Тоді

$$f(k) = k^3 + 1 = (k + 1)(k^2 - k + 1);$$

$$k_1 = -1; \quad k_{2,3} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, область під гіперболою має один корінь у лівій півплощині, а два — в правій, тобто $D(1;2)$.

Для з'ясування характеру області, що лежить над гіперболою, застосуємо критерій Рауса—Гурвіца. Згідно з характеристичним рівнянням (9.3) маємо

$$a_0 = 1; \quad a_1 = a_1; \quad a_2 = a_2; \quad a_3 = 1;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}; \quad a_1 a_2 - 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_1 a_2 > 1.$$

Область $D(3;0)$ визначається умовою

$$a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 a_2 > 1, \quad (9.4)$$

що відповідає області, яка лежить над гіперболою. Отже, з чотирьох допустимих для рівняння (9.3) областей: $D(0;3); D(1;2); D(2;1); D(3;0)$ є лише дві: $D(1;2)$ та $D(3;0)$. В області $D(1;2)$ нульовий розв'язок нестійкий, в $D(3;0)$ — стійкий.

2. Визначити область стійкості многочлена

$$f(a_2, a_4) = k^4 + 2k^3 + a_2 k^2 + k + a_4 = 0.$$

Розв'язання. Нехай $k = jy$; $y^4 - 2jy^3 - a_2 y^2 + jy + a_4 = 0$;

$$\begin{cases} y^4 - a_2 y^2 + a_4 = 0; \\ -2y^3 + y = 0, \end{cases}$$

$$y \neq 0; \quad y^2 = \frac{1}{2}; \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} a_2 + a_4 = 0; \quad a_4 = \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{4}.$$

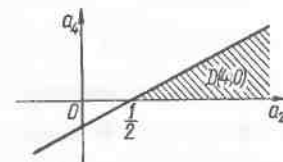


Рис. 5.11

Таким чином, межею області D є пряма $a_4 = \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{4}$ (рис. 5.11).

Надалі дослідження виконуємо за допомогою критерію Рауса—Гурвіца:

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 2; \quad a_2 = a_2; \quad a_3 = 1; \quad a_4 = a_4;$$

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 2a_2 - 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & a_2 & 2 \\ 0 & a_4 & 1 \end{vmatrix} = 2a_2 - 4a_4 - 1 > 0; \Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0; a_4 > 0.$$

Отже, область $D(4;0)$ визначається умовами

$$\begin{cases} a_2 > \frac{1}{2}; \\ a_4 > \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{4}; \\ a_4 > 0. \end{cases} \quad (9.5)$$

Цим нерівностям відповідає заштрихована на рис. 5.11 область. Решта частин площини a_2, a_4 (рис. 5.11) міститимуть області нестійкості.

3. Дано систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + f_1(t); \\ \dot{\xi}_2 = -3\xi_1 - 2\xi_2 + f_2(t). \end{cases}$$

Дослідити розв'язок системи на стійкість.

Розв'язання. Рівняння збурень для заданої системи запишуться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2; \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2. \end{cases} \quad (9.6)$$

Рівняння першого наближення збігаються з (9.6). Шукатимемо частинні розв'язки цієї системи у вигляді

$$x_1 = B_1 e^{kt}; \quad x_2 = B_2 e^{kt}.$$

Характеристичне рівняння системи збурень

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta \\ -3 & -2 - k \end{vmatrix} = 0,$$

з якого маємо рівняння $k^2 + (2 - \alpha)k + (3\beta - 2\alpha) = 0$ або $k^2 + A_1 k + A_2 = 0$;

$$A_1 = 2 - \alpha; \quad A_2 = 3\beta - 2\alpha.$$

Корені характеристичного рівняння

$$k_{1,2} = -\frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2} = \frac{\alpha - 2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha - 2)^2}{4} + 2\alpha - 3\beta} \quad (9.7)$$

явно виражені через параметри α, β . Із залежності (9.7) видно, що характер коренів визначається знаком виразів $\alpha - 2$ і $2\alpha - 3\beta$.

Нехай $A_2 = 3\beta - 2\alpha < 0$ (рис. 5.12), $\beta < \frac{2}{3}\alpha$ — це частина півплощини α, β , що лежить нижче прямої $\beta = \frac{2}{3}\alpha$. У цій області

$$k_1 = -\frac{A_1}{2} + \sqrt{\frac{A_1^2}{4} + |A_2|} > 0;$$

$$k_2 = -\frac{A_1}{2} - \sqrt{\frac{A_1^2}{4} + |A_2|} < 0.$$

Отже, це область нестійкості $D(1;1)$. Нехай $A_2 = 3\beta - 2\alpha > 0$; $\beta > \frac{2}{3}\alpha$ — область, що лежить над прямою $\beta = \frac{2}{3}\alpha$. У цій області лежать $D(2;0)$ і $D(0;2)$. Щоб їх визначити, знайдемо знак $A_1 = 2 - \alpha$.

Нехай $A_1 = 2 - \alpha = 0$, $\alpha = 2$ — це рівняння прямої. Точка $P(2, \frac{3}{4})$ перетину прямих $\alpha = 2$

і $\beta = \frac{2}{3}\alpha$ відповідає випадку $A_1 = 0, A_2 = 0$, тобто $k_1 = 0, k_2 = 0$. Тоді розв'язок системи (9.6) запишеться у вигляді $x_1 = B_1, x_2 = B_2 t$, і цей розв'язок нестійкий.

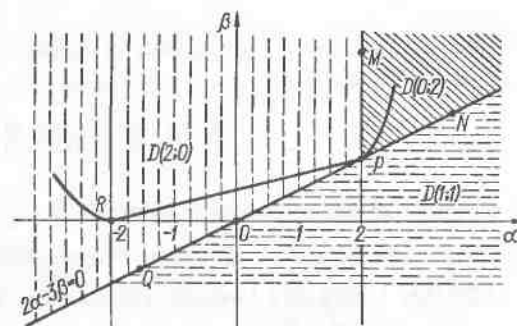


Рис. 5.12

Нехай $A_1 < 0$ ($2 - \alpha < 0; \alpha > 2$). Цій нерівності відповідають точки правої півплощини α, β від прямої $\alpha = 2$, нерівності $A_1 > 0$ ($\alpha < 2$) — точки, що лежать ліворуч від прямої $\alpha = 2$. Через те, що область, яка лежить нижче прямої $\beta = \frac{2}{3}\alpha$, вже оцінена, надалі розглядатимемо лише область, яка лежить над прямою $\beta = \frac{2}{3}\alpha$. Розглянемо випадок $A_2 > 0; A_1 > 0$ або область, що визначається нерівностями $\alpha < 2; \beta > \frac{2}{3}\alpha$. У цьому разі маємо асимптотичну стійкість. На рис. 5.12 ця область заштрихована вертикальними прямими.

Нехай $A_2 > 0; A_1 < 0; \beta > \frac{2}{3}\alpha; \alpha > 2$ — це область, що визначається кутом MPN . З виразу (9.7) маємо, що в коренях k_1 і k_2 дійсні частини додатні. Отже, маємо область $D(0;2)$. Досліджуємо тепер характер руху за півпрямими $PM; PN; PQ$. Півпряма PM : $A_1 = 0; A_2 > 0$ — розв'язок стійкий, але не асимптотично.

Півпряма PQ : $A_2 = 0$; $A_1 > 0$ — розв'язок стійкий. Півпряма PN : $A_2 = 0$; $A_1 < 0$ — розв'язок нестійкий.

Іноді важко визначити зону, в якій розв'язки рівнянь збурення мають коливальний характер. Для цього треба, щоб підкореневий вираз (9.7) був від'ємним. Нехай

$$F = \frac{(\alpha - 2)^2}{4} + (2\alpha - 3\beta) = \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 8\alpha - 12\beta}{4};$$

$$F = \frac{(\alpha + 2)^2 - 12\beta}{4}.$$

Межа області коливальності визначається умовою $F = 0$ або

$$\beta = \frac{1}{12}(\alpha + 2)^2.$$

Останнє рівняння — це парабола з вершиною $R(-2; 0)$ і вертикальною віссю симетрії (рис. 5.12). При

$$F < 0, \beta > \frac{1}{12}(\alpha + 2)^2$$

всі розв'язки носять коливальний характер. З нерівності $\beta > \frac{1}{12}(\alpha + 2)^2$ випливає, що область коливальності є внутрішня область параболи.

ВПРАВИ. Побудувати D -області стійкості для таких характеристичних рівнянь.

- $k^3 + \alpha k^2 + \beta k + 8 = 0$.
- $k^3 + k^2 + \alpha k + \beta = 0$.
- $k^4 + \alpha k^3 + \beta k^2 + 4k + 1 = 0$.

Умова Вишнеградського. Вишнеградський сформулював умову стійкості нульового розв'язку системи трьох нормальних рівнянь першого порядку першого наближення або одного рівняння третього порядку. Такими системами описується рух так званого двороторного гіроскопа (див. п. 16.3). Запишемо характеристичне рівняння третього степеня

$$k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0 \quad (9.8)$$

і поставимо завдання визначення умов, накладених на коефіцієнти a_1, a_2, a_3 , при яких нульовий розв'язок буде стійким. Використаємо критерій Рауса-Гурвіца.

Складемо матрицю Рауса-Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Для стійкості достатньо, щоб

$$a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \quad (9.10)$$

Розкриємо визначник і запишемо умови стійкості у вигляді двох ВИМОГ:

$$1) a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; \quad (9.11)$$

$$2) a_1 a_2 - a_3 > 0. \quad (9.12)$$

Умову 2) можна записати у вигляді

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} > 1. \quad (9.13)$$

Введемо позначення

$$\frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3}} = X; \quad \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2}} = Y. \quad (9.14)$$

Тоді умова (9.13) набере вигляду

$$XY > 1. \quad (9.15)$$

Якщо записати рівняння

$$XY = 1 \quad (9.16)$$

і побудувати графік (рис. 5.13) рівнобічної гіперболи (9.16), то область над гіперболою задовольняє умову (9.15), тобто є областю стійкості. Для з'ясування питання про точки самої гіперболи (9.16) покладемо в рівнянні (9.8) $k = j\omega$, тоді дістанемо

$$-j\omega^3 - a_1\omega^2 + a_2j\omega + a_3 = 0. \quad (9.17)$$

Остання рівність можлива, якщо

$$\begin{cases} a_1 - \omega^2 = 0; \\ a_3 - a_1\omega^2 = 0, \end{cases} \quad (9.18)$$

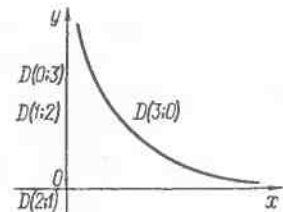


Рис. 5.13

звідки

$$a_2 = \omega^2; a_1\omega^2 = a_3.$$

Замінюючи в останньому рівнянні ω^2 на a_2 , матимемо

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} = 1. \quad (9.19)$$

Використовуючи позначення (9.14), останній вираз можна записати у вигляді (9.16): $XU = 1$. Отже, рівнянню (9.16) відповідають точки з двома уявними коренями і одним дійсним. Справді, рівняння (9.8) за умови (9.16) буде

$$k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_1 a_2 = 0;$$

$$(k + a_1)(k^2 + a_2) = 0.$$

Звідси

$$k_1 = -a_1; k_{2,3} = \pm j\sqrt{a_2}. \quad (9.20)$$

Якщо умову (9.12) записати у вигляді $a_1 a_2 - a_3 < 0$, то це буде зона нестійкості, тобто всі точки, що лежать нижче гіперболи, належать до точок нестійкості. **Умова Вишнеградського** формулюється так: якщо добуток двох додатних допоміжних параметрів X і Y більший за одиницю, то нульовий розв'язок рівняння третього порядку буде стійким.

В області стійкості характеристичне рівняння може мати корені k_1, k_2, k_3 — дійсні і від'ємні:

$$k_1 = -\alpha_1; k_2 = -\alpha_2; k_3 = -\alpha_3.$$

Цьому випадку відповідають окремі розв'язки

$$y_1 = e^{-\alpha_1 t}; y_2 = e^{-\alpha_2 t}; y_3 = e^{-\alpha_3 t},$$

а загальний розв'язок

$$y = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t} + c_3 e^{-\alpha_3 t}. \quad (9.21)$$

При $t \rightarrow \infty$ $y \rightarrow 0$, тобто маємо асимптотичну стійкість незалежно від того, лінійному чи нелінійному рівнянню відповідає рівняння першого наближення. Область зміни параметрів a_1, a_2, a_3 , для яких усі корені характеристичного рівняння дійсні і від'ємні, нази-

вається областю аперіодичного згасаючого процесу, що описується рівнянням (9.21).

Серед коренів k_1, k_2, k_3 один дійсний і два комплексно-спряжених з від'ємною дійсною частиною:

$$k_1 = -\alpha_1; k_2 = -\alpha_2 + \beta_2 j; k_3 = -\alpha_2 - \beta_2 j.$$

Цьому випадку відповідають окремі розв'язки

$$y_1(t) = e^{-\alpha_1 t}; y_2(t) = e^{-\alpha_2 t} \sin \beta_2 t; y_3(t) = e^{-\alpha_2 t} \cos \beta_2 t$$

і загальний розв'язок

$$y(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} (c_2 \sin \beta_2 t + c_3 \cos \beta_2 t). \quad (9.22)$$

Маємо також асимптотичну стійкість. Область зміни параметрів, що відповідають набору коренів виду (9.20), називається областю монотонно згасаючого коливального процесу.

Умові (9.20) відповідають частинні розв'язки

$$y_1(t) = e^{-\alpha_1 t}; y_2(t) = \sin \sqrt{a_2} t; y_3(t) = \cos \sqrt{a_2} t$$

та загальний розв'язок

$$y(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 \sin \sqrt{a_2} t + c_3 \cos \sqrt{a_2} t. \quad (9.23)$$

Область зміни параметрів a_1, a_2 , що відповідають набору коренів вигляду (9.20), називається областю періодично збіжного процесу. Умова (9.20) відповідає області стійкості лише для лінійного диференціального рівняння.

Таким чином, зону стійкості рівняння третього порядку можна поділити ще на три, а всю область першого квадранта — на чотири зони; при цьому дістанемо діаграму Вишнеградського (рис. 5.14):

- 1) зону аперіодичного згасаючого процесу;
- 2) зону монотонно згасаючого коливального процесу;
- 3) зону періодично збіжного процесу;
- 4) зону нестійкого (розбіжного) процесу.

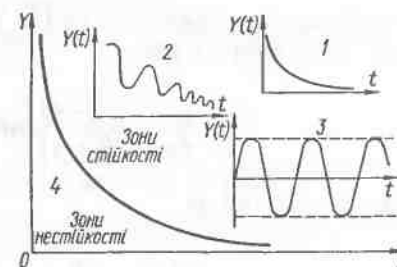


Рис. 5.14

§ 10. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ СИСТЕМИ ДВОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Поняття особливих точок введено в § 3. Розглянемо систему (3.9) і позначимо в ній $y_1 = x$; $y_2 = y$, а f_1 і f_2 через P і Q . Тоді системи (3.9) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y); \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = P(x, y); \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (10.1)$$

Нагадаємо, що P і Q — нелінійні функції щодо x , y . Система (10.1) є узагальненням такої системи. Нехай матеріальна точка одичної маси рухається по осі x під дією сили $f(x, \dot{x})$, яка залежить як від положення точки, так і від її швидкості. Тоді за другим законом Ньютона маємо

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (10.2)$$

Запишемо це рівняння у вигляді системи, вважаючи $\dot{x} = y = v$. Тоді

$$\dot{x} = y = v; \quad \dot{y} = \dot{v} = f(x, y). \quad (10.3)$$

Диференціальне рівняння (3.10) фазових траєкторій у нових позначеннях запишеться так:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (10.4)$$

Для системи (10.3)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x, y)} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.$$

Рівняння, що визначають особливі точки (3.11), тепер запишуться у вигляді

$$\begin{cases} P(x, y) = 0; \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad (10.5)$$

для системи (10.3)

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0; \\ y = v = 0, \end{cases} \quad (10.6)$$

тобто

$$f(x) = 0. \quad (10.7)$$

Отже, особливі точки системи (10.3) лежать на осі і відповідають положенню рівноваги (оскільки $v = 0$). Те саме стосується і системи (10.5). Однак на осі x є також регулярні точки, тобто точки $y = v = 0$, а $f(x, 0) \neq 0$. У цих точках $\frac{dx}{dy} = 0$ або $\frac{dy}{dx} = \infty$. Отже, фазові траєкторії, що проходять через регулярну точку осі x , перетинають вісь x під прямим кутом. Дотична до фазової траєкторії в регулярній точці осі x паралельна осі y . В усіх інших регулярних точках фазова траєкторія не може мати дотичної, паралельної осі y . Зауважимо також, що для системи (10.3) зображується точка (рис. 5.15) по фазовій траєкторії у верхній півплощині проходить у напрямі зростання $x(t)$, а в нижній — спадання.

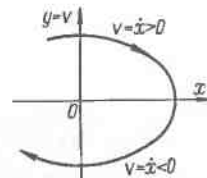


Рис. 5.15

Повернемося до загального випадку. Нехай точка $A(a_1, a_2)$ задовольняє систему (10.5), тоді ця точка є особливою.

Дослідимо характер фазових траєкторій в околі особливої точки $A(a_1, a_2)$. Для цього покладемо

$$x = a_1 + z_1; \quad y = a_2 + z_2,$$

тобто перенесемо початок системи координат x, y в точку $A(a_1, a_2)$. Розвинемо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ у ряд Тейлора в околі точки $A(a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(a_1, a_2) + \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} z_1 + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} z_2 + F(z_1, z_2); \\ Q(x, y) &= Q(a_1, a_2) + \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} z_1 + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} z_2 + \Phi(z_1, z_2), \end{aligned} \quad (10.8)$$

де $F(z_1, z_2)$, $\Phi(z_1, z_2)$ — функції, що містять z_1 , z_2 у степені, виходячи від першого.

Позначимо

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} = a_{11}; \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} = a_{12}; \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} = a_{21}; \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{\substack{x=a_1 \\ y=a_2}} = a_{22}. \quad (10.9)$$

Тепер система (10.1) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + F(z_1, z_2); \\ \dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \Phi(z_1, z_2). \end{cases}$$

Для цієї системи рівняннями першого наближення будуть

$$\begin{cases} \dot{z}_3 = a_{11}z_3 + a_{12}z_4; \\ \dot{z}_4 = a_{21}z_3 + a_{22}z_4. \end{cases} \quad (10.10)$$

Якщо система рівнянь (10.10) має єдиний розв'язок, то він у першому наближенні описує інтегральну криву системи (10.1). Звідси і назва: **система рівнянь першого наближення**. Диференціальне рівняння фазових траєкторій першого наближення має вигляд

$$\frac{dz_3}{dz_4} = \frac{a_{11}z_3 + a_{12}z_4}{a_{21}z_3 + a_{22}z_4} \quad \text{або} \quad \frac{dz_4}{dz_3} = \frac{a_{21}z_3 + a_{22}z_4}{a_{11}z_3 + a_{12}z_4}. \quad (10.11)$$

Якщо припустити, що $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то рівняння (10.11) мають єдину особливу точку $B(0, 0)$, яку знаходимо розв'язуванням системи

$$\begin{cases} a_{11}z_3 + a_{12}z_4 = 0; \\ a_{21}z_3 + a_{22}z_4 = 0. \end{cases}$$

Усі інші точки фазової площини z_1 , z_2 регулярні. Отже особлива точка $B(0, 0)$ є такою, що в її околі немає інших особливих точок. Така особлива точка дістала назву **ізолюваної**.

Таким чином, у результаті лінеаризації системи (10.1) в систему (10.10) особлива точка $A(a_1, a_2)$ перейшла в ізолювану особливу

точку. Нам треба розв'язати (10.11). Для цього знайдемо розв'язок системи (10.10) у вигляді

$$z_3 = \alpha e^{kt}; \quad z_4 = \beta e^{kt}. \quad (10.12)$$

Величина k задовольняє характеристичне рівняння

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (10.13)$$

Розв'язавши (10.13), знайдемо значення коренів k_1 і k_2 . Розглянемо кілька окремих випадків.

1. Вузол і сідло. Нехай корені характеристичного рівняння дійсні, різні і відмінні від нуля числа $k_1 \neq k_2$. Далі введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (10.10) у матричній формі можна записати так:

$$\dot{Z} = AZ. \quad (10.14)$$

Введемо неособливу матрицю

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

і дві нові функції $u(t)$ і $v(t)$ так, щоб

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SZ = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix};$$

тобто

$$\begin{cases} u = s_{11}z_3 + s_{12}z_4; \\ v = s_{21}z_3 + s_{22}z_4. \end{cases}$$

З $Y = SZ$ знайдемо $\dot{Y} = S\dot{Z}$; $Z = S^{-1}Y$. Тоді вихідне рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AS^{-1}Y; \quad S^{-1}\dot{Y} = AS^{-1}Y; \\ \dot{Y} &= SAS^{-1}Y. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Виберемо матрицю S так, щоб

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

З рівності (10.15) легко визначаються s_{11} , s_{12} , s_{21} , s_{22} . Тепер систему (10.15) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} \dot{u} = k_1 u; \\ \dot{v} = k_2 v. \end{cases} \quad (10.17)$$

Таким чином, система (10.15) перейшла в систему (10.17). Фазова площина z_3, z_4 перейшла у фазову площину u, v . Особлива точка $B(0;0)$ перейшла в особливу точку $C(0;0)$ на фазовій площині u, v . Заміна в (10.17) u на $-u$, v на $-v$ не змінює рівнянь, що вказує на симетрію фазових траєкторій відносно осей координат.

Розв'язок системи (10.17):

$$u = C_1 e^{k_1 t}; \quad v = C_2 e^{k_2 t}. \quad (10.18)$$

Якщо з цих рівнянь вилучити час, то дістанемо рівняння фазових траєкторій. Прологарифмуємо (10.18):

$$\begin{aligned} \ln|u| &= \ln C_1 + k_1 t; \quad t = \frac{\ln|u| - \ln C_1}{k_1}; \\ \ln|v| &= \ln C_2 + k_2 t; \quad t = \frac{\ln|v| - \ln C_2}{k_2}; \\ \frac{1}{k_1} (\ln|u| - \ln C_1) &= \frac{1}{k_2} (\ln|v| - \ln C_2); \\ \ln \left| \frac{u}{C_1} \right|^{k_2} &= \ln \left| \frac{v}{C_2} \right|^{k_1}; \quad \left(\frac{u}{C_1} \right)^{k_2} = \left(\frac{v}{C_2} \right)^{k_1}; \\ v &= C_2 C_1^{-\frac{k_2}{k_1}} u^{\frac{k_2}{k_1}} \end{aligned}$$

і позначимо $C_2 C_1^{-\frac{k_2}{k_1}} = \gamma$, тоді $v = \gamma u^{\frac{k_2}{k_1}}$ — це рівняння фазових траєкторій. Припустимо, що k_1 і k_2 мають однакові знаки і $|k_2| > |k_1|$, тоді

рівнянню фазових траєкторій відповідають криві параболічного типу (справжні параболи матимемо при $\frac{k_2}{k_1} = 2$). Якщо $|k_2| < |k_1|$, то можна поміняти ролями u і v , матимемо також криві параболічного типу. Розглянемо знаки k_1 і k_2 .

1а. Нехай $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Тоді з (10.18) при $t \rightarrow \infty$ $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$. Позначимо швидкість зображувальної точки v_n . Тоді

$$v_n = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} = \sqrt{k_1^2 u^2 + k_2^2 v^2}, \quad v_n \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$, тобто всі фазові траєкторії входять в особливу точку, а зображувальна точка по всіх траєкторіях прямує до особливої точки. Така особлива точка дістала назву **стійкого вузла** (рис. 5.16, а). Маємо асимптотичну стійкість.

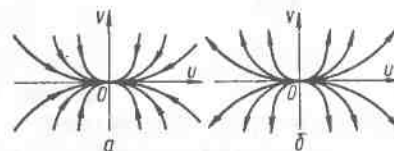


Рис. 5.16

1б. Нехай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Тоді з (10.18) $u \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Хоча всі фазові траєкторії мають параболічний вигляд і входять в особливу точку, однак зображувальна точка від особливої точки віддаляється. Маємо нестійкість. Така особлива точка дістала назву **нестійкого вузла** (рис. 5.16, б).

У випадку $|k_2| < |k_1|$ фазові траєкторії торкатимуться не осі u , а осі v . З рівнянь (10.17) видно, що у випадку стійкого вузла фазова швидкість напрямлена по дотичній до вузла, а у випадку нестійкого вузла — від вузла.

Відмітимо також, що серед фазових траєкторій в околі вузла завжди є прями.

1в. Припустимо, що k_1 і k_2 мають протилежні знаки. Нехай для певності $k_1 < 0 < k_2$.

Розглянемо першу чверть системи координат u, v . Як видно з рівняння (10.17), проекція швидкості зображувальної точки, що лежить на додатній півосі u , напрямлена до початку координат, а точки, що лежить на додатній осі v , — напрямлена від початку координат.

Фазові траєкторії, у яких $\frac{k_1}{k_2} < 0$, дістали назву кривих гіперболічного типу (справжню гіперболу матимемо, якщо $k_1 = 1$, $k_2 = -1$).

Для другої чверті $\dot{u} > 0, \dot{v} > 0$, третьої чверті $\dot{u} > 0, \dot{v} > 0$, четвертої чверті $\dot{u} < 0, \dot{v} < 0$. За цими даними будуємо фазову картину (рис. 5.17), така фазова картина і особлива точка називаються **сідлом**.

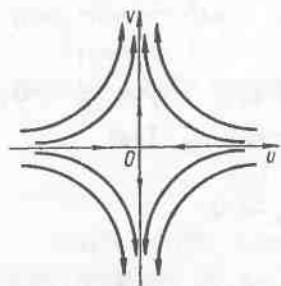


Рис. 5.17

Серед фазових траєкторій в околі сідла є також прямі. При цьому для тих фазових траєкторій, які є істинними гіперболами, ці прямі є асимптотами. Рівняння асимптот сідла одержали з (10.12) і (10.13) у вигляді

$$z_4 = \frac{\beta}{\alpha} z_3,$$

де $\beta = k - a_{11}; \quad \alpha = a_{12}; \quad z_3 = x - a_1;$
 $z_4 = y - a_2$. Через це фазові траєкторії типу

прямих в околі особливої точки типу сідла дістали назву асимптотичних.

Г. Розглянемо тепер випадок кратних коренів $k_1 = k_2 \neq 0$. Тоді розв'язки (10.18) запишуться у вигляді

$$u = c_1 e^{kt}; \quad v = c_2 t e^{kt}; \quad v = \gamma t u; \quad \gamma = \frac{c_2}{c_1}.$$

При фіксованому значенні t фазовими траєкторіями будуть прямі, які входять у початок координат — особливу точку. При $k_1 = k_2 < 0$ ця особлива точка стійка, а при $k_1 = k_2 > 0$ — нестійка. Прямі $v = \gamma t u$ не є асимптотами, тому ця особлива точка належить до особливих точок типу вузла — відповідно стійкого і нестійкого.

2. Фокус і центр. Припустимо, що k_1 і k_2 — комплексні числа: $k_1 = \alpha + j\beta, \quad k_2 = \alpha - j\beta$; тоді окремі розв'язки системи (10.10) можна записати у вигляді

$$z_{13} = \alpha_1 e^{\alpha t} \cos \beta t; \quad z_{14} = \beta_1 e^{\alpha t} \cos \beta t;$$

$$z_{23} = \alpha_2 e^{\alpha t} \sin \beta t; \quad z_{24} = \beta_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

а загальний

$$z_3 = e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \alpha_1 \cos \beta t + \bar{C}_2 \alpha_2 \sin \beta t) = e^{\alpha t} A_1 \cos(\beta t + \gamma);$$

$$z_4 = e^{\alpha t} (\bar{C}_1 \beta_1 \cos \beta t + \bar{C}_2 \beta_2 \sin \beta t) = e^{\alpha t} A_2 \sin(\beta t + \gamma). \quad (10.19)$$

Завдання полягає у вилученні t з рівнянь (10.19). Для цього знайдемо

$$\frac{z_4}{z_3} = \frac{A_2}{A_1} \operatorname{tg}(\beta t + \gamma) \quad \text{або} \quad \frac{A_1 z_4}{A_2 z_3} = \operatorname{tg}(\beta t + \gamma).$$

Покладемо $\frac{A_1 z_4}{A_2 z_3} = \operatorname{tg} \varphi$, тоді

$$\varphi = \beta t + \gamma + \pi n, \quad \text{де } n = \overline{0, \infty},$$

звідки

$$t = \frac{\varphi - \gamma - \pi n}{\beta}.$$

З (10.19) знайдемо $\frac{z_3}{A_1}$ і $\frac{z_4}{A_2}$:

$$\frac{z_3}{A_1} = e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma); \quad \frac{z_4}{A_2} = e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma).$$

Піднесемо $\frac{z_3}{A_1}$ і $\frac{z_4}{A_2}$ до квадрата і додамо, позначивши суму квадратів $r^2(t)$:

$$r^2(t) = \frac{z_3^2}{A_1^2} + \frac{z_4^2}{A_2^2} = e^{2\alpha t}; \quad r(t) = e^{\alpha t}.$$

Вважаючи φ відомим, можна записати

$$r(\varphi) = e^{\frac{\alpha}{\beta}(\varphi - \gamma - \pi n)} = e^{-\frac{\gamma \alpha}{\beta}} e^{-\frac{\pi n \alpha}{\beta}} e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi}.$$

Позначивши $e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\gamma + \pi n)} = A_n$, матимемо

$$r(\varphi) = A_n e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi}.$$

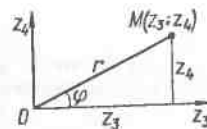


Рис. 5.18

Останній вираз можна подати в полярних координатах r і φ (рис. 5.18) як рівняння логарифмічної спіралі. Позначимо $\frac{\alpha}{\beta} = a$. Тоді при $a < 0$ спіралі асимптотично наближаються до особливої точки. Це затухаючі коливання.

Особлива точка в цьому разі називається **стійким фокусом** (рис. 5.19,а). При $a > 0$ спіралі асимптотично віддаляються від особливої точки. Маємо коливання з нескінченно зростаючою амплітудою. Особлива точка у цьому разі називається **нестійким фокусом** (рис. 5.19,б).

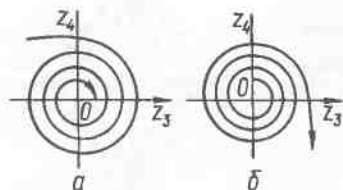


Рис. 5.19

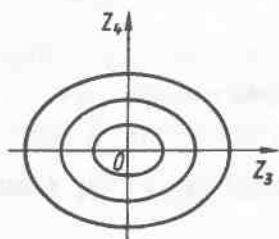


Рис. 5.20

Важливий супротивний висновок: якщо в системі спостерігається картина, зображена на рис. 5.20, то в системі є гармонічні коливання. Через центр фазові траєкторії не проходять.

Приклади. 1. Знайти особливі точки і побудувати фазові траєкторії системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 3x; \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases} \quad (10.20)$$

Розв'язання. Задано систему, аналогічну системі (10.1), але лінійну. Система (10.5) в цьому разі має вигляд

$$\begin{cases} y - 3x = 0; \\ x - 3y = 0. \end{cases} \quad (10.21)$$

Визначник системи (10.21)

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

Тепер нехай $\alpha = 0$. Тоді з (10.19) $\frac{z_3^2}{A_1^2} + \frac{z_4^2}{A_2^2} = 1$, тобто рівнянням фазової траєкторії є рівняння еліпса. Оскільки A_1, A_2 довільні, то на фазовій площині буде сім'я концентричних еліпсів (рис. 5.20). Якщо $A_1 = A_2 = A$, то в околі особливої точки фазовими траєкторіями будуть кола $z_3^2 + z_4^2 = A^2$. Особлива точка у цьому разі називається **центром**. Системи рівнянь, у яких є особлива точка типу центр, називаються консервативними. У динамічних системах з особливою точкою типу центр мають місце гармонічні коливання зі сталою амплітудою.

тобто система (10.21) має єдиний розв'язок $x = 0, y = 0$; отже, особлива точка у системі (10.21) одна — $A(0; 0)$. Ця особлива точка ізольована. Система першого наближення (10.10) збігається із системою (10.20) через лінійність. Диференціальне рівняння фазових траєкторій (10.11) має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y}{y - 3x}. \quad (10.22)$$

Характеристичне рівняння (10.13) запишеться так:

$$\begin{vmatrix} -3 - k & 1 \\ 1 & -3 - k \end{vmatrix} = 0; \quad k^2 + 6k + 8 = 0; \quad k_1 = -4; \quad k_2 = -2.$$

Корені характеристичного рівняння від'ємні і різні, отже, особлива точка $A(0; 0)$ є стійким вузлом. Фазовими траєкторіями будуть криві типу парабол. Для визначення цих фазових траєкторій треба розв'язати рівняння (10.22). Розглянемо той простий випадок, коли фазовими траєкторіями будуть прямі $y = ax$. Підставимо ці значення в рівняння (10.22), дістанемо

$$a = \frac{1 - 3a}{a - 3},$$

звідки $a_1 = 1, a_2 = -1$. Отже, є дві прямі $y = x$ і $y = -x$, які є фазовими траєкторіями. Для цих прямих з умови (10.20) маємо

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x; \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x; \\ \frac{dy}{dt} = -4x; \end{cases} \quad v_n = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

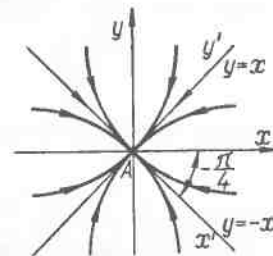


Рис. 5.21

Зображувальна точка по цих прямих рухається до особливої точки A (рис. 5.21).

Знайдемо рівняння решти фазових траєкторій, розв'язавши рівняння (10.22). Маємо рівняння з однорідною функцією нульового виміру. Покладемо

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u;$$

$$u'x + u = \frac{1 - 3u}{u - 3}; \quad u'x = \frac{1 - 3u}{u - 3} - u; \quad u'x = \frac{1 - u^2}{u - 3};$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1 - u^2}{u - 3}; \quad \frac{u - 3}{1 - u^2} du = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{u - 3}{1 - u^2} du = \int \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{u - 3}{1 - u^2} du = \ln|x|;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{u - 3}{1 - u^2} du &= \int \frac{udu}{1 - u^2} - 3 \int \frac{du}{1 - u^2} = -\frac{1}{2} \ln|1 - u^2| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 - u^2)(1 + u)^3}{(1 - u)^3} \right| = \ln \left| \frac{1 - u}{(1 + u)^2} \right|; \end{aligned}$$

$$\ln \left| \frac{1-u}{(1+u)^2} \right| = \ln |cx|; \quad \frac{1-u}{(1+u)^2} = cx; \quad \frac{1-\frac{y}{x}}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} = cx; \quad \frac{x(x-y)}{(x+y)^2} = cx;$$

$$x(x-y) = c(x+y)^2 x.$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (10.22)

$$x(x-y) = c(x+y)^2 x.$$

Оскільки рівняння (10.22) розглядається лише при відмінних від нуля x , то

$$x-y = c(x+y)^2. \quad (10.23)$$

Введемо нові змінні $x_1 = x-y$; $y_1 = x+y$. Тоді $x_1 = cy_1^2$ або $y_1^2 = \frac{1}{c}x_1$ — це сім'я парабол. Якщо згадати формули повороту системи координат в площині (див. ч. 1, гл. 1, формула (4.47))

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

і покласти $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, то маємо

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y). \quad (10.24)$$

Порівнюючи (10.23) і (10.24), маємо

$$x'\sqrt{2} = x_1; \quad y'\sqrt{2} = y_1; \quad (y')^2 = \frac{1}{c\sqrt{2}}x'.$$

Вважаючи $\frac{1}{c\sqrt{2}} = c'$, можна записати $(y')^2 = c'x'$. Отже, в системі x', y' рівняння фазових траєкторій має вигляд $(y')^2 = c'x'$. Надаючи c' різні значення, дістанемо всі фазові траєкторії. При $c' > 0$ віссю симетрії буде додатна частина осі Ax' , при $c' < 0$ — від'ємна частина осі Ax' (рис. 5.21).

2. Знайти особливі точки і побудувати фазові траєкторії системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y; \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases} \quad (10.25)$$

Розв'язання. Особлива точка визначається із системи

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0; \\ 2x - 3y = 0, \end{cases}$$

що має єдиний розв'язок $x = 0$, $y = 0$. Характеристичне рівняння (10.13) має вигляд

$$\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ 2 & -3-k \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} k^2 - k - 6 = 0; \\ k_1 = 3; k_2 = -2. \end{cases}$$

Отже, корені характеристичного рівняння дійсні і мають різні знаки. Особлива точка є сідлом. В околі сідла фазовими траєкторіями будуть криві гіперболічного типу. Для спрощення побудови фазових траєкторій розглянемо випадок, коли фазові траєкторії перетворюються на прямі, тобто в диференціальному рівнянні фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2x-3y}{4x-3y} \quad (10.26)$$

покладемо $y = ax$. Тоді

$$a = \frac{2-3a}{4-3a}; \quad 3a^2 - 7a + 2 = 0; \quad a_1 = 2; \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Отже, є дві фазові траєкторії — прямі лінії (рис. 5.22) $y = 2x$; $y = \frac{1}{3}x$. Знайдемо проекції швидкості руху зображувальної точки за цими прямими на осі координат, поклавши в (10.25)

$$y = 2x; \quad y = \frac{1}{3}x:$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x; \\ \dot{y} = -4x \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x; \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Звідси видно, що по прямій $y = 2x$ зображувальна точка рухається до особливої точки, а по прямій $y = \frac{1}{3}x$ — від неї (рис. 5.22).

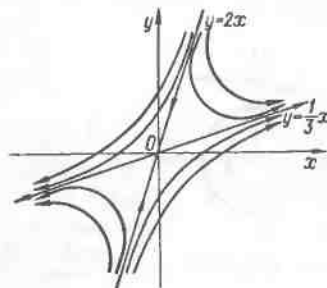


Рис. 5.22

Побудовані прямі поділили всю фазову площину на чотири області, в кожній з яких є тільки криві гіперболічного типу. Можна їх побудувати, не вдаючись до розв'язування рівняння (10.26), оскільки зазначені вище прямі є асимптотами. Можна точніше побудувати фазові траєкторії, розв'язавши рівняння (10.26). Це рівняння з однорідною функцією аналогічне рівнянню (10.22):

$$y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u; \quad \frac{du}{dx}x + u = \frac{2-3u}{4-3u}; \quad \frac{du}{dx}x = \frac{3u^2-7u+2}{4-3u};$$

$$\frac{4-3u}{3u^2-7u+2} du = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{4-3u}{3u^2-7u+2} du = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{4-3u}{3u^2-7u+2} du = \int \frac{4-3u}{3(u-2)(u-\frac{1}{3})} du = -\frac{1}{5} \left| \ln(u-2)^2 \left(u-\frac{1}{3}\right)^3 \right|;$$

$$-\frac{1}{5} \ln \left| (u-2)^2 \left(u-\frac{1}{3}\right)^3 \right| = \ln cx; \quad (u-2)^{-\frac{2}{5}} \left(u-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} = cx.$$

Таким чином, розв'язком диференціального рівняння фазових траєкторій є

$$(u-2)^{-2} \left(u-\frac{1}{3}\right)^{-3} = c^5 x^5.$$

Замінивши $u = \frac{y}{x}$, дістанемо

$$(y - 2x)^2(3y - x)^3 + c_1 = 0,$$

де $c_1 = -27c^{-5}$.

Значимо, що рух, який описує система (10.25), є нестійким.

3. Знайти особливі точки і побудувати фазові траєкторії системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

Розв'язання. Особливою точкою є початок координат $O(0; 0)$. Характеристичне рівняння

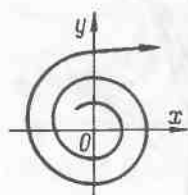


Рис. 5.23

$$\begin{vmatrix} 0 - k & 1 \\ -2 & 1 - k \end{vmatrix} = 0; \quad k^2 - k + 2 = 0; \\ k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні з додатною дійсною частиною. Отже, особлива точка є точкою типу нестійкого фокуса. Фазові траєкторії в околі особливої точки — це спірالی, що розкручуються (рис. 5.23). Аналітичний вигляд цих кривих знайдемо з розв'язку диференціального рівняння фазових траєкторій:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{y}.$$

Розв'язавши це рівняння, матимемо

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2 \frac{x}{y}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u; \quad u'x + u = 1 - 2u^{-1};$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{u - 2 - u^2}{u}; \quad -\frac{u}{u^2 - u + 2} du = \frac{dx}{x}; \quad -\int \frac{u du}{u^2 - u + 2} = \ln|cx|;$$

$$-\frac{1}{2} \ln|u^2 - u + 2| - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2}{\sqrt{7}} u = \ln|cx|;$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 2 \right| + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{y}{x} + \ln|cx| = 0.$$

Останнє рівняння і є фазовими траєкторіями.

ВПРАВИ. Знайти особливу точку і побудувати фазові траєкторії систем.

- $\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$ Відповідь. Центр.
- $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y; \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$ Відповідь. Стійкий фокус.
- $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y; \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$ Відповідь. Стійкий вузол.

§ 11. ОСОБЛИВІ ТРАЄКТОРІЇ

Для лінійних систем характер особливої точки визначає поведінку системи в усій фазовій площині, тобто при будь-яких відхиленнях від положення рівноваги. Для нелінійних систем характер особливої точки визначає поведінку системи у досить малій області, де справедливі рівняння (10.10). При розгляді поведінки фазових траєкторій для нелінійних систем на всій площині важливу роль відіграють особливі траєкторії. Є три типи особливих траєкторій.

1. **Особливі точки.** Типи цих точок розглянуто вище.

2. **Ізольовані замкнуті траєкторії.** Розглянемо систему (10.1). **Періодичний розв'язок** цієї системи рівнянь

$$x = A \cos \omega t; \quad y = B \sin \omega t$$

називається **ізольованим**, якщо у відкритому як завгодно малому δ -околі цього розв'язку на фазовій площині немає інших періодичних розв'язків. Ізольований періодичний розв'язок на фазовій площині зображається замкнутою траєкторією. Замкнута фазова траєкторія Q , що відповідає ізольованому періодичному розв'язку системи (10.1), називається **граничним циклом**, якщо в будь-якому як завгодно малому δ -околі граничного циклу не існує інша замкнута фазова траєкторія.

Граничний цикл розбиває фазову площину на дві області: зовнішню і внутрішню (рис. 5.24). Якщо зображувальна точка, рухаючись по фазових траєкторіях, розміщених у δ -околі у зовнішній і внутрішній областях граничного циклу, наближається до

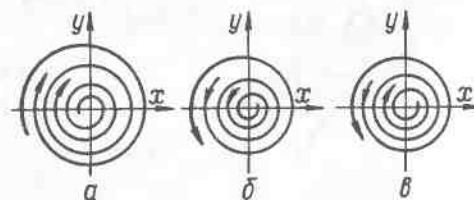


Рис. 5.24

граничного циклу, то граничний цикл стійкий (рис. 5.24,а). Якщо зображувальна точка, рухаючись по фазових траєкторіях, віддаляється від граничного циклу, то граничний цикл цілком нестійкий (рис. 5.24,б). Якщо ж зображувальна точка, рухаючись по внутрішніх фазових траєкторіях, наближається до граничного циклу, а по зовнішніх віддаляється або навпаки, то граничний цикл називається напівстійким (рис. 5.24,в). У випадку консервативних систем уся фазова площина заповнена фазовими траєкторіями, але жодна з них не є ізольованою, тобто граничним циклом, оскільки в цьому разі в будь-якому δ -околі замкнутої фазової траєкторії існує інша замкнута траєкторія.

3. Сепаратриси. Це ті фазові траєкторії, які відділяють один тип фазових траєкторій від іншого. Сепаратриси поділяють фазову площину на ряд областей, у кожній з яких є своя особлива точка. Сепаратриси особливої точки типу сідла називаються «вусами сідла». Отже, сепаратрисами сідла є асимптоти. Побудувавши особливі траєкторії і визначивши характер особливих точок, можна за фазовою картиною описати рух динамічної системи.

Перехід від області з одним видом фазових траєкторій до іншої області досить часто визначається значеннями коефіцієнтів, що входять до рівняння. Ті значення коефіцієнтів, при яких спостерігається якісна зміна фазового портрета системи, дістали назву **біфуркаційних**. Нарешті, зауважимо, що описана картина поведінки фазових траєкторій стосується будь-якої точки, розміщеної в початку координат. Якщо в ході розв'язку системи (10.1) дістали особливу точку з відмінними від нуля координатами, то слід застосувати паралельне перенесення системи координат в особливу точку.

Приклад. Побудувати фазові траєкторії нелінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(1+x^2) - 2y; \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases} \quad (11.1)$$

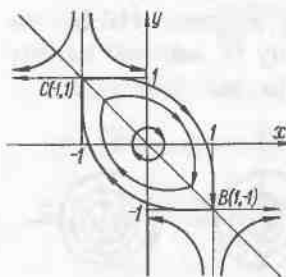


Рис. 5.25

Розв'язання. Особливі точки визначаються із системи

$$\begin{cases} -x(1+x^2) - 2y = 0; \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = -1$; $x_3 = -1$; $y_3 = 1$. Дослідимо характер особливих точок, зображених на рис. 5.25: $(0;0)$,

$B(1;-1)$, $C(-1;1)$.

а) особлива точка $(0;0)$. У цьому разі рівняння першого наближення

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -z - 2w; \\ \frac{dw}{dt} = z + w. \end{cases} \quad (11.2)$$

Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} -1-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0; \quad k^2 + 1 = 0; \quad k_{1,2} = \pm j.$$

Отже, особлива точка $(0;0)$ є центром.

б) особлива точка $B(1;-1)$. Здійснимо паралельне перенесення системи в точку B . Отже, треба записати

$$\xi_1 = x - 1; \quad \eta_1 = y + 1, \quad \text{або} \quad x = \xi_1 + 1; \quad y = \eta_1 - 1.$$

і знайдені результати підставити в систему (11.1). Тоді

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = -\xi_1(\xi_1^2 + 3\xi_1 + 4) - 2\eta_1; \\ \frac{d\eta_1}{dt} = \xi_1 + \eta_1. \end{cases}$$

Для цієї системи рівняння першого наближення

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -4\xi - 2\eta; \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi + \eta. \end{cases} \quad (11.3)$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -4-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0; \quad k_{1,2} = +\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Отже, особливою точкою $B(1;-1)$ є сідло.

в) особлива точка $C(-1;1)$. Виконаємо знову паралельне перенесення початку координат в точку $C(-1;1)$: $\xi_1 = x + 1$; $\eta_1 = y - 1$. Тоді (11.1) набере вигляду

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = -\xi_1(\xi_1^2 + 3\xi_1 + 4) - 2\eta_1; \\ \frac{d\eta_1}{dt} = \xi_1 + \eta_1. \end{cases}$$

Рівняннями першого наближення будуть

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -4\xi - 2\eta; \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi + \eta. \end{cases}$$

Отже, точка $C(-1;1)$ — також сідло. Для побудови фазових траєкторій визначимо асимптоти в околі сідла. Оскільки в околі сідла фазові траєкторії мають гіперболічний характер, то рівняння асимптот буде таке саме, як і для гіперболи:

$$\eta = \lambda \xi \quad \text{або} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \lambda.$$

З іншого боку, з (11.3) $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{-(4\xi + 2\eta)}$, тобто $\lambda = \frac{1 + \lambda}{-4 - 2\lambda}$, звідки

$$\lambda_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \quad \lambda_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}. \quad \text{Тепер побудуємо фазову картину (рис. 5.25).$$

12.1. Метод ізоклін

Одним з основних і найзагальніших методів побудови фазових траекторій є метод ізоклін.

Рівняння фазових траекторій для системи (10.1) запишеться так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y). \quad (12.1)$$

Нехай

$$F(x, y) = C \text{ або } \frac{dy}{dx} = C. \quad (12.2)$$

Рівняння (12.2) називається рівнянням ізоклін, а графік кривої $F(x, y) = C$ — ізокліною (див. гл. 1, п. 1.4).

Для побудови фазових траекторій (інтегральних кривих) рівняння (12.1) треба задатися певними значеннями $C = C_1, C_2, \dots, C_n$. Будуємо ізокліни $F(x, y) = C_1, C_2, \dots, C_n$. У точках ізоклін $F(x, y) = C_i$ будуємо поле напрямів, яке і показує приблизну картину фазової траекторії. Початку такої фазової траекторії відповідають початкові умови. Іноді зручно систему (10.1) подати в полярних координатах, що полегшує побудову траекторій. Отже, припустимо, що рівняння (10.1) записані у вигляді

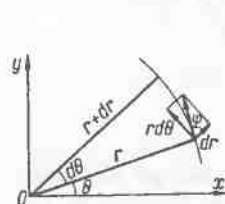


Рис. 5.26

Диференціальне рівняння фазових траекторій

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = f_1(r, \theta); \\ \frac{d\theta}{dt} = f_2(r, \theta). \end{cases} \quad (12.3)$$

Рівняння ізокліни відносно полярного радіуса запишеться (рис. 5.26) у вигляді

$$\frac{r d\theta}{dr} = r \frac{f_2(r, \theta)}{f_1(r, \theta)} = \text{tg}\varphi = \text{const},$$

де φ — кут, під яким фазова траекторія перетинає полярний радіус r . У такому вигляді рівняння ізокліни використовується, наприклад, при дослідженні так званих субгармонічних коливань.

Приклади. 1. Дано диференціальне рівняння так званого гармонічного осцилятора $\ddot{x} + k^2 x = 0$. Побудувати фазові траекторії.
Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді (10.1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -k^2 x. \end{cases} \quad (12.4)$$

Рівняння (12.1) для цієї системи

$$\frac{dy}{dx} = -k^2 \frac{x}{y}, \quad (12.5)$$

а рівняння ізокліни

$$-k^2 \frac{x}{y} = c \text{ або } y = ax,$$

де $a = -\frac{k^2}{c}$.

Ізоклінами є прямі $y = ax$, що проходять через особливу точку. Надаючи c (k^2 фіксоване) різні значення, дістанемо сім'ю ізоклін — сім'ю прямих (рис. 5.27). Візьмемо яку-небудь точку на ізокліні і проведемо в цій точці пряму з кутовим коефіцієнтом c до перетину із сусідньою ізокліною. З цієї точки проведемо пряму з кутовим коефіцієнтом цієї ізокліни і т. д. Прийемо відрізки прямих, що лежать між ізоклінами, за інтегральну криву. Побудова тим точніше відповідатиме кривій, чим ближче будуть числа c_1 і c_2 . Рівняння (12.5) не дає відповіді на запитання, в який бік і з якою швидкістю рухається у фазовій площині зображувальна точка. Рівняння (12.4) визначають фазову швидкість як за величиною, так і за напрямом. Дійсно,

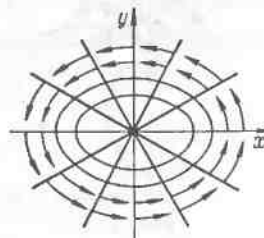


Рис. 5.27

$$\vec{v}_n = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}y + \vec{j}(-k^2x),$$

де \vec{i}, \vec{j} — одиничні вектори осей координат. Якщо взяти до уваги і напрям, то доцільно замість поля лінійних елементів розглядати векторне поле (рис. 5.27), яке характеризує не лише напрям дотичної кривої, але й напрям руху зображувальної точки. Виконана побудова дала змогу дістати уявлення про характер інтегральних кривих на фазовій площині (фазових траекторій), а отже, і про рух системи. У цьому разі фазовими траекторіями є кола.

2. Дано диференціальне рівняння динамічної системи з опором $\ddot{x} + 2hx + k^2x = 0$. Знайти рівняння ізоклін.

Розв'язання. Зведемо задане рівняння до вигляду (10.1) і знайдемо

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -2hy - k^2x. \end{cases}$$

Рівняння ізокліни в цьому разі запишеться так:

$$\frac{-2hy - k^2x}{y} = c; \quad y = -\frac{k^2}{c+2h}x, \quad (12.6)$$

або $y = \sigma x$, де $\sigma = -\frac{k^2}{c+2h}$, тобто ізоклінами і в цьому разі є прямі, що входять у початок координат.

Повернемося до загального випадку. Якщо диференціальне рівняння фазових траєкторій нелінійне, то ізоклінами будуть також криві. Опишемо ще один з можливих методів побудови інтегральних кривих за допомогою ізоклін. У загальному випадку на фазовій площині будується сім'я ізоклін, тобто криві (12.2). При різних значеннях c точки перетину ізоклін будуть особливими точками рівняння (12.1), оскільки в цих точках значення $F(x, y)$ і $\frac{dy}{dx}$ стають невизначеними і, отже, точки перетину

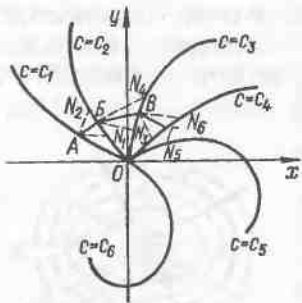


Рис. 5.28

ізоклін можна прийняти за положення рівноваги вихідної динамічної системи (рис. 5.28). Візьмемо тепер яку-небудь точку A на ізокліні, для якої $c=c_1$, і проведемо через неї пряму з кутовим коефіцієнтом c_1 до перетину з ізокліною $c=c_2$. Потім проведемо через цю саму точку пряму з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює c_2 , до перетину її з ізокліною $c=c_2$.

На рис. 5.28 ці прямі зображено штриховою лінією. Точки перетину штрихових ліній, що виходять з точки A , з ізоклінами позначимо через N_1 і N_2 . Поділимо криву N_1N_2 на дві рівні частини. Позначимо точку по-

ділу буквою B . Відрізок AB прийемо за відрізок інтегральної кривої між розглядуваними ізоклінами. Для точнішої побудови цієї ділянки інтегральної кривої значення c_1, c_2 треба вибрати якомога ближче один до одного. Далі побудова аналогічна викладеному вище, з тією лише різницею, що за вихідну береться точка B (рис. 5.28).

Як випливає з викладеного, метод ізоклін є наближеним методом інтегрування диференціального рівняння фазових траєкторій. Однак метод ізоклін може бути з успіхом використаний для строгих доведень різних пропозицій, що стосуються фазових траєкторій.

Зауваження. Метод ізоклін в поданому викладі виключає з розгляду напрями, паралельні осі y . Щоб цього уникнути, зручно разом з рівнянням $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{F(x, y)} = \psi(x, y).$$

3. Дослідити нелінійні коливання математичного маятника за наявності в'язкого тертя.

Розв'язання. Диференціальне рівняння руху запишеться так:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 \sin x = 0, \quad h > 0, \quad k^2 > 0,$$

де x — кут відхилення маятника від положення рівноваги. Вводячи $\dot{x} = y$, дістанемо два рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -2hy - k^2 \sin x. \quad (12.7)$$

Диференціальне рівняння фазових траєкторій має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2hy - k^2 \sin x}{y}.$$

Особливі точки цього рівняння знайдемо з умови

$$-2hy - k^2 \sin x = 0; \quad y = 0,$$

або $\sin x = 0$. Звідси абсциси особливих точок

$$x_0 = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \dots; \pm n\pi; \dots$$

Обмежимося розглядом трьох особливих точок: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = -\pi$. Оскільки x є кутовою координатою, картина на фазовій площині через кожні 2π повторюється. Розглянемо першу точку $A(0; 0)$. Рівняння першого наближення дістанемо з (12.7):

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2; \quad \frac{dz_2}{dt} = -2hz_2 - k^2z_1.$$

Характеристичне рівняння системи (характеристичне число позначено λ):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k^2 & -2h-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}, \quad h > 0.$$

Корені мають від'ємну дійсну частину, отже, рух буде стійким. При різних h і k (більших за нуль) особливими точками можуть бути: стійкий вузол при $h \geq k$ і стійкий фокус при $h < k$. Розглянемо другу точку $B(\pi; 0)$. Виконаємо паралельне перенесення системи координат в точку B : $\xi_1 = x - \pi$; $\eta_1 = y$ і підставимо в (12.7)

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \eta_1; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = -2h\eta_1 + k^2 \sin \xi_1. \quad (12.8)$$

Рівняння першого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta; \quad \frac{d\eta}{dt} = -2h\eta + k^2\xi. \quad (12.9)$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k^2 & -2h-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{aligned} \lambda^2 + 2h\lambda - k^2 &= 0; \\ \lambda_{1,2} &= -h \pm \sqrt{h^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Отже, при $h > 0$ ця особлива точка є сідлом. В цій точці рівновага нестійка, оскільки є один корінь $\lambda_2 = \sqrt{h^2 + k^2} - h > 0$.

В околі цієї точки фазові траєкторії мають гіперболічний тип. Розглянемо третю точку $C(-\pi; 0)$. Виконаємо паралельне перенесення системи координат в точку C : $\xi_1 = x + \pi$; $\eta_1 = y$. Тоді рівняння (12.7) запишемо у вигляді

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \eta_1; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = -2h\eta_1 + k^2 \sin \xi_1. \quad (12.10)$$

Система (12.10) збігається із системою (12.8), а отже, особлива точка $C(-\pi; 0)$, як і точка $B(\pi; 0)$, є сідлом. Рівняння ізоклін для всіх випадків запишеться у вигляді

$$\frac{-2hy - k^2 \sin x}{y} = c, \quad \text{або} \quad y = -\frac{k^2}{c + 2h} \sin x, \quad c = \text{const},$$

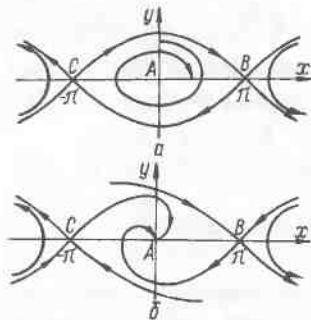


Рис. 5.29

тобто ізоклінами є криві типу синусоїд. Дотичні до фазових траєкторій будуть вертикальні в точках, розміщених на осі x , і горизонтальні на кривій

$$y = -\frac{k^2}{2h} \sin x \quad \left(\frac{dy}{dx} = 0 \right) \quad \text{— рівняння ізокліни}$$

$$y = -\frac{k^2}{2h} \sin x.$$

Тепер можна побудувати якісну картину розміщення фазових траєкторій. При цьому доведеться розглянути два окремих випадки: 1) $h < k$; 2) $h > k$. У першому випадку навколо особливої точки $A(0; 0)$ маємо спіраль, що закручується, а навколо особливих точок $B(\pi; 0)$; $C(-\pi; 0)$ — сідла. Тому картина

фазових траєкторій матиме вигляд, показаний на рис. 5.29,а.

У другому випадку особлива точка $A(0; 0)$ є вузлом, а решта особливих точок — сідлами. Картина фазових траєкторій подана на рис. 5.29,б, з якої можна вивести, що періодичних рухів у системі не буде — немає замкнутих фазових траєкторій.

12.2. Метод Льєнара

Метод Льєнара є графічним методом побудови фазових кривих для нелінійних рівнянь з дисипативною функцією $\varphi_1(\dot{x})$:

$$\ddot{x} + \varphi_1(\dot{x}) + k^2 x = 0.$$

Введемо заміну $\tau = kt$, тоді

$$\dot{x} = k \frac{dx}{d\tau}; \quad \ddot{x} = k^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2},$$

і рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0,$$

де

$$\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{k^2} \varphi_1\left(k \frac{dx}{d\tau}\right).$$

Покладемо

$$\frac{dx}{d\tau} = y; \quad \frac{dy}{d\tau} = -\varphi(y) - x.$$

Диференціальне рівняння фазових траєкторій має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - x}{y}. \quad (12.11)$$

Побудуємо на фазовій площині криву $x = -\varphi(y)$. Візьмемо на цій самій площині деяку точку P з координатами x, y (рис. 5.30). Проведемо з цієї точки пряму, паралельну осі Ox до перетину з кривою $x = -\varphi(y)$. Позначимо точку перетину буквою M . З точки M опустимо перпендикуляр MN на вісь Ox . А оскільки відрізок $MP = x - [-\varphi(y)] = x + \varphi(y)$, то тангенс кута нахилу відрізка NP до осі Ox дорівнює

$$\text{tg} \alpha = \frac{PL}{MP} = \frac{y}{x + \varphi(y)}.$$

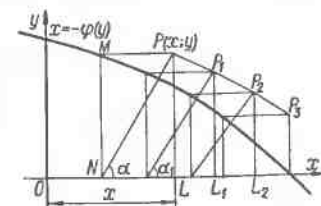


Рис. 5.30

Отже, згідно з (12.11) дотична до фазової траєкторії, що проходить через точку P , перпендикулярна до відрізка NP . Таким чином, фазову траєкторію можна побудувати так: через точку P провести відрізок, перпендикулярний до відрізка NP , на ньому взяти нову точку P_1 і визначити напрям дотичної до кривої зазначеним вище способом і т. д. У результаті дістанемо ламану лінію, яка тим ближче до інтегральної кривої, чим менші відрізки ламаної лінії (рис. 5.30).

Розглянемо приклад впливу сили сухого тертя на гармонічний осцилятор, коли побудова Льенара відразу дає змогу точно побудувати фазову траєкторію.

Силу сухого тертя звичайно описує функція виду

$$\bar{T} = -\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} R, \quad (12.12)$$

де \bar{v} — швидкість; R — стала.

У випадку гармонічного осцилятора із сухим тертям рівняння запишеться у вигляді

$$x^2 + k^2 x = T_x. \quad (12.13)$$

За формулою (12.12)

$$T_x = -R \text{ при } \dot{x} = v > 0; \quad T_x = R \text{ при } \dot{x} = v < 0.$$

Рівняння (12.13) запишеться так:

$$\ddot{x} + R + k^2 x = 0 \text{ при } \dot{x} > 0; \quad \ddot{x} - R + k^2 x = 0 \text{ при } \dot{x} < 0.$$

Виконавши заміну $\ddot{x} = k^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2}$ і враховуючи, що в нашому прикладі

$$\varphi_1(\dot{x}) = \begin{cases} R & \text{при } \dot{x} > 0; \\ -R & \text{при } \dot{x} < 0, \end{cases}$$

знайдемо рівняння

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + x = 0,$$

де

$$\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{R}{k^2} \text{ при } \frac{dx}{d\tau} = y > 0;$$

$$\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = -\frac{R}{k^2} \text{ при } \frac{dx}{d\tau} = y < 0.$$

Побудуємо на фазовій площині графік функції $x = -\varphi\left(\frac{dx}{d\tau}\right) = -\varphi(y)$ і прийемо $x =$

$$= -\frac{R}{k^2} = -R_0 \text{ при } y > 0; \quad x = \frac{R}{k^2} = +R_0 \text{ при } y < 0.$$

Виконавши для будь-якої точки фазової площини, де $y > 0$, побудову Льенара, впевнюємося, що фазовою траєкторією, яка проходить через цю точку, буде коло з центром у точці O_1 . Для $y < 0$ фазовими траєкторіями будуть кола з центром у точці O_2 . Вигляд фазових траєкторій показано на рис. 5.31.

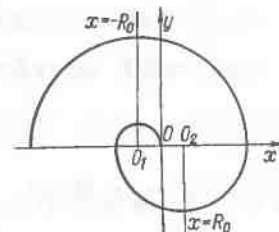


Рис. 5.31

§ 13. ФУНКЦІЯ ЛЯПУНОВА І ЇЇ ПОБУДОВА

Повернемося до рівняння (2.14) або (2.10):

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{\Phi}(t, \bar{X}) \text{ або } \dot{x}_i = \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (13.1)$$

Припустимо, що функція $\bar{\Phi}(t, \bar{X})$ неперервна і диференційовна в деякій області $\|\bar{X}\| \leq R$. Розглянемо функцію, що явно не залежить від часу, $v(\bar{X}) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Знайдемо

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (13.2)$$

$$\dot{v}(t, \bar{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (13.3)$$

Явно незалежна від часу функція $v(\bar{X})$ називається **функцією Ляпунова** для системи (13.1), якщо виконані такі умови.

1. Функція $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні першого порядку по всіх змінних для всіх $\|\bar{X}\| \leq R$.

2. Якщо $\bar{X} = 0$ ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$), то $v(0) = 0$.

3. Якщо $\bar{X} \neq 0$, то $v(\bar{X}) > 0$.

4. $\frac{dv}{dt} \leq 0$.

Приклади. 1. Знайти функцію Ляпунова для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай

$$v(x, y) = x^2 + y^2.$$

Перевіримо, чи виконуються умови 1-4.

1. Функція має неперервні частинні похідні в будь-якому колі

$$\|\bar{X}\| < R \quad (x^2 + y^2 < R^2), \quad R < +\infty.$$

2. Якщо $x = y = 0$, то $v(0) = 0$.

3. Якщо $x \neq 0$ або $y \neq 0$, то $v(\bar{X}) > 0$.

4. $\dot{v}(\bar{X}) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2xy - 2xy = 0$.

Отже, $v = x^2 + y^2$ є функцією Ляпунова для заданої системи.

Побудова функцій Ляпунова досить складна. Загальних правил для побудови функцій Ляпунова немає. Можна лише вказати, що після вибору функцій Ляпунова перевірку виконання умов 1-4 зручно починати з четвертої умови.

2. Знайти функцію Ляпунова для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4; \\ \dot{y} = x^4y. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $v(x, y) = Ax^4 + By^4$, де A і B — невизначені поки коефіцієнти

$$\frac{dv}{dt} = 4Ax^3\dot{x} + 4By^3\dot{y} = 4x^4y^4(B - A) \leq 0,$$

що можливо, якщо $B \leq A$. Покладемо $B = 1, A = 2$. Тоді

$$v(x, y) = 2x^4 + y^4.$$

Визначення функції Ляпунова вводиться в термінах знаковизначених функцій. Явно незалежна від часу функція $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(\bar{X})$ називається знаковизначеною в деякій області $D(\|\bar{X}\| \leq R)$, якщо функція набуває значення нуль лише в початку координат $v(0) = 0$, а в усіх інших точках області або тільки більше нуля, або менше нуля. У першому випадку $v(\bar{X})$ називається **явно-додатною**, в другому — **явно-від'ємною**. Внаслідок такого означення функція $v(\bar{X})$, що задовольняє умови 1-3, є явно-додатною. Функції $v(\bar{X})$, які дістали в прикладах 1 і 2, є явно-додатними.

Знаковизначені функції іноді називають **функціями Ляпунова першого роду**.

Якщо в області D виконується нерівність $v(\bar{X}) \geq 0$ або нерівність $v(\bar{X}) \leq 0$, то функція $v(\bar{X})$ називається **знакосталою** в області D . У першому випадку — **знакододатною**, а в другому — **знаковід'ємною**. Якщо ж функція $v(\bar{X})$ в області D набуває як від'ємних, так і додатних значень, то функція $v(\bar{X})$ називається **знакозмінною** в області D . Функція $v = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2$ буде знакозмінною в просторі змінних x_1, x_2, x_3 . Функція $v(\bar{X}) = x_1^2 + x_2^2$ буде знакозмінною в просторі змінних x_1, x_2, x_3 (бо вона перетворюється на нуль на осі Ox_3), а в просторі двох змінних x_1, x_2 буде явно-додатною. Функція Ляпунова першого роду, неперервна в нульовій точці, називається функцією, що має **нескінченно малу вищу границю**. В термінах ϵ, δ означення функції, що має нескінченно малу вищу границю, формулюється так: якщо для будь-якого $\epsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх

$$\|\bar{X}\| < \delta; \tag{13.4}$$

$$|v(\bar{X})| < \epsilon, \tag{13.5}$$

то $v(\bar{X})$ має нескінченно малу вищу границю. Для явно-додатних функцій умови (13.4), (13.5) запишуться у вигляді

$$\|\bar{X}\| < \delta; v(\bar{X}) < \varepsilon, \quad (13.6)$$

для явно-від'ємних функцій — у вигляді

$$\|\bar{X}\| < \delta; v(\bar{X}) > \varepsilon. \quad (13.7)$$

Звернемося до функції, що залежить, крім x_1, x_2, \dots, x_n , ще й від часу t : $w(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Нехай ця функція задовольняє такі вимоги:

1. Функція $w(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = w(t, \bar{X})$ неперервна в області $t > t_0$, $\|\bar{X}\| < R$.

2. Якщо $\bar{X} = 0$, то $w(t, 0) = 0$, $t > t_0$.

3. Якщо $w(t, \bar{X})$ задовольняє вимоги 1, 2 і набуває, крім нульових значень, значення одного знака при t_0 досить великому і R досить малому, то вона називається знакосталою: знакододатною, якщо

$$w(t, \bar{X}) \geq 0 \text{ при } \bar{X} \neq 0; \|\bar{X}\| \leq R; t > t_0 > 0,$$

знаковід'ємною, якщо

$$w(t, \bar{X}) \leq 0 \text{ при } \bar{X} \neq 0; \|\bar{X}\| \leq R; t > t_0 > 0.$$

Порівнюючи це означення з означенням знакосталості функції $v(\bar{X})$, що не залежить від часу, зауважимо, що ці означення відрізняються лише розширенням області визначення функції $w(t, \bar{X})$. Однак означення знаковизначеної функції $w(t, \bar{X})$ дуже відрізняється від означення знаковизначеної функції $v(\bar{X})$. За Ляпуновим функція $w(t, \bar{X})$ називається знаковизначеною в області $\|\bar{X}\| \leq R$, якщо існує в тій самій області явно-додатна функція $v(\bar{X})$ першого роду (що явно від часу не залежить), зв'язана з $w(t, \bar{X})$ для всіх $t \geq t_0 > 0$ і $\|\bar{X}\| \leq R$ однієї з нерівностей

$$w(t, \bar{X}) \geq v(\bar{X}) \quad (13.8)$$

або

$$-w(t, \bar{X}) \geq v(\bar{X}) [w(t, \bar{X}) \leq -v(\bar{X})]. \quad (13.9)$$

У першому випадку функція називається **явно-додатною**, у другому — **явно-від'ємною**.

Приклади. 1. Функція

$$w(t, x_1, x_2) = t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cos t$$

є явно-додатною при будь-якому R , $|x_1^2 + x_2^2| \leq R^2$ і $t > 1$.

Справді,

$$w(t, x_1, x_2) = (t-1)(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t,$$

але

$$(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t) \geq 0.$$

Тоді при $t > 1$

$$w(t, x_1, x_2) = (t-1)(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t \geq x_1^2 + x_2^2.$$

Прийнявши $x_1^2 + x_2^2 = v(x_1, x_2)$, матимемо

$$w(t, x_1, x_2) \geq v(x_1, x_2).$$

2. Кінетична енергія крутильних коливань колінчастого вала може бути записана у вигляді

$$2T = \sum_{i=1}^n [J_{0i} + a_i^2 \sin^2 \omega t] \dot{\theta}_i^2 = w(t, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n),$$

де J_{0i} , a_i , ω — сталі, а $\dot{\theta}_i$ — функція часу. Функція $w(t, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n)$ є знаковизначеною, оскільки можна вказати явно-додатну функцію Ляпунова першого роду

$$v(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n) = \sum_{i=1}^n J_i \dot{\theta}_i^2 > 0$$

таку, що при всіх $t > 0$ і будь-яких $\dot{\theta}_i$ має місце нерівність

$$w(t, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n) \geq v(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n).$$

Знаковизначена функція $w(t, \bar{X})$ називається функцією Ляпунова другого роду. Дамо тепер означення функції $w(t, \bar{X})$, що має нескінченно малу вищу границю.

Якщо обмежена функція така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при всіх $t \geq t_0$ і $\|\bar{X}\| < \delta$ виконуватиметься нерів-

ність $|\omega(t, \bar{X})| < \varepsilon$, то кажуть, що функція $\omega(t, \bar{X})$ має нескінченно малу вищу границю. У цьому разі з неперервності функції $\omega(t, \bar{X})$ по всіх змінних не обов'язково випливає, як це було для функцій $v(\bar{X})$, що функція має нескінченно малу вищу границю.

§ 14. ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

О. М. Ляпунов сформулював теореми про стійкість, виражені через функції v, w . Розглянутий в § 4–10 метод називається **першим методом Ляпунова**. Перший метод Ляпунова дає змогу розв'язати питання про стійкість за першим наближенням. Висновок про стійкість за функціями Ляпунова дістав назву **другого методу Ляпунова**. Наведемо формулювання відповідних теорем про стійкість у термінах функцій v, w для таких випадків.

а) Для системи (2.10) можна побудувати функцію Ляпунова; система в правій частині містить у явній формі час.

б) Система (2.10) автономна і для неї можна побудувати функцію Ляпунова.

в) Для системи (2.10) не можна побудувати функцію Ляпунова, але можна побудувати функції Ляпунова першого і другого роду.

Для випадку а) характерні такі теореми Ляпунова.

Теорема 1 (про стійкість нульової точки спокою). Якщо для системи (2.10) можливо побудувати функцію Ляпунова, то нульова точка спокою стійка.

Розглянуті в § 13 приклади 1, 2 мають стійку точку спокою і, як показано, для цих систем можливо побудувати функцію Ляпунова.

Теорема 2 (про асимптотичну стійкість нульової точки спокою). Якщо в кулі $\|\bar{X}\| \leq R$ для системи (2.10) можна побудувати функцію Ляпунова $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що задовольняє умови: за заданим $\beta > 0$ знайдеться, в крайньому разі, одне таке значення $\alpha > 0$, що для всіх \bar{X} , які задовольняють нерівність $\|\bar{X}\| \geq \alpha$,

$$\frac{dv}{dy} \leq -\beta, \quad (14.1)$$

то нульова точка асимптотично стійка.

Теорема 3 (про нестійкість нульової точки спокою). Якщо для системи (2.10) можна побудувати функцію

$$v(\bar{X}) = v(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

що задовольняє такі умови.

1. Функція $v(\bar{X})$ неперервна в кулі $\|\bar{X}\| \leq R$ разом зі своїми частинними похідними по всіх змінних x_1, x_2, \dots, x_n .

2. $v(0) = 0$.

3. У будь-якому околі точки $\bar{X} = 0$ знайдуться такі значення \bar{X} , в яких $v(\bar{X}) > 0$.

4. За даними $\beta > 0$ знайдеться, в крайньому разі, одне $\alpha > 0$ таке, що для всіх \bar{X} , що задовольняють нерівність $\|\bar{X}\| \geq \alpha$,

$$\frac{dv}{dt} \geq \beta,$$

то нульова точка спокою буде нестійкою.

Іншими словами, для нестійкості потрібно, щоб $\dot{v}(t, \bar{X})$ була явно додатною.

Для випадку б) розглянемо системи диференціальних рівнянь, у яких права частина явно від часу не залежить:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{або} \quad \dot{\bar{X}} = f(\bar{X}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (14.2)$$

Такі системи дістали назву **автономних**. Сформулюємо теореми Ляпунова для автономних систем.

Теорема 4 (про асимптотичну стійкість). Якщо в області $\|\bar{X}\| \leq R$ існує функція $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, підпорядкована умовам 1–3 означення функції Ляпунова, а похідна $\frac{dv}{dt}$ внаслідок (14.2) явно від'ємна, то нульова точка спокою асимптотично стійка, отже, в автономних системах для асимптотичної стійкості умова (14.1) заміниться умовою

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v}(\bar{X}) < 0. \quad (14.3)$$

Теорема 5 (про нестійкість). Якщо в області $\|\bar{X}\| \leq R$ існує функція $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що підпорядкована умовам 1–3 означення функції Ляпунова і $\dot{v}(\bar{X}) > 0$, то нульова точка спокою нестійка.

Умови нестійкості сформульовані також в такій **теоремі Четаєва**.

Теорема 6 (про нестійкість). Якщо в системі (2.10) існує функція Ляпунова $v(\bar{X})$, що задовольняє в області $\|\bar{X}\| \leq R$ такі умови.

1. $v(\bar{X})$ — неперервна.
2. У будь-якому околі нульової точки знайдуться такі значення \bar{X} , що $v(\bar{X}) > 0$.
3. За даним β знайдеться таке α , що для всіх $\|\bar{X}\| < R$ з нерівності $v(\bar{X}) \geq \alpha$ випливає $\dot{v}(t, \bar{X}) \geq \beta$, то точка спокою нестійка.

Наслідок з теореми 6. Якщо для системи (2.10) можна побудувати функцію $v(\bar{X})$, що задовольняє в області $\|\bar{X}\| \leq R$ перші дві умови теореми Четаєва і якщо $\dot{v}(t, \bar{X}) = \lambda v(\bar{X}) + v_1(t, \bar{X})$, де $\lambda = \text{const}$, а $v_1(t, \bar{X})$ — деяка невід'ємна функція, то нульова точка спокою нестійка.

Для випадку в) сформулюємо теорему Ляпунова про нестійкість в термінах функцій першого і другого роду. Розглянемо рівняння збурень (2.10), праві частини яких явно залежать від часу. В цьому разі доводиться будувати функцію Ляпунова другого роду.

Теорема 7 (про стійкість). Якщо для системи (2.10) можна побудувати знаковизначену функцію Ляпунова другого роду, похідна від якої за рівняннями збурення

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (14.4)$$

є знакосталою функцією протилежного з w знака або тотожно дорівнює нулю, то нульова точка спокою стійка.

Цю теорему можна записати так: якщо для системи (2.10) знайдуться дві функції $w(t, \bar{X})$ і $v(\bar{X})$ в області $t \geq 0$, $\|\bar{X}\| \leq R$ такі, що

$$w(t, \bar{X}) \geq v(\bar{X}) \text{ і } \frac{dw}{dt} \leq 0, \quad (14.5)$$

то нульова точка спокою стійка.

Теорема 8 (про асимптотичну стійкість). Якщо для системи (2.10) можна знайти знаковизначену функцію $w(t, \bar{X})$ Ляпунова другого роду, що допускає нескінченну малу вищу границю, похідна від якої $\frac{dw}{dt}$ за рівнянням (2.10) є знаковизначеною функцією протилежного з $w(t, \bar{X})$ знака, то нульова точка спокою асимптотично стійка. Отже, якщо для системи (2.10) можна знайти функції Ляпунова другого $w(t, \bar{X})$ і першого $v(\bar{X})$, $v_1(\bar{X})$ роду, визначені в області $t \geq t_0 > 0$ і $\|\bar{X}\| \leq R$, для яких виконуються умови

$$w(t, \bar{X}) \geq v(\bar{X}) > 0; \quad \frac{dw}{dt} \leq 0; \quad -\frac{dw}{dt} \geq v_1(\bar{X}), \quad (14.6)$$

то нульова точка спокою асимптотично стійка.

Приклади. 1. Дано систему рівнянь збурення

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y \sin t - x^5 \sin^2 t, \\ \frac{dy}{dt} = 4x \sin t - y^7 \cos^2 t. \end{cases} \quad (14.7)$$

Дослідити на стійкість точку спокою: $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання. Система (14.7) неавтономна. Для визначення стійкості можна шукати функцію Ляпунова другого $w(t, x, y)$ і першого $v(x, y)$ роду, або просто функцію Ляпунова, що задовольняє умови 1–4 (див. § 13). Виявляється, що для цієї системи існує функція Ляпунова $v(x, y) = 2x^2 + y^2$, яка умови 1–3 задовольняє. Перевіримо умову 4:

$$\frac{dv}{dt} = 4x\dot{x} + 2y\dot{y} = 4x(-2y \sin t - x^3 \sin^2 t) + 2y(4x \sin t - y^7 \cos^2 t) = -2(2x^4 \sin^2 t + y^8 \cos^2 t) \leq 0.$$

Отже, точка спокою $x = y = 0$ стійка.

2. Рівняння збуреного руху мають вигляд

$$\dot{x} = -(x - \beta^2 y)(1 - \alpha x^2 - by^2); \quad (14.8)$$

$$\dot{y} = -(y + \alpha^2 x)(1 - \alpha x^2 - by^2),$$

де $0 < \alpha < b$, $0 < \alpha < \beta$. Довести, що точка $x = 0$, $y = 0$ стійка асимптотично.

Розв'язання. Система (14.8) автономна. Нехай $v(x, y) = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2$ — явно додатна функція, для якої умови 1–3 виконуються. Перевіримо умову 4:

$$\frac{dv}{dt} = 2\alpha^2 x\dot{x} + 2\beta^2 y\dot{y} = 2\alpha^2 x[-(x - \beta^2 y)(1 - \alpha x^2 - by^2)] + 2\beta^2 y[-(y + \alpha^2 x)(1 - \alpha x^2 - by^2)] = -2(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2)(1 - \alpha x^2 - by^2) \leq 0,$$

якщо $1 - \alpha x^2 - by^2 \geq 0$.

При цьому $\frac{dv}{dt} = 0$, якщо $1 - \alpha x^2 - by^2 = 0$. Для асимптотичної стійкості за теоремою 4 має бути $\frac{dv}{dt} < 0$, що виконується, якщо $1 - \alpha x^2 - by^2 > 0$. Умову $1 - \alpha x^2 - by^2 > 0$ можна подати у вигляді $\alpha x^2 + by^2 \leq 1$. Це рівняння еліпса з півосями $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ і $\frac{1}{\sqrt{b}}$. У внутрішній області цього еліпса $v(x, y) > 0$, $\dot{v}(x, y) < 0$ точка спокою асимптотично стійка, тобто траєкторії збуреного руху, що починаються в момент t_0 всередині еліпса, з часом $t \rightarrow \infty$ залишатимуться всередині еліпса, необмежено наближаючись до точки $x = y = 0$.

3. Задано рівняння збуреного руху:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3; \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Довести, що розв'язок $x = 0$, $y = 0$ стійкий асимптотично.

Розв'язання. Функція $v(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ і її похідна $\dot{v}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^4) < 0$ при $x, y \neq 0$ задовольняють умови теореми 4.

§ 15. СТІЙКІСТЬ У ТЕОРІЇ РЕГУЛЮВАННЯ

Регулятор — це пристрій, що забезпечує вироблення певних значень деякої величини. Сама величина називається регульованою. У системах автоматичного регулювання розрізняють об'єкт керування і керівний пристрій, або регулятор.

Наприклад, літак або судно відхиляються від заданого курсу. На літаку (судні) звичайно ставиться автоматичний пристрій для вироблення сигналу, за яким літак (судно) щоразу повертається на заданий курс. У цьому прикладі об'єктом керування буде літак (судно). Якщо розглянути автомобіль як об'єкт керування, то керуючий пристрій представлено людиною, рулем і коробкою передач. Величина, що потрапляє на об'єкт керування, називається вхідним сигналом, а величина, що визначає положення об'єкта керування, — вихідним сигналом.

Позначимо вхідний сигнал через $x(t)$, а вихідний — через $y(t)$. Автоматичну систему регулювання звичайно поділяють на ряд простих ланок, кожна з яких має свої вхідний і вихідний сигнали. Ці сигнали у системі можуть бути зв'язані послідовно і паралельно як всередині ланки (зворотний зв'язок), так і між ланками. Кожна ланка окремо має певний зв'язок між вхідною і вихідною величинами, тому

$$y(t) = A(t)x(t), \quad (15.1)$$

де $A(t)$ — деяка матрична функція чи оператор, а $x(t)$, $y(t)$ — матриці-стовпці, що визначають положення відповідного об'єкта керування і керуючого пристрою (регулятора), або вхідний і вихідний сигнали.

У багатьох практичних задачах $A(t)$ є лінійним чи нелінійним диференціальним оператором.

У разі лінійного диференціального оператора рівняння (15.1) можна записати у вигляді

$$P(D)y(t) = Q(D)x(t), \quad (15.2)$$

де $P(D)$, $Q(D)$ — многочлени від D ; D — оператор диференціювання:

$$D = \frac{d}{dt}. \quad (15.3)$$

Якщо до (15.2) приєднати нульові початкові умови, ввести простір оригіналів $x(t)$, $y(t)$ і простір зображень

$$X(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} x(t) dt; \quad Y(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} y(t) dt, \quad (15.4)$$

то в просторі зображень рівняння (15.2) можна записати

$$P(p)Y(p) = Q(p)X(p), \quad (15.5)$$

звідки

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} X(p). \quad (15.6)$$

Позначимо

$$\frac{Q(p)}{P(p)} = L(p). \quad (15.7)$$

Функція $L(p)$ називається **передаточною функцією ланки**. Якщо система регулювання складається з кількох ланок, то таких передаточних функцій буде кілька. Сукупність ланок, що визначають дану систему регулювання, називається **структурною схемою системи регулювання**.



Рис. 5.32

Побудуємо, наприклад, структурну схему системи регулювання, що забезпечує рух судна за заданою траєкторією. Система регулювання, що забезпечує рух об'єкта за заданою траєкторією, називається **системою стеження**.

На рис. 5.32 величина z задає траєкторію. Вихідний сигнал $y(t)$ надходить за зворотним зв'язком на регулятор (вхід системи), де утворюється вхідний сигнал, наприклад, у формі $x(t) = z(t) - y(t)$. Цей сигнал і надходить на об'єкт керування. Нехай об'єкт керування характеризується передаточною функцією $\frac{k_1}{L(p)}$. Призначення системи стеження полягає в тому, щоб $y(t)$ дуже мало відрізнялось від $z(t)$, тобто

$x(t)$ має бути якомога меншим. Зв'язок між $x(t)$ та $y(t)$ через передаточну функцію в просторі зображень можна записати у вигляді

$$\frac{k_1}{L(p)} X(p) = Y(p), \quad \frac{k_1}{L(p)} X(p) = Z(p) - X(p);$$

$$k_1 X(p) + L(p)X(p) = L(p)Z(p); \quad (15.8)$$

$$X(p) = \frac{L(p)}{L(p) + k_1} Z(p). \quad (15.9)$$

У просторі оригіналів $x(t) = B(t)z(t)$.

Якщо $X(p) \rightarrow 0$, то й $x(t) \rightarrow 0$, тому можна замість дослідження рівняння $x(t) = B(t)z(t)$ в просторі оригіналів дослідити рівняння (15.9) в просторі зображень, наприклад при $k_1 \rightarrow \infty$, $X(p) \rightarrow 0$ і $x(t) \rightarrow 0$. Параметр k_1 звичайно називають **коефіцієнтом підсилення системи**.

Висновок: для зменшення сили сигналу $x(t)$ треба збільшувати параметр системи k_1 .

Система стеження постійно знаходиться під дією різних факторів, що впливають на силу сигналу $x(t)$. Нехай є два сигнали $x(t)$ і $x_1(t)$ та відповідні їм зображення $X(p)$ та $X_1(p)$. Позначимо

$$x_1(t) - x(t) = \Delta x; \quad X_1(p) - X(p) = \Delta X.$$

Тоді за (15.8) маємо

$$\frac{L(p)X_1(p) = L(p)Z(p) - k_1 X_1(p)}{L(p)X(p) = L(p)Z(p) - k_1 X(p)} \quad (15.10)$$

$$L(p)\Delta X = -k_1 \Delta X$$

Рівняння (15.10) є рівнянням збурення (див. (2.9) — (2.27)). Якщо нульовий розв'язок (15.10) асимптотично стійкий, то система стеження працюватиме надійно, тобто $\lim_{p \rightarrow \infty} \Delta X = 0$ і $\lim_{p \rightarrow \infty} \Delta x(t) = 0$, а для цього достатньо, щоб рівняння

$$L(p) + k_1 = 0 \quad (15.11)$$

мало всі корені з від'ємними дійсними частинами. У цьому разі система буде стійка щодо перешкод вхідного сигналу. Вимоги зменшення $x(t)$ (збільшення k_1) і стійкості щодо перешкод, як правило, суперечливі.

Щоб запобігти суперечливості звичайно величину k_1 беруть змінною за знаком. Тоді вдається перехідний процес з якогось моменту часу перевести у ковзний режим, що не залежить від параметрів системи і величини k_1 . Такий ковзний режим дістав назву **режиму стабілізації системи**.

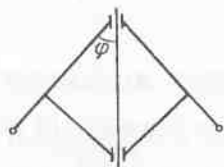


Рис. 5.33

Вчені проводять фундаментальні дослідження з теорії ковзних режимів як лінійних, так і нелінійних систем. Не маючи змоги наводити результати всіх досліджень, спинимось лише на роботі, що фактично започаткувала теорію регулювання. Маємо на увазі роботу Вишнеградського «Про регулятори прямої дії» (1876), в якій вперше були досліджені на стійкість динамічні рівняння регулятора парової машини (рис. 5.33). Система описується трьома рівняннями;

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi; \\ \dot{\psi} = n^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \psi; \\ \dot{\omega} = \frac{k^2}{J} \cos \varphi - \frac{F}{J}, \end{cases} \quad (15.12)$$

де m — маса кулі; b — характеристика тертя в підшипниках відцентрового регулятора; φ — кут відхилення стержня регулятора від вертикалі ($\varphi > 0$); n — передаточне число між регулятором і маховим колесом парової машини; J і ω — момент інерції і кутова швидкість махового колеса парової машини.

$$\dot{F} = P_2 - F_1 + k^2 \cos \varphi^*,$$

де P_2 — тиск пари; $k = \text{const} > 0$; φ^* — деяке середнє значення регульованої величини φ ; F_1 — тиск пари, що відповідає φ^* .

Робота парової машини визначається рівномірністю її ходу, тобто при сталому тиску пари P_2 або сталому F кутова швидкість

маховика ω має бути сталою, а отже, кут φ відхилення стержнів регуляторів також має бути сталим. Отже, система (15.12) матиме розв'язки

$$\omega = \omega_0; \quad \varphi = \varphi_0; \quad \psi_0 = 0.$$

Ці розв'язки легко дістанемо з рівняння (15.12), прирівнюючи його до нуля:

$$\psi = 0; \quad n^2 \omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - g \sin \varphi_0 = 0; \quad \frac{k^2}{J} \cos \varphi_0 - \frac{F}{J} = 0.$$

Звідси

$$\psi_0 = 0; \quad \cos \varphi_0 = \frac{F}{k^2}; \quad n^2 \omega_0^2 = \frac{g}{\cos \varphi_0}. \quad (15.13)$$

Розв'язки (15.13) визначають положення динамічної рівноваги системи. Завдання полягає в тому, щоб положення рівноваги було асимптотично стійким. Дістанемо рівняння збурень. Нехай незбурений розв'язок $\psi_0, \varphi_0, \omega_0$, збурений розв'язок ψ, φ, ω , різниці

$$\psi - \psi_0 = \Delta \psi; \quad \varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi; \quad \omega - \omega_0 = \Delta \omega. \quad (15.14)$$

Розв'язки $\psi, \psi_0, \varphi, \varphi_0, \omega, \omega_0$ задовольняють систему (15.12):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi; \\ \dot{\psi} = n^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \psi; \\ \dot{\omega} = \frac{k^2}{J} \cos \varphi - \frac{F}{J}; \end{cases} \quad (15.15)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_0 = \psi_0; \\ \dot{\psi}_0 = n^2 \omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - g \sin \varphi_0 - \frac{b}{m} \psi_0; \\ \dot{\omega}_0 = \frac{k^2}{J} \cos \varphi_0 - \frac{F}{J}. \end{cases} \quad (15.16)$$

Віднімаючи (15.16) від (15.15), дістанемо

$$\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 = \psi - \psi_0;$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} - \dot{\psi}_0 &= n^2 \left[\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - \omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right] - \\ &\quad - g(\sin \varphi - \sin \varphi_0) - \frac{b}{m} [\psi - \psi_0]; \\ \dot{\omega} - \dot{\omega}_0 &= \frac{k^2}{J} [\cos \varphi - \cos \varphi_0]. \end{aligned} \quad (15.17)$$

Замінивши в (15.17)

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \Delta\varphi; \quad \psi - \psi_0 = \Delta\psi; \quad \omega - \omega_0 = \Delta\omega; \\ \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 &= \Delta\dot{\varphi}; \quad \dot{\psi} - \dot{\psi}_0 = \Delta\dot{\psi}; \quad \dot{\omega} - \dot{\omega}_0 = \Delta\dot{\omega}, \end{aligned}$$

матимемо систему рівнянь збурень:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\varphi} &= \Delta\dot{\psi}; \\ \Delta\dot{\psi} &= n^2 \left[(\omega_0 + \Delta\omega)^2 \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right] - \\ &\quad - g[\sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \sin \varphi_0] - \frac{b}{m} \Delta\psi; \\ \Delta\dot{\omega} &= -\frac{k^2}{J} [\cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \cos \varphi_0]. \end{aligned} \quad (15.18)$$

Проведемо лінеаризацію рівнянь (15.18), тобто дістанемо рівняння першого наближення. Для цього вважатимемо

$$\begin{aligned} \sin \Delta\varphi &\approx \Delta\varphi; \quad \cos \Delta\varphi \approx 1; \quad \Delta\omega^2 \approx 0; \\ \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) &\approx \sin \varphi_0 + \Delta\varphi \cos \varphi_0; \\ \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) &\approx \cos \varphi_0 - \Delta\varphi \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Як наслідок матимемо систему рівнянь першого наближення

$$\begin{cases} \Delta\dot{\varphi} = \Delta\dot{\psi}; \\ \Delta\dot{\psi} = n^2 \omega_0^2 \cos 2\varphi_0 \Delta\varphi + n^2 \omega_0 \sin 2\varphi_0 \Delta\omega - g \cos \varphi_0 \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi; \\ \Delta\dot{\omega} = -\frac{k^2}{J} \Delta\varphi \sin \varphi_0. \end{cases} \quad (15.19)$$

Замінивши в другому рівнянні (15.19) $n^2 \omega_0^2$ за виразом (15.13), дістанемо

$$\Delta\dot{\psi} = \frac{g \cos 2\varphi_0}{\cos \varphi_0} \Delta\varphi + \frac{2g}{\omega_0} \sin \varphi_0 \Delta\omega - g \cos \varphi_0 \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi.$$

Характеристичне рівняння (6.3) для системи (15.19) запишеться у вигляді

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ g \left(\frac{\cos 2\varphi_0}{\cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right) & -\frac{b}{m} - \lambda & \frac{2g}{\omega_0} \sin \varphi_0 \\ -\frac{k^2}{J} \sin \varphi_0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, матимемо кубічне рівняння

$$\lambda^3 + \frac{b}{m} \lambda^2 + \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \lambda + \frac{2gk^2 \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0} = 0. \quad (15.20)$$

Це рівняння і послужило джерелом для розробки умови Вишнеградського (див. п. 9.1). Позначимо

$$\frac{b}{m} = a_1; \quad \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} = a_2; \quad \frac{2k^2 g \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0} = a_3. \quad (15.21)$$

Тоді рівняння (15.20) переписеться у вигляді (9.8):

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0.$$

Тепер умови (9.11) – (9.13) можна записати так:

$$a_1 = \frac{b}{m} > 0; \quad a_2 = \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} > 0; \quad a_3 = \frac{2k^2 g \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0} > 0; \quad (15.22)$$

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} = \frac{J\omega_0 b}{2k^2 m \cos \varphi_0} > 1. \quad (15.23)$$

Умова (15.22) виконується, якщо взяти до уваги (15.13). Умову (15.23) можна переписати у вигляді

$$\frac{Jb}{m} \frac{\omega_0}{2k^2 \cos \varphi_0} = \frac{Jb}{m} \frac{\omega_0}{2F} > 1.$$

Величина $\frac{\omega_0}{2F} = v$ називається нерівномірністю ходу машини. Тоді

(15.23) запишеться так:

$$\frac{Jb}{m} v > 1.$$

Звідси було зроблено такі висновки:

без тертя ($b = 0$) немає регулятора (стійкості);

без нерівномірності ходу машини ($v = 0$) немає регулятора;

із збільшенням маси m куль втрачається стійкість;

із зменшенням моменту інерції J втрачається стійкість.

На закінчення зауважимо, що для дослідження стійкості нелінійних систем автоматичного регулювання широко використовується другий метод Ляпунова (див. § 14).

§ 16. СТІЙКІСТЬ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

16.1. Визначення положення твердого тіла, що має одну нерухому точку

Класичним прикладом твердого тіла, що має одну нерухому точку, є іграшка дзига, в техніці — млини, колеса екіпажів, ротори двигунів, гіроскопи і т. д. Для визначення положення твердого тіла, що має одну нерухому точку, виберемо дві системи координат: нерухому і рухому — незмінно зв'язану з твердим тілом (рис. 5.34). За початок координат приймемо нерухому точку. Виберемо на осях координат одиничні вектори $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$ і $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Тоді положення твердого тіла в просторі визначатиметься положенням рухомої системи координат відносно нерухомої. Положення ж рухомої системи щодо нерухомої визначається положенням одиничних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ щодо трьох векторів $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$. Для визначення положення будь-якого одиничного вектора або будь-якого напрямку досить задати три кути, які складають цей напрям з векторами $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$.

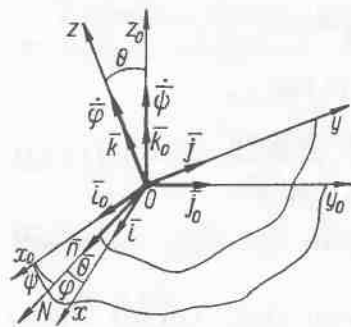


Рис. 5.34

Отже, для задання рухомої системи координат треба задати дев'ять кутів: $\left(\bar{i}, \bar{i}_0\right); \left(\bar{i}, \bar{j}_0\right); \left(\bar{i}, \bar{k}_0\right); \left(\bar{j}, \bar{i}_0\right); \left(\bar{j}, \bar{j}_0\right); \left(\bar{j}, \bar{k}_0\right); \left(\bar{k}, \bar{i}_0\right); \left(\bar{k}, \bar{j}_0\right); \left(\bar{k}, \bar{k}_0\right)$ або їхні косинуси, які утворюють L -матрицю (див. ч. 1, гл. 1, формула (4.19)). Як показано в ч. 1, гл. 1, п. 4.4, з дев'яти зазначених вище кутів лише трьома можна розпоряджатися довільно. А це означає, що тверде тіло, яке має нерухому точку, має три степеня вільності. Положення твердого тіла, що має єдину нерухому точку, визначається трьома кутами. Запропоновано безліч різних способів введення цих кутів. Найяскравіші за своїм геометричним змістом кути були введені Ейлером. Ці кути застосовуються до цього часу і називаються **кутами Ейлера**.

Вводяться кути Ейлера таким чином. Кут між додатними напрямками осей Oz_0 і Oz називається **кутом нутації**, позначається θ ; $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ або $0 \leq \theta \leq \pi$. Лінія перетину площин Ox_0y_0 і Oxy називається **лінією вузлів**. На рис. 5.34 лінія вузлів позначена ON . Слід зауважити, що лінію вузлів можна дістати як проекцію вектора \bar{i} на нерухому площину Ox_0y_0 . На лінії вузлів вибирають напрям \bar{n} , що відповідає напрямку вектора \bar{i} або обертання Oz_0 і Oz навколо лінії вузлів проти руху стрілки годинника. Кут, на який треба повернути вектор \bar{i}_0 до \bar{n} навколо осі Oz_0 так, щоб їх додатні напрямки збіглися, називається **кутом прецесії** і позначається ψ . Таким чином, за додатний кут прецесії приймають кут між додатним напрямком вектора \bar{i}_0 та проекції вектора \bar{i} на площину Ox_0y_0 . Змінюється цей кут від нуля до 2π .

Кути θ і ψ визначають положення осі Oz відносно нерухомої системи координат $Ox_0y_0z_0$. Для визначення положення осей Ox і Oy в площині Oxy вводять кут між лінією вузлів і вектором \bar{i} . Цей кут називається **кутом чистого обертання** і позначається φ . Легко помітити, що вектори кутових швидкостей $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$ лежать відповідно на осях $\bar{n}, \bar{k}_0, \bar{k}$. Тоді миттєва кутова швидкість обертання твердого тіла запишеться у вигляді

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\psi} \bar{k}_0 + \dot{\varphi} \bar{k}, \quad (16.1)$$

звідки

$$\begin{aligned} \omega_x &= p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Якщо в цих рівняннях вважати заданими θ , φ , ψ , то з їхньою допомогою диференціюванням легко знайдемо проекції абсолютної швидкості ω на рухомій осі координат. Якщо вважати θ , φ , ψ невідомими, то це буде система диференціальних рівнянь першого порядку: $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ — відомі функції. Якщо вважати ω_x , ω_y , ω_z також невідомими, то, щоб мати рівняння, з яких визначаються ω_x , ω_y , ω_z , треба скористатися теорією моментів

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_0 = \vec{M}, \quad (16.3)$$

де \vec{L}_0 — кінетичний момент; \vec{M} — момент зовнішніх сил; $\frac{d\vec{L}_0}{dt}$ — локальна похідна. Якщо за нерухомі осі x , y , z прийняти головні осі інерції, то після проектування (16.3) на ці осі дістанемо рівняння, віднесені до головних осей інерції:

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= M_x; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z &= M_y; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x &= M_z, \end{aligned} \quad (16.4)$$

де J_x , J_y , J_z — осьові моменти тіла; M_x , M_y , M_z — моменти зовнішніх сил.

Сукупність рівнянь (16.2), (16.4) називається **рівняннями Ейлера**. У цих рівняннях невідомими є θ , φ , ψ , ω_x , ω_y , ω_z , а відомими — решта величин.

Рівняння (16.2) при цьому називаються **кінематичними рівняннями Ейлера**, а (16.4) — **динамічними**. Розв'язок рівнянь Ейлера у загальному випадку невідомий. Відомий розв'язок лише в трьох окремих випадках.

1. Випадок Ейлера: всі зовнішні сили зводяться до однієї рівнодійної, лінії дії якої проходить через нерухому точку, тобто

$$M_x = M_y = M_z = 0. \quad (16.5)$$

Якщо центр тяжіння твердого тіла збігається з нерухомою точкою, то умова (16.5) виконана. У цьому разі тверде тіло рухається за інерцією.

2. Випадок Лагранжа: вважається, що еліпсоїд інерції твердого тіла для нерухомої точки є еліпсоїдом обертання, тверде тіло — важке і центр тяжіння лежить на геометричній осі обертання еліпсоїда інерції. Якщо за геометричну вісь обертання еліпсоїда інерції взяти вісь Oz , то $J_x = J_y = J$ і центр тяжіння тіла має лежати на осі Oz на деякій відстані h від точки опори O . Рівняння Ейлера (16.4) у цьому разі матимуть вигляд

$$\begin{cases} J \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J)\omega_y\omega_z = M_x; \\ J \frac{d\omega_y}{dt} + (J - J_z)\omega_z\omega_x = M_y; \\ J \frac{d\omega_z}{dt} = 0. \end{cases} \quad (16.6)$$

3. Випадок Ковалевської: еліпсоїд інерції для нерухомої точки є також еліпсоїдом обертання, тверде тіло важке: $J = J_x = J_y = 2J_z$, але центр тяжіння тіла лежить в екваторіальній площині еліпсоїда інерції.

Зазначені випадки відіграють надзвичайно важливу роль у теорії навігаційних систем.

16.2. Гіроскоп

Гіроскопами називають пристрої, що містять обертову (ротор) або коливальну частину, що дає змогу визначати обертання чи коливання основи пристрою. В морській практиці — це тверде тіло (ротор), що швидко обертається навколо деякої осі aa' (рис. 5.35), вісь aa' обертається навколо осі bb' , яка, в свою чергу, обертається навколо осі vv' . При цьому тверде тіло обертається навколо осі aa' з кутовою швидкістю, що на кілька порядків перевищує кутові швидкості обертання навколо осей bb' і vv' . Обертання навколо осі aa' називається **власним**, а вісь aa' — **головною**. Дві інші осі і площина, що їх визначає, називаються **екваторіальними**. Із опису видно, що гіроскоп — це тверде тіло, що має одну нерухому точку і три степеня вільності. Тому гіроскоп часто означають як ротор з трьома степенями вільності.

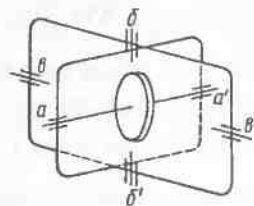


Рис. 5.35

Нерухома точка гіроскопа називається центром підвішування гіроскопа. Для визначення положення гіроскопа в просторі вводять три кути: α , β , φ — відповідно прецесії, нутації і власне обертання. Матеріальні здійснення осей bb' і vv' називаються карданными кільцями.

Введемо ці кути, для чого скористаємося такою системою координат: вісь Ox_0 поставимо на місце осі Oy_0 , а за додатний приймаємо напрям осі Oz не вгору, а вниз (рис. 5.36). Осі рухомої системи

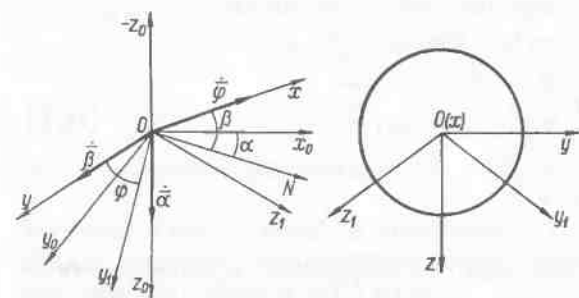


Рис. 5.36

координат x , y , z вибираємо так: вісь Ox спрямовуємо по головній осі гіроскопа, а осі y , z — в екваторіальній площині гіроскопа. При цьому осі y і z з екваторіальною площиною не зв'язані. Система $Oxyz$ у складеному русі гіроскопа не бере участі. Виберемо

ще дві осі: y_1 , z_1 , зв'язані з екваторіальною площиною. Тоді дістанемо нову систему координат Oxy_1z_1 , незмінно зв'язану з гіроскопом. Ця система координат бере участь в обертальному русі разом з гіроскопом навколо осі Ox . Кут повороту ротора навколо осі Ox або кут повороту в площині Oy_1z_1 відносно осі Ox називається **власним обертанням гіроскопа** і позначається φ . Цей кут характеризує власне обертання гіроскопа і лежить у площині між осями y і y_1 (рис. 5.36).

Кут між Ox_0 і проекцією одиничного вектора \vec{i} на площину Ox_0y_0 позначається α . Аналогом кута α в п. 16.1 є кут прецесії, але $\psi = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Кут між проекцією \vec{i} на площину Ox_0y_0 (ON) і вектором \vec{i} позначається β і вважається додатним, як звичайно, при обертанні навколо Oy вектора $O\vec{N}$ до \vec{i} проти руху стрілки годинника.

Аналогом кута β в п. 16.1 є кут нутації θ . При цьому β зв'язаний з кутом нутації $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Кути α і β тут також називаються кутами прецесії і нутації. Осі x , y , z називаються **осями Резаля**.

Для виведення рівнянь руху гіроскопа використаємо теорему про кінетичний момент у формі (16.3). Якщо за осі x , y , z взяти головні осі інерції гіроскопа і нехтувати моментами інерції карданных кілець, то

$$L_x = J_x p; \quad L_y = J_y q; \quad L_z = J_z r = Jr, \quad (16.7)$$

де J_x та $J_y = J_z = J$ — осьовий та екваторіальний моменти інерції ротора гіроскопа; $p(p_1)$, $q(q_1)$, $r(r_1)$ — проекції кутових швидкостей обертання на осі $Ox(Ox_1)$, $Oy(Oy_1)$, $Oz(Oz_1)$.

Рівняння руху гіроскопа запишуться у вигляді

$$\begin{cases} J_x \frac{dp}{dt} = M_x; \\ J_y \frac{dq_1}{dt} + J_x r_1 p - J_y p_1 r_1 = M_y; \\ J_z \frac{dr_1}{dt} + J_z p_1 q_1 - J_x q_1 p = M_z, \end{cases} \quad (16.8)$$

де

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} - \dot{\alpha} \sin \beta; \quad q = \dot{\beta}; \quad r = \dot{\alpha} \cos \beta; \\ p_1 &= -\dot{\alpha} \sin \beta; \quad q_1 = \dot{\beta}; \quad r_1 = \dot{\alpha} \cos \beta. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Звичайно $M_x \approx 0$, тоді

$$p = \text{const}; \quad \dot{\varphi} - \dot{\alpha} \sin \beta = \text{const}.$$

Тепер друге рівняння (16.8) можна записати у вигляді нелінійного рівняння щодо невідомих функцій α , β , φ :

$$J_y \ddot{\beta} + J_x \dot{\varphi} \dot{\alpha} \cos \beta + (J_y - J_x) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = M_y. \quad (16.10)$$

Нехтуючи останнім членом порівняно з рештою і позначивши $J_x \dot{\varphi} = H$, матимемо

$$J_y \ddot{\beta} + H \dot{\alpha} \cos \beta = M_y. \quad (16.11)$$

Третє рівняння (16.8) можна записати так:

$$J_z (\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) - J_x \dot{\alpha} \dot{\beta} + (J_x - J_z) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin^2 \beta = M_z. \quad (16.12)$$

Нехтуючи останнім доданком порівняно з рештою, знайдемо

$$J_z(\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) - H\dot{\beta} = M_z. \quad (16.13)$$

Вважаючи, що кутова швидкість $\dot{\phi}$ ротора відома і стала, дістанемо наближену систему диференціальних рівнянь для прецесії та нутації:

$$\begin{cases} J_y \ddot{\beta} + H\dot{\alpha} \cos \beta = M_y; \\ J_z(\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) - H\dot{\beta} = M_z. \end{cases} \quad (16.14)$$

$$(16.15)$$

Система (16.14) – (16.15) — нелінійна. Лінеаризуємо систему, тобто вважатимемо α і β малими так само, як і $\dot{\alpha}$ та $\dot{\beta}$. Тоді $\cos \beta \approx 1$; $\sin \beta \approx \beta$. Лінеаризована система матиме вигляд

$$\begin{cases} J_y \ddot{\beta} + H\dot{\alpha} = M_y; \\ J_z \ddot{\alpha} - H\dot{\beta} = M_z. \end{cases} \quad (16.16)$$

Позначимо $\dot{\beta} = \gamma$; $\dot{\alpha} = \lambda$. Тоді система (16.16) перетвориться на систему першого порядку:

$$\begin{cases} J_y \dot{\gamma} + H\lambda = M_y; \\ J_z \dot{\lambda} - H\gamma = M_z; \dot{\beta} = \gamma; \dot{\alpha} = \lambda. \end{cases} \quad (16.17)$$

У нормальній формі система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \lambda; \dot{\beta} = \gamma; \\ \dot{\gamma} = \frac{M_y - H\lambda}{J_y}; \dot{\lambda} = \frac{M_z + H\gamma}{J_y}. \end{cases} \quad (16.18)$$

Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок системи — положення динамічної рівноваги гіроскопа

$$\alpha(t) = 0; \beta(t) = 0; \gamma(t) = 0; \lambda(t) = 0.$$

Складемо систему рівнянь збуреного руху (в техніці — вільний рух)

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \lambda; \dot{\beta} = \gamma; \\ \dot{\gamma} = -\frac{H}{J_y} \lambda; \dot{\lambda} = \frac{H}{J_y} \gamma. \end{cases}$$

Складемо для цієї системи характеристичне рівняння (6.3):

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k & -\frac{H}{J_y} \\ 0 & 0 & \frac{H}{J_y} & -k \end{vmatrix} = 0;$$

$$k^2 \left(k^2 + \frac{H^2}{J_y^2} \right) = 0; \quad k_{1,2} = 0; \quad k_{3,4} = \pm j \frac{H}{J_y}.$$

У результаті маємо нестійкий розв'язок. Нестійкості у цьому разі уникнути не можна. Цей висновок зберігає силу і для випадку безінерціального гіроскопа, рівняння якого дістанемо з рівнянь (16.18), якщо з них вилучити інерційні члени

$$H\dot{\alpha} = M_y; \quad -H\dot{\beta} = M_z. \quad (16.19)$$

16.3. Двогіроскопний компас

Чутливий елемент двогіроскопного компаса являє собою кулю (гіросферу), всередині якої закріплені два зв'язаних між собою гіроскопи. Двогіроскопний компас належить до гіроскопів маятникового типу.

Головна вісь гіросфери у положенні динамічної рівноваги лежить у площині меридіана.

Диференціальні рівняння двогіроскопного компаса можна записати у вигляді

$$\begin{cases} L_r \dot{\alpha} + B\beta = L_r \omega_0 \sin \varphi; \\ \dot{\beta} - \alpha \omega_0 \cos \varphi = 0, \end{cases} \quad (16.20)$$

де ω_0 — кутова швидкість добового обертання Землі; L_r , B , φ — стали; $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — невідомі функції, що визначають положення головної осі (в азимуті і за висотою). Дослідимо систему (16.20) на стійкість. Нехай початкове положення гіросфери відповідає її положенню рівноваги, тобто α_0 , β_0 .

Припустимо, що внаслідок короткочасної дії зовнішніх сил початкове положення гіросфери змінилось і визначається $\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0$. Після цього дія сил припинилась. Положення гіросфери тепер визначається функціями $\bar{\alpha}(t)$ і $\bar{\beta}(t)$.

Якщо збурення

$$x(t) = \bar{\alpha}(t) - \alpha(t); \quad y(t) = \bar{\beta}(t) - \beta(t)$$

з часом зростатимуть, то прилад не показуватиме істинного курсу. Отже, для правильної роботи треба, щоб $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$, а це означає асимптотичну стійкість. Оскільки система (16.20) лінійна, то рівняння збуреного руху дістанемо з (16.20), відкидаючи вільні члені (див. § 4):

$$L_r \dot{x} + By = 0, \quad \dot{x} = -\frac{B}{L_r} y, \quad (16.21)$$

або

$$\dot{y} - x\omega_0 \cos \varphi = 0, \quad \dot{y} = x\omega_0 \cos \varphi.$$

Рівняння першого наближення збігаються з (16.20) (див. § 5). Складемо для системи (16.21) характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & -\frac{B}{L_r} \\ \omega_0 \cos \varphi & -k \end{vmatrix} = 0; \quad k^2 + \frac{B}{L_r} \omega_0 \cos \varphi = 0; \quad (16.22)$$

$$k_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{B\omega_0 \cos \varphi}{L_r}}. \quad (16.23)$$

Якщо вважати $\cos \varphi > 0$, то лінійна система (16.21) стійка, але не асимптотично. У цьому разі мають місце гармонічні коливання з частотою $k = \sqrt{\frac{B\omega_0 \cos \varphi}{L_r}}$. Для заспокоєння зазначених гармонічних

коливань використовують гідравлічний заспокоювач коливань.

Диференціальне рівняння кута γ відхилення від горизонту рівня рідини гідравлічного заспокоювача звичайно записується у формі

$$\dot{\gamma} + F(\beta + \gamma) = 0, \quad (16.24)$$

де $F = \text{const}$, що називається фактором перетікання.

Тоді система диференціальних рівнянь коливань гіросфери з гідравлічним заспокоювачем у лінійній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases} L_r \dot{\alpha} + B\beta + C\gamma = L_r \omega_0 \sin \varphi; \\ \dot{\beta} - \alpha \omega_0 \cos \varphi = 0; \quad \dot{\gamma} + F(\beta + \gamma) = 0, \end{cases} \quad (16.25)$$

де C — модуль (максимум) моменту заспокоювача; $C\gamma$ — момент надлишку рідини.

Дослідимо систему на стійкість. Система рівнянь збурень (вільного руху) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{B}{L_r} y - \frac{C}{L_r} z; \\ \dot{y} = x\omega_0 \cos \varphi; \\ \dot{z} = -F(y + z). \end{cases} \quad (16.26)$$

Характеристичне рівняння запишеться так:

$$\begin{vmatrix} -k & -\frac{B}{L_r} & -\frac{C}{L_r} \\ \omega_0 \cos \varphi & -k & 0 \\ 0 & -F & -k - F \end{vmatrix} = 0. \quad (16.27)$$

Розкриваючи визначник, дістанемо кубічне рівняння

$$k^3 + Fk^2 + \frac{B\omega_0 \cos \varphi}{L_r} k + \frac{F\omega_0 \cos \varphi}{L_r} (B - C) = 0. \quad (16.28)$$

Для визначення умов стійкості можна скористатися критерієм і діаграмою Вишнеградського (див. п. 9.1).

Умова (9.11) тут має вигляд

$$F > 0; \quad \frac{B\omega_0 \cos \varphi}{L_r} > 0; \quad \frac{F\omega_0 \cos \varphi}{L_r} (B - C) > 0. \quad (16.29)$$

Перші дві умови виконуються легко. Третя умова має місце, якщо $B > C$, тобто статистичний момент має бути більшим за момент опору. В техніці ця умова означає, що модуль моменту маятника має бути більшим за модуль моменту заспокоювача. Умова (9.13):

$$\frac{FB\omega_0 \cos \varphi L_r}{L_r F \omega_0 \cos \varphi (B - C)} > 1, \quad \text{або} \quad \frac{B}{B - C} > 1; \quad C > 0. \quad (16.30)$$

Ця умова означає, що лише за наявності гідравлічного заспокоювача можливий стійкий рух.

Таким чином, для забезпечення стійкого згасання коливань гіросфери двогіроскопного механізму мають бути виконані такі умови:

$$1) F > 0; 2) B > C > 0; 3) \cos \varphi > 0. \quad (16.31)$$

Саме цими умовами керуються при розрахунку параметрів гіросфери для того, щоб мати стійкий рух як за азимутом, так і за висотою.

Під час руху судна в показниках гірокомпасів з'являється похибка, яка називається швидкісною девіацією. Диференціальні рівняння руху гіросфери (16.21) з урахуванням швидкостей девіації записуються у вигляді

$$\begin{cases} L_r \dot{\alpha} + B\beta = L_r \left(\omega_0 \sin \varphi + \frac{V_E}{R_0} \operatorname{tg} \varphi \right); \\ \dot{\beta} - \left(\omega_0 \cos \varphi + \frac{V_E}{R_0} \right) \alpha = \frac{V_N}{R_0} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} L_r \dot{\alpha} + B\beta = A; \\ \dot{\beta} - D\alpha = E, \end{cases} \quad (16.32)$$

де

$$A = L_r \left(\omega_0 \sin \varphi + \frac{V_E}{R_0} \operatorname{tg} \varphi \right); \quad (16.33)$$

$$D = \omega_0 \cos \varphi + \frac{V_E}{R_0}; \quad E = \frac{V_N}{R_0}; \quad V_E = V_c \sin IK; \quad V_N = V_c \cos IK \quad (16.34)$$

(V_c — швидкість; IK — істинний курс судна; A, B, D, E — const).

Рівняння (16.32) записані з урахуванням того, що судно рухається зі сталою швидкістю V_c і має сталий курс IK . Рівняння (16.32) дістали з рівнянь (16.25) за умови, що гідравлічний заспокоювач виключено.

Дослідимо систему (16.32) на стійкість. Запишемо рівняння збурень для системи (16.32):

$$\begin{cases} L_r \dot{x} + B y = 0; \\ \dot{y} - D x = 0. \end{cases} \quad (16.35)$$

Система (16.35) з точністю до сталої збігається з системою (16.21). Тому розв'язки системи (16.35) стійкі, але не асимптотично. Система (16.35) описує гармонічні коливання.

Якщо включити в систему гідравлічний заспокоювач, то до рівнянь (16.32) додається рівняння (16.24). Система матиме асимптотично стійкі розв'язки з виконання умов (16.31), в яких третя умова заміниться на $D > 0$.

Розглянемо випадок, коли судно має змінну швидкість руху і курс змінюється. У цьому разі в показах гірокомпаса також виникають похибки, або девіації. Ці похибки називаються інерційними (оскільки є прискорення руху судна, а з ним і сили інерції) і поділяються на два роди. До інерційних девіацій (похибок) першого роду в показах гірокомпаса належать ті, що виникають під час руху судна з прискоренням \dot{V}_N за умови, що гідравлічний заспокоювач виключено. До інерційних девіацій другого роду належать ті, що внаслідок прискореного руху судна виникають від роботи гідравлічного заспокоювача.

Система диференціальних рівнянь, що описують рух головної осі гірокомпаса по азимуту (α) і висоті (β), за наявності лінійного прискорення судна \dot{V}_N , що рухається вздовж меридіана (курс $IK = 0$) за відсутності гідравлічного заспокоювача, запишеться у вигляді

$$\begin{cases} L_r \dot{\alpha} + B\beta + \frac{B}{g} \dot{V}_N = L_r \omega_0 \sin \varphi; \\ \dot{\beta} - \omega_0 \alpha \cos \varphi - \frac{V_N}{R_0} = 0. \end{cases} \quad (16.36)$$

Систему (16.36) дістали з (16.32) при $IK = 0$ з урахуванням інерції судна. Розв'язок системи в передбаченні, що функція V_N відома, стійкий, але не асимптотично. Рух, що описується системою (16.36), буде гармонічним коливанням. Якщо для V_N записати відповідне диференціальне рівняння, то матимемо інші результати. Якщо ввімкнеться гідравлічний заспокоювач, то при виконанні умов (16.31) будуть стійкими згасаючі коливання гіросфери і рідини.

Зауважимо, що в лінійному варіанті при дослідженні стійкості морських навігаційних приладів — гірогоризонткомпаса, що служить для визначення дійсної вертикалі, одногіроскопного компаса, гірокомпаса з електромагнітним керуванням та інших — нових результатів порівняно з уже розглянутими не дістанемо. Тому стійкість зазначених навігаційних приладів не розглядається.

Проте викликає незаперечний інтерес стійкість розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, що описують рух навігаційних приладів.

§ 1. ПРО ПРЕДМЕТ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

Одним з основних понять теорії ймовірностей є випадок. Випадок ніде не відіграє такої важливої ролі, як в азартних іграх, рибній ловлі тощо («мені везе», «мені не везе»). Тому не дивно, що теорія ймовірностей виникла як наука, що аналізує азартні ігри. Однак поняття «гра» ширше, ніж «азартна гра». Справді, під грою можна розуміти досить далекі від азартних ігор події: воєнна стратегія, тактика, політичні переговори, ділові виробничі стосунки тощо. Теорія ймовірностей уже давно перейшла ці початкові рамки аналізу азартних ігор, стала всеосяжною наукою про випадок, про випадкові події. Однак теорію ймовірностей можна побудувати аксіоматично без використання поняття «випадок». Першим це зробив видатний математик А. М. Колмогоров. Тут при викладі збережено поняття «випадкова подія».

Задачі математичної статистики зводяться до розробки методів збирання та обробки статистичних даних будь-яких явищ, процесів суспільного та виробничого характеру, щоб дійти наукових висновків з досвіду організації цих явищ або процесів.

Математична статистика розвивалася паралельно з теорією ймовірностей. Перші роботи з теорії ймовірностей (в основному азартних ігор) з'явилися вже в XVI–XVII ст. (Д. Кардано, Х. Гюйгенс, Б. Паскаль, П. Ферма та ін.). Подальші успіхи в теорії ймовірностей і математичній статистиці зв'язані з іменами Я. Бернуллі, К. Гаусса, А. Кетля, К. Пірсона, С. Пуассона та інших. Грунтовні дослідження в математичній статистиці і теорії ймовірностей належать російським вченим П. Л. Чебишову, О. М. Ляпунову, А. А. Маркову, О. Я. Хинчину, С. Н. Бернштейну, А. М. Колмогорову, завдяки працям яких теорія ймовірностей стала стрункою математичною наукою.

§ 2. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ І ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Події. Простір подій

Результат спостереження чи досліду далі називатимемо подією і позначатимемо великими буквами латинського алфавіту A, B, C, \dots

Для того щоб подія відбулася, необхідне виконання певного комплексу умов. Такий комплекс умов позначатимемо S . Наприклад, для вимірювання кутової швидкості гребного гвинта судна треба мати тахометр. Тут подія — вимірювання швидкості вала. Умова S — наявність тахометра.

Події поділяються на вірогідні, неможливі, випадкові, а останні — на несумісні, сумісні, різноможливі, єдино можливі, залежні тощо.

Вірогідною називається подія, яка за заданих умов обов'язково станеться в даному досліді. Наприклад, при киданні монети приймемо за подію випадання герба чи цифри. Тоді ця подія буде вірогідною. Умовою S тут є відсутність падіння монети на ребро. Число π є ірраціональним числом. Це вірогідна подія. Число 2 складається з двох одиниць — теж вірогідна подія. У ряді натуральних чисел є парні — також вірогідна подія. Комплекс умов S в останніх прикладах відповідно складається з розгляду ірраціональних чисел, поля чисел, натуральних чисел.

Неможливою називається подія, яка при виконанні даних умов S не може відбутися в даному досліді. Наприклад, із чотирьох відмінної якості деталей не можна вибрати п'ять бракованих. Умова S — деталі справді мають відмінну якість. Трьома пострілами не можна вразити п'ять мішеней.

Випадковою називається подія, яка при виконанні умов S може відбутися, а може й не відбутися. Наприклад, випадання герба чи цифри при однократному киданні монети; стрільба, коли дев'ятьма патронами треба вразити три мішені. У погану погоду відліт літака за розкладом — випадкова подія. Літак може вилетіти, а може і не вилетіти. При цьому вважається, що випадкова подія багатократно повторюється, тобто є масовою.

Говорячи про випадкову подію, маємо на увазі неможливість передбачати результат досвіду чи спостереження у масових явищах. Якщо ж у кожній події можна наперед передбачити результат досліду чи дослідження, то подія називається **детермінованою** (передбачуваною). У теорії ймовірностей вивчаються **недетерміновані**, випадкові події.

Дві випадкові події A і B називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в даному досліді. Наприклад, якщо подія A полягає у приході на лекцію, а B — у відсутності на лекції, то ці дві події несумісні. Якщо Ви прийшли на лекцію, то подія B не може відбутися. Якщо Ви граєте в монету, то випадання герба виключає випадання цифри. Дві події — випадання герба і випадання цифри — несумісні. Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються несумісними, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.

Події A і B називаються **рівноможливими**, якщо при виконанні умов S однакова вірогідність появи подій A і B . Наприклад, при однократному киданні монети рівноможливі події появи герба і цифри. Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються рівноможливими, якщо кожна з них має однакову можливість відбутися або не відбутися.

Події називаються **єдиноможливими**, якщо поява тільки однієї з них є вірогідною подією. Події появи герба чи цифри є єдино можливими. Множина єдино можливих подій називається повною групою. Наприклад, стрілець робить два постріли по мішені: події A_1 — жодного попадання, A_2 — одне попадання, A_3 — два попадання утворюють повну групу.

Отже, події A_1, A_2, \dots, A_n утворюють повну групу, якщо вони єдино можливі, тобто при випробуванні одна подія обов'язково відбудеться. Разом з тим поняття повної групи можна ввести без введення поняття єдиної можливості. Повною групою називається сукупність подій, серед яких є хоч би одна вірогідна.

Подія A називається **протилежною** події \bar{A} , якщо ці події єдино можливі і утворюють повну групу.

Можна дати й інше означення протилежних подій A і \bar{A} : \bar{A} — подія, яка полягає в тому, що подія A не відбулася. Наприклад, при одному пострілі єдино можливими є дві події: A — попадання, \bar{A} — промах.

Будь-яка сукупність подій, що складається з несумісних, рівноможливих, єдино можливих (що утворюють повну групу), називається **простором, або множиною елементарних подій**. Самі події при цьому називаються елементарними. Кожна елементарна подія в просторі елементарних подій подається точкою.

Елементарну подію часто називають випадком, а сукупність елементарних подій — схемою випадків.

Будь-яку складну подію можна уявити сукупністю елементарних подій. Наприклад, результат кожного досліду є елементарною подією. Кидання монети можна розглядати як дві елементарні події: випадання герба чи цифри. При стрільбі по мішені двома пострілами можна виділити дві події: попадання при першому пострілі і промах при другому і навпаки, обидва промахи, обидва попадання.

Наведемо приклади просторів елементарних подій.

1. При однократному киданні монети є простір елементарних подій: ω_1 (випадання герба — Г) і ω_2 (випадання цифри — Ц). Розмірність цього простору дорівнює двом — числу елементарних подій-наслідків.

2. Якщо кидати монету тричі, то елементарних подій може бути 8: ω_1 (ГГГ), ω_2 (ГГЦ), ω_3 (ГЦЦ), ω_4 (ЦЦЦ), ω_5 (ГЦГ), ω_6 (ЦГГ), ω_7 (ЦЦГ), ω_8 (ЦГЦ).

Розмірність простору тут дорівнює восьми.

3. Якщо кидати монету n разів, то число елементарних подій буде 2^n , що дорівнює розмірності простору.

4. У партії із 100 деталей є браковані. Елементарні події: немає жодної бракованої деталі, є 1 бракована деталь, ..., є 100 бракованих деталей. Тут простір елементарних подій має скінченне число наслідків.

5. Здійснюється гра в монету до випадання герба. Подія — випадання герба або цифри. Елементарними будуть події ω_1 (Г), ω_2 (ЦГ), ω_3 (ЦЦГ), ..., ω_n (ЦЦЦ...ЦГ), Тут простір елементарних подій має нескінченне число наслідків, але зчисленне, тобто елементи цього простору можна пронумерувати сукупністю цілих натуральних чисел.

6. Цього не можна сказати, якщо під елементарною подією розуміти відхилення ємності конденсатора від номіналу. Ці відхилення виражаються будь-яким дійсним числом — цілим, дробовим, ірраціональним. У цьому прикладі простір елементарних подій має нескінченне, незчисленне число наслідків. Такі простори дістали назву неперервних (незчисленних) просторів.

7. Кидають дві монети одночасно. Це подія. З яких елементарних подій вона складається? 1. Випадання двох гербів. 2. Випадання двох цифр. 3. Випадання на першій монеті герба, на другій — цифри. 4. Випадання на першій монеті цифри, на другій — герба. Таким чином, цей простір має чотири наслідки.

Простір елементарних подій позначаємо так: Ω або $\{\omega_i\}$.

Одне із завдань теорії ймовірностей полягає в тому, щоб за заданими елементарними подіями оцінити можливість відбування складної події.

2.2. Дії над подіями

Дії над подіями визначаються аналогічно тому, як визначаються дії над множинами (див. ч. 1, гл. 3, § 2).

Якщо ω_i — елементарний наслідок події A , то це записують так: $\omega_i \in A$, а якщо елементарний наслідок ω_i не означає прихід за собою події A , то це записують так: $\omega_i \notin A$ (не належить до події A).

Якщо подія A означає прихід за собою події B , то це позначають так: $A \subset B$. Наприклад, щоб стати студентом (подія B), треба на добре і відмінно скласти вступні іспити (подія A).

Якщо $A \subset B$, а $B \subset A$, то події A і B називають **еквівалентними (або рівними)**, і це записують так: $A = B$.

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають подію C , яка означає, що відбудуться події A , або B , або обидві події в одному досліді, і це записують так: $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

Якщо події A і B визначаються сукупністю елементарних подій $\{\omega_i\}$, $\{\gamma_i\}$, то при $A = \{\omega_i\}$, $B = \{\gamma_i\}$ і $C = \{\omega_i\} \cup \{\gamma_i\}$. **Добутком (перетином) подій A і B** називаються подію C , яка полягає в тому, що події A і B мають відбутися, з'явитися одночасно, це позначають так: $C = A \cap B$ або $C = AB$.

Якщо $A = \{\omega_i\}$, $B = \{\gamma_i\}$, то подія C визначається загальними елементарними подіями, що входять і в A , і в B .

Узагальненням цих операцій буде $C_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$; $C_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Різницею двох подій A і B називають подію C , яка настає тоді, коли A вже настала, а B — ні, і це записують так: $A - B = C$ або $A = B + C$.

Неможливу подію позначимо A_n , вірогідну — A_B . Тоді для двох протилежних подій A та \bar{A} маємо

$$\bar{A} + A = A_B; A \cdot \bar{A} = A_n.$$

Для несумісних подій A і B : $AB = A_n$.

Наведемо правила виконання операцій над подіями.

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $A + A = A$; | 8. $A + (BC) = (A + B)(A + C)$; |
| 2. $A + B = B + A$; | 9. $A + A_n = A$; |
| 3. $A + (B + C) = (A + B) + C$; | 10. $A \cdot A_n = A_n$; |
| 4. $AB = BA$; | 11. $A + A_B = A_B$; |
| 5. $AA = A$; | 12. $A \cdot A_B = A$; |
| 6. $A(BC) = (AB)C$; | 13. $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$; |
| 7. $A(B + C) = AB + AC$; | 14. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$; |

$$15. \bar{A}_B = A_n;$$

$$17. A \cdot \bar{A} = A_n;$$

$$16. A + \bar{A} = A_B;$$

$$18. \bar{\bar{A}} = A.$$

Ці правила легко перевіряються з використанням кругів Ейлера (див. ч. 1, гл. 3., рис. 3.3).

Далі розглядатимемо простір, або множину, елементарних подій $\{\omega_i\}$, для якого виконано такі умови. Нехай A, B, A_n — будь-які події, що визначаються підмножиною $U \subset \{\omega_i\}$. Тоді, якщо $A, B, A_n \subset U$, то

1. $A + B \subset U$;
2. $AB \subset U$;
3. $A - B \subset U$;
4. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \subset U$;
5. $A_1 A_2 A_3 \dots A_n \dots \subset U$.

6. Якщо A і B несумісні, то перетин їх — порожня множина.

Простір чи множина елементарних подій, що задовольняє зазначені умови, називається **ймовірнісним**. Розмірність такого простору може бути скінченною, нескінченною, але зчисленною і нескінченною незчисленною.

ВПРАВИ. 1. Скільки елементарних подій відбувається при п'ятикратній стрільбі по мішені? *Відповідь.* 32.

2. Скільки елементарних подій може бути при двократному киданні грального кубика? *Відповідь.* 36.

3. Нехай A, B, C — три довільні події. Знайти вираз для події D , яка полягає в тому, що відбулися хоча б дві з них. *Відповідь.* $D = ABC + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$.

4. Прилад складається з двох блоків першого типу і трьох блоків другого типу. Подія A_i — справний i -й блок першого типу, B_i — справний i -й блок другого типу. Прилад працює, якщо справний хоча б один блок першого типу і не менш ніж два блоки другого типу. Виразити подію «прилад працює» через події A_i і B_i . *Відповідь.* $C = DE$, де $D = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2 + A_1 A_2$; $E = \bar{B}_1 B_2 B_3 + B_1 \bar{B}_2 B_3 + B_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 B_2 B_3$.

5. З гармати зроблено два постріли. Подія A — влучення при першому пострілі, подія B — влучення при другому пострілі. Що означає подія $A + B$? *Відповідь.* Подія $A + B$ означає, що має місце хоча б одне попадання.

§ 3. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЙ

Поняття ймовірності подій спочатку виникло як інтуїтивне поняття. Ймовірністю події A називається кількісна оцінка можливості появи події A і позначається $P(A)$. При підході до кількісної оцінки можуть зу-

стрічатися такі випадки. Ви маєте або не маєте змоги провести дослід. У першому разі ймовірність називається **статистичною** і позначається $P^*(A)$, у другому — **класичною** і позначається $P(A)$. Може статися, що за умовами дослідів доводиться мати справу з двома подіями: оцінювати кількісно можливість появи події A за умови, що подія B вже відбулася або за допомогою дослідів, або без нього. Кількісна оцінка з використанням дослідів появи події A за умови, що подія B відбулася, називається **умовною статистичною ймовірністю** $P_B^*(A)$, якщо така оцінка здійснюється без дослідів, то **класичною умовною ймовірністю** $P_B(A)$. Таким чином, розрізняють безумовну статистичну ймовірність і безумовну класичну ймовірність, умовні статистичну і класичну ймовірності. Перейдемо до кількісної оцінки статистичної ймовірності.

Нехай провели n дослідів, у яких m разів відбулася подія A .

Тоді статистичною ймовірністю $P^*(A)$ події A називається відношення числа дослідів, за яких відбулась подія A , до загального числа всіх дослідів:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.1)$$

У дослідях статистична ймовірність коливається близько якогось сталого числа, змінюючись мало, причому тим менше, чим більше проведено дослідів. Це стало число дістало назву класичної ймовірності. Властивість статистичної ймовірності зберігати стало значення називається **властивістю стійкості**. Якщо це число від дослідів до дослідів мало змінюється, то

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Наприклад, французький природознавець Ж. Бюффон кинув монету 4040 разів. При цьому герб випав 2048 разів. Отже, статистична ймовірність випадіння герба

$$P^*(A) = \frac{2048}{4040} = 0,50693 \dots$$

Англійський математик К. Пірсон кидав монету 24 000 разів. При цьому герб випав 12 012 разів. Отже, частота випадання герба у цьому прикладі

$$P^*(A) = \frac{12\,012}{24\,000} = 0,5005 \dots$$

Зазначимо, що класична ймовірність випадання герба при киданні монети

$$P(A) = 0,5.$$

Нехай проводиться n дослідів, в яких подія A відбулася k разів, подія B — m разів, а події A і B — одночасно r разів. Умовною статистичною ймовірністю настання події $B(A)$ за умови, що подія $A(B)$ відбулася, називається відношення числа наслідків спільного настання подій A і B до числа сприятливих наслідків події $B(A)$:

$$P^*(A/B) = P_B^*(A) = \frac{r}{m}; \quad P^*(B/A) = P_A^*(B) = \frac{r}{k}. \quad (3.2)$$

Можна виділити такі властивості статистичних імовірностей:

1. $P^*(A) \geq 0$. Це очевидно, оскільки в (3.1) $m \geq 0$, $n > 0$.
2. Статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1:

$$P^*(A_B) = 1.$$

3. Якщо події A і B несумісні, то статистична ймовірність події $C = A + B$ дорівнює сумі статистичних ймовірностей подій A і B :

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B).$$

Справді, якщо при n дослідях подія A відбувається k разів, а B — m разів, то внаслідок їхньої несумісності загальне число сприятливих наслідків для A і B окремо

$$P^*(A + B) = \frac{k + m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P^*(A) + P^*(B). \quad (3.3)$$

Вираз для умовної статистичної ймовірності

$$P^*(A/B) = \frac{r}{m}$$

можна записати так:

$$P^*(A/B) = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P^*(AB)}{P^*(B)}. \quad (3.4)$$

Аналогічно

$$P^*(B/A) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P^*(AB)}{P^*(A)}. \quad (3.5)$$

4. $P^*(A_n) = 0$. Справді, $A_n + A_n = A_n$; $P^*(A_n) = P^*(A_n) - P^*(A_n) = 1 - 1 = 0$.

5. $0 \leq P^*(A) \leq 1$.

Умовна статистична ймовірність має такі самі властивості, що й безумовна статистична ймовірність.

Дамо тепер інше означення класичної ймовірності. Нехай подія A визначається множиною елементарних подій $\{\omega_i\}$. Нехай множина елементарних подій містить підмножину, для якої подія A є вірогідною. Ці елементарні події дістали назву сприятливих для події A . **Класичною ймовірністю** називається відношення числа елементарних подій, що сприяють події A , до загального числа подій. Якщо число елементарних подій, що сприяють A , — це m , а загальне число n , то

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.6)$$

Приклади. 1. Електронний пристрій складається з 5 елементів і функціонує нормально, якщо справні всі елементи. При складанні елементи пристрою вибираються з партії 1000 елементів. Будь-який з можливих C_{1000}^5 способів вибору має одну й ту саму ймовірність. У партії 950 справних і 50 несправних елементів. Подія A полягає в тому, що пристрій працює справно. Треба знайти $P(A)$. Загальне число елементарних подій дорівнює C_{1000}^5 . Елементарна подія сприяє події A тоді і тільки тоді, коли елементи вибрано з числа справних. Таким чином, число сприятливих для події A елементарних подій дорівнює C_{950}^5 (число можливих способів вибору п'яти елементів із 950). Отже,

$$P(A) = \frac{C_{950}^5}{C_{1000}^5} = \frac{950 \cdot 949 \cdot 948 \cdot 947 \cdot 946 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996} \approx 0,77.$$

2. В урну поклали три червоних, вісім чорних і дев'ять синіх куль. Яка ймовірність вийняти червону, чорну, синю кулю?

Тут маємо три події: A — вийняти червону кулю, B — вийняти чорну кулю, C — вийняти синю кулю. Отже,

$$P(A) = \frac{3}{20}; \quad P(B) = \frac{8}{20}; \quad P(C) = \frac{9}{20}.$$

Легко помітити, що формулою (3.6) можна користуватися лише тоді, коли m та n — скінченні числа. Як бути в тому разі, коли число подій, що сприяють події A , нескінченне і загальне число елементарних подій теж нескінченне. У цьому разі поняття класичної ймовірності вводиться аксіоматично.

Класичною ймовірністю $P(A)$ події A , що визначається простором елементарних подій $\{\omega_i\}$, називається числова функція, що задовольняє такі умови:

- 1) $P(\omega_i) \geq 0$;
- 2) $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) = 1$;
- 3) $P(\omega_i + \omega_j) = P(\omega_i) + P(\omega_j)$; $i, j = \overline{1, \infty}$.

Для будь-якої події A умови 1) — 3) записують так:

$$1) P(A) \geq 0; \quad (3.8)$$

$$2) P(A_n) = 1; \quad (3.9)$$

3) якщо події A і B несумісні, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (3.10)$$

Умови (3.7)–(3.10) дістали назву **аксіом теорії ймовірностей**. Ймовірність події A в аксіоматичному плані визначається як об'єктивна міра появи події A , що підлягає зазначеним аксіомам.

3.1. Зв'язок між статистичною і класичною ймовірностями

Аксіоматичне означення класичної ймовірності зручне для теорії, але не задає способу її обчислення. Такий спосіб дає означення класичної ймовірності через статистичну. Раніше було вказано на зв'язок між статистичною і класичною ймовірностями. Уточнимо цей зв'язок, уявивши класичну ймовірність як границю статистичної ймовірності.

Нехай проведено серію дослідів і визначено $P_1^*(A) = \frac{m_1}{n_1}$, де n_1 — загальне число дослідів; m_1 — число дослідів, у яких поява події A спостерігалася. Проведено також серію n_2 дослідів, у яких подія A

спостерігалася m_2 разів. Тоді можна визначити $P_2^*(A) = \frac{m_2}{n_2}$. Продовжуючи серію дослідів, можна побудувати послідовність $P_1^*(A), P_2^*(A), \dots, P_r^*(A), \dots$

Якщо існує її границя, то вона дорівнює класичній ймовірності:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_r^*(A) = P(A). \quad (3.11)$$

Наприклад, завод протягом року випускає N виробів. Відомо, що деякі з них виходять з ладу. Треба постачати споживачеві додаткову кількість виробів. Скільки їх треба? Припустимо, відома ймовірність $P(A)$ виходу з ладу виробу A . Тоді число m додаткових деталей дорівнюватиме $m = NP(A)$. Якщо ж ймовірність відома, то проводяться статистичні спостереження, досліди. Для дослідження беруть деяку кількість виробів і провадять серію досліджень, у кожному з яких визначається ймовірність P_r^* , за якою знаходять P .

3.2. Генеральна сукупність та вибірки

Припустимо, що цех випускає 1000 авторучок за день. Комісія бажає з'ясувати якість цієї продукції. Для цього досить оцінити якісно і кількісно з 1000 ручок, наприклад, 100 штук. Якісно — чи добре пише ручка, кількісно — чи додержано, наприклад, стандартних розмірів. Тут розглядаються однорідні об'єкти однієї природи. Сукупність об'єктів однієї природи в математичній статистиці називається **генеральною сукупністю**. **Вибірковою сукупністю**, або вибіркою, називається найменше число випадково вибраних об'єктів з генеральної сукупності, що забезпечують подання її властивостей.

Вибірку можна здійснювати за якісними і кількісними ознаками. Результати обстеження вибірки дають змогу дійти висновку про генеральну сукупність — у цьому особливість методів математичної статистики: по вузько обстеженому окремому факту, явищу, процесу зробити правильний висновок про явище, процес у цілому. Отже, в цьому разі класичну ймовірність замінюють статистичною.

Якщо з генеральної сукупності вибірковою сукупністю дістають так, що обстежуваний об'єкт обертається на генеральну сукупність до того, як вибирається інший об'єкт, то вибіркова сукупність нази-

вається повторною. Якщо ж усі об'єкти, вибрані з генеральної сукупності, повертаються до неї після обстеження, то вибірка буде безповторною.

Об'ємом сукупності (вибіркової чи генеральної) називається число об'єктів цієї сукупності. Вибірка називається представницькою (репрезентивною), якщо:

- 1) кожний елемент генеральної сукупності має однакову ймовірність потрапити у вибірку;
- 2) усі об'єкти, що потрапили у вибірку, мають однакову ймовірність, тобто вибрані випадково.

Розрізняють такі способи одержання вибірки:

- 1) генеральна сукупність не ділиться на групи: а) простий випадковий безповторний відбір; б) простий випадковий повторний відбір;
- 2) генеральна сукупність ділиться на групи: а) типовий відбір — об'єкт вибирається з кожного типу; б) механічний відбір — усі об'єкти поділяються на групи і з кожної вибирається один об'єкт; в) серійний відбір — якщо з генеральної сукупності береться ціла серія.

Всі ці види вибірки дають змогу провести відповідний дослід з оцінки статистичної ймовірності.

3.3. Геометричні ймовірності

Це ймовірності складних подій з нескінченним числом елементарних подій, кожна з яких інтерпретується як вибір навмання точки з деякої множини l -вимірного (E_n) евклідового простору. Вважається, що множина має деяку геометричну форму і скінченну міру. За подію A звичайно беруть точку, що належить або не належить заданій частині геометричної форми (площі, довжині, площі, об'єму). Ймовірність події A визначається як відношення міри частини геометричної форми до міри всієї форми. Так, для довжини, площі, об'єму (l, S, V) — частини геометричної форми, що має відповідну довжину l_0 , площу S_0 , об'єм V_0 , геометрична ймовірність попадання в частину визначається такими відношеннями:

$$P_r(A) = \frac{l}{l_0}; \quad P_r(A) = \frac{S}{S_0}; \quad P_r(A) = \frac{V}{V_0}.$$

Приклад (задача про зустріч). Дві особи домовляються про зустріч на заданому проміжку часу l . Особа, що прийшла першою, чекає протягом часу $a < l$. Яка ймовірність зустрічі?

Розв'язання. За множини елементарних подій візьмемо квадрат із стороною l і точками (x, y) , що зображають час зустрічі. Тоді $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq l$. Сприятливі наслідки утворюють точки, для яких $|y - x| < a$, тобто точки смуги між прямими $y = x + a$, $y = x - a$. Площа цієї смуги $S = l^2 - (l - a)^2$. Площа основного квадрата $S_0 = l^2$. Тоді шукана ймовірність визначається так:

$$P_r(A) = \frac{S}{S_0} = \frac{l^2 - (l - a)^2}{l^2} = 1 - \left(\frac{l - a}{l}\right)^2.$$

3.4. Властивості класичної ймовірності

1. Якщо подія A має ймовірність $P(A)$, то протилежна подія має ймовірність $1 - P(A)$. Дійсно, $\bar{A} + A = A_B$. Тоді за аксіомами (3.9) і (3.10)

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A_B) \text{ або } P(A) + P(\bar{A}) = 1; P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю $P(A_H) = 0$. Справді, $\bar{A}_B = A_H$, $P(A_H) = P(\bar{A}_B)$. За 1: $P(A_H) = 1 - P(A_B)$, а за аксіомою (3.9): $P(A_B) = 1$, тоді $P(A_H) = 1 - 1 = 0$.

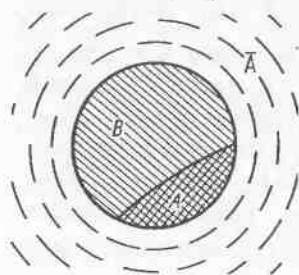


Рис. 6.1

3. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$. Справді, $B = A + (\bar{A}B)$ (рис. 6.1), а події A і $(\bar{A}B)$ — несумісні. Тоді $P(B) = P(A) + P(\bar{A}B)$, але $P(\bar{A}B) \geq 0$, $P(B) \geq P(A)$. Отже, якщо $A \subset B$, то

$$P(B) \geq P(A). \quad (3.12)$$

4. Ймовірністю випадкової події A є число, що належить сегменту $[0; 1]$.

Доведення. Нехай A_H, A_B, A — відповідно неможлива, вірогідна і випадкова подія. Тоді, з одного боку, $A_H \subseteq A$, а з другого —

$A \subseteq A_B$. За (3.9) і (3.12) маємо: $P(A) \geq 0$, $P(A) \leq 1$. Об'єднуючи ці нерівності, одержимо $0 \leq P(A) \leq 1$.

Б. Якщо $A \subseteq B$, то $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Доведення. Оскільки $B = A + (B - A)$ і події A та $B - A$ несумісні, тобто $A(B - A) = A_H$, то за формулою (3.10) маємо $P(B) = P(A) + P(B - A)$ або $P(B - A) = P(B) - P(A)$. Зазначимо, що властивості класичної і статистичної ймовірностей збігаються.

3.5. Теорема про додавання ймовірностей подій

Теорема. Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n — несумісні, то

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Це випливає з послідовного застосування формули (3.10). У разі нескінченного числа несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ маємо

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (3.13)$$

Наслідок. Нехай події A_1, A_2, \dots, A_n — несумісні і одна з них вірогідна, тобто вони утворюють повну групу; тоді $A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_B$ і

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1,$$

але

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

тому

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (3.14)$$

Сума ймовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

Приклади. 1. Із 100 валів з чотирма групами допусків 15 штук мають першу групу, 40 — другу, 30 штук — третю. Визначити ймовірність появи валів четвертої групи. Розв'язання. Ймовірність появи вала:

$$\text{першої групи } B_1 : P(B_1) = \frac{15}{100};$$

$$\text{другої групи } B_2 : P(B_2) = \frac{40}{100};$$

$$\text{третьої групи } B_3 : P(B_3) = \frac{30}{100};$$

$$\text{четвертої групи } B_4 : P(B_4) = \frac{a_4}{100}.$$

Кожний вал належить тільки до певної групи, тобто

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = B_B;$$

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = 1;$$

$$0,15 + 0,4 + 0,3 + P(B_4) = 1; P(B_4) = 0,15.$$

2. В ящику міститься n деталей, з яких m стандартних. Знайти ймовірність того, що серед k виїнятих навмання деталей хоч би одна була стандартною.

Подія A — серед виїнятих деталей хоч би одна є стандартною, подія \bar{A} — серед виїнятих деталей немає жодної стандартної. Події A і \bar{A} протилежні:

$$A + \bar{A} = A_B; P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Загальне число способів вибору з n деталей k різних позначимо C_n^k . Нестандартних деталей є $n - m$, з яких k різних нестандартних деталей можна вибрати C_{n-m}^k способами. Отже, ймовірність появи нестандартної деталі C_{n-m}^k / C_n^k , тоді

$$P(A) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

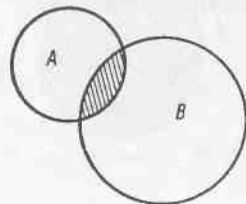


Рис. 6.2

Теорема про додавання двох будь-яких (або сумісних) подій. Ймовірність суми двох будь-яких подій дорівнює сумі ймовірностей кожної з них без ймовірності добутку їх:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (3.15)$$

Доведення. Нехай є дві події: A і B . Подію A подамо у вигляді суми двох несумісних подій (рис. 6.2). Наприклад, події A і B полягають у попаданні в круги. Тоді $A = AB + A\bar{B}$. Те саме для $B = AB + B\bar{A}$. Отже,

$$A + B = AB + A\bar{B} + AB + B\bar{A},$$

але

$$AB + AB = AB,$$

тому $A + B = A\bar{B} + B\bar{A} + AB$.

При цьому всі події праворуч несумісні. Тому

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(B\bar{A}) + P(AB).$$

Оскільки $A = AB + A\bar{B}$, то $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$, звідки

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB);$$

аналогічно

$$B = AB + B\bar{A}; P(B) = P(AB) + P(B\bar{A});$$

$$P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB).$$

Отже,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Наслідок. Якщо події сумісні, то

$$P(A + B) < P(A) + P(B).$$

Зауваження. Знайдені вище формули для класичної ймовірності справедливі для інших видів ймовірностей (статистичної, умовної).

ВПРАВИ. 1. В урні a білих, b чорних і c червоних кулі. Знайти ймовірність того, що три виїняті кулі різнокольорові. *Відповідь.* $P = \frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}$.

2. Точку кидають у квадрат. Знайти ймовірність того, що вона попаде у «східну» чи «південну» частину квадрата. *Відповідь.* $P = \frac{3}{4}$.

3. У лотереї 1000 білетів, половина з яких виграшні. Знайти ймовірність того, що з двох виїнятих білетів хоч би один виграшний. *Відповідь.* $P = \frac{1499}{1998}$.

4. Громада, що складається з 15 осіб (10 чоловіків і 5 жінок), поділена на 5 груп по 3 особи. Знайти ймовірність, що в кожній групі буде по одній жінці. *Відповідь.* $P \approx 0,0809$.

5. Монету підкидають до появи підряд двох однакових сторін монети. Знайти ймовірність того, що потрібно не більше трьох кидань. *Відповідь.* $P = \frac{3}{4}$.

3.6. Принцип значущості подій

Дуже часто при розгляданні ймовірностей сукупності подій доводиться зустрічатися з такими, в яких ймовірності близькі до нуля чи одиниці. Величину відхилення ймовірності події від нуля чи від одиниці називають **рівнем значущості події**. Звідси випливає принцип значущості події: в практичних задачах ймовірності, близькі до нуля або до одиниці, відповідно замінюють нулем чи одиницею.

Вказати єдиний критерій принципу відкидання малих ймовірностей не можна. Все залежить від характеру події. Наприклад, якщо рівень значущості події, що полягає в розкритті парашута, 0,01, то такий парашут застосувати не можна. Якщо такий самий рівень значущості буде у події, яка полягає у відхиленні часу руху поїзда від розкладу на 0,01 с, то це цілком можливо.

3.7. Теорема множення ймовірностей будь-яких подій

Розглянемо ймовірність події A за умови, що подія B відбулася. Як показано раніше,

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (3.16)$$

Звідси

$$P(AB) = P_B(A)P(B). \quad (3.17)$$

Ймовірність перетину двох подій дорівнює ймовірності однієї з подій, помноженій на умовну ймовірність іншої події, в передбаченні, що перша подія відбулася. Розглянемо тепер перетин n подій A_1, A_2, \dots, A_n :

$$\begin{aligned} P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(A_n \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n) = \\ &= P\left(\prod_{i=1}^{n-2} A_i\right) P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n) P_{A_1 A_2 \dots A_{n-2}}(A_{n-1}); \\ P(A_1 A_2 \dots A_n) &= P(A_1) P(A_2 / A_1) P(A_3 / A_1 A_2) \dots \\ &\dots P(A_n / A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

При цьому передбачається, що всі умовні ймовірності, які входять до формули (3.18), визначені. Ця формула дістала назву **теореми множення ймовірностей**.

Приклад. У ящику лежать деталі трьох сортів: п'ять — першого, чотири — другого, три — третього. З ящика навмання виймають одну деталь і не повертають в ящик. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні з'явиться деталь першого сорту (подія A), при другому — другого (подія B), при третьому — третього (подія C).

Розв'язання. Ймовірність події A : $P(A) = \frac{5}{12}$. Ймовірність події B за умови, що подія A вже відбулася, $P_A(B) = \frac{4}{11}$. Ймовірність події C за умови, що відбулися події A і B , $P_{AB}(C) = \frac{3}{10}$. Ймовірність сумісної появи всіх трьох подій $P(ABC)$ обчислимо за (3.18):

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

3.8. Формула повної ймовірності

Нехай простір подій n -вимірний. Події $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ попарно не сумісні і складають повну групу подій. З цього простору взято подію A . Ймовірності цієї події відомі в передбаченні, що виконана будь-яка з подій ω_i : $P(A/\omega_i)$ і ймовірності $P(\omega_i)$. Як обчислити ймовірність $P(A)$?

Оскільки події складають повну групу, то

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = A_B.$$

Помножимо цю рівність на A :

$$A\omega_1 + A\omega_2 + \dots + A\omega_n = AA_B.$$

Тоді

$$P(A\omega_1 + A\omega_2 + \dots + A\omega_n) = P(AA_B) = P(A),$$

але

$$\begin{aligned} P(A\omega_i) &= P(\omega_i)P(A/\omega_i); \\ P(A) &= \sum_{i=1}^n P(\omega_i)P(A/\omega_i). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Цей вираз називається **формулою повної ймовірності**.

Приклад. У десяти ящиках складено деталі двох сортів. У перших трьох по три деталі першого сорту і по сім деталей другого сорту; в четвертому ящику – дев'ять деталей першого і одна деталь другого сорту; в шести ящиках, що залишилися: по одній деталі першого і по дев'ять деталей другого сорту. З довільного ящика навмання виймають деталь. Визначити ймовірність того, що ця деталь другого сорту.

Розв'язання. Усі ящики можна поділити на три групи: ω_1 , ω_2 , ω_3 . Ймовірність того, що виймається деталь з ящика певної групи, буде

$$P(\omega_1) = \frac{3}{10}; P(\omega_2) = \frac{1}{10}; P(\omega_3) = \frac{6}{10}.$$

Події ω_1 , ω_2 , ω_3 – несумісні і утворюють повну групу. Знайдемо ймовірність появи деталі другого сорту за умови, що здійснилася одна з подій ω_1 , ω_2 , ω_3 :

$$P(A / \omega_1) = \frac{7}{10}; P(A / \omega_2) = \frac{1}{10}; P(A / \omega_3) = \frac{9}{10}.$$

За формулою (3.19)

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(\omega_i)P(A / \omega_i) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0,76.$$

3.9. Формула ймовірності гіпотез (формула Бейеса)

У попередній формулі повної ймовірності передбачалось, що події ω_i (гіпотези) несумісні, мають відомі ймовірності і відомі ймовірності появи події A при здійсненні подій ω_i . Тепер поставимо інше завдання. Нехай подія A відбулася. Чи не можна оцінити ймовірність виконання гіпотези ω_i , тобто знайти $P(\omega_i / A)$? За формулою (3.16)

$$P(\omega_i / A) = \frac{P(\omega_i A)}{P(A)} = \frac{P(\omega_i)P(A / \omega_i)}{\sum_{i=1}^n P(\omega_i)P(A / \omega_i)},$$

$$P(\omega_i / A) = \frac{P(\omega_i)P(A / \omega_i)}{\sum_{i=1}^n P(\omega_i)P(A / \omega_i)}, i = \overline{1, n}. \quad (3.20)$$

Формула (3.20) називається формулою ймовірності гіпотез Бейеса. Ймовірності $P(\omega_i)$ називаються **апріорними**, а ймовірності $P(\omega_i / A)$ – **апостеріорними**.

Приклад. Система виявлення літака через наявність перешкод у зоні може давати помилкові покази з ймовірністю 0,05, а при наявності цілі в зоні система виявляє її з ймовірністю 0,9. Ймовірність появи супротивника в зоні дорівнює 0,25. Визначити ймовірність помилкової тривоги.

Розв'язання. Гіпотезу про наявність літака позначимо через ω_1 , про відсутність – через ω_2 , а подію, що сталася внаслідок сигналу про наявність цілі, – через A . Тоді

$$P(\omega_1) = 0,25; P(\omega_2) = 0,75; P(A / \omega_1) = 0,9; P(A / \omega_2) = 0,05.$$

Знайдемо

$$P(\omega_2 / A) = \frac{P(\omega_2)P(A / \omega_2)}{P(\omega_1)P(A / \omega_1) + P(\omega_2)P(A / \omega_2)} = \frac{1}{7}.$$

3.10. Незалежні події

Дві події називаються **незалежними**, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від появи іншої, тобто

$$P(A / B) = P_B(A) = P(A); \quad (3.21)$$

$$P(B / A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A / B)}{P(A)} = P(B). \quad (3.22)$$

Можна дати й таке означення: дві події називаються незалежними, якщо інформація про настання однієї події не змінить інформацію про настання іншої.

Події A_1, A_2, \dots, A_n називаються незалежними в сукупності чи просто незалежними, якщо будь-яка комбінація їх незалежна. Наприклад, A_i і A_j ($i \neq j; i, j = \overline{1, \infty}$); A_i і $A_i A_j$ і т. д.

Теорема множення ймовірностей незалежних подій (3.18) з урахуванням (3.21), (3.22) набирає вигляду

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n). \quad (3.23)$$

Розглянемо тепер таку теорему.

Теорема. Ймовірність появи хоч би однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n , незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей подій, протилежних даним.

Позначимо A – подію, що полягає в появі будь-якої з n подій A_1, A_2, \dots, A_n , тоді за теоремою

$$P(A) = 1 - P_1 P_2 \dots P_n, \quad (3.24)$$

де $P_1 = P(\bar{A}_1); P_2 = P(\bar{A}_2); \dots; P_n = P(\bar{A}_n)$.

Доведення. A та $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$ протилежні:

$$A + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n = A_B; \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n),$$

але

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) = P_1 P_2 \dots P_n,$$

звідки і випливає формула (3.24).

Приклади. 1. Стрелець вистрілює чотири рази. Влучення чи промах не залежить від номера пострілу. Ймовірність промаху 0,7, а влучення 0,3. Знайти ймовірність того, що три перших постріли – промах, а четвертий – влучення.

Розв'язання. Позначимо промах «-», а влучення «+». Тоді при ймовірності промаху 0,7 і, отже, влучення 0,3 потрібна ймовірність обчислюється так:

$$P(- - - +) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,1029.$$

2. У попередньому прикладі знайти ймовірність двох влучень. Для розв'язку запишемо можливі варіанти: - - + +, - + - +, + + - - і т. д.:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Ймовірності кожного варіанта однакові:

$$P(- - + +) = P(- + - +) = \dots = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0441;$$

$$P(+ +) = 0,0441 \cdot 6 = 0,2646.$$

3. Виконується n незалежних дослідів, у кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю P . Знайти ймовірність того, що в n дослідах подія A з'явиться хоч би один раз.

Розв'язання. Нехай подія C полягає в тому, що подія A з'явиться в n дослідах хоч би один раз, тоді подія \bar{C} означатиме, що подія A в n дослідах не з'явиться жодного разу: $C = \underbrace{(\bar{A}\bar{A}\dots\bar{A})}_{n \text{ раз}}; P(\bar{C}) = (1 - P)^n$. За формулою (3.24)

$$P(C) = 1 - (1 - P)^n.$$

4. Ймовірність того, що при одному пострілі стрелець влучить у ціль, дорівнює 0,4. Скільки пострілів має зробити стрелець, щоб із ймовірністю 0,9 уразити ціль?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що при n пострілах стрелець уражає ціль, а \bar{A} – не уражає. Тоді

$$A + \bar{A} = A_B.$$

Розглянемо подію \bar{A} у вигляді $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$, де \bar{A}_i – невлучення в ціль при i -му пострілі; p – ймовірність влучення в ціль при одному пострілі; q – ймовірність невлучення в ціль при одному пострілі ($p + q = 1$). Тоді

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}); \quad P(\bar{A}) = q^n; \quad P(A) = 1 - q^n.$$

За умовою $P(A) \geq 0,9$, $p = 0,4$, тоді

$$q = 0,6; \quad 0,9 \geq 1 - 0,6^n; \quad 0,6^n \geq 0,1;$$

$$n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = \frac{-1}{-0,2218} \approx 4,5; \quad n \geq 5.$$

ВПРАВИ. 1. Яка ймовірність того, що при п'яти киданнях монета хоч раз упаде гербом? *Відповідь.* $P = 0,96875$.

2. Яка ймовірність того, що стрелець, якого розглядали в прикладі 4, доб'ється хоч одного влучення у десяти пострілах? *Відповідь.* $P = 0,994$.

3. Знайти ймовірність того, що при залпі чотирьох стрільців, які мають ймовірності влучення відповідно 0,9; 0,8; 0,7 і 0,6, буде досягнуто три влучення. *Відповідь.* $P = 0,4404$.

4. Під час приймання партії виробів половина партії була перевірена; за умовами допускається наявність не більше 2 % браку. Знайти ймовірність того, що буде прийнята партія зі 100 деталей, серед яких п'ять бракованих. *Відповідь.* $P = 0,18$.

5. Лампочка при вмиканні перегоріє з ймовірністю 0,01. Знайти ймовірність того, що доведеться міняти не більше двох лампочок. *Відповідь.* $P = 0,9999$.

3.11. Випробування Бернуллі

Розглянемо кілька задач.

1. Нехай в урні знаходяться білі та чорні кулі. Під A розумітимемо подію, яка полягає в тому, що з урни виймають білу кулю. Ймовірність $P(A)$ позначимо p і вважатимемо її незалежною від того, який раз ми виймаємо з урни білу кулю. Щоб забезпечити незалежність процесу виймання білої кулі, кожний раз повертатимемо цю кулю в урну, і перед тим як провести нове випробування, в урні ретельно перемішаємо. Протилежне випробування – вийняти чорну кулю (подія \bar{A}) – матимемо ймовірність $1 - p = q$. Визначити ймовірність $P_n(k)$ того, що в n випробуваннях біла куля з'явиться k разів.

2. Яка ймовірність $P_n(k)$ того, що в n киданнях монети герб з'явиться k разів за умови, що ймовірність випадання герба в одному випробуванні дорівнює p ?

3. Яка ймовірність $P_n(k)$ того, що, при n незалежних пострілах кількість влучень у мішень дорівнюватиме k за умови, що ймовірність одного влучення дорівнює p і не залежить від номера пострілу?

4. Яка ймовірність того, що з n новонароджених k виявляються хлопчиками, якщо ймовірність народження хлопчика дорівнює p ?

5. Телефоністка чергує протягом часу T . Встановлено, що за деякий малий проміжок $\tau \ll T$ ймовірність настання виклику дорівнює p . Яка ймовірність k викликів за весь час чергування? Позначаючи $n = \frac{T}{\tau}$, знайдемо, що задача полягає у пошуку $P_n(k)$.

Усі ці задачі зводяться до схеми так званих незалежних випробувань Бернуллі.

Насамперед визначимо поняття незалежних випробувань. Поставимо у відповідність кожному випробуванню випадкову подію, яку позначимо A_i . Випробування називаються незалежними, якщо результат кожного випробування не залежить від результатів решти випробувань. З означення випливає, що події A_i , які відповідають випробуванням, є незалежними в сукупності, тобто

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n).$$

Незалежні події, в кожній з яких лише два виходи, називаються **випробуваннями Бернуллі**. У цьому разі події A_1, A_2, \dots, A_n — група елементарних подій. Наведені вище задачі можна сформулювати в загальному вигляді так: проводиться n незалежних випробувань Бернуллі, в яких спостерігається поява події A . Яка ймовірність появи події A в n випробуваннях k разів, якщо ймовірність появи A в одному випробуванні дорівнює p , а не появи — q ? Позначимо B_k подію, яка полягає в тому, що в n випробуваннях подія A з'явиться k разів. Подія B_k з'явиться, якщо в n випробуваннях подія A з'явиться k разів і не з'явиться $n - k$ разів. Позначимо через A_i ($i = \overline{1, k}$) подію, яка полягає в появі події A в i -му випробуванні, \overline{A}_i — подію, що полягає в не появи події A в i -му випробуванні. Тоді

$$B_k = A_1 A_2 \dots A_k \overline{A}_{k+1} \overline{A}_{k+2} \dots \overline{A}_n + A_1 \overline{A}_2 A_3 \dots \overline{A}_{n-1} A_n + \dots + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \dots \overline{A}_{n-k} A_{n-(k-1)} \dots A_n. \quad (3.25)$$

Тут кожний доданок складається з k співмножників типу A і $n - k$ співмножників типу \overline{A} і має ймовірність $p^k q^{n-k}$. Доданків у (3.25) стільки, скільки можна скласти з n елементів A_1, A_2, \dots, A_n сполучень по k елементів, тобто C_n^k . Враховуючи, що доданки в (3.25) несумісні, дістаємо

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Проте

$$P(B_k) = P_n(k),$$

отже,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (3.26)$$

Формула (3.26) називається формулою Бернуллі і дає відповідь на наведені вище запитання.

3.12. Гранична поведінка ймовірностей у випробуваннях Бернуллі

Не зважаючи на компактність формули (3.26), при великих n безпосереднє обчислення $P_n(k)$ за нею пов'язане зі складними обчисленнями. Для спрощення знайдемо ряд наближених формул обчислення $P_n(k)$.

Для виведення цих формул звернемося до C_n^k . Формулу для обчислення C_n^k можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right); \\ \frac{C_n^k \cdot k!}{n^k} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Якщо k обмежене, а $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{C_n^k k!}{n^k} \rightarrow 1.$$

Отже, у формулі (3.26) замість C_n^k можна користуватися $\frac{n^k}{k!}$.

Можна показати, що

$$1 - \frac{k(k-1)}{2n} \leq \frac{C_n^k k!}{n^k} \leq 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n > 1.$$

Тому, якщо $k \leq 0,14\sqrt{n}$, то для розрахунку можна користуватися наближеною формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!} \left(\frac{np}{q}\right)^k q^n. \quad (3.28)$$

Доведемо таку теорему.

Теорема Пуассона. Якщо проводяться випробування Бернуллі при $n \rightarrow \infty$, а $p \rightarrow 0$, але $np = \lambda$, то ймовірність появи k разів події A , що з'являється в окремому випробуванні з ймовірністю p , прямує до $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (3.29)$$

Вираз (3.29) називається **асимптотичною формулою Пуассона**.

Доведення. Покладемо $\lambda = np$, $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Тоді за (3.26)

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Як видно з (3.27), при фіксованому k і $n \rightarrow \infty$

$$C_n^k \rightarrow \frac{n^k}{k!},$$

тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (3.30)$$

Теорема доведена.

Приклад. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. У даному інтервалі часу абонент може зробити виклик незалежно від решти з ймовірністю 0,005. Потрібно знайти ймовірність того, що в даному інтервалі було не більше ніж сім викликів.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що відбулося не більше ніж сім викликів. Це складна подія, вона визначається вісьмома елементарними подіями: ω_0 — жодного виклику; ω_1 — один виклик; ω_2 — два виклики і т. д.; ω_7 — сім викликів. Ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій:

$$P(A) = P_{1000}(\omega_0) + P_{1000}(\omega_1) + \dots + P_{1000}(\omega_7).$$

Для підрахунку кожної ймовірності застосуємо теорему Пуассона. Знайдемо $p = 0,005$; $n = 1000$; $\lambda = np = 5$:

$$P_{1000}(\omega_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-5} \frac{5^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Тоді

$$P(A) = e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \dots + \frac{5^7}{7!} \right) \approx 0,875.$$

До недоліків теореми Пуассона треба віднести вимогу $p \rightarrow 0$, оскільки вона не в усіх випадках виконується. У зв'язку з цим розглянемо випадки, коли $p \neq 0$ і $p \neq 1$. При цьому при підрахунку $P_n(k)$ користуються так званою локальною граничною теоремою Муавра-Лапласа.

Теорема Муавра-Лапласа. Позначимо $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Якщо

$n \rightarrow \infty$, p фіксоване і не дорівнює ні нулю, ні одиниці, а k змінюється таким чином, що

$$|x| = \left| \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right| \leq T,$$

де T — фіксоване число, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} = 1$$

для будь-якого $|x| \leq T$.

При цьому збіжність рівномірна за x (гл. 3, п. 1.4). З теореми випливає, що

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.31)$$

Похибка в (3.31) рівномірно прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$ для всіх $|x| < T$. Вираз

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x) \quad (3.32)$$

називається **функцією Гаусса** (рис. 6.3, табл. 3.1). Формулу (3.31) можна записати так:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

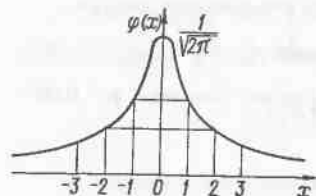


Рис. 6.3

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Приклад. Знайти ймовірність появи герба 55 разів у 100 незалежних киданнях монети. Ймовірність появи герба в одному киданні $p = 0,5$.

Розв'язання.

$$k = 55; n = 100; p = 0,5; q = 0,5;$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1.$$

За табл. 3.1

$$\varphi(1) = 0,2420; P_{100}(55) \approx \frac{\varphi(1)}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{0,2420}{5} = 0,0484.$$

Зазначимо, що локальна теорема Муавра–Лапласа дає змогу оцінити окремі ймовірності та їхню поведінку як функцію k при великих n .

У деяких випадках треба обчислити ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться не менше ніж k_1 разів, але не більш як k_2 разів: $P_n(k_1, k_2)$.

Для обчислення $P_n(k_1, k_2)$ використовується інтегральна теорема Лапласа.

Таблиця 3.1. Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

а її відхилення від p дорівнює $\frac{k}{n} - p$. Припустимо, що бажано оцінити ймовірність відхилення p таким чином, щоб $\frac{k}{n} - p \leq \epsilon$, тобто треба знайти $P\left(\frac{k}{n} - p \leq \epsilon\right)$. Розглянемо нерівність $\frac{k}{n} - p \leq \epsilon$, $-\epsilon \leq \frac{k}{n} - p \leq \epsilon$ або $-\epsilon \leq \frac{k - np}{n} \leq \epsilon$.

Помножимо нерівність на $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ і отримаємо

$$-\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} P\left(-\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) &\approx \int_{-\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-x^2} dx = \\ &= \int_0^{\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi\left(\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right); \\ P\left(-\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) &\approx 2\Phi\left(\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \end{aligned}$$

Приклад. Заводським ВТК встановлено, що в середньому 98 % виробів відповідає вимогам до них, а 2 % потребує регулювання. Приймальник перевіряє 300 виробів. Якщо серед них виявиться 11 чи більше таких, що потребують регулювання, то всю партію буде повернуто на доопрацювання. Знайти ймовірність того, що партія буде прийнята.

Розв'язання. У нашому прикладі n досить значне і ймовірність того, що $k \leq 10$, можна оцінити за попередньою формулою.

За умовою $k_1 = 0$; $k_2 = 10$; $n = 300$; $p = 0,02$; $q = 0,98$, тоді

$$x_1 = \frac{-6}{\sqrt{5,88}} \approx -2,47; \quad x_2 = \frac{10 - 6}{\sqrt{5,88}} \approx 1,65;$$

$$P(k \leq 10) \approx \Phi(1,65) - \Phi(-2,47) = \Phi(1,65) + \Phi(2,47).$$

За табл. 3.2 $\Phi(1,65) = 0,4505$; $\Phi(+2,47) = 0,4932$, тоді $P(k \leq 10) = 0,9433$.

§ 4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ПОНЯТТЯ ПРО ОДНОВИМІРНУ І БАГАТОВИМІРНУ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Нехай дано простір елементарних подій $\{\omega_i\}$. Функція, визначена на незчисленній або на зчисленній множині виходів (елементарних подій), називається **випадковою величиною**. Так, якщо простір елементарних подій складається з n пострілів по мішені, випадковою величиною буде число попадань чи непопадань у мішень. Можливі такі значення випадкової величини: 0, 1, 2, ..., n . Звернемо увагу на те, що ймовірність будь-якого з єдино можливих значень випадкової величини різна.

Число народжених хлопчиків із 100 новонароджених є випадкова величина. Тут елементарна подія — народження дитини. Можливі значення цієї випадкової величини: 0, 1, 2, ..., 100. Ймовірність кожного з можливих значень випадкової величини позначається так: P_0 ,

P_1, \dots, P_{100} .

Відстань, яку пролетить снаряд до цілі, є випадкова величина, оскільки дальність польоту визначається не лише встановленим на гарматі прицілом, але й нескінченною множиною інших факторів. Можливі значення випадкової величини розміщуються в області $a < x < b$, $c < y < d$. Зазначимо, що випадкову подію можна розглядати як окремий випадок випадкової величини, що набуває двох значень: 0 і 1.

Звичайно відволікаються від елементарних подій, а цікавляться можливими значеннями випадкової величини і відповідною ймовірністю появи цих значень. Тому, коли йдеться про випадкову величину, то вказують її можливі значення і відповідну ймовірність появи кожного значення випадкової величини.

Випадкову величину задають областю можливих значень та ймовірністю появи їх. Випадкові величини позначатимемо буквами X, Y, Z , а їхні можливі значення — x, y, z . З наведених прикладів можна дати таке означення випадкової величини: випадковою називається величина, значення якої наперед невідомі і які можуть бути визначені лише внаслідок досліду.

Якщо випадкова величина набуває скінченної (нескінченної) дискретної кількості значень, то її можна задати, вказавши можливі значення випадкової величини і ймовірність появи їх:

Значення випадкової величини	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
Ймовірність її появи	P_1	P_2	P_3	...	P_n	...

Випадкові величини поділяються на дискретні і неперервні. **Дискретною випадковою величиною** називається величина, можливі значення якої можуть бути пронумеровані в якомусь порядку і записані у вигляді послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Якщо таку нумерацію можливих значень з використанням натурального ряду чисел здійснити не можна, то випадкова величина називається **неперервною**. Можливі значення дискретної випадкової величини утворюють не більше, ніж зчисленну множину, а неперервної — не менше, ніж незчисленну. Наприклад, випадкова величина появи хлопчиків із 100 новонароджених є дискретною випадковою величиною. Дальність польоту снаряда стосовно заданого положення цілі, довжина виготовленого стола щодо заданої довжини належать до неперервних випадкових величин.

Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та їхніми ймовірностями дістало назву **закону розподілу випадкової величини**. Закони розподілу можуть бути виражені: 1) таблицею; 2) графіками; 3) аналітично (функцією розподілу випадкової величини $F(x)$, густиною розподілу випадкової величини $f(x)$, означення яких дамо нижче).

Таблиця розподілу ймовірності найчастіше застосовується тоді, коли число можливих значень випадкової величини скінченне чи зчисленне. Нехай, наприклад, випадкова величина набуває лише п'яти значень: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 із ймовірностями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , які можуть бути також статистичними, тобто $p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*$. В останньому випадку спостережувані значення x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 називаються варіантами.

Послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, називається варіаційним рядом. Замість статистичних ймовірностей можуть бути взяті частоти появи можливих значень n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 .

У разі вибірки закон розподілу може бути поданий таблицею:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$\sum_{i=1}^n p_i = 1$
p	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n	
n	n_1	n_2	n_3	...	n_{n-1}	n_n	$\sum_{i=1}^n p_i^* = 1$
p^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	...	p_{n-1}^*	p_n^*	

Користуючись цією таблицею, можна побудувати кілька графіків, прийнявши за осі $x, p; x, n; x, p^*$. Сполучивши точки (x_i, p_i) ;

$(x_i, p_i^*); (x_i, n_i)$, дістанемо полігон (многокутник) частот (рис. 6.4). Зазначимо, що значення випадкової величини, ймовірність якої найбільша, називається **модом**. Модом на рис. 6.4 є x_2 . Послідовність пар точок (x_i, p_i) називається **статистичним рядом**.

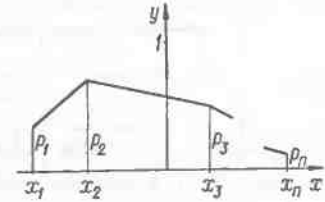


Рис. 6.4

Приклад. У грошовій лотереї на 100 білетів розігрується один виграш у 50 грошових одиниць і 10 виграшів по одній грошовій одиниці. Знайти закон розподілу випадкової величини — вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета.

Розв'язання. Можливі значення $X: x_1 = 50, x_2 = 1; x_3 = 0$. Ймовірності цих можливих значень:

$$p_1 = P(x_1 = 50) = \frac{1}{100} = 0,01; p_2 = P(x_2 = 1) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Оскільки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $p_3 = 1 - (p_1 + p_2)$, $p_3 = 0,89$. Шуканий закон розподілу:

X	50	10	0
p	0,01	0,1	0,89

Формула (3.26) дає так званий біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини k успіхів у n випробуваннях; формулу (3.26) можна розглядати як загальний член формули бінома Ньютона:

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n. \quad (4.1)$$

Перший член формули (4.1) p^n є ймовірністю настання n разів успіхів у n випробуваннях; другий член — $(n-1)$ успіхів і одного неуспіху. Таким чином, випадкова величина X — число успіхів — має такий розподіл:

X	n	$n-1$	$n-2$...	0
p	$C_n^n p^n$	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	$C_n^{n-2} p^{n-2} q^2$...	$C_n^0 q^n$

Із формули Пуассона (3.30) дістанемо так званий розподіл Пуассона для дискретної випадкової величини X — числа успіхів, записаний у вигляді таблиці:

X	n	$n-1$...	2	1	0
p	$\frac{a^n e^{-a}}{n!}$	$\frac{a^{n-1} e^{-a}}{(n-1)!}$...	$\frac{a^2 e^{-a}}{2!}$	$a e^{-a}$	e^{-a}

Введена раніше випадкова величина називається **одновимірною**. Введемо поняття багатовимірної випадкової величини. Почнемо з прикладів. При виготовленні столу випадковою буде не лише довжина, а й ширина його. Випадковим буде положення центра ваги площини столу. Якщо один з кутів прийняти за початок координат, то положення центра ваги площини столу визначається випадковим вектором

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

який, у свою чергу, визначається двома випадковими величинами: X_1 та X_2 . Положення центра ваги літака при його польоті — випадкова векторна величина, що визначається трьома випадковими величинами: X_1, X_2, X_3 . Таким чином, багатовимірною випадковою величиною називається багатовимірна вектор-функція, визначена на множині елементарних подій. Як деяка функція багатовимірна (як і одновимірна) випадкова величина задається таблицею, графіком, аналітично, що виражає закон розподілу ймовірностей.

§ 5. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Якщо випадкова величина неперервна, то її важко задати таблицею. Адже в цьому разі не можна пронумерувати усі можливі значення випадкової величини. Не менш істотним є й те, що ймовірність появи випадкової величини в «пронумерованому місці» виявляється рівною нулю. Проте ймовірність попадання в інтервал може бути і відмінною від нуля. Щоб описати всі види випадкових величин (дискретних і неперервних), вводять функцію розподілу ймовірності випадкової величини.

Функцією $F(x)$ розподілу класичної ймовірності одновимірної випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуває можливих значень, менших від значення x , де x — будь-яке дійсне число:

$$F(x) = P(X < x). \quad (5.1)$$

Нехай тепер задано дискретну випадкову величину X , яка набуває значень x_1, x_2, \dots, x_n . Виберемо якесь значення x . Нехай $x_1, x_2, \dots, x_k < x$. Тоді функція розподілу випадкової величини X , згідно з (5.1), запишеться так:

$$F(x) = P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_k) = P(X < x).$$

Позначимо $P(x_i) = P_i$, тоді

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P_i. \quad (5.2)$$

Звідси видно, що коли x змінюється між x_i та x_{i+1} , то значення функції розподілу не змінюється, тобто в точках x_i функція $F(x)$ має розрив першого роду.

Аналогічно визначається статистична функція розподілу $F^*(x)$ (функція розподілу вибірки).

Нехай n — об'єм вибірки; n_x — число варіант значень випадкової величини, в яких x_i менше за x , тоді

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n} \quad \text{або} \quad F_n^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}.$$

Функцію $F_n^*(x)$ називають **емпіричною функцією розподілу**.

Приклади. 1. Нехай випадкова величина, що являє собою вибірку, набуває значення

варіанти x_i : 2, 6, 10;

частоти n_i : 12, 18, 30.

Знайдемо об'єм вибірки: $12 + 18 + 30 = 60$. Найменша варіанта дорівнює 2. Отже, ймовірність появи значення $x_i < 2$ дорівнює нулю: $F^*(x) = 0, x < 2$.

Розглянемо $2 \leq x < 6$, тут спостерігалось значення $x_1 = 2$ дванадцять разів, тобто $n_x = 12$, а $n = 60$. Отже, $F^*(x) = \frac{12}{60} = 0,2$, $2 \leq x < 6$. Розглянемо

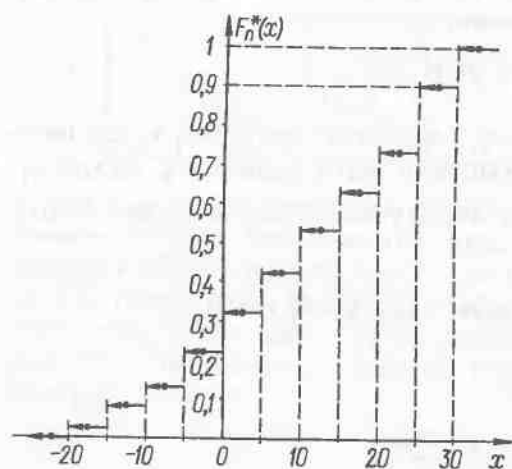


Рис. 6.5

6 $\leq x < 10$. Тут спостерігалось два значення: $x_1 = 2 - 12$ разів та $x_2 = 6 - 18$ разів, тобто сприятливих спостережень було 30;

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5; \quad 6 \leq x < 10.$$

Розглянемо $x > 10$, $F^*(x) = 1$. Таким чином, дістали статистичну функцію розподілу

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 0,2, & 2 \leq x < 6; \\ 0,5, & 6 \leq x < 10; \\ 1, & 10 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

2. Нехай виміряно відхилення від заданої довжини у 200 валках і знайдено найбільше відхилення ліворуч - 20, праворуч - 30. Зна-

ходимо ширину смуги розподілу $R = 30 - (-20) = 50$. Розбиваємо смугу розподілу, наприклад, на 10 частин, дістанемо інтервали розподілу $(-20; -15)$, $(-15; -10)$, $(-10; -5)$, $(-5; 0)$, ..., $(25; 30)$. Знаходимо, скільки з вимірних відхилень попадає у кожний з цих інтервалів:

$$n_i = 7; 11; 15; 24; 49; 41; 26; 17; 7; 3; \quad \sum_i n_i = 200.$$

Це частоти. Дістаємо статистичні ймовірності:

$$P^*(n_i) = \frac{7}{200}; \frac{11}{200}; \frac{15}{200}; \frac{24}{200}; \frac{49}{200}; \frac{41}{200}; \frac{26}{200}; \frac{17}{200}; \frac{7}{200}; \frac{3}{200}.$$

Знаходимо суму цих ймовірностей для всіх інтервалів, що лежать ліворуч від x . Це й буде статистичною функцією розподілу ймовірності

$$F_n^*(x) = \sum_{i=0}^{(x_k, x_{k+1}) < x} P^*(n_i).$$

Графік цієї функції зображено на рис. 6.5. Побудована функція $F_n^*(x)$ є функцією розподілу статистичної ймовірності випадкової величини. Із зростанням числа поділок смуги ця функція збігатиметься з функцією розподілу класичної ймовірності.

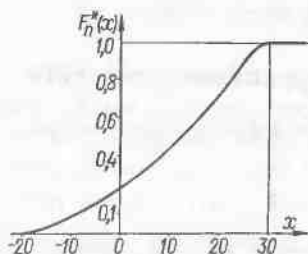


Рис. 6.6

Функція розподілу

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x < -20; \\ \frac{7}{200}, & -20 \leq x < -15; \\ \frac{7+11}{200}, & -15 \leq x < -10; \\ \frac{197}{200}, & 25 \leq x < 30; \\ 1, & 30 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Графік функції $F_n^*(x)$ зображено на рис. 6.6.

Введемо поняття функції розподілу двовимірної випадкової величини $\bar{X}(X_1, X_2)$ як ймовірність того, що значення випадкових величин одночасно виявляться меншими від заданих величин x та y :

$$F(x, y) = P(X_1 < x; X_2 < y). \quad (5.3)$$

Функцією розподілу $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -вимірної випадкової величини $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ називається ймовірність того, що значення випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n одночасно виявляться меншими від заданих значень x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\{X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n\}.$$

При цьому йдеться про сумісне виконання зазначених вище нерівностей. Таким чином,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n\}.$$

Функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x)$ називається ще n -вимірною функцією розподілу. Далі обмежимося двовимірною функцією розподілу.

Властивості функції розподілу ймовірності випадкової величини.

1. Функція розподілу ймовірності випадкової величини набирає значень на $[0; 1]$:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1; \quad 0 \leq F(x) \leq 1. \quad (5.4)$$

2. Функція розподілу ймовірності випадкової величини є неспадною по кожному зі своїх аргументів функцією:

$$1) F(x_2) \geq F(x_1), \quad \text{якщо } x_2 > x_1;$$

2) $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, якщо $x_2 > x_1$;

$F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

Доведення (для одновимірної функції розподілу ймовірності випадкової величини). Маємо $F(x_2) = P(X < x_2)$; $F(x_1) = P(X < x_1)$;

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Якщо $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, то $P(X < x_2) \geq P(X < x_1)$ або

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

3. Ймовірність того, що одновимірна випадкова величина попадає в $[a, b]$, дорівнює різниці значень функції розподілу ймовірності в точках b та a :

$$P[a \leq X < b] = F(b) - F(a). \quad (5.5)$$

Доведення. Введемо такі події: A , яка полягає в тому, що випадкова величина X набуває значень, менших за b ; B , суть якої в тому, що випадкова величина X набуває значень, менших за a ; C , яка полягає в тому, що значення випадкової величини лежать між a і b , тоді

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

або

$$F(b) = F(a) + P(a \leq X < b),$$

звідки і випливає шукана рівність (5.5).

Наслідок 1. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина буде одного певного значення, дорівнює нулю. Справді, нехай в (5.5) $a = x$, $b = x + \Delta x$, тоді $P[x \leq X < x + \Delta x] = F(x + \Delta x) - F(x)$. Отже, $P \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Наслідок 2. Якщо можливі значення $x \in [a, b]$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$. Якщо можливі значення випадкової величини визначені на всій числовій осі, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

а

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Справді, нехай $x_1 \leq a$, подія $X < x_1$ є неможливою, оскільки відомо, що всі можливі значення випадкової величини лежать в (a, b) , а x_1 не належить (a, b) . Звідси випливає, що в дограничному випадку ймовірність окремого значення неперервної випадкової величини X не дорівнює нулю, а в граничному випадку вона дорівнює нулю.

Розглянемо тепер дискретну випадкову величину X . Нехай ця величина може набути значень x_k з ймовірністю P_k . Тоді в точці x_k ліворуч функція $F(x)$ неперервна, а праворуч має розрив першого роду зі стрибком P_k .

Справді,

$$\begin{aligned} F(x_k + 0) &= P(X < x_k + 0) = \\ &= P(x_k) + P(x_k \leq X \leq x_k + 0) = F(x_k) + P_k. \end{aligned}$$

Тоді

$$F(x_k + 0) - F(x_k) = P_k.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини матиме розрив першого роду. Графік функції показано на рис. 6.5. У разі неперервної випадкової величини, визначеної всюди

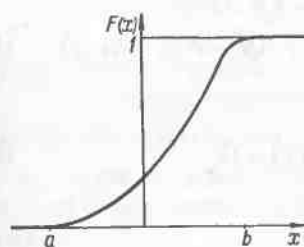


Рис. 6.7

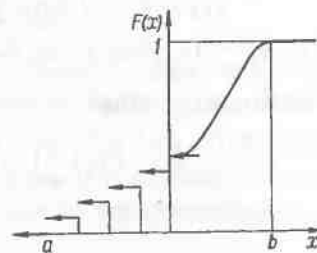


Рис. 6.8

на числовій осі, функція розподілу ймовірності буде неперервною. Графік функції показано на рис. 6.7. Іноді випадкова величина носить змішаний характер (рис. 6.8).

Розглянемо тепер двовимірний випадок, тобто визначимо ймовірності того, що випадкова величина $X(X_1, X_2)$ виявиться в прямокутнику $[a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2]$. Введемо такі події (рис. 6.9):

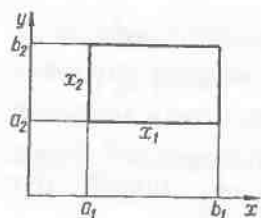


Рис. 6.9

$$A(x_1 < b_1, x_2 < b_2);$$

$$B(a_1 \leq x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2);$$

$$C_1(x_1 < a_1, x_2 < b_2);$$

$$C_2(x_1 < b_1, x_2 < a_2).$$

Оскільки події A , B та $C_1 + C_2$ несумісні, а C_1 і C_2 сумісні, то

$$A = B + (C_1 + C_2); \quad P(A) = P(B) + P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cdot C_2).$$

Замінюючи ймовірності функціями розподілу, матимемо

$$F(b_1, b_2) = P(a_1 \leq x < b_1; a_2 \leq x_2 < b_2) + F(a_1, b_2) + F(b_1, a_2) - F(a_1, a_2);$$

$$P(a_1 \leq x_1 < b_1; a_2 \leq x_2 < b_2) = F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2).$$

Якщо

$$a_1 = x; \quad b_1 = x + \Delta x; \quad a_2 = y; \quad b_2 = y + \Delta y,$$

то

$$\begin{aligned} P(x \leq x_1 < x + \Delta x; y \leq x_2 < y + \Delta y) = \\ = F(x, y) + F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y). \end{aligned} \quad (5.6)$$

4. Як зазначалося вище

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0. \quad (5.7)$$

Аналогічно

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0. \quad (5.8)$$

Однак

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(y); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0; \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x); \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

§ 6. ГУСТИНА РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ОДНОВИМІРНОЇ І БАГАТОВИМІРНОЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Нехай функція розподілу ймовірності одновимірної випадкової величини є диференційовною функцією. Тоді похідну від функції розподілу ймовірності називають **густиною розподілу одновимірної випадкової величини**:

$$\frac{dF}{dx} = f(x). \quad (6.1)$$

Укажемо ймовірнісний зміст густини розподілу ймовірності. З означення похідної матимемо

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

За (5.5)

$$F(x + \Delta x) - F(x) = P(x \leq X < x + \Delta x),$$

тоді

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (6.2)$$

Таким чином, густина розподілу одновимірної випадкової величини — це границя відношення ймовірності того, що випадкова величина набуде значень, що лежать в $[x, x + \Delta x)$, до довжини інтервалу Δx , якщо останній прямує до нуля. Це означення можна брати за основне і поширювати його на випадок багатовимірної випадкової величини.

Так, **густиною розподілу двовимірної випадкової величини** $\bar{X}(X, Y)$ називається границя відношення ймовірності того, що ця випадкова величина потрапить у прямокутник зі сторонами Δx і Δy , до площі цього прямокутника, якщо ця площа прямує до нуля:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P[x \leq X < x + \Delta x; y \leq Y < y + \Delta y]}{\Delta x \Delta y}. \quad (6.3)$$

Знайдемо вираз $f(x, y)$ через похідну. За формулою (5.6)

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - [F(x + \Delta x, y) - F(x, y)]}{\Delta x \Delta y}$$

Як відомо,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)] - [F(x + \Delta x, y) - F(x, y)]}{\Delta x \Delta y}$$

Отже,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (6.4)$$

Для тривимірної випадкової величини

$$f(x, y, z) = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}. \quad (6.5)$$

6.1. Властивості густини розподілу ймовірності

1. Густина розподілу ймовірності випадкової величини є невід'ємною функцією, тобто $f(x, y) \geq 0$. Це випливає з того, що функція розподілу $F(x, y)$ ймовірності випадкової величини є неспадною функцією.

2. Ймовірність того, що значення випадкової величини виявиться в області D , дорівнює інтегралу від густини розподілу по цій області.

Справді, за (5.5) для одновимірної випадкової величини

$$P[a \leq X < b] = F(b) - F(a).$$

З іншого боку інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a).$$

Отже,

$$P[a \leq X < b] = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{рис. 6.10}). \quad (6.6)$$

Аналогічно

$$P[X \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (6.7)$$

3. Функція розподілу ймовірності випадкової величини може бути виражена через густину розподілу за допомогою невласних інтегралів:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Справді,

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{dF}{dt} dt = F(x) - F(-\infty),$$

але $F(-\infty) = 0$. Отже,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (6.8)$$

На підставі рівності (6.7) можна записати

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (6.9)$$

4. Інтеграл від густини розподілу ймовірності випадкової величини у нескінченних границях дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (6.10)$$

Доведення. Тут записана ймовірність тієї події, що деяка випадкова величина потрапить (в одновимірному випадку) на числову пряму або на площину (у двовимірному випадку), але ця подія вірогідна.

5. Для того щоб дістати густину розподілу ймовірності $(n-1)$ -вимірної випадкової величини, слід зінтегрувати в нескінченних границях густину розподілу n -вимірної випадкової величини так:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy; \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (6.11)$$

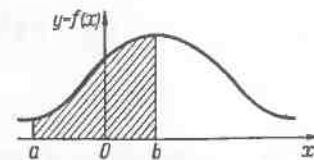


Рис. 6.10

Доведення.

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_1 dt_2;$$

$$F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = F(x);$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x, +\infty)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Густина розподілу двовимірної випадкової величини

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dz, \quad (6.12)$$

а густина розподілу $(n-1)$ -вимірної випадкової величини

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n. \quad (6.13)$$

6.2. Функція і густина розподілу змішаної випадкової величини

Називатимемо випадкову величину змішаною, якщо в області її можливих значень на деяких ділянках вона неперервна, а на деяких дискретна. Нехай X — змішана випадкова величина. Нехай $F(x)$ — функція розподілу ймовірності. Розіб'ємо цю функцію розподілу на неперервну $F_1(x)$ і дискретну $F_2(x)$ частини:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

Щоб знайти густину розподілу такої випадкової величини, скористаємося поняттями δ -функції (див. гл. 3, п. 5.8) і одиничної функції $\sigma(x)$.

Функція розподілу дискретної випадкової величини запишеться у вигляді

$$F_2(x) = \sum_{i=0}^{x_k < x} P(x_i) = \sum_{k=0}^{x_k < x} P_k \sigma(x - x_k), \quad (6.14)$$

де x_k — можливі значення дискретної частини випадкової величини, а густина розподілу ймовірності

$$f_2(x) = \frac{dF_2}{dx} = \sum_{k=1}^{x_k < x} P_k \delta(x - x_k). \quad (6.15)$$

Для неперервної частини випадкової величини $F_1(x)$ і $f_1(x)$ є неперервними. Тоді для змішаної випадкової величини

$$F(x) = F_1(x) + \sum_{k=1}^{x_k < x} P_k \sigma(x - x_k).$$

6.3. Випадкові функції, функція і густина їх розподілу

Випадковою функцією називається випадкова величина, що залежить від деякого не випадкового параметра $t - X(t, \omega)$, де ω — множина елементарних подій. Якщо параметр t — час, то випадкова функція називається випадковим процесом.

Наведемо приклади.

1. Нехай у спокійній воді на кораблі стабілізовано антену радіолокатора. Почався вітер, а з ним і коливання корабля. Антена радіолокатора відхилилася від стабілізованого положення. Відхилення є випадковою величиною, можливі значення цієї випадкової величини змінюються з часом.

2. Величина сигналу на виході радіоприймача змінюється залежно від полів і часу.

3. Траєкторії частинок у броунівському русі є випадковими функціями.

4. Процес розпаду атомів радіоактивної речовини, або процес випромінювання електронів розжареним катодом електронної лампи, — випадковий процес Пуассона.

Позначимо через $X(t)$ число атомів радіоактивної речовини, що розпалися за час t . Тут $X(t)$ — випадкова величина, що набуває лише цілих значень. Процесом Пуассона описуються зміни навантаження телефонної станції, обриви ниток у прядильних машинах тощо.

5. Ордината профілю оброблюваної поверхні вздовж якоїсь кривої на поверхні є випадковою функцією довжини дуги кривої.

До поняття випадкової функції можна підійти ще таким чином. Наприклад, проводиться якесь складне випробування. Нехай $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$ — елементарні події, що відповідають цій складній події. Тоді випадкова величина є функцією від елементарної події $X = \psi(\omega)$, тобто кожній елементарній події (наприклад, у випробу-

ваннях Бернуллі: влучив — не влучив) відповідає одне з можливих значень x . Ставитимемо зараз у відповідність, наприклад, «влучив» не одне число, а числову функцію $x(t)$ не випадкового аргументу, визначеного в проміжку $t_1 < t \leq t_2$. Кожній елементарній події ω відповідатимуть різні функції, тому можна записати

$$X \rightarrow \begin{matrix} \omega_1, \omega_1, \dots, \omega_n, \\ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t). \end{matrix}$$

Функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ називаються **можливою реалізацією випадкової величини**.

Таким чином, випадковою функцією $X(t, \omega)$ називається випадкова величина, можливі значення якої є не випадкова функція не випадкового аргументу. При фіксованому $t = t_s$ випадкова функція перетворюється у випадкову величину $X(t_s, \omega)$. При $\omega = \omega_0$: $X(t, \omega_0)$ — це випадкова функція не випадкового аргументу. Для одновимірної випадкової функції функція і густина розподілу будуть функціями двох змінних x і t : $F(x, t)$, а для багатовимірної випадкової величини, наприклад:

$$X(X_1(t, \omega), X_2(t, \omega), X_3(t, \omega)) \rightarrow F(x_1, x_2, x_3, t).$$

Може статися, що для кожної випадкової величини є свій аргумент t_1, t_2, t_3 , тоді

$$F(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3); f(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3),$$

тобто, якщо подія описується n -вимірною випадковою величиною, то вона може бути випадковою функцією не більш як $2n$ дійсних змінних.

§ 7. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Як встановлено вище, випадкову величину задають законом розподілу. Однак, якщо закон розподілу невідомий, то використовують числа, що характеризують випадкову величину. Такі числа дістали назву числових характеристик випадкової величини. До них належать математичне сподівання і дисперсія.

7.1. Математичне сподівання одновимірної випадкової величини

Нехай дано одновимірну дискретну випадкову величину X , можливі значення якої x_1, x_2, \dots, x_n , а ймовірність появи цих значень відповідно p_1, p_2, \dots, p_n . Тоді **математичним сподіванням** дискретної випадкової величини називається

$$M[X] = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (7.1)$$

Наприклад, дано величину X , що набуває одного з можливих значень x_1, x_2, \dots, x_n з однаковою ймовірністю $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$.

Тоді

$$M[X] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (7.2)$$

Тут праворуч стоїть середнє значення випадкової величини. Саме тому вираз (7.1) часто називають середнім значенням випадкової величини.

Нехай дискретна випадкова величина X набуває значень $x_1 - m_1$ разів, $x_2 - m_2$ разів, $x_3 - m_3$ разів, ..., $x_k - m_k$ разів так, що

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n.$$

Тоді ймовірність появи x_1 буде $\frac{m_1}{n}$, $x_2 - \frac{m_2}{n}$, ..., $x_k - \frac{m_k}{n}$. За формулою (7.1) математичне сподівання

$$M[X] = \sum_{k=1}^n x_k p_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j m_j.$$

З іншого боку, знайдемо середнє значення X_c випадкової величини

$$X_c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j m_j.$$

Отже, $M[X] = X_c$, тобто математичне сподівання дискретної випадкової величини дорівнює її середньому значенню.

Механічне тлумачення формули (7.1). Запишемо (7.1) у вигляді

$$M[X] = \frac{\sum_{k=1}^n x_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k} = x_{\text{ц.м.}}$$

Нехай p_k — маси матеріальних точок, розміщених на числовій осі, координати цих точок x_k . Тоді формулу (7.1) можна розглядати як формулу центра мас (ц.м.).

Математичне сподівання називається центром розподілу випадкової величини.

Нехай дискретна випадкова величина X набуває множини значень $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ зі ймовірностями появи їх $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, тоді математичне сподівання

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (7.3)$$

Зрозуміло, що є сенс вести мову про ряд (7.3), якщо ряд збігається абсолютно, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty.$$

Якщо дана неперервна випадкова величина X , то, як було встановлено вище, ймовірність того, що випадкова величина набуває значення, що лежить у нескінченно малому околі точки x_k числової осі, дорівнює густині розподілу $f(x_k)$ та Δx_k . Отже, в цьому разі в (7.3) $x = x_k$, $p_k = f(x_k)\Delta x_k$, а сума перетворюється в інтеграл. Таким чином, для неперервної випадкової величини X , визначеної на (a, b) або всюди на числовій осі, що має густину розподілу $f(x)$, математичне сподівання

$$\alpha_1 = M[X] = \int_a^b x f(x) dx, \quad (7.4)$$

або

$$\alpha_1 = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

При цьому вважається, що невластний інтеграл (7.4) збіжний.

Далі треба ввести нове поняття — не випадкову функцію випадкової величини.

ВПРАВИ. 1. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , розподіл якої задається такою таблицею:

X	-1	0	1	2
P	0,25	0,5	0,1	0,15

Відповідь. $M[X] = 0,15$.

2. Знайти математичне сподівання випадкової величини X , що набуває значень k ($k = 1, 2, \dots$), з ймовірністю $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. *Відповідь.* $M[X] = 2$.

3. Знайти математичне сподівання числа влучень при залпі чотирьох стрільців, що мають ймовірності влучення відповідно 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. *Відповідь.* $M[X] = 3$.

4. З партії 50 виробів довільним чином вибрано шість. Знайти математичне сподівання числа бракованих серед них, якщо в партії бракованих виробів три. *Відповідь.* $M[X] = 0,36$.

5. Два стрільці стріляють по черзі по мішені до першого влучення. Знайти математичне сподівання числа зроблених пострілів, якщо для першого стрільця ймовірність влучень в одному пострілі дорівнює 0,8, а для другого — 0,9. *Відповідь.* $M[X] = 1,217$.

7.2. Невипадкова функція випадкової величини, її математичне сподівання і дисперсія. Початковий і центральний моменти

Нехай дано дві випадкові величини X та Y . Якщо кожному можливого значенню однієї з них ставиться у відповідність можливе значення іншої за певним законом, то кажуть, що одна з цих величин є не випадкова функція випадкової величини, або просто функція випадкової величини:

$$Y = \varphi(X).$$

Поставимо задачу визначення закону розподілу випадкової величини Y за законом розподілу X .

Якщо задано закон розподілу у вигляді таблиці, тобто X — дискретна випадкова величина, яка набуває значень x_1, x_2, \dots, x_n зі ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n , то тут може бути три випадки:

1) має місце взаємна однозначна відповідність між Y та X , тоді Y має теж n значень, а їхні ймовірності відповідно дорівнюють p_1, p_2, \dots, p_n ; 2) якщо кільком значенням аргументу X відповідає одне значення Y , то для обчислення ймовірності Y необхідно скласти ймовірності різних значень X ; 3) якщо відома густина $f(x)$ розподілу X , то

$$F_2(y) = P(\varphi(X) < y) = \int_{-\infty}^y f_1(x) dx.$$

Якщо функція $\varphi(X)$ строго зростає, тобто має обернену $X = \psi(y)$, то

$$F_2(y) = P(-\infty < \varphi(X) < y) = P(-\infty < X < x) = F_1(\psi(y)).$$

Для монотонно спадної функції

$$F_2(y) = P(-\infty < Y < y) = P(x + 0 < X < \infty) = 1 - F_1(\psi(y)).$$

Тепер, якщо $F_2(y)$ — диференційовна, то

$$f_2(y) = \frac{dF_2}{dy} = f_1(\psi(y)) \left| \frac{d\psi(y)}{dy} \right|. \quad (7.5)$$

Можна розглядати не випадкові функції кількох випадкових змінних $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Для такої випадкової величини Y функція розподілу

$$F(y) = P(Y < y) = P[\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) < y]$$

є ймовірність того, що випадковий вектор $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$, для якого $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) = \varphi(X)$, набере значення, менше за y .

Демо означення **математичного сподівання не випадкової величини** $Y = \varphi(X)$. Нехай не випадкова однозначна функція випадкової величини X задана: $Y = \varphi(X)$ і X набуває значень x_1, x_2, \dots, x_n зі ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n . Невипадкова функція $Y = \varphi(X)$ матиме можливі значення $y_k = \varphi(x_k)$, ймовірності появи

яких будуть ті самі, що й для X : p_1, p_2, \dots, p_n . Тоді математичне сподівання функції $Y = \varphi(X)$ можна обчислювати за формулою

$$M[\varphi(X)] = \sum_{k=1}^n y_k p_k = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) p_k. \quad (7.6)$$

У разі випадкової величини X , яка неперервно змінюється, зв'язаної з випадковою величиною Y не випадковою функцією $\varphi: Y = \varphi(X)$, математичне сподівання

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx, \quad (7.7)$$

де $f(x)$ — густина розподілу випадкової величини X , можливі значення якої розподілені всюди на числовій осі. При цьому вважається, що інтеграл (7.7) збіжний. Якщо можливі значення лежать всередині сегмента $[a, b]$, то в (7.7) границі інтегрування слід замінити на a і b . Якщо $\varphi(X) = x^r$, то вираз (7.6) запишеться у вигляді

$$\alpha_r = M[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx. \quad (7.8)$$

Надалі всі не власні інтеграли, що входять до формули, наприклад в (7.7), вважаються збіжними.

Вираз (7.8) називається початковим моментом r -го порядку випадкової величини X . Як видно з означення (7.4), математичне сподівання є початковим моментом першого порядку випадкової величини.

Початковий момент другого порядку

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Квадратний корінь з α_2 називається **середнім квадратним значенням** випадкової величини:

$$\beta = \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx}.$$

Ми розглянули математичне сподівання одновимірної випадкової величини. Для багатовимірної випадкової величини математичне

сподівання визначається як вектор, компонентами якого є математичні сподівання одновимірних випадкових величин:

$$M[\bar{X}] = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ M[X_2] \\ \dots \\ M[X_n] \end{pmatrix}.$$

Для двовимірного випадкового вектора $\bar{X}(X_1, X_2)$ з густиною розподілу $f(x_1, x_2)$, пов'язаного не випадковою функцією з іншою випадковою величиною \bar{Y} :

$$\bar{Y} = \varphi(X_1, X_2) = \varphi(\bar{X}),$$

математичне сподівання запишемо у вигляді

$$M[\varphi(\bar{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (7.9)$$

Математичне сподівання α_1 і момент другого порядку дуже часто використовуються в теорії ймовірностей, проте обидві ці величини дають лише середнє значення випадкової величини, а отже, не відбивають характеру розкиду випадкової величини відносно свого середнього значення.

Для оцінки розкиду випадкової величини відносно її математичного сподівання вводиться поняття дисперсії. **Дисперсією** дискретної випадкової величини X , можливими значеннями якої є x_1, x_2, \dots, x_n з імовірностями p_1, p_2, \dots, p_n , називається сума добутків квадратів різниць можливих значень випадкової величини та її математичного сподівання на відповідні цим можливим значенням імовірності:

$$D[X] = \sum_{k=1}^n (x_k - M[X])^2 p_k. \quad (7.10)$$

Із (7.10) випливає, що чим більший розкид випадкової величини відносно її математичного сподівання, тим більша дисперсія. Крім того, $D[X]$ на підставі (7.10) можна тлумачити як математичне сподівання квадрата відхилення можливих значень випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \quad (7.11)$$

Для неперервно розподіленої випадкової величини

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2 f(x) dx;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx. \quad (7.12)$$

Для скорочення запису, як правило $X - M[X]$ позначають через X^0 , і цю величину називають центрованою випадковою величиною:

$$X^0 = X - M[X]. \quad (7.13)$$

Центральним моментом r -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання r -го степеня центрованої випадкової величини X^0 :

$$\mu_r = M[X^{0r}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^r f(x) dx. \quad (7.14)$$

Із порівняння (7.14) і (7.12) випливає, що дисперсія є центральним моментом другого порядку

$$\mu_2 = M[X^{02}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx. \quad (7.15)$$

Звичайно замість центрального моменту другого порядку розглядають корінь квадратний з μ_2 :

$$\beta = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx} = \sqrt{D[X]} = \sigma_x. \quad (7.16)$$

Величину $\beta = \sigma_x$ називають **середнім квадратичним відхиленням** випадкової величини.

Якщо $Y = \varphi(X)$, то

$$D[Y] = D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M[\varphi(x)])^2 f(x) dx. \quad (7.17)$$

Наведемо приклади відшукування математичного сподівання і дисперсії для деяких типів розподілів.

Приклади. 1. Нехай X набуває значень 1 і 2 з імовірностями $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$ відповідно.

Знайти розподіл випадкової величини $Y = 2X + 1$, математичне сподівання і дисперсію.

Розв'язання. Можливими значеннями Y є $2 \cdot 1 + 1 = 3$ і $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Імовірності їх відповідно дорівнюють $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$:

$$M[X] = \frac{5}{3}; \quad M[Y] = \frac{13}{3}; \quad D[X] = \frac{2}{9}; \quad D[Y] = \frac{8}{9}.$$

2. Випадкова величина X набуває значень -1 ; 0 ; 1 з імовірностями $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ відповідно. Випадкова величина $Y = X^2$. Її можливими значеннями, як легко помітити, є 0 і 1 . Їхні ймовірності рівні між собою:

$$P(y = 0) = P(x = 0) = \frac{1}{2};$$

$$P(y = 1) = P(x = \pm 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини Y відповідно дорівнюють

$$M[Y] = M[X^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$D[Y] = D[X^2] = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. Нехай X має густину розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}; x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = \sin 2X$.

Розв'язання.

$$M[Y] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = - \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$D[Y] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^2 \frac{1}{2} \cos x dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) d \sin x = \left(\frac{2}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{15}.$$

ВПРАВИ. 1. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X , що має таку густину розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} & \text{при } |x| < a; \\ 0 & \text{при } |x| \geq a. \end{cases}$$

Відповідь. $M[X] = 0$; $D[X] = \frac{a^2}{2}$.

2. Густина ймовірності випадкової величини X має такий вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ або } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $M[X]$ і $D[X]$. Відповідь. $M[X] = \frac{\pi}{2} - 1$; $D[X] = \pi - 3$.

3. Знайти закон розподілу випадкової величини X , що набуває значень x_1 і x_2 з імовірностями $0,4$ і p , якщо $M[X] = 3,2$; $D[X] = 0,96$ за умови, що $x_1 < x_2$.

Відповідь.

X	2	4
P	0,4	0,6

4. Дискретна випадкова величина X має такий розподіл:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти $M[Y]$ і $D[Y]$, якщо $Y = 2^X$. Відповідь. $M[Y] = 2,4$; $D[Y] = 1,99$.

§ 8. ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ І ДИСПЕРСІЇ

1. Математичне сподівання невикладкової величини C дорівнює цій величині, а дисперсія її дорівнює нулю. Дійсно, невикладкову величину C можна розглядати як дискретну випадкову величину X , що набуває єдиного значення C з імовірністю 1. Тому

$$M[C] = C. \quad (8.1)$$

З іншого боку,

$$M[C] = \int_{-\infty}^{\infty} C f(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Проте оскільки $M[C] = C$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (8.2)$$

Тоді $f(x)$ належить до δ -функцій, які, як відомо, визначаються за правилом (див. гл. 3, формула (5.44)). Далі вважатимемо, що густина розподілу сталої C дорівнює δ -функції $\delta(x - \tau)$.

Дисперсія

$$D[C] = \int_{-\infty}^{\infty} (C - M[C])^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (C - C)^2 f(x) dx = 0.$$

2. Невипадковий множник C можна виносити за знак математичного сподівання у першому степені, а за знак дисперсії — у другому степені. Дійсно, нехай існують математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X :

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx; \quad D[X] = M[X^2].$$

Знайдемо $M[CX]$ і $D[CX]$. Згідно з (7.7)

$$M[CX] = \int_{-\infty}^{\infty} Cx f(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = CM[X]. \quad (8.3)$$

За формулою (7.12)

$$\begin{aligned} D[CX] &= \int_{-\infty}^{\infty} (Cx - CM[X])^2 f(x) dx = \\ &= C^2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx = C^2 D[X]. \end{aligned} \quad (8.4)$$

3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань:

$$M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]. \quad (8.5)$$

Для доведення (8.5) скористаємося (7.9), вважаючи

$$\varphi(x, y) = \varphi(X_1, X_2) = X_1 + X_2 = X + Y.$$

Тоді

$$\begin{aligned} M[X_1 + X_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Згідно з (6.10) інтеграли, що містяться у малих дужках, відповідно дорівнюють $f_1(x)$ і $f_2(y)$. Отже,

$$M[X_1 + X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) dy = M[X_1] + M[X_2].$$

4. Якщо $X_1 > X_2$, то $M[X_1] \geq M[X_2]$. Дійсно, згідно з (7.9)

$$M[X_1 - X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - y) f(x, y) dx dy.$$

Оскільки $X > Y$ і $f(x, y) \geq 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - y) f(x, y) dx dy \geq 0.$$

Отже,

$$M[X_1 - X_2] \geq 0, \text{ але } M[X_1 - X_2] = M[X_1] - M[X_2].$$

Остаточно маємо

$$M[X_1] \geq M[X_2].$$

5. Імовірність того, що абсолютне значення випадкової величини X виявиться більшим деякого наперед заданого додатного числа ϵ , не перевищує математичного сподівання квадрата модуля цієї випадкової величини, поділеного на квадрат заданого числа ϵ :

$$P[|X| > \epsilon] \leq \frac{M[|X|^2]}{\epsilon^2}. \quad (8.6)$$

Нерівність (8.6) називається **нерівністю Чебишова**.

Для доведення (8.6) введемо випадкову величину X_1 :

$$X_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } |X| \leq \epsilon; \\ \epsilon & \text{при } |X| > \epsilon \end{cases} \text{ або } Y = \begin{cases} 0 & \text{при } -\epsilon \leq X \leq \epsilon; \\ \epsilon & \text{при } |X| > \epsilon. \end{cases}$$

Для X_1 виконується нерівність $X_1 < |X|$. Тоді згідно з властивістю 4

$$M[X_1] \leq M[|X|]; \quad M[X_1^2] \leq M[|X|^2];$$

$$M[X_1^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 0 \cdot f(y) dy + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varepsilon^2 f(y) dy + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 f(y) dy = \\ = \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(y) dy + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(y) dy \right) = \varepsilon^2 P[|X| > \varepsilon]$$

Тоді

$$\varepsilon^2 P[|X| > \varepsilon] \leq M[|X|^2]$$

Звідси і випливає нерівність (8.6).

Для викладу інших властивостей введемо поняття незалежних випадкових величин. Дві випадкові величини X_1 і X_2 називаються **незалежними**, якщо функція розподілу вектора $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ дорівнює добутку функцій розподілу компонентів вектора, тобто

$$F(x, y) = F(x)F(y); \quad F(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2).$$

Можна показати, що необхідною і достатньою умовою незалежності двох випадкових величин є виконання умов

$$P[a \leq X_1 < b, c \leq X_2 < d] = P[a \leq X_1 < b]P[c \leq X_2 < d]$$

або

$$f(x, y) = f(x)f(y). \quad (8.7)$$

Випадкові величини називаються незалежними у сукупності, якщо їхня сумісна функція розподілу

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \dots F(x_n).$$

При цьому для густини розподілу виконується умова

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n).$$

Наприклад, нехай здійснюються n випробувань Бернуллі, в яких досліджується поява незалежних подій A . Випадковою величиною тут буде число появ подій A у цих випробуваннях — X . Можливі значення X : $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = n$. Величини x_1, x_2, \dots, x_{n+1} є незалежними.

6. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань співмножників:

$$M[X_1 \cdot X_2] = M[X_1] \cdot M[X_2]. \quad (8.8)$$

Скористаємося (7.9), покладаючи $\varphi(X, Y) = \varphi[X_1 X_2] = X_1 X_2$. Тоді

$$M[X_1 \cdot X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy.$$

За умовою (8.7)

$$f(x, y) = f(x)f(y),$$

тоді

$$M[X_1 \cdot X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf(y) dy = M[X_1] \cdot M[X_2].$$

7. Математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю, а дисперсія дорівнює дисперсії випадкової величини:

$$M[X^0] = M[X - M[X]] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])f(x) dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx - M[X] \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = M[X] - M[X] = 0.$$

Нагадаємо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Тоді

$$D[X^0] = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - M[X] - M[x - M[X]]\}^2 f(x) dx.$$

Однак $M[X - M[X]] = 0$, тоді

$$D[X^0] = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - M[X]\}^2 f(x) dx = D[X].$$

8. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків:

$$D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2]. \quad (8.9)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} D[X_1 + X_2] &= M[(X_1 + X_2 - M[X_1 + X_2])]^2 = \\ &= M[(X_1 - M[X_1]) + (X_2 - M[X_2])]^2 = \\ &= M[(X_1 - M[X_1])^2] + M[(X_2 - M[X_2])^2] + \\ &+ M[2(X_1 - M[X_1])(X_2 - M[X_2])] = D[X_1] + D[X_2], \end{aligned}$$

оскільки

$$M[(X_1 - M[X_1])(X_2 - M[X_2])] = 0.$$

9. Знайдемо вираз дисперсії через математичне сподівання. Для неперервної випадкової величини маємо

$$\begin{aligned} M[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx; \quad D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)dx; \\ D[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} xM[X]f(x)dx + M^2[X] \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx; \\ D[X] &= M[X^2] - 2M^2[X] + M^2[X] = M[X^2] - M^2[X]; \\ D[X] &= M[X^2] - M^2[X]. \quad (8.10) \end{aligned}$$

Викладені властивості можна поширити на n -вимірні випадкові величини.

ВПРАВИ. 1. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Y = 2X + 1$, якщо $M[X] = 2$, $D[X] = 1$. *Відповідь.* $M[Y] = 5$; $D[Y] = 4$.

2. Знайти дисперсію випадкової величини X , якщо $M[X] = 1$, $M[X^2] = 5$. *Відповідь.* $D[X] = 4$.

3. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = XY$, де X і Y — незалежні величини: $M[X] = 0$, $M[Y] = 1$, $D[X] = 2$, $D[Y] = 1$. *Відповідь.* $D[Z] = 4$.

4. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, розподіл якої задано таблицею:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Відповідь. $M[X] = 1.5$; $D[X] = 1$.

§ 9. МОМЕНТИ БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МОМЕНТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Нехай задано n -вимірну випадкову величину $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Для цієї величини так само, як і для одновимірної, вводиться поняття двох моментів: мішаного початкового моменту і мішаного центрального моменту відповідного порядку.

Мішаним початковим моментом порядку $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ називається величина

$$\alpha_{k_1+k_2+\dots+k_n} = M[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}]. \quad (9.1)$$

Мішаним центральним моментом порядку $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ називається величина

$$\beta_{k_1+k_2+\dots+k_n} = M[X_1^{0k_1} X_2^{0k_2} \dots X_n^{0k_n}]. \quad (9.2)$$

Мішаний початковий момент першого порядку має вигляд

$$\alpha_{0\dots 1 \ 0 \ 0} = M[(X_1)^0, (X_2)^0, \dots, (X_i)^1, (X_{i+1})^0, \dots, (X_n)^0] = M[X_i].$$

Це і є математичне сподівання n -вимірного випадкового вектора (див. п. 7.2):

$$M[X] = \begin{pmatrix} M[X_1] \\ M[X_2] \\ \dots \\ M[X_n] \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Властивості математичного сподівання (9.3) збігаються з властивостями математичного сподівання одновимірної випадкової величини. Серед мішаних центральних моментів особливо виділяють момент другого порядку двох випадкових величин X_i^0, X_j^0 :

$$K_{ij} = \beta_{11} = M[X_i^{01} X_j^{01}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X_i])(y - M[X_j]) f(x, y) dx dy;$$

$$K_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j), \quad (9.4)$$

де $f(x, y)$ — густина розподілу випадкового вектора $\bar{X} = \begin{bmatrix} X_i \\ X_j \end{bmatrix}$.

Вираз (9.4) називається **кореляційним моментом**, моментом зв'язку двох випадкових величин, або коваріацією двох випадкових величин.

Властивості кореляційного моменту.

1. Кореляційний момент однієї і тієї самої випадкової величини дорівнює її дисперсії (це випливає з (9.4), якщо покласти $X_i = X_j$).

2. Кореляційний момент має переставні властивості ($K_{ij} = K_{ji}$) щодо добутку випадкових величин. Це випливає з (9.4).

3. Кореляційний момент двох незалежних випадкових величин дорівнює нулю. Дійсно, $f(x, y) = f(x)f(y)$. Тоді

$$K_{12} = \beta_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X_1])f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - M[X_2])f(y)dy.$$

Однак

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X_1])f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - M[X_1] \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= M[X_1] - M[X_1] = 0.$$

Згадаємо, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Отже, $K_{12} = 0$. Виходячи з цієї властивості, робимо висновок, що випадкові величини поділяються на два класи: некорельовані, для яких $K_{12} = 0$, і корельовані, для яких $K_{12} \neq 0$.

4. Пов'яжемо коваріацію з дисперсією. Для цього знаходимо

$$M[(X_i^0 - \lambda X_j^0)^2] = M[X_i^{02} - 2\lambda X_i^0 X_j^0 + \lambda^2 X_j^{02}] =$$

$$= M[X_i^{02}] - 2K_{ij}\lambda + \lambda^2 M[X_j^{02}] = D[X_i] - 2K_{ij}\lambda + \lambda^2 D[X_j],$$

де λ — параметр. Враховуючи, що $M[(X_i^0 - \lambda X_j^0)^2] \geq 0$, маємо

$$(D[X_i] - 2\lambda K_{ij} + \lambda^2 D[X_j]) \geq 0.$$

Покладемо $\lambda = \frac{D[X_i]}{K_{ij}}$ і підставимо це значення в попередню нерівність:

$$-D[X_i] + \frac{D^2[X_i]D[X_j]}{K_{ij}^2} \geq 0 \quad \text{або} \quad \frac{D[X_i]D[X_j]}{K_{ij}^2} \geq 1;$$

$$K_{ij}^2 \leq D[X_i]D[X_j];$$

$$K_{ij} \leq \sqrt{D[X_i]D[X_j]} = \sqrt{D[X_i]}\sqrt{D[X_j]} = \sigma[X_i]\sigma[X_j].$$

Отже,

$$K_{ij} \leq \sqrt{D[X_i]D[X_j]} = \sigma[X_i]\sigma[X_j]. \quad (9.5)$$

Із цього співвідношення випливає, що кореляційний момент указує на ступінь зв'язності двох випадкових величин. Звичайно для оцінки ступеня зв'язності вводять коефіцієнт кореляції

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{D[X_i]D[X_j]}}. \quad (9.6)$$

Для n -вимірному випадкового вектора $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ вводять кореляційну матрицю

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Отже, із раніше доведеного випливає, що $K_{ij} = K_{ji}$, тобто матриця K є симетричною.

Знайдемо дисперсію будь-яких двох величин:

$$\begin{aligned} D[X_i + X_j] &= M[(X_i - M[X_i]) + (X_j - M[X_j])]^2 = \\ &= D[X_i] + 2M(X_i - M[X_i])(X_j - M[X_j]) + D[X_j]; \\ D[X_i + X_j] &= D[X_i] + 2K_{ij} + D[X_j]; \\ D[X_i - X_j] &= D[X_i] - 2K_{ij} + D[X_j]. \end{aligned}$$

Однак це показує, що для будь-яких випадкових величин

$$D[X_i \pm X_j] = D[X_i] \pm 2K_{ij} + D[X_j].$$

Доведемо, що коефіцієнт кореляції r_{ij} задовольняє умову $|r_{ij}| \leq 1$.

Для доведення розглянемо центровану випадкову величину

$$X_i^0 = X_i - M[X_i].$$

За властивістю 7 з § 8

$$D[X_i^0] = M[X_i - M[X_i]]^2 = D[X_i].$$

Введемо нормовану центровану випадкову величину

$$X_i^H = \frac{X_i - M[X_i]}{\sqrt{D[X_i]}} = \frac{X_i - M[X_i]}{\sigma[X_i]}.$$

Знайдемо дисперсію X_i^H :

$$D[X_i^H] = \frac{D[X_i]}{\sigma^2[X_i]} = \frac{D[X_i]}{D[X_i]} = 1.$$

Тепер визначимо

$$\begin{aligned} D[X_i^H \pm X_j^H] &= D[X_i^H] + D[X_j^H] \pm 2M[X_i^H X_j^H] = \\ &= 1 + 1 \pm 2 \frac{K_{ij}}{\sigma[X_i] \cdot \sigma[X_j]} = 2 \pm 2r_{ij}. \end{aligned}$$

Оскільки $D[X_i^H \pm X_j^H] \geq 0$, то $2 \pm 2r_{ij} \geq 0$. Звідси $-1 \leq r_{ij} \leq 1$ або $|r_{ij}| \leq 1$. Тоді $r_{ij} = 0$, якщо X_i і X_j незалежні; $r_{ij} = 1$, якщо величини збігаються.

Можна довести, що коли зв'язок між випадковими величинами лінійний, то коефіцієнт кореляції дорівнює одиниці. Правильним є й обернене припущення: якщо коефіцієнт кореляції наближається до одиниці, то зв'язок між випадковими величинами лінійний.

Знайдемо дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкового вектора з незалежними координатами.

Нехай \vec{X} — випадковий вектор з незалежними координатами X_1, X_2, \dots, X_n . Тоді

$$\begin{aligned} D[X_1 + X_2 + \dots + X_n] &= \sum_{i=1}^n D[X_i]; \\ \sigma[X_1 + X_2 + \dots + X_n] &= \sqrt{\sum_{i=1}^n D[X_i]} = \sigma; \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma^2[X_i]. \end{aligned}$$

Якщо $D[X_i] = D = \sigma_1^2$ для всіх i , то $\sigma^2 = n\sigma_1^2$.

§ 10. НАЙБІЛЬШ ПОШИРЕНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ОДНОВИМІРНИХ І БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

10.1. Біномний розподіл Бернуллі та розподіл Пуассона

Обидва розподіли задаються у вигляді таблиць, що наведені в § 4. Нехай X — число виникнень події в n взаємно незалежних випробуваннях, X_i — в i -му випробуванні. Тоді

$$X = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Математичне сподівання біномного розподілу з параметрами n і p запишемо у вигляді $M[X] = np$.

Дисперсія

$$D[X] = \sum_{i=1}^n D[X_i]. \quad (10.1)$$

Обчислимо $D[X_i]$ за формулою $D[X_i] = M[X_i^2] - M^2[X_i]$. Оскільки $M[X_i] = p$, то залишилося знайти $M[X_i^2]$. Величина X_i^2 може набувати лише двох значень: 1^2 з імовірністю p і 0^2 з імовірністю q . Отже,

$$M[X_i^2] = 1^2 p + 0^2 q = p.$$

Таким чином,

$$D[X_i] = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Дисперсія будь-якої з решти випадкових величин теж дорівнює pq . Остаточно маємо

$$D[X] = \sum_{i=1}^n pq = npq; \quad \sigma[X] = \sqrt{npq}. \quad (10.2)$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію для дискретної випадкової величини X , розподіленої за законом Пуассона.

За означенням математичного сподівання випадкової величини X , що набуває зліченного k числа можливих значень,

$$\begin{aligned} M[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

тобто

$$M[X] = \lambda; \quad (10.3)$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = M[X^2] - \lambda^2;$$

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right] = \\ &= e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right] = e^{-\lambda} [\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}] = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Отже,

$$D[X] = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda. \quad (10.4)$$

10.2. Рівномірний розподіл

Розподіл імовірностей називають **рівномірним**, якщо на інтервалі, до якого належать всі можливі значення випадкової величини, густина розподілу зберігає стале значення c при $x \in (a, b)$.

Знайдемо густину ймовірності рівномірного розподілу $f(x)$, вважаючи, що всі можливі значення випадкової величини містяться в інтервалі (a, b) , на якому $f(x)$ зберігає стале значення c . За умовою $f(x) = 0$ при $x < a$ і $x > b$.

Знайдемо сталу c . Оскільки всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b) , то має виконуватися співвідношення

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad \text{або} \quad \int_a^b c dx = 1.$$

Звідси

$$c = \frac{1}{b - a}.$$

Отже, густина ймовірності рівномірного розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (10.5)$$

Знайдемо функцію розподілу рівномірно розподіленої на (a, b) випадкової величини

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx:$$

$$1) \text{ для } x < a \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0;$$

$$2) \text{ для } a < x \leq b \quad F(x) = \int_a^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a};$$

$$3) \text{ для } x > b \quad F(x) = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dx + \int_a^b \frac{1}{b-a} dx + \int_b^{\infty} 0 \cdot dx = 1.$$

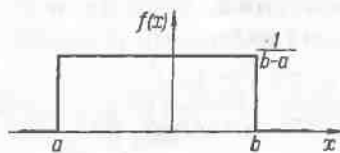


Рис. 6.11

Прикладом рівномірного розподілу може служити показ стрілки терезів, яка вказує проміжне значення між двома цілими значеннями для товару, що зважується.

Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 6.11. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі (a, b) :

$$M[X] = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}. \quad (10.6)$$

Для відшукування дисперсії випадкової величини X , рівномірно розподіленої на інтервалі (a, b) , скористаємося формулою

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X].$$

Знаходимо

$$M[X^2] = \int_a^b x^2 dF(x) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Оскільки $M[X] = \frac{a+b}{2}$, то остаточно маємо

$$D[X] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (10.7)$$

10.3. Нормальний розподіл

Нормальним називають розподіл імовірності неперервної випадкової величини, що описується густиною

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (10.8)$$

де σ_x і m — поки що невизначені параметри.

Функція нормального розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma_x^2}} dt.$$

Визначимо зміст параметрів σ_x і m нормального розподілу. Для цього знайдемо математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Нехай $\frac{x-m}{\sigma_x} = z$, $x = \sigma_x z + m$; $dx = \sigma_x dz$, тоді

$$\begin{aligned} M[X] &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_x z + m) e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma_x dz = \\ &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Для відшукування $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ скористаємося умовою $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Для нормального розподілу цю умову запишемо у вигляді

$$\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}} dx = 1.$$

Перейшовши до нових позначень, дістанемо $\frac{x-m}{\sigma_x} = z$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 \text{ або } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}. \quad (10.9)$$

Тоді

$$M[X] = m. \quad (10.10)$$

Отже, параметр розподілу m є математичним сподіванням нормально розподіленої випадкової величини. А тепер знаходимо

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}} dx;$$

$$D[X] = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left[\begin{array}{l} u = z, \quad dv = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ dz = du, \quad v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-z e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma_x^2.$$

Отже,

$$D[X] = \sigma_x^2; \quad \sigma_x = \sqrt{D[X]}. \quad (10.11)$$

Таким чином, другим параметром нормального розподілу є середнім квадратичним відхиленням.

Графік густини розподілу випадкової величини зображено на рис. 6.12. Як впливає з виразу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}},$$

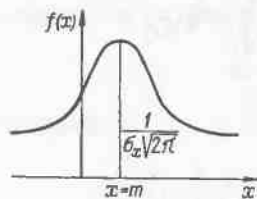


Рис. 6.12

$f(x)$ має максимум у точці $x = m$. Значення $x = m$, при якому випадкова величина має найбільшу ймовірність (густину розподілу ймовірності), називається **модою** випадкової величини (див. (6.4)).

Із рис. 6.12 випливає, що $f(x)$ симетрична відносно прямої $x = m$. Виходячи із властивостей густини розподілу, маємо $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Для нормального розподілу цей інтеграл можна записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^m f(x) dx + \int_m^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad \int_{-\infty}^m f(x) dx = \int_m^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

або

$$P(x < m) = P(x > m) = \frac{1}{2}.$$

Помічаємо, що випадкова величина рівноймовірно набуває значення більшого або меншого ніж m . Число M_l , для якого

$$\int_{-\infty}^{M_l} f(x) dx = \int_{M_l}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

називається медіаною випадкової величини. Отже, у нормальному законі математичним сподіванням випадкової величини є її медіана. При зміні m не змінюється характер розподілу, а графік розподілу лише зміщується праворуч або ліворуч. Щодо середнього квадратичного відхилення величини, то з умови (рис. 6.13)

$$f_{\max} = f(m) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$$

впливає, що при зміні σ_x змінюється висота підйому кривої. Зі зростанням дисперсії ймовірність значень, віддалених від центра розсіювання, зменшується.

Поставимо таку задачу: знайти ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X потрапить в інтервал (a, b) . Раніше було показано, що

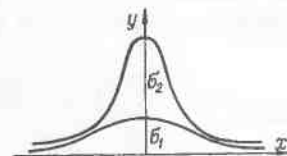


Рис. 6.13

$$P[a \leq X < b] = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (10.12)$$

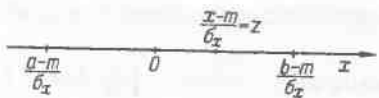


Рис. 6.14

Тоді для цієї змінної (рис. 6.14) межі інтегрування будуть такі:

$$z_{\text{н}} = \frac{a-m}{\sigma_x} \text{ (нижня)} \text{ і } z_{\text{в}} = \frac{b-m}{\sigma_x} \text{ (верхня);}$$

$$dz = \frac{dx}{\sigma_x}; \quad P[a \leq X < b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma_x}}^{\frac{b-m}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Скористаємося введеною раніше функцією Гаусса $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ і функцією Лапласа

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Запишемо $P[a \leq X < b]$ через функцію Лапласа. Для цього передусім зазначимо, що

$$\Phi(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

і покладемо $z = -v$. Тоді $v_{\text{н}} = 0$, $v_{\text{в}} = u$ і

$$\Phi(-u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{v^2}{2}} dv = -\Phi(u),$$

тобто функція Лапласа є непарною. Тепер

$$\begin{aligned} P[a \leq X < b] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{b-m}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_0^{\frac{a-m}{\sigma_x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \\ &= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma_x}\right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Якщо $a = m - c$, $b = m + c$, то (рис. 6.15)

$$P[m - c \leq X < m + c] = \Phi\left(\frac{c}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{c}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma_x}\right).$$

Останню рівність можна записати у вигляді

$$P[|x - m| < c] = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma_x}\right). \quad (10.14)$$

Нехай $c = 3\sigma_x$, тоді

$$P[|x - m| < 3\sigma_x] = 2\Phi(3);$$

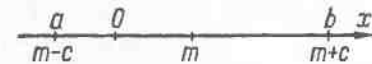


Рис. 6.15

За табл. 3.2 (див. п. 3.12) $\Phi(3) = 0,49865$, тому

$$\begin{aligned} P[|X - m| < 3\sigma_x] &\approx 0,9973; \\ P[|X - m| > 3\sigma_x] &\approx 0,0027 \text{ (0,27 \%)}. \end{aligned}$$

Якщо випадкова величина підпорядковується нормальному закону, то ймовірність її відхилення від математичного сподівання, що більше трьох середніх квадратичних помилок, близька до нуля. Це є **правилом трьох сигм**.

Розглянемо тепер двовимірний нормальний закон розподілу з густиною розподілу $f(x, y)$, якщо X, Y — незалежні:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]\right\}. \quad (10.15)$$

Введемо такі позначення:

$$E_x = \rho\sqrt{2}\sigma_x; \quad E_y = \rho\sqrt{2}\sigma_y; \quad \sigma_x = \frac{E_x}{\rho\sqrt{2}}; \quad \sigma_y = \frac{E_y}{\rho\sqrt{2}},$$

де σ_x і σ_y — головні відхилення.

Тепер знайдемо такі величини:

$$1) \frac{x - m_x}{\sigma_x} = \frac{(x - m_x)\rho\sqrt{2}}{E_x}; \quad 2) \frac{y - m_y}{\sigma_y} = \frac{(y - m_y)\rho\sqrt{2}}{E_y};$$

$$3) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y - m_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] = \left[\frac{(x - m_x)^2}{E_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{E_y^2} \right] \rho^2.$$

Густина розподілу набирає вигляду

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{(x - m_x)^2}{E_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{E_y^2} \right] \right\}.$$

Уведемо позначення $x - m_x = u$, $y - m_y = v$, тоді

$$f(u, v) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{u^2}{E_x^2} + \frac{v^2}{E_y^2} \right] \right\}.$$

Останнє рівняння є рівнянням поверхні. Розглянемо лінії рівняння цієї поверхні:

$$\frac{u^2}{E_x^2} + \frac{v^2}{E_y^2} = k^2 = \text{const}.$$

Після ділення на k^2 дістанемо

$$\frac{u^2}{(kE_x)^2} + \frac{v^2}{(kE_y)^2} = 1.$$

Це еліпс розсіяння. Тоді

$$f(u, v) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} \exp \left\{ -\rho^2 k^2 \right\}.$$

При $k = 1$ еліпс розсіяння називається одиничним, при $k = 4$ — повним. Імовірність потрапляння в останній дорівнює 0,97. Імовірність потрапляння у прямокутник

$$\begin{aligned} P[\alpha_1 \leq X < \beta_1; \alpha_2 \leq Y < \beta_2] &= \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} \exp \left\{ -\rho^2 \left[\frac{u^2}{E_x^2} + \frac{v^2}{E_y^2} \right] \right\} dudv = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\rho}{E_x \sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\rho^2 \frac{u^2}{E_x^2} \right\} du \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{\rho}{E_y \sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\rho^2 \frac{v^2}{E_y^2} \right\} dv = \\ &= 4 \left[\Phi \left(\frac{\beta_1}{E_x} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha_1}{E_x} \right) \right] \left[\Phi \left(\frac{\beta_2}{E_y} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha_2}{E_y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Нарешті, наведемо визначення n -вимірного нормального розподілу: випадкова величина $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ має нормальний розподіл, якщо сумісна густина розподілу її координат визначається за формулою

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}, \quad (10.17)$$

де $Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ — додатно визначена квадратична форма; k — кореляційна матриця; $|k|$ — її визначник. Якщо координати нормально розподіленої n -вимірної випадкової величини незалежні, то густина розподілу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m_k)^2}{\sigma_k^2} \right\}, \quad (10.18)$$

де

$$\sigma_k^2 = D[X_k]. \quad (10.19)$$

Наведемо ще **логарифмічний нормальний розподіл** одновимірної випадкової величини. Це розподіл, густина ймовірності якого обчислюється за формулою

$$f(x) = \frac{\lg e}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left\{ -\frac{(\lg x - m)^2}{2\sigma_x^2} \right\}. \quad (10.20)$$

Математичне сподівання і дисперсія такої випадкової величини визначаються аналогічно (10.10) і (10.11).

Розподілом χ^2 називається розподіл випадкової величини X , яка залежить від n незалежних випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , кожна з яких розподілена за одним і тим самим нормальним законом із сталими параметрами $m = 0$ і $\sigma = 1$ (останнє не обов'язково) і

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Густина розподілу χ^2 визначається за формулою

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 < x < +\infty,$$

де $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy$ — гамма-функція (див. ч. I. гл. 6, § 10).

При $x \leq 0$ густина розподілу $f_n(x) = 0$.

10.4. Експоненціальний розподіл

Експоненціальний (показниковий) розподіл — це розподіл неперервної випадкової величини X з параметром $\lambda > 0$, заданої законом

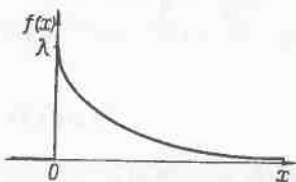


Рис. 6.16

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases} \quad (10.21)$$

Графік густини експоненціального розподілу зображено на рис. 6.16. Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz = \int_0^x \lambda e^{-\lambda z} dz = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (10.22)$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 6.17.

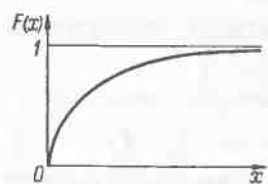


Рис. 6.17

Математичне сподівання

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda};$$

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}. \quad (10.23)$$

Дисперсія

$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (10.24)$$

Імовірність потрапляння в напівсегмент

$$P[a \leq X < b] = \int_a^b f(x) dx = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b};$$

$$P[a \leq X < b] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \quad (10.25)$$

Експоненціальний розподіл використовується в теорії надійності. Функція надійності $R(t)$ визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t : $R(t) = \exp[-\lambda t]$.

10.5. Деякі інші розподіли

Геометричний розподіл. Нехай здійснюються незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність настання події дорівнює p ($1 - p = q$). Випробування припиняються з настанням події A . Нехай у перших $k - 1$ випробуваннях подія A не відбулася, а в k -му випробуванні настала. Ймовірність цієї події дорівнює $P[X = k] = pq^{k-1}$. Такий розподіл називають геометричним. Математичне сподівання геометричного розподілу

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k P[X = k] = 1p + 2pq + 3pq^2 + \dots + npq^{n-1} + \dots =$$

$$= p[1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots].$$

Дослідимо на збіжність ряд, що міститься у квадратних дужках. Для цього знайдемо його n -ну зрізану суму

$$s_n = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q :

$$s_n q = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n.$$

Віднімемо від першої рівності другу:

$$s_n - s_n q = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} - nq^n.$$

Перші n членів є геометричною прогресією зі знаменником q і першим членом, що дорівнює одиниці. Тому

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Тоді

$$s_n(1 - q) = \frac{1 - q^n}{1 - q} - nq^n,$$

звідки

$$s_n = \frac{1 - q^n}{(1 - q)^2} - \frac{nq^n}{1 - q}.$$

Враховуючи, що $0 < q < 1$, знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

Отже,

$$M[X] = \frac{p}{(1 - q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Дисперсію геометричного розподілу знаходимо за формулою

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X].$$

У цій формулі $M^2[X] = \frac{1}{p^2}$. Залишилося визначити

$$\begin{aligned} M[X^2] &= 1^2 p + 2^2 p q + 3^2 p q^2 + \dots + k^2 p q^{k-1} + \dots = \\ &= p[1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \dots + k^2 q^{k-1} + \dots]. \end{aligned}$$

Можна показати, що

$$1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \dots + k^2 q^{k-1} + \dots = \frac{1 + q}{(1 - q)^3}.$$

Тоді

$$M[X^2] = p \frac{1 + (1 - p)}{p^3} = \frac{2 - p}{p^2}.$$

Отже,

$$D[X] = \frac{2 - p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Розподіл Вейбулла. Розподіл із густиною

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right], & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — параметри, називається розподілом Вейбулла.

Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right],$$

а математичне сподівання —

$$M[X] = \beta \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) = \frac{\beta}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

де $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ — гамма-функція.

Дисперсія розподілу Вейбулла має вигляд

$$D[X] = \beta^2 \left\{ \frac{2}{\alpha} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^2 \right\}.$$

Цей розподіл описує час безвідмовної роботи деяких пристроїв (електронні лампи, реле, кульковий підшипник тощо). Його застосовують для оцінки надійності пристроїв з урахуванням періоду спрацювання.

Наведемо окремі випадки цього розподілу (рис. 6.18):

а) при $\alpha = 1$, $\frac{1}{\beta} = \lambda$ дістаємо ек-

споненціальний розподіл з параметром λ ;

б) при $\alpha = 2$ дістаємо розподіл Релея

$$f(x) = \frac{2x}{\beta^2} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^2}.$$

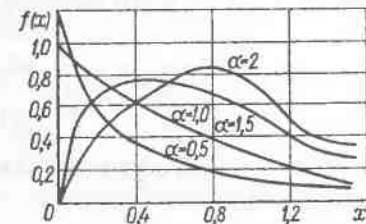


Рис. 6.18

На практиці аналітичне визначення параметрів розподілу Вейбулла за статистичними даними є досить складною задачею. Використовують наближений метод, в основу якого покладено перетворення

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}; \quad \frac{1}{1-F(x)} = e^{\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha};$$

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(x)}\right] = \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha; \quad \ln\ln\left[\frac{1}{1-F(x)}\right] = \alpha \ln x - \alpha \ln \beta.$$

Звідси випливає, що залежність між $\ln\ln[1-F(x)]^{-1}$ і $\ln x$ лінійна.

Маючи дані випробувань, можна для будь-яких двох значень x обчислити значення $F(x)$, а із системи двох рівнянь з двома невідомими α і β знайти їх.

Бета-розподіл. Розподіл із густиною

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

називається бета-розподілом. Він залежить від двох додатних параметрів a і b . Нормальний множник $B(a,b)$ (так звана бета-функція, див. ч. I, гл. 6, § 10) виражається формулою

$$B(a,b) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1} dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

де $\Gamma(a)$ — гамма-функція. Якщо a і b — цілі додатні числа, то

$$B(a,b) = \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Якщо випадкова величина X підпорядкована бета-розподілу, то її математичне сподівання і дисперсія виражаються формулами

$$M[X] = \frac{a}{a+b}; \quad D[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

§ 11. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Про те, яких значень набуде випадкова величина, сказати наперед щось певно важко — все залежить від сукупності випадкових обставин. Проте якщо таких обставин дуже багато, то виявляється, що можна передбачити перебіг досліду або явища. Такі умови, що дають змогу передбачити явище при великій кількості величин, дістали назву **закону великих чисел**, або граничних теорем. Зупинимось на двох таких теоремах: Чебишова і Бернуллі.

Нагадаємо нерівність Чебишова (формула (8.8)). Якщо існує математичне сподівання квадрата випадкової величини, то має місце нерівність

$$P\{|X| \geq \epsilon\} \leq \frac{M[X^2]}{\epsilon^2}. \quad (11.1)$$

Якщо $M[X^2] \leq \delta < \epsilon^2$, то $P\{|X| \geq \epsilon\} \leq \epsilon$.

Отже, якщо математичне сподівання квадрата випадкової величини є нескінченно малою величиною, то ймовірність того, що абсолютне значення випадкової величини перевищить цю нескінченно малу величину, наближається до нуля. Отже, за цих умов випадкова величина з імовірністю, близькою до одиниці, набуває нескінченно малих значень. Нерівність (11.1) називається другою нерівністю Чебишова. Запишемо першу нерівність Чебишова. Якщо існує $M[|X|]$, то для всіх $\epsilon > 0$

$$P\{|X| > \epsilon\} \leq \frac{M[|X|]}{\epsilon}.$$

Зокрема, якщо $x \geq 0$, то

$$P\{X > \epsilon\} \leq \frac{M[X]}{\epsilon}.$$

Тепер як випадкову величину виберемо центровану випадкову величину $X^0 = X - M[X]$ і застосуємо до неї другу нерівність Чебишова

$$P\{|X - M[X]| > \epsilon\} \leq \frac{M\{[X - M[X]]^2\}}{\epsilon^2} = \frac{D[X]}{\epsilon^2}. \quad (11.2)$$

Якщо $D[X] < \delta < \epsilon^2$, то $P\{|X - M[X]| > \epsilon\} \approx 0$. Отже, для малої дисперсії випадкова величина також досить мало відрізняється від свого середнього значення.

Розглянемо випадкову величину $X^0 = X - M[X]$ та її допустимі значення: $|X - M[X]| > \epsilon$ і $|X - M[X]| \leq \epsilon$. Ці дві події несумісні і утворюють повну групу

$$P[|X - M[X]| \geq \epsilon] + P[|X - M[X]| < \epsilon] = 1.$$

Тоді

$$P[|X - M[X]| < \epsilon] \geq 1 - \frac{D[X]}{\epsilon^2}. \quad (11.3)$$

11.1. Теореми Чебишова, Бернуллі, Маркова

Теорема Чебишова. Якщо випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_n попарно незалежні, а їхні дисперсії обмежені одним і тим самим числом, то ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного значення від його математичного сподівання більша деякого наперед заданого додатного числа ϵ із зростанням n , буде меншою будь-якого додатного δ .

Запишемо умову теореми в аналітичній формі. Розглянемо нову випадкову величину – середнє арифметичне випадкових величин

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Тоді

$$M[Y_n] = \frac{\sum_{i=1}^n M[X_i]}{n}.$$

За умовою теореми

$$D[X_i] \leq C, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11.4)$$

але оскільки випадкові величини незалежні, то

$$D[Y_n] = \frac{\sum_{i=1}^n D[X_i]}{n^2}. \quad (11.5)$$

Тоді теорему Чебишова запишемо у вигляді

$$P[|Y_n - M[Y_n]| > \epsilon] < \delta. \quad (11.6)$$

Доведення. За формулою (11.2) маємо

$$P[|Y_n - M[Y_n]| > \epsilon] \leq \frac{D[Y_n]}{\epsilon^2},$$

але

$$D[Y_n] = \frac{\sum_{i=1}^n D[X_i]}{n^2} \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Тоді

$$P[|Y_n - M[Y_n]| > \epsilon] \leq \frac{C}{n\epsilon^2}.$$

Якщо покласти $\frac{C}{n\epsilon^2} = \delta$, то дістанемо нерівність (11.6). Теорему доведено.

Якщо застосувати до умов теореми нерівність (11.3), то дістанемо

$$P[|Y_n - M[Y_n]| \leq \epsilon] = 1. \quad (11.7)$$

Теорема Чебишова виконується і тоді, коли випадкові величини утворюють послідовність. Для формулювання теореми потрібно ввести поняття збіжності за ймовірністю.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ називається збіжною за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$ до випадкової величини X , якщо для всіх $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| > \epsilon] = 0. \quad (11.8)$$

У стислій формі це записують таким чином:

$$X_n \xrightarrow{P} X, \quad \text{або} \quad X_n \xrightarrow{\text{імов}} X.$$

Теорема Чебишова (закон великих чисел). Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ попарно незалежні, а їхні дисперсії задовольняють умову

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = 0, \quad (11.9)$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M[X_1] + M[X_2] + \dots + M[X_n]}{n} \right| \geq \varepsilon \right] = 0, \quad (11.10)$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M[X_i]) \right| \geq \varepsilon \right] = 0. \quad (11.11)$$

Наслідок. Якщо математичні сподівання послідовності $\{X_n\}$ незалежних випадкових величин однакові $M[X_i] = m$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m \right| \geq \varepsilon \right] = 0, \quad (11.12)$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m \right| < \varepsilon \right] = 1. \quad (11.13)$$

Теорема Чебишова має велике практичне значення. За наявності великої кількості випадкових величин середнє значення втрачає силу випадкової величини. У цьому виявляється зв'язок між необхідністю і випадковістю. Цим фактом часто користуються. Здійснюючи дослід з визначення якоїсь величини, за істинне значення беруть середню величину. Це є справедливим і в тому разі, коли досліди попарно незалежні, а математичні сподівання однакові (немає помилки одного знаку), прилад забезпечує потрібну точність вимірювання.

Теорема Бернуллі. Нехай здійснюються n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність удачі дорівнює p , а невдачі $q = 1 - p$, тобто ймовірність настання події A є сталою і дорівнює p . Тоді ймовірність того, що абсолютна величина відхилення статистичної ймовірності від класичної, більше деякого додатного числа ε і при зростанні n прямує до нуля за ймовірністю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{m}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right] = 0. \quad (11.14)$$

Розглянемо n випадкових величин, що полягають у настанні події A : X_1, X_2, \dots, X_n . Беремо значення кожної з цих величин рів-

ними 0 і 1 з ймовірностями q і p . За умовою теореми X_i і X_j незалежні. Тоді математичне сподівання

$$M[X_i] = a_1 p_1 + a_2 p_2; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = 1; \quad p_2 = q; \quad p_1 = p; \\ M[X_i] = p; \quad q = 1 - p,$$

а дисперсія

$$D[X_i] = (a_1 - p)^2 p + (a_2 - p)^2 q = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 q = \\ = p q^2 + p^2 q = p q (q + p) = p q.$$

Отже, випадкові величини X_i незалежні, а їхні дисперсії обмежені одним і тим самим числом. Тоді до цих величин можна застосувати теорему Чебишова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] \right| \geq \varepsilon \right] = 0; \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{np}{n} = p.$$

Отже, можна застосовувати нерівність (11.12), в якій $m = p$. Покажемо, що $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ дорівнює статистичній ймовірності $\frac{m}{n}$ настання події A в n випробуваннях Бернуллі. Це впливає з того, що кожна з випадкових величин X при настанні події A набуває значення 1. Отже, $\sum_{i=1}^n X_i$ дорівнює числу m настання події A в n випробуваннях

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{m}{n}.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{m}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right] = 0,$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right] = 1. \quad (11.15)$$

Із (11.15) не можна зробити висновок, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = p$, тобто

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \delta \text{ для } m > N.$$

Ці умови можуть і порушуватись. Однак за ймовірністю вони будуть виконуватись, тобто для будь-якого $\epsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ і номер $N(\delta)$ такий, що для всіх $m > N$:

$$P \left[\left| \frac{m}{n} - p \right| \geq \epsilon \right] < \delta.$$

У теорії ймовірностей вводять ще збіжність у середньому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left[X_n - X \right]^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X,$$

тобто за заданим $\delta > 0$ знайдемо номер $N(\delta)$ такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$M \left[X_n - X \right]^2 < \delta.$$

Використовуючи збіжність за ймовірністю, можна сформулювати такий наслідок з теореми Чебишова: із зростанням числа незалежних випробувань середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини X , що має скінченну дисперсію, збігається за ймовірністю до її математичного сподівання

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{імов}} M[X].$$

За цих умов можна дещо по-іншому сформулювати теорему Бернуллі: при необмеженому зростанні числа незалежних випробувань n відносна частота настанні події A збігається за ймовірністю до ймовірності цієї події p .

Наведемо без доведення *теорему Маркова (узагальнений закон великих чисел)*. Якщо дисперсія послідовності довільних випадкових величин $\{X_i\}$ задовольняє умову (11.9), то має місце умова (11.10) або (11.11).

11.2. Характеристичні функції та їхні властивості

Для дослідження сум випадкових величин О. М. Ляпунов вперше застосував метод характеристичних функцій.

Характеристичною функцією $\varphi_X(t)$ випадкової величини X називається математичне сподівання випадкової величини e^{itx} :

$$\varphi_X(t) = M \left[e^{itx} \right] = M \left[\cos tx \right] + j M \left[\sin tx \right], \quad (11.16)$$

де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Якщо X – неперервна випадкова величина із густиною $f(x)$, то

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx. \quad (11.17)$$

Якщо випадкова величина X є дискретною і має розподіл $P[X = X_k] = P_k$, $k = \overline{1, n}$, то

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^n P_k e^{itx_k}. \quad (11.18)$$

Формула (11.17) означає, що характеристична функція є прямим перетворенням Фур'є густини розподілу ймовірностей.

Розглянемо властивості характеристичних функцій.

1. Якою б не була випадкова величина X , характеристична функція $\varphi_X(t)$ неперервна на всій числовій осі і задовольняє умови $\varphi_X(0) = 1$ і $|\varphi_X(t)| \leq 1$ для $t \in (-\infty, \infty)$.

2. Якщо між випадковими величинами X і Y існує лінійна залежність $Y = aX + b$, де a і b – сталі, то

$$\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at).$$

Дійсно,

$$\varphi_Y(t) = M \left[e^{itY} \right] = M \left[e^{it(aX+b)} \right] = e^{itb} M e^{itaX} = e^{itb} \varphi_X(at).$$

3. Характеристична функція суми n незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх характеристичних функцій:

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t) \dots \varphi_{X_n}(t),$$

де X_1, X_2, \dots, X_n – незалежні випадкові величини.

4. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини виражаються через її характеристичну функцію за формулами

$$M[X] = -j\varphi'_X(0); D[X] = \sigma_x^2 = -\varphi''_X(0) - [\varphi'_X(0)]^2.$$

5. Якщо існує момент n -го порядку $M[X^n] < \infty$, $n \geq 1$, то характеристична функція $\varphi_X(t)$ диференційовна n разів при будь-якому t і

$$\varphi_X^{(k)}(0) = j^k M[X^k].$$

Ця властивість дає змогу досить просто обчислювати моменти випадкової величини, якщо відома її характеристична функція.

6. Функція розподілу однозначно визначається своєю характеристичною функцією.

7. Нехай $\{F_n(x)\}$ – послідовність функцій розподілу випадкових величин і $F(x)$ – функція розподілу; $\varphi_n(t)$ і $\varphi(t)$ – відповідні характеристичні функції. Тоді для збіжності послідовності $\{F_n(x)\}$ функцій розподілу до $F(x)$ за ймовірністю необхідно і достатньо, щоб послідовність $\varphi_n(t)$ характеристичних функцій збігалась при кожному t до характеристичної функції $\varphi(t)$.

Обчислимо, наприклад, характеристичну функцію нормального розподілу:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} y = \frac{x-m}{\sigma_x \sqrt{2}} \\ dy = \frac{dx}{\sigma_x \sqrt{2}} \end{array} \right] = \\ &= e^{jtm} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(jt\sqrt{2}\delta_x y - y^2 + \frac{\sigma_x^2 t^2}{2} - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(jtm - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y - \frac{j\sigma_x t}{\sqrt{2}}\right)^2} dy = e^{jtm - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}}; \end{aligned}$$

$$\varphi_X(t) = \exp\left[jtm - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}\right];$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ при } m=0, \sigma=1.$$

11.3. Центральна гранична теорема

Наведемо спрощене формулювання граничної **теорема Ляпунова**.

Теорема. Якщо випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_n незалежні, однаково розподілені, мають однакові математичні сподівання a та дисперсії σ^2 , то закон розподілу нормованої випадкової величини X^H :

$$X^H = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]}} = \frac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}}; \sum_{i=1}^n X_i = Y_n; a = M[X_i]$$

при $n \rightarrow \infty$ прямує до нормального закону з параметрами розподілу 0 і 1.

Якщо через $F(x)$ позначити функцію розподілу для X^H , то для будь-якого $x \in (-\infty, \infty)$

$$F(x) = P\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{імов}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Отже, яким би не був закон розподілу незалежних доданків випадкових величин, що мають скінченне математичне сподівання і дисперсію, закон розподілу їхньої нормованої суми прямує до нормального при $n \rightarrow \infty$. Ця властивість нормального закону лежить в основі його численних застосувань.

Чи поширюється ця властивість на доданки, розподілені по-різному? Позитивну відповідь на це запитання дає загальна теорема Ляпунова, згідно з якою закон розподілу нормованої суми X^H неза-

лежних випадкових величин (взагалі кажучи, розподілених по-різному) прямує до нормального при $n \rightarrow \infty$, якщо внесок кожної з величин X_1, X_2, \dots, X_n в утворення суми є малим.

ВПРАВИ. 1. Завод випускає вироби першого гатунку з імовірністю 0,9. Визначити мінімальну кількість виробів, яка потребує перевірки, щоб з імовірністю 0,95 відносна частота виробів першого гатунку відрізнялась від імовірності 0,9 не більше ніж на 0,01. *Відповідь.* Не менше 3457.

2. Скільки разів треба виміряти значення випадкової величини, щоб середнє значення цих вимірювань відрізнялося від математичного сподівання не більше ніж на подвоєне значення кореня квадратного з дисперсії з імовірністю, не меншою 0,98? *Відповідь.* $h \geq 13$.

3. Середньодобове споживання електроенергії містом становить 60 000 кВт·год. Знайти ймовірність того, що споживання електроенергії не перевищить 250 000 кВт·год. *Відповідь.* $P \leq 0,24$.

4. Знайти характеристичну функцію для випадкової величини, що має густину розподілу

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Відповідь. $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

5. Знайти характеристичну функцію суми двох незалежних нормально розподілених випадкових величин, що мають нульові середні та одиничні дисперсії. *Відповідь.* $\varphi(t) = e^{-t^2}$.

§ 12. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Для випадкових функцій можна побудувати числові характеристики, введені раніше для випадкових величин: математичне сподівання, дисперсію, центральний, початковий та кореляційний моменти.

Почнемо з математичного сподівання одновимірної випадкової функції $X(t)$. Позначимо її можливі значення через $x(t)$. Математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $M[X(t)]$, яка при фіксованому $t = t_k$ дорівнює математичному сподіванню випадкової величини $X(t_k)$:

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x, t) dx.$$

Математичне сподівання позначається $M[X(t)]$ або $m_x(t)$ і являє собою середню функцію, навколо якої групуються всі реалізації випадкової величини (рис. 6.19).

Якщо уявити собі рух тіла, що складається з відносних вібраційних (коливальних) рухів з відповідною амплітудою, то середня лінія, зображена на рис. 6.19, являє собою траєкторію руху центра мас цього тіла. Це графік $m_x(t)$.

Дисперсія одновимірної випадкової функції визначається так само, як і для випадкової величини:

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X(t)])^2 f(x, t) dx. \quad (12.1)$$

Квадратний корінь із дисперсії є середнім квадратичним відхиленням від випадкової функції:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D[X(t)]}. \quad (12.2)$$

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення характеризують відхилення випадкової функції від її математичного сподівання.

У наведеному вище прикладі про рух тіла $\sigma_x(t)$ є амплітудою колювання тіла.

Розглянемо тепер n випадкових функцій $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$. При конкретних значеннях t_1 і t_2 з області, в якій змінюється t , тоді можна побудувати

$$X_1(t_1), X_2(t_1), \dots, X_n(t_1);$$

$$X_1(t_2), X_2(t_2), \dots, X_n(t_2).$$

Ці функції можна подати як випадкові величини. Для кожної з цих випадкових величин можна ввести два набори можливих значень $x_i(t_1) = x_i^{(1)}, x_i(t_2) = x_i^{(2)}$ і відповідно кореляційний момент

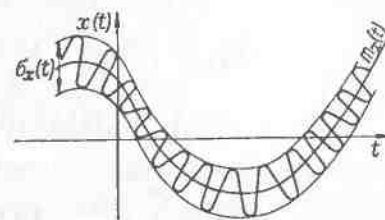


Рис. 6.19

$$K_{X_1} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1^{(1)} - M[X_1(t_1)])(x_1^{(2)} - M[X_1(t_2)]) \times \\ \times f(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, t_1, t_2) dx_1^{(1)} dx_1^{(2)} = \varphi_1(t_1, t_2);$$

$$K_{X_2} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_2^{(1)} - M[X_2(t_1)])(x_2^{(2)} - M[X_2(t_2)]) \times \\ \times f(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, t_1, t_2) dx_2^{(1)} dx_2^{(2)} = \varphi_2(t_1, t_2);$$

$$\dots\dots\dots \\ K_{X_n} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_n^{(1)} - M[X_n(t_1)])(x_n^{(2)} - M[X_n(t_2)]) \times \\ \times f(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, t_1, t_2) dx_n^{(1)} dx_n^{(2)} = \varphi_n(t_1, t_2).$$

Величини $K_{X_1}, K_{X_2}, \dots, K_{X_n}$ називають кореляційними функціями випадкових величин $X_i(t_1)$ і $X_i(t_2)$, $i = \overline{1, n}$; моменти K_{X_i} показують залежність двох значень однієї і тієї самої випадкової функції при двох значеннях аргументу. Якщо тепер взяти дві різні випадкові величини $X_i(t_1)$ і $X_j(t_2)$, то

$$K_{X_i X_j}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_i^{(1)} - M[X_i(t_1)])(x_j^{(2)} - M[X_j(t_2)]) \times \\ \times f(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, t_1, t_2) dx_i^{(1)} dx_j^{(2)}. \quad (12.3)$$

Такий момент дістав назву автокореляційної функції, або взаємної кореляційної функції. Автокореляційна функція розкриває зв'язок між різними випадковими функціями $x_i(t)$ і $x_j(t)$ одного й того самого аргументу.

Математичне сподівання і дисперсія, а також кореляційна і автокореляційна функції мають властивості, аналогічні випадковим величинам.

Оскільки для кореляційної функції

$$K_X(t_1, t_2) \leq \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)},$$

а для автокореляційної —

$$K_{X_i X_j}(t_1, t_2) \leq \sqrt{D_{X_i}(t_1)D_{X_j}(t_2)}, \quad (12.4)$$

то вводять поняття нормованих кореляційної й автокореляційної функцій:

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}}; \quad (12.5)$$

$$R_{X_i X_j}(t_1, t_2) = \frac{K_{X_i X_j}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{X_i}(t_1)D_{X_j}(t_2)}}, \quad (12.6)$$

що мають властивості, аналогічні властивостям коефіцієнта кореляції.

У теорії випадкових функцій вводять також поняття початкового мішаного моменту

$$\Gamma_{XY}(t_1, t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y, t_1, t_2) dx dy. \quad (12.7)$$

Стационарні випадкові функції — це функції, що задовольняють такі умови:

- 1) $m_X(t) = \text{const}$;
- 2) $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_1 - t_2) = K_X(\tau)$, де $\tau = t_1 - t_2$.

Наведемо властивості кореляційної функції випадкового стаціонарного процесу:

- 1) $D[X] = K_X(t - t) = K_X(0) = \text{const}$;
- 2) $K_X(t_1 - t_2) = K(\tau) = K(-\tau)$;
- 3) $|K_X(\tau)| < D[X] = K_X(0)$;
- 4) $R_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1 - t_2)}{D_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{D_X(0)}$.

Дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ називаються стаціонарно пов'язаними, якщо

$$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1 - t_2) = K_{XY}(\tau). \quad (12.8)$$

Із цього співвідношення випливає, що автокореляційна функція стаціонарних процесів залежить лише від одного аргументу.

Якщо всі реалізації (можливі значення $x(t)$) випадкової функції $X(t)$ є періодичними, то $X(t)$ називається періодичною випадковою функцією. Отже, якщо

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \quad (12.9)$$

де $\omega_n = \frac{\pi n}{T}$, то для центрованої випадкової величини

$$X^0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (12.10)$$

або

$$X^0(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n e^{j\omega_n t}, \quad (12.11)$$

де A_n, B_n — центровані випадкові величини; a_n, b_n, ω_n — спектр. Формули (12.9)–(12.11) називаються спектральними розвиненнями можливого значення випадкової функції.

Відповідь на запитання про те, коли періодична випадкова функція буде стаціонарною, дає така теорема.

Теорема. Для того щоб періодична випадкова функція $X^0(t)$ була стаціонарною, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти V_n її спектрального розвинення були некорельовані.

Теорема впливає із властивостей кореляційної функції стаціонарного процесу.

Справедливою є також **обернена теорема**: стаціонарна випадкова функція є періодичною тоді і лише тоді, коли кореляційна функція є періодичною з тим самим періодом.

Якщо

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_n e^{j\omega_n \tau}, \quad (12.12)$$

де

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T K_X(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau, \quad (12.13)$$

то

$$X^0(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} V_n e^{j\omega_n t}. \quad (12.14)$$

Якщо випадкова функція $X^0(t)$ є періодичною, то, використовуючи теорію рядів Фур'є (див. гл. 3, § 3), а також інтеграл Фур'є (див. гл. 3, § 5), можна ввести аналог перетворення Фур'є, спектральну густину, а також зображень типу (12.12)–(12.14). Як і в дискретному випадку, спектральна густина характеризує розподіл середньої потужності випадкового процесу за спектром частот.

Для практичного застосування теорії випадкових функцій треба знати їхні числові функції: математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції. Визначення цих функцій викликає значні труднощі. Проте для деякого класу стаціонарних випадкових функцій математичне сподівання вдається знайти за формулою

$$M[X(t)] \approx \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (12.15)$$

Випадкові процеси, що мають властивість (12.15), називаються **ергодичними**.

Має місце така теорема, що виражає умови ергодичності.

Теорема. Якщо кореляційна функція стаціонарного процесу задовольняє умову (ергодичності)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N K_X(\tau) d\tau = 0,$$

то границя за ймовірністю від (12.15) дорівнює математичному сподіванню

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\text{імов}} M[X(t)].$$

ВПРАВИ. 1. Випадкова функція $X(t)$ тотожно дорівнює невідповідній функції $\varphi(t)$. Знайти її математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію. *Відповідь.* $M[X(t)] = \varphi(t)$; $D[X(t)] = 0$; $K_X(S, t) = 0$.

2. Випадкова функція $X(t)$ стала і дорівнює Y (випадковій величині). Знайти її математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію. *Відповідь.* $M[X(t)] = M[Y]$; $D[X(t)] = D[Y]$; $K_X(S, t) = D[Y]$.

3. Випадкову величину $X(t)$ подано співвідношенням $X(t) = Y_1 e^{-\alpha_1 t} + Y_2 e^{-\alpha_2 t}$, де Y_1 і Y_2 — некорельовані випадкові величини, $M[Y_1] = M[Y_2] = 0$, $D[Y_1] = D[Y_2] = 1$. Знайти її кореляційну функцію. Чи є така функція стаціонарною? *Відповідь.* $K_X(S, t) = e^{-\alpha_1(S+t)} + e^{-\alpha_2(S+t)}$, функція нестаціонарна.

4. Випадкову функцію $X(t)$ задано співвідношенням $X(t) = Y_1 \sin \omega t + Y_2 \cos \omega t$, де Y_1 і Y_2 визначені так, як і в попередній задачі. Знайти кореляційну функцію і перевірити стаціонарність $X(t)$. *Відповідь.* $K_X(S, t) = \cos(t - S)\omega$, функція стаціонарна.

§ 13. ПОСЛІДОВНОСТІ ВИПАДКОВИХ ЗАЛЕЖНИХ ВЕЛИЧИН.
ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

Розглянемо послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

$$\{X_n\}. \quad (13.1)$$

Цю послідовність можна розглядати як випадкову функцію $X(t)$ з дискретним числом, тобто $X_i = X(t_i), i = \overline{1, \infty}$. Нехай

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n) \quad (13.2)$$

— функція розподілу послідовності n випадкових величин.

Якщо випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_n незалежні, то

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n). \quad (13.3)$$

Послідовність випадкових величин називається марківською, якщо

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2 / x_1) \dots F_n(x_n / x_{n-1}), \quad (13.4)$$

де $F(x_i / x_{i-1})$ — умовні функції розподілу випадкової величини X_i за умови, що випадкова величина X_{i-1} набула неявного числового значення.

Умова (13.4) означає, що розподіл кожного наступного члена послідовності залежить лише від того, якого значення набув попередній член послідовності, і не залежить від того, яких значень набули всі інші члени послідовності, які їйому передують.

Якщо члени марківської послідовності X_1, X_2, \dots, X_n є дискретними випадковими величинами, що мають скінченне число можливих значень a_1, a_2, \dots, a_n , то таку послідовність називають **ланцюгом Маркова (простим ланцюгом)**.

Зокрема, X_1, X_2, \dots, X_n можна тлумачити як значення однієї і тієї самої випадкової величини X у серії випробувань, результат яких залежить лише від результату попереднього випробування і не залежить від результату всіх інших випробувань. Так, випробування Бернуллі є окремим випадком простого ланцюга Маркова; одновимірний броунівський рух — ще один приклад ланцюга Маркова.

Розглянемо деяку фізичну систему, яка може перебувати лише в одному зі станів E_1, E_2, \dots, E_n . Нехай в моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n система може стрибком (кроком) переходити з одного стану в інший.

Позначимо послідовність таких станів через $E(t_1), E(t_2), \dots, E(t_r)$, де $E(t_i) \in \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$. Нехай умовна ймовірність $P_{ij}(t_n)$ того, що система у проміжку часу $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$, або t_n , буде перебувати у стані E_j , повністю визначається її станом в момент t_{n-1} або (t_{n-1}, t_n) і не залежить від її стану в більш ранні моменти часу. Послідовність $E(t_i)$ утворює простий ланцюг Маркова з дискретним часом.

Ймовірність $P_{ij}(t_n)$ переходу системи зі стану E_i в стан E_j в момент t_n називається перехідною ймовірністю. Якщо $t_n = t_0$ (перед першим кроком), то ймовірності утворюють початковий розподіл. Матриця

$$P(t_n) = \begin{pmatrix} P_{11}(t_n) & P_{12}(t_n) & \dots & P_{1r}(t_n) \\ P_{21}(t_n) & P_{22}(t_n) & \dots & P_{2r}(t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r1}(t_n) & P_{r2}(t_n) & \dots & P_{rr}(t_n) \end{pmatrix} \quad (13.5)$$

називається **матрицею переходу**, або **матрицею перехідних ймовірностей**. Елементи матриці (13.5) задовольняють умови

$$0 \leq P_{ij}(t_n) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n P_{ij}(t_n) = 1.$$

Якщо ймовірність переходу $P_{ij}(t_n)$ зі стану E_i в стан E_j не залежить від t_n , тобто $P_{ij}(t_n) = P_{ij}$, то ланцюг Маркова називається однорідним. Далі розглядатимемо лише однорідні ланцюги Маркова. Враховуючи те, що моменти переходу t_n із одного стану в інший не відіграють ніякої ролі, замість t_n пишуть n і називають моменти кроками.

Отже, $P_i(n)$ — ймовірність того, що після n кроків система потрапить до стану E_i ; $P_{ij}(n)$ — ймовірність того, що система зі стану E_i перейшла до стану E_j за n кроків; $P_{ij}(m, n)$ — ймовірність переходу зі стану E_i на m -му кроці до стану E_j на n -му кроці; P_{0i} — ймовірність того, що в початковий момент система перебувала в стані E_i ; P_{ij} — ймовірність переходу системи зі стану E_i в E_j за один крок.

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що система зі стану E_i на m -му кроці перейде до стану E_j на n -му кроці. H_i — гіпотеза, яка полягає в тому, що цей перехід відбувається через стан E_k на s -му кроці. Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^r P(H_i)P(A/H_i),$$

але

$$P(A) = P_{ij}(m, n); \quad P(H_i) = P_{ik}(m, s); \\ P(A/H_i) = P_{kj}(s, n).$$

Формулу повної ймовірності тепер запишемо у вигляді

$$P_{ij}(m, n) = \sum_{k=1}^r P_{ik}(m, s)P_{kj}(s, n); \quad i, j = \overline{1, r}. \quad (13.6)$$

Рівняння (13.6) називаються **рівняннями Маркова**. Ці рівняння можна записати в матричній формі:

$$P(m, n) = P(m, s)P(s, n), \quad (13.7)$$

де

$$P(m, n) = \begin{pmatrix} P_{11}(m, n) & \dots & P_{1r}(m, n) \\ P_{21}(m, n) & \dots & P_{2r}(m, n) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{r1}(m, n) & \dots & P_{rr}(m, n) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{ij}(m, m+1) = P_{ij}$, то $P = P(m, m+1)$ не залежить від m .

Тому, поклавши в (13.7) $s = m+1$, дістанемо ланцюжок рівностей

$$P(m, n) = P(m, m+1)P(m+1, n) = PP(m+1, n) = \\ = P^2P(m+1, m+2)P(m+2, n) = \dots = P^{n-m}.$$

Отже,

$$P(m, n) = P^{n-m}. \quad (13.8)$$

Звідси випливає, що ймовірності переходу зі стану E_i на m -му кроці в стан E_j на n -му кроці для однорідного ланцюга Маркова залежать

лише від різниці $s = n - m$ кроків. Тому ці ймовірності переходу за $s = n - m$ позначають

$$P_{ij}(m, n) = P_{ij}(n - m) = P_{ij}(s). \quad (13.9)$$

З ймовірностей переходу $P_{ij}(s)$ можна утворити матрицю ймовірностей переходу

$$P(s) = P_{ij}(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & \dots & P_{1r}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & \dots & P_{2r}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r1}(s) & P_{r2}(s) & \dots & P_{rr}(s) \end{pmatrix} = P_{ij}(m, n). \quad (13.10)$$

Як впливає з (13.8),

$$P(s) = P_{ij}(s) = P_{ij}(m, n) = P^s. \quad (13.11)$$

Тепер за формулою повної ймовірності можна визначити ймовірність $P_i(n)$ того, що система на n -му кроці буде в стані E_i . Для цього припустимо, що відомими є ймовірності станів E_1, E_2, \dots, E_r у початковий момент $P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0r}$. Тоді

$$P_i(n) = \sum_{k=1}^r P_{ki}(n)P_{0k}, \quad (13.12)$$

а в матричній формі

$$P_n = \bar{P}(n)P_0, \text{ або } P_n = \bar{P}^n P_0, \quad (13.13)$$

де

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \dots \\ P_{0r} \end{pmatrix}; \quad \bar{P}_n = \begin{pmatrix} P_1(n) \\ P_2(n) \\ \dots \\ P_r(n) \end{pmatrix}. \quad (13.14)$$

Знаком « \rightsquigarrow » позначені матриці, трансформовані до $P(n)$ або P^n .

Розглянемо випадок, коли $n \rightarrow \infty$. Нехай усі $P_{ij} > 0$. Тоді існують сталі числа P_i ($i = \overline{1, r}$), що не залежать від початкових ймовірностей, такі, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_i(n) = P_i, \quad i = \overline{1, r}. \quad (13.15)$$

Ймовірності P_i називають **фінальними**. Значення рівностей (13.15) полягає в тому, що ймовірність перебування системи у стані E_i практично не залежить від того, в якому стані вона перебувала в минулому. Зміна станів E_i може відбуватися лише у заздалегідь фіксовані моменти часу t_0, t_1, \dots, t_n . Послідовності зміни стану у дискретні моменти часу утворюють простий ланцюг Маркова з дискретним часом. Якщо зміна станів E_i може відбутися в будь-який момент часу $t > t_0$, то така послідовність зміни станів утворює простий ланцюг Маркова з неперервним часом. Якщо ланцюг Маркова з дискретним часом фактично описувався випадковими величинами, або випадковою функцією з дискретним аргументом, то ланцюг Маркова з неперервним часом описується випадковою функцією неперервного аргументу. Якщо в ланцюзі Маркова з неперервним часом зафіксувати моменти часу t_0, t_1, \dots, t_n , то дістанемо ланцюг Маркова з дискретним часом. Тому всі результати, здобуті раніше для ланцюгів з дискретним часом, переносять і на ланцюги з неперервним часом. Зокрема, співвідношення (13.7) і (13.3) запишемо у вигляді

$$P(t, t') = P(t, \tau)P(\tau, t'), \quad (13.16)$$

$$P(t) = P(t_0, t)P(t_0), \quad (13.17)$$

де

$$P(t, \tau) = \begin{pmatrix} P_{11}(t, \tau) & P_{12}(t, \tau) & \dots & P_{1r}(t, \tau) \\ P_{21}(t, \tau) & P_{22}(t, \tau) & \dots & P_{2r}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{r1}(t, \tau) & P_{r2}(t, \tau) & \dots & P_{rr}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_r(t) \end{pmatrix},$$

$P_i(t)$ – ймовірність того, що система в момент t перебуває у стані E_i :

$$P(t_0) = \begin{pmatrix} P_1(t_0) \\ P_2(t_0) \\ \dots \\ P_r(t_0) \end{pmatrix}.$$

Нехай час t зміниться на нескінченно мале τ , а

$$P_{ik}(t, t + \tau) = \alpha_{ik}(t)\tau + O(\tau), i \neq k, \quad (13.18)$$

де $\alpha_{ik}(t) \geq 0$; $O(\tau)$ – нескінченно мала більш високого порядку порівняно з τ , тобто

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{O(\tau)}{\tau} = 0. \quad (13.19)$$

Використовуючи співвідношення (13.18) і припускаючи, що число станів системи E_i скінченне, можна показати, що ймовірності $P_k(t)$ задовольняють систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\beta_k(t)P_k(t) + \sum_{i \neq k}^n \alpha_{ik}(t)P_i(t), \quad (13.20)$$

де $k = \overline{1, r}$; $\beta_k(t) = \sum_{m \neq k}^n \alpha_{km}(t)$ з початковими умовами

$$P_1(t_0) = P_{01}; P_2(t_0) = P_{02}; \dots; P_r(t_0) = P_{0r}.$$

Крім того, ймовірності $P_k(t)$ при будь-якому t задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^n P_k(t) = 1.$$

ВПРАВИ. 1. Дано матрицю перехідних ймовірностей однорідного ланцюга Маркова

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Знайти ймовірність того, що, вийшовши зі стану E_1 , ланцюг через два кроки опиниться в стані E_3 . *Відповідь.* $P_{13}(2) = 0,45$.

2. Частина здійснює випадкове блукання по цілочисельних точках числової осі, рухаючись з ймовірністю α ліворуч на одиницю, з ймовірністю β праворуч на одиницю, з ймовірністю $1 - \alpha - \beta$ залишається на місці. Знайти ймовірність того, що точка за два кроки не віддалиться більше ніж на одиницю від початкового положення. *Відповідь.* $P = 1 - \alpha^2 - \beta^2$.

3. Частинка рухається по цілочисельних точках зліва направо, здійснюючи перехід на один крок за час Δt з імовірністю $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$. Знайти ймовірність переходу частинки за час t на n кроків. *Відповідь.* $P = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.

§ 14. ПОТОКИ

Послідовність подій, що відбуваються одна за одною, називається **потокком подій**. Наприклад, на телефонній станції це може бути вхідний потік викликів, черга, апарати, що забезпечують зв'язок з абонентами, і вихідний потік уже обслужених абонентів. Таку саму картину можна спостерігати в магазині – вхідний потік, черга, вихідний потік.

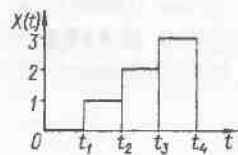


Рис. 6.20

Будь-який потік можна розглядати як випадковий процес. Тому дуже часто замість слова «потік» користуються словами «випадкові процеси». Математичною моделлю вхідного потоку є випадкова цілочисельна функція $X(t)$, що дорівнює числу умов (вимог, людей), які надійшли до потоку за час $(0, t)$. Графіком функції $X(t)$ є

східчаста функція зі стрибками у точках t_k надходження умов (рис. 6.20).

Для характеристики потоку введемо такі величини:

$P(X(t) - X(t_0) = k) = P_k(t_0, t)$ – ймовірність надходження k умов за час (t_0, t) ;

$P(X(t) - X(t_0) > k) = P_{>k}(t_0, t)$ – ймовірність надходження більше ніж k умов за час (t_0, t) ;

$F(t) = P(T < t)$ – функція розподілу випадкової величини T , яка дорівнює проміжку часу між двома умовами, що надійшли;

$m[t_0, t] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t_0, t)$ – математичне сподівання (середнє число) умов, що надійшли за час (t_0, t) .

Для потоків вводиться поняття густини, або інтенсивності потоку, аналогічне поняттю густини розподілу випадкової величини.

Інтенсивністю потоку називається границя відношення середнього числа умов, що надійшли за час τ , до всього проміжку τ , коли $\tau \rightarrow 0$:

$$I(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m(t, t + \tau)}{\tau}. \quad (14.1)$$

Із (14.1) за теоремою про зв'язок між границею і нескінченно малою величиною

$$m[t, t + \tau] = I(t)\tau + \alpha(t, \tau)\tau, \quad (14.2)$$

де

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(t, \tau) = 0.$$

Припустимо, що $m(t, t + \tau) = m(t + \tau) - m(t)$. Тоді, використовуючи теорему про середнє з інтегрального числення, умову (14.2) можна записати у вигляді

$$m[t, t + \tau] = \int_t^{t+\tau} I(t) dt. \quad (14.3)$$

Якщо інтенсивність $I(t)$ обмежена: $I(t) < \infty$, то $m[t, t + \tau] \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Це означає, що коли інтенсивність надходження умов (вимог) обмежена, то ймовірність надходження вимог (умов) за нескінченно малий проміжок часу є нескінченно малою величиною.

Розглянемо деякі спеціальні типи потоків.

Стаціонарним потоком називається потік, для якого ймовірність надходження k умов ($k = \overline{0, \infty}$) за проміжок часу $(t, t + \tau)$ залежить лише від величини τ і не залежить від t , тобто

$$P_k(t, t + \tau) = P_k(\tau); \quad P_{>k}(t, t + \tau) = P_{>k}(\tau); \quad (14.4)$$

$$m[t, t + \tau] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(\tau) = m[0, \tau] = m[\tau]. \quad (14.5)$$

Тоді

$$I(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m[\tau]}{\tau} = I = \text{const}.$$

Звідси

$$m(\tau) = I\tau, \quad (14.6)$$

тобто для стаціонарного потоку середнє число умов, що надійшли за час τ , дорівнює добутку інтенсивності потоку на час.

Теорема. Для будь-якого стаціонарного потоку

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{>0}(\tau)}{\tau} = \lambda > 0, \quad (14.7)$$

де $P_{>0}(\tau)$ – ймовірність надходження хоча б однієї умови за час τ .

Величина λ називається **параметром потоку**.

Доведення. Із (14.3) випливає, що $P_{>0}(t, t + \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

Однак для стаціонарного потоку $P_{>0}(t, t + \tau) = P_{>0}(\tau)$. Тоді і

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{>0}(\tau)}{\tau} = \lambda > 0.$$

Наведемо дві властивості будь-яких стаціонарних процесів.

1. $P_{>0}(\tau) = \lambda\tau + O(\tau)$. (14.8)

2. Інтенсивність потоку не менша параметра потоку:

$$I \geq \lambda. \quad (14.9)$$

Приклади стаціонарних потоків: потік пасажирів у міському транспорті у денні години у робітничому місті, потік заготовок для взуття, що надходять із нормально працюючого автомата, тощо.

Ординарний потік – це такий потік, для якого ймовірність надходження більше однієї вимоги за нескінченно малий проміжок часу є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж ймовірність надходження точно однієї вимоги за той самий нескінченно малий проміжок часу, тобто

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{>1}(t, t + \tau)}{P_1(t, t + \tau)} = 0. \quad (14.10)$$

Цю умову можна записати також у вигляді

$$P_{>1}(t, t + \tau) = O(\tau),$$

тобто ймовірність надходження більше однієї умови за нескінченно малий проміжок часу τ є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж τ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_{>1}(t, t + \tau)}{\tau} = 0. \quad (14.11)$$

Якщо ординарний потік є стаціонарним, то

$$P_0(\tau) = 1 - \lambda\tau + O(\tau); \quad (14.12)$$

$$P_1(\tau) = \lambda\tau + O(\tau); \quad (14.13)$$

$$P_k(\tau) = O(\tau), \quad k \geq 2, \quad (14.14)$$

де λ – параметр потоку, $\lambda \in (0, \infty)$.

Умова (14.13) випливає з (14.8). Із $P_0(\tau) = 1 - P_{>0}(\tau)$ випливає (14.12). Що стосується (14.14), то $P_{>1}(t, t + \tau) = P_{>1}(\tau)$ в силу стаціонарності. Однак

$$P_{>1}(\tau) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\tau) = O(\tau). \quad (14.15)$$

Необхідною і достатньою умовою ординарності потоку є рівність параметра потоку його інтенсивності.

Прикладом ординарного потоку є, наприклад, потік суден до одного причалу (більше одного судна пришвартувати до причалу не можна); касир звичайно в даний момент обслуговує лише одного покупця тощо.

Потік без наслідків – це потік, в якому умови, що надійшли за проміжки часу, які перетинаються, є незалежними випадковими величинами. Це означає, що $X(t + \tau) - X(t)$ і $X(t)$ є незалежними випадковими функціями. Якщо час $t \in [0, \infty)$ потоку без наслідків розбити на проміжки $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, то випадкові величини $X(t_1)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ є незалежними. Різниці $X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = \overline{0, n}$ називають приростами. Тому потік без наслідків – це потік, в якому прирости є незалежними випадковими величинами. Потік без наслідків ще називають випадковим процесом з незалежними приростами. Прикладом потоку без наслідків може бути потік викликів, що надходять на АТС (вхідний потік). Проте вихідний потік обслугованих викликів є потоком з наслідками.

Найпростіший, або пуассонівський, потік – це потік, що задовольняє умови стаціонарності і відсутності наслідків. Наведемо без доведення дві теореми. Вони встановлюють закон розподілу випадкової величини $X(\tau)$, яка дорівнює числу умов, що надійшли по потоку за час τ , і випадкової величини T , що дорівнює тривалості проміжку часу між двома умовами, які послідовно надійшли до потоку.

Теорема 1. Якщо потік є найпростішим, то ймовірність надходження k умов до потоку за час τ

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

тобто випадкова величина $X(\tau)$ розподілена за законом Пуассона.

Теорема 2. У найпростішому потоці випадкова величина T розподілена за показниковим законом

$$F(t) = P(T < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (14.16)$$

Наслідок. Середня довжина проміжку часу між моментами надходження двох послідовних вимог до пуассонівського потоку дорівнює оберненій величині його ймовірності:

$$M[T] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Характерна особливість пуассонівського потоку полягає в тому, що зміна умов відбувається стрибками. Тому існує ще й таке означення пуассонівського потоку, яке впливає з попередніх міркувань: потік називається пуассонівським якщо $X(t)$ задовольняє такі умови:

- 1) $X(t)$ — потік з незалежними приростами;
- 2) при будь-яких $t_1 < t_2, s$ прирости $X(t_2) - X(t_1)$ та $X(t_2+s) - X(t_1+s)$ однаково розподілені (однорідність потоку);
- 3) $X(0) = 0$ для будь-якої елементарної події, що відбувається;
- 4) виконуються умови (14.12)–(14.14).

Зазначимо, що узагальнення пуассонівського потоку здійснюється звичайно у напрямі відмови або умови відсутності післядії. Іншим узагальненням пуассонівського потоку є **вінерівський потік** (процес). Це такий потік, для якого замість умов (14.12)–(14.14) використовуються такі:

при $\tau \rightarrow 0$

$$M[X(\tau)] = a\tau + O(\tau); \quad M[|X(\tau)|^2] = O(\tau);$$

$$M[X(\tau)]^2 = b\tau + O(\tau), \quad (14.17)$$

де $-\infty < a < +\infty; 0 < b < +\infty$.

Якщо $X(t)$ — вінерівський потік, то

$$P[X(t) < x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi abt}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(u-at)^2}{2bt}\right] du. \quad (14.18)$$

Нарешті, дамо означення **розгалуженого потоку**. Так називають потік розмноження і перетворення частинок, в якому вони розвиваються незалежно одна від одної. Теорія потоків (випадкових процесів) нині досить добре розроблена і має широке практичне застосування.

ВПРАВИ. 1. Довести, що сума двох найпростіших потоків (з параметрами λ_1 і λ_2) також є найпростішим потоком. Знайти інтенсивність здобутого потоку. *Відповідь.* Інтенсивність дорівнює $\lambda_1 + \lambda_2$.

2. Із найпростішим потоком (параметр λ) здійснюється операція «проріджування»: кожна подія потоку (незалежно від інших подій) з імовірністю p залишається у потоці і з імовірністю $1-p$ вилучається з нього. Показати, що здобутий «проріджений» потік буде найпростішим і знайти його параметр. *Відповідь.* Параметр дорівнює λp .

3. До АТС протягом 1 год надходять у середньому 10 викликів. Вважаючи потік викликів найпростішим, знайти ймовірність того, що за 6 хв надійде точно один виклик. *Відповідь.* $p = e^{-1}$.

4. Середнє число замовлень таксі (потік пуассонівський) протягом 1 хв дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що протягом 2 хв надійде чотири замовлення. *Відповідь.* $p = \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} \approx 0,135$.

5. Ординарний потік подій називається потоком Пальма, якщо інтервали часу між послідовними подіями незалежні і однаково розподілені. Нехай цей розподіл такий, що густина

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{при } t > t_0; \\ 0 & \text{при } t \leq t_0. \end{cases}$$

Знайти інтенсивність такого потоку. *Відповідь.* $I = \frac{\lambda}{1 + \lambda t_0}$.

§ 15. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Виходячи з паралельного способу викладення теорії ймовірності і математичної статистики в § 3, введені поняття статистичної безумовної і умовної ймовірностей і їх властивостей, зв'язок з класичною ймовірністю — безумовною і умовною. У п. 3.2 введено поняття генеральної сукупності і вибірки, їх об'єму, способів отримання вибірки. Розглянуто принцип значущості подій. У § 4 введені поняття варіанти, варіаційного ряду, полігону частот, ймовірностей, а в § 5 — статистичної (емпіричної) функції розподілу. У § 6 — § 14, де вводилися нові поняття, можна аналогічно ввести і статистичні поняття. Питання, викладені в § 15, мають доповнити відомості з статистики.

15.1. Статистичні і варіаційні ряди

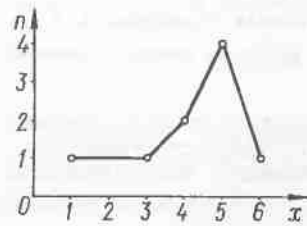


Рис. 6.21

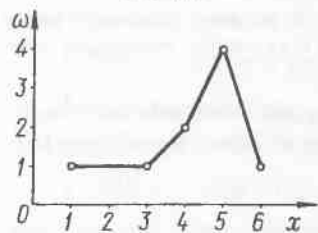


Рис. 6.22

Нехай X — випадкова величина, що характеризує якусь ознаку генеральної сукупності, а x_1, x_2, \dots, x_n — її незалежні значення, що спостерігаються, з ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n . Тоді можна побудувати варіаційний ряд $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ і статистичний — впорядкована сукупність пар x_i, p_i (див. § 4). Розрізняють два види варіаційних рядів для ознаки X генеральної сукупності, що вивчається: **дискретний** для дискретної випадкової величини X і **інтервальний** — для неперервної випадкової величини X . Графічне зображення дискретного варіаційного ряду в плоскій прямокутній системі координат називається полігоном. Так, на рис. 6.4 показаний полігон з варіант і ймовірностей, побудований за таблицею, вміщеною на с. 530. По осі x відкладені варіанти, по осі y — ймовірності. На рис. 6.21 побудований полігон за тією ж таблицею, але замість ймовірностей взяті частоти n_i , а на рис. 6.22 — полігон з відносними частотами $\frac{n_i}{h} = \omega_i$. Більш складною є побудова інтервального ряду. Пояснимо це на прикладі.

Нехай на підприємстві працюють A робітників (об'єм вибірки). Виробіток у звітному році в процентах до попереднього року розділився на 7 характерних проміжків з різницею в 10%. Наприклад, 80–90, 90–100, 100–110, ..., 140–150. Кількість робітників, що попали в задані інтервали, — a_1, a_2, \dots, a_{10} , накопичені частоти n_i будуть $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3$ і т. д. Частоти отримаємо, якщо кожному з накопичених частот розділимо на загальне число робітників $\frac{a_1}{A}, \frac{a_1 + a_2}{A}$ і т. д.

Накопичені частоти або частоти часто називають інтервальними частотами або частотями. Таблицю, що дозволяє судити про розподіл частот або частостей, називають інтервальним рядом.

Для побудови гістограми використовується інтервальний ряд. Для побудови гістограми на осі Ox відкладають відрізки, що зображують інтервали варіювання. У нашому випадку довжина інтервалу 10%. За початок відліку береться мінімальне значення варіюваної величини мінус половина інтервалу (або якась інша величина). Довжина всіх інтервалів визначається за розкидом можливих значень ознаки і рівна при певних умовах різниці між максимальним і мінімальним значеннями ознаки. Процес вибору довжини всіх інтервалів і розміру кожного інтервалу h називається шкалою вибору інтервалів. По ординаті відкладаються середні значення або частоти a_1, a_2, \dots ,

або $\frac{a_1}{A}, \frac{a_2}{A}, \dots$, або $\frac{n_1}{h}, \frac{n_2}{h}, \dots$, вважаючи,

що всередині інтервалу h ці величини зберігають постійне значення. Значення n_i (число варіант в інтервалі h) з'єднують відрізком прямої довжиною h , паралельної осі Ox . Таким чином, гістограма частот є ступінчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали завдовжки h , а висотою є $\frac{n_i}{h}$ (густина частот). Легко бачити, що площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці. На рис. 6.23 схематично побудована гістограма для табл. 15.1.

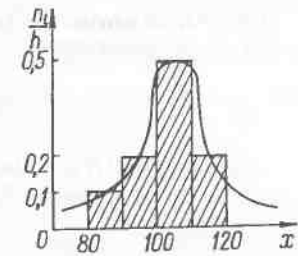


Рис. 6.23

Таблиця 15.1

Виробіток, %	Кількість робітників	Накопичена частота
80-90	1	1
90-100	2	3
100-110	5	8
110-120	2	10

15.2. Статистична оцінка параметрів розподілу. Незміщена, ефективна і спроможна оцінка

Нехай потрібно оцінити якусь ознаку X генеральної сукупності. Для оцінки необхідно, передусім, знати закон розподілу цієї ознаки, наприклад, нормальний закон. Однак, для кількісної оцінки нормального закону (див. п. 10.3) треба знати параметри розподілу: математичне сподівання m , середнє квадратичне відхилення σ . Позначимо через θ один з невідомих параметрів будь-якого розподілу. Для нормального розподілу θ – це чи m , чи σ . У нашому розпорядженні для оцінки m або σ є значення вибірки x_1, x_2, \dots, x_n , які будемо розглядати як можливі значення незалежних випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n .

Статистичною оцінкою невідомого параметра θ закону розподілу називають функцію від випадкових величин, що спостерігаються

$$\theta_n^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (15.1)$$

Щоб статистичні оцінки давали результати, вони повинні задовольняти певні умови. Перша умова полягає в тому, щоб математичне сподівання

$$M(\theta_n^*) = \theta \quad (15.2)$$

Ця умова гарантує від систематичних помилок, наприклад, похибок вимірювання.

Статистична оцінка θ_n^* , математичне сподівання якої дорівнює параметру, що оцінюється за будь-яким об'ємом вибірки, називається **незміщеною статистичною оцінкою**. Якщо ж $M(\theta_n^*) \neq \theta$, то таку оцінку називають **зміщеною**. Незміщена оцінка невідомого па-

раметра дає хороший результат, якщо розкид значень θ_n^* дуже малий, тобто дисперсія $D(\theta_n^*)$ – мала. Але якщо $D(\theta_n^*)$ велика, то, оцінюючи невідомий параметр за вибіркою, доводиться вимагати, щоб при заданому об'ємі вибірки дисперсія $D(\theta_n^*)$ була мінімальною.

Цю вимогу до оцінки називають ефективністю.

Ефективною статистичною оцінкою параметра θ називають таку оцінку, для якої $D(\theta_n^*)$ – мінімальна. Особливо це важливо для великого числа спостережень.

Оцінку θ_n^* називають **спроможною**, якщо вона підкоряється закону великих чисел (див. § 11), тобто при досить великому числі незалежних спостережень n з імовірністю, близькою до 1, різниця $|\theta_n^* - \theta|$ виявиться менше будь-якого, як завгодно малого, наперед заданого додатного числа δ , тобто

$$P[|\theta_n^* - \theta| < \delta] > 1 - \alpha,$$

де α – додатне число, близьке до 0, тобто $\theta_n^* \rightarrow \theta$ за ймовірністю (див. п. 11.1 формулу (11.8)). З цього випливає, що θ_n^* є спроможною оцінкою, якщо дисперсія незміщеної оцінки $D(\theta_n^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\theta_n^*) = 0$.

Найбільш поширеними загальними методами, що використовуються для відшукування оцінок параметрів розподілу є: метод моментів, метод найбільшої (максимальної) правдоподібності, метод найменших квадратів.

Розглянемо **метод найбільшої правдоподібності**. Нехай для випадкової величини X маємо вибірку об'ємом n : x_1, x_2, \dots, x_n . Позначимо густину розподілу для X – $f(x, \theta)$, де θ – невідомий параметр.

Розглянемо спільну густину розподілу випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , вибіркві значення яких x_1, x_2, \dots, x_n . Позначимо спіль-

ну густину розподілу $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ і будемо називати її функцією найбільшої правдоподібності. Густина розподілу кожної величини X_i ($i = \overline{1, n}$) буде $f(x_i, \theta)$ і

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta)\dots f(x_n, \theta).$$

Невідомий параметр θ тоді буде найближчим до істинного значення θ^* , коли спільна густина розподілу або ймовірність спільної реалізації вибірки буде найбільшою.

Якщо вибіркові значення фіксовані, то функцією правдоподібності є функція одного параметра θ . Метод максимальної правдоподібності полягає в тому, що за оцінку невідомого параметра θ вибираються параметри, за яких L досягає максимального значення. Необхідною умовою досягнення максимуму є рівняння $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. З цього рівняння вибираються ті корені θ , які залежать від компонент вибірки

$$\theta = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

З практики використання цього методу виявляється, що зручніше шукати похідну не від L , а від $\ln L$, тобто розв'язувати рівняння

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0.$$

Якщо функція L залежить не від одного, а, наприклад, від двох параметрів θ_1, θ_2 , то параметри знаходять з рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \text{ або } \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

при фіксованих x_i ($i = \overline{1, n}$).

Приклад. Нехай X_i мають нормальний розподіл. Невідомими є математичне сподівання $a = M[X_i]$ і $b = \sigma_x^2 = D[X_i]$. Знайти оцінки a і b за методом найбільшої правдоподібності.

Розв'язання. За формулою (10.18) з п. 10.3

$$L(x_1, \dots, x_n, a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{2b}\right),$$

а

$$\ln L = -\frac{n}{2}(\ln 2\pi + \ln b) - \frac{1}{2b} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Звідси для оцінок a і b відповідно a^*, b^* маємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{b^*} \sum_{i=1}^n (x_i - a^*) = 0; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} = -\frac{n}{2b^*} + \frac{1}{2(b^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a^*)^2 = 0. \end{cases}$$

з яких

$$a^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = X_b, \quad b^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - X_b)^2.$$

Метод моментів полягає в побудові стільки вибіркових моментів певного порядку (див. § 9), скільки є невідомих параметрів. Потім будуються теоретичні моменти, виходячи з припущення, що функція розподілу відома. У цю функцію включається і невідомий параметр. Прирівнюючи ці моменти, знаходять параметр θ .

У **методі найменших квадратів** за оцінку невідомого параметра θ приймається значення $\theta_n^*(x_i)$, яке мінімізує суму квадратів відхилень між оцінкою $\theta_n^*(x_i)$ і параметром для всіх спостережень, тобто

$$\sum_{i=1}^n [\theta - \theta^*(x_i)]^2 = \min.$$

Якщо початкова випадкова величина X має нормальний розподіл, то метод найменших квадратів і метод максимальної правдоподібності дають однакові результати. Особливо часто метод найменших квадратів застосовується в задачах вирівнювання або згладжування. Останнє часто використовується для побудови графіків за експериментальними даними (див. ч. 1, гл. 4, § 37).

15.3. Середні, математичне сподівання і дисперсія генеральної сукупності, вибірки. Їх оцінки

Генеральною середньою \bar{X}_Γ називають середнє арифметичне випадкової ознаки X генеральної сукупності, що має незалежні, можливі значення x_1, \dots, x_n , що не повторюються:

$$\bar{X}_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (15.3)$$

Якщо ж x_1, x_2, \dots, x_n повторюються, тобто мають частоти відповідно N_1, N_2, \dots, N_k , то

$$\bar{X}_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^k N_i x_i}{N}, \text{ де } N = \sum_{i=1}^k N_i. \quad (15.4)$$

Використовуючи теореми з § II, можна довести, що

$$\bar{X}_\Gamma = M[X]. \quad (15.5)$$

Вибірковою середньою \bar{X}_B називається середнє арифметичне значення ознаки X вибіркової сукупності x_1, x_2, \dots, x_n . Якщо всі x_i різні (тобто не повторюються), то

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (15.6)$$

Якщо x_1, x_2, \dots, x_n повторюються n_1, n_2, \dots, n_k разів, то

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}, \text{ де } n = \sum_{i=1}^k n_i. \quad (15.7)$$

Враховуючи, що x_1, x_2, \dots, x_n — можливі значення незалежних однаково розподілених випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , то $\bar{X}_\Gamma, \bar{X}_B$ є випадковими величинами. Тому можна відшукувати закони розподілу \bar{X}_Γ і \bar{X}_B , зв'язок між ними, а також числові характеристики $M[\bar{X}_\Gamma], M[\bar{X}_B], D[\bar{X}_\Gamma], D[\bar{X}_B]$.

Нехай $M[X_i] = m$ для всіх $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$M[\bar{X}_B] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n M[X_i]}{n} = \frac{nm}{n} = m.$$

Якщо X_i ($i = \overline{1, n}$) мають такий самий розподіл, що і ознака X генеральної сукупності, то $M[X] = \bar{X}_\Gamma = m$, звідки

$$M[\bar{X}_B] = \bar{X}_\Gamma, \quad (15.8)$$

тобто вибіркова середня є незміщена оцінка генеральної середньої. Якщо об'єм вибірки зростає, то в зв'язку з тим, що X_i мають однакові розподіли, тобто однакові математичні сподівання m і дисперсії $D[X_i]$, то за теоремою Чебишова вибіркова середня прагне за ймовірністю до генеральної середньої $\bar{X}_B \xrightarrow{P} \bar{X}_\Gamma$, тобто вибіркова середня є спроможною оцінкою генеральної середньої. Різниця між \bar{X}_B і \bar{X}_Γ залежить від об'єму вибірки, чим більший об'єм вибірки (n), тим менша різниця між \bar{X}_B і \bar{X}_Γ .

У деяких випадках у вибірці значення x_1, x_2, \dots, x_n , що спостерігаються, зручно розділити на групи, для кожної з них знайти групову середню, а потім і загальну середню як суму групових середніх.

Для оцінки розсіяння випадкової ознаки X генеральної сукупності вводять генеральну дисперсію

$$D_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X}_\Gamma)^2}{N}, \quad (15.9)$$

де x_i ($i = \overline{1, N}$) — можливі значення ознаки X , що не повторюються; \bar{X}_Γ — середнє генеральної сукупності. У разі можливих значень x_1, x_2, \dots, x_n , що повторюються з частотами N_i ($i = \overline{1, k}$),

$$D_\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{X}_\Gamma)^2}{N}, \text{ де } N = \sum_{i=1}^k N_i. \quad (15.10)$$

Генеральне середнє квадратичне відхилення обчислюється за формулою

$$\sigma_\Gamma = \sqrt{D_\Gamma}. \quad (15.11)$$

За аналогічними формулами визначаються вибіркові дисперсії і вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_B)^2}{n}, \quad D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n}, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (15.12)$$

У деяких випадках доводиться вводити внутрішньогрупові, міжгрупові і загальні дисперсії. Формули для їх обчислення аналогічні (15.12), в яких замість вибіркових середніх записуються внутрішньогрупова, міжгрупова і загальна середні. Для обчислення дисперсії $D = (D_\Gamma, D_B)$ використовують формулу, аналогічну (8.12) з § 8, а саме:

$$D = \bar{x}^2 - [\bar{X}]^2, \quad (15.13)$$

де

$$\bar{X}_B = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}; \quad \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} = [\bar{X}]^2. \quad (15.14)$$

Дійсно, за (15.12) для дисперсії вибірки

$$\begin{aligned} D_B &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i^2 - 2x_i \bar{x}_B + \bar{x}_B^2)}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k n_i x_i \bar{x}_B + \sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_B^2}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - \frac{2 \bar{x}_B \sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} + \frac{\bar{x}_B^2 \sum_{i=1}^k n_i}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{але } \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{n} = 1; \quad \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} = \bar{x}_B = \bar{x}, \quad \text{а } \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_B^2}{n} = \bar{x}^2.$$

$$\text{Тоді } D_B = \bar{x}^2 - 2\bar{x}_B^2 + \bar{x}_B^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}_B^2.$$

Вище показано, що вибіркова середня є незміщена оцінка генеральної середньої. Аналогічне питання виникає відносно дисперсії. Виявляється, вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою для генеральної сукупності:

$$M[D_B] = \frac{n-1}{n} D_\Gamma. \quad (15.15)$$

Щоб $M[D_B]$ дорівнювало D_Γ досить (15.15) помножити на $\frac{n}{n-1}$.

У зв'язку з цим вводять так звану виправлену дисперсію, яку звичайно позначають S^2 :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n-1}. \quad (15.16)$$

Знайдемо математичне сподівання виправленої дисперсії

$$M[S^2] = M\left[\frac{n}{n-1} D_B\right] = \frac{n}{n-1} M[D_B] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_\Gamma = D_\Gamma.$$

$$M[S^2] = D_\Gamma.$$

Вводять і виправлене середнє квадратичне відхилення за формулою

$$\sigma_B = \sqrt{S^2}.$$

Таким чином, виправлена дисперсія є незміщеною оцінкою дисперсії генеральної (вибіркової) сукупності.

Якщо порівняти формули для

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n} \quad \text{і} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X}_B)^2}{n-1}, \quad (15.17)$$

то можна помітити, що при досить великих n , тобто великому об'ємі вибірки, різниця між D_B і S^2 мала. На практиці лише при $n < 30$ користуються виправленою дисперсією, при $n > 30$ $D_B \approx S^2$.

15.4. Довірчі ймовірності. Довірчий інтервал

Статистичні оцінки, такі як середні, дисперсії дають точкову оцінку невідомого параметра, оскільки вони визначаються одним числом. Для більш точної оцінки невідомого параметра потрібно користуватися інтервальними оцінками. Інтервальними називаються оцінки, що визначаються двома числами — кінцями інтервалів. Якщо θ^* є оцінкою невідомого параметра, то точність цієї оцінки можна визначити, наприклад, абсолютною величиною різниці $|\theta^* - \theta| = |\theta - \theta^*|$. Для статистичних величин (тобто випадкових) про різницю $|\theta - \theta^*|$ можна говорити, коли відома ймовірність γ , з якою ця оцінка здійснюється. Нехай з імовірністю $P = \gamma$ оцінка $|\theta - \theta^*| < \delta$, тобто

$$P[|\theta - \theta^*| < \delta] = \gamma. \quad (15.18)$$

Надійністю, або **довірчою ймовірністю оцінки** θ по θ^* називається імовірність γ , при якій $|\theta - \theta^*| < \delta$. Нерівність (15.18) можна записати

$$P[\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta] = \gamma. \quad (15.19)$$

Інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, в який попадає параметр θ , що оцінюється з імовірністю γ , називається **довірчим інтервалом**. Звичайно надійність вибирається дуже близькою до одиниці (0,95; 0,99; 0,999...). Тому часто замість γ записують $1 - \alpha$, де α — число дуже близьке до нуля. Число α називають рівнем значущості. Кінці інтервалу $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ міняються від однієї вибірки до іншої, тобто є випадковими. Числа $\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$ називають довірчими межами.

Рівень значущості або довірна ймовірність визначається з конкретних умов. Пояснимо це прикладом. Нехай призначимо довірчу

ймовірність $P = \gamma = 0,99$ і застосуємо цю ймовірність для двох підприємств: залізничного (прибуття поїзда) та заводу з випуску парашутів. Нехай вибірка має об'єм 100. Довірна ймовірність у даному прикладі означає, що з 100 поїздів лише один спізнився. Це допустимо. А для парашутного заводу — з 100 парашутів один бракований — це зовсім поганий показник.

Перейдемо тепер до методів вибору довірчого інтервалу. Як видно з (15.18), необхідно вибрати такий закон, за яким оцінюється ймовірність потрапляння випадкової величини в проміжок, тобто

$$P[a \leq X < b] = \int_a^b f(x) dx.$$

У зв'язку з цим використовуємо нормальний закон розподілу випадкової величини. Так, за правилом трьох сигм можна вибрати такий довірчий інтервал, який забезпечить потрапляння θ з імовірністю $\gamma = 0,9973$. У нормальному законі є два параметри — математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення $\sigma_x = \sigma$. Поставимо задачу оцінки m при відомому σ .

Нехай випадкова величина X (якась ознака генеральної сукупності) визначається однаково розподіленими взаємно незалежними випадковими величинами X_1, X_2, \dots, X_n з постійною дисперсією $D[X_i] = D$.

Тоді дисперсія середнього арифметичного $D[\bar{X}] = \frac{D}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Дійсно,

$$D[\bar{X}] = D\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{D[X_1] + \dots + D[X_n]}{n^2} = \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n}.$$

Оскільки $D = \sigma^2$, то $D[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$, а $\sigma[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Як видно з (15.3), найкращою оцінкою математичного сподівання в значенні незміщеності, спроможності і ефективності є вибіркова середня $\bar{X}_B = \bar{X}$. У подальшому нам знадобиться така теорема.

Теорема. Якщо випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами m , $\bar{X}_B = \bar{X}$, а x_1, x_2, \dots, x_n є незалежні спостереження за X , кожне з яких має ті ж самі характеристики,

що і X , то вибіркова середня $\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ також підкоряється нормальному закону з параметрами $M[\bar{X}] = m$; $\sigma[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Тепер використаємо формулу (10.14) з п. 10.3

$$P[|X - m| < c] = 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right).$$

Заміняючи тут $X = \bar{X}$, $c = \delta$, а $\sigma[\bar{X}]$ на $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, отримаємо

$$P[|\bar{X} - m| < \delta] = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

де $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

З рівності $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ знайдемо $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Тоді

$$P\left[|\bar{X}_B - m| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 2\Phi(t)$$

або

$$P\left[\bar{X}_B - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_B + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (15.20)$$

Таким чином, отримали довірчий інтервал

$$\left(\bar{X}_B - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_B + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

що покриває невідомий параметр m , точність оцінки $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Для користування формулою (15.20) треба задати довірчу ймовірність γ (або рівень значущості α), потім знайти функцію Лапласа

$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ за $\frac{\gamma}{2}$, потім за табл. 3.2 (гл. 6) знайти t (в таблиці x).

Величини σ і n відомі.

Приклад. Нехай ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. Відома вибірка об'єму $n = 36$ і вибіркова середня \bar{X}_B , середнє квадратичне $\sigma = 3$. Оцінити невідоме математичне сподівання з довірчою ймовірністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язання. Знаходимо $\Phi(t)$ з $2\Phi(t) = 0,95$; $\Phi(t) = 0,475$. За табл. 3.2 $t = 1,96$; $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98$.

Довірчий інтервал $(\bar{X} - 0,98; \bar{X} + 0,98)$.

Якщо за вибіркою, що задовольняє теорему, оцінюється математичне сподівання в умовах, коли середнє квадратичне відхилення невідоме, то можна використовувувати рівність

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma, \quad (15.21)$$

де t_γ визначається за γ і n (табл. 15.2), S – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення (див. формулу (15.16)).

Таблиця 15.2. Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,003	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Помітимо, що при $n < 30$ формула (15.21) дає більш близький до практики результат, ніж формула (15.20), а при $n > 30$ ці формули дають практично збіжні результати.

15.5. Побудова і перевірка статистичних гіпотез

Нехай нас цікавить оцінка ознаки X функції розподілу генеральної сукупності $F_X(t)$ за вибіркою. Можна зробити два припущення (гіпотези H): 1) $F_X(t)$ є цілком конкретна функція $F(t) = F(X < t)$ або 2) $F_X(t)$ належать певному класу функцій, що залежать від одного або декількох параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ($k \geq 1$), $F_X(t) = F(t, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Параметри можуть бути невідомі, їх потрібно визначити за вибіркою. Критерії згоди — це критерії, за якими можна судити, чи узгоджуються значення x_1, x_2, \dots, x_n , що спостерігаються, величини X , з гіпотезою про її функцію розподілу. Розглянемо той випадок, коли теоретична функція розподілу відома і дорівнює $F(t)$, $F_X(t) = F(t)$. Для перевірки правильності вибраного теоретичного закону розподілу побудуємо за вибіркою x_1, x_2, \dots, x_n статистичну (емпіричну) функцію розподілу $F_n^*(t)$. Нехай задана міра μ відхилення $F(t)$ від $F_n^*(t)$, $\mu = \mu(F_n^*, F)$. Величину μ можна визначати по-різному, що і дає різні критерії перевірки висунутої гіпотези H . Наприклад,

$$\mu(F_n^*, F) = \sup_t |F_n^*(t) - F(t)|, \quad (15.22)$$

де $\sup_t |F_n^*(t) - F(t)|$ — точна верхня грань відхилень $F(t)$ від $F_n^*(t)$ при всіх значеннях t , або

$$\mu[F_n^*(t), F(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n^*(t) - F(t)]^{2k} g(t) dt, \quad (15.23)$$

де $g(t) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt < +\infty$.

Величини x_1, x_2, \dots, x_n , що утворюють вибірку, у разі справедливості висунутої гіпотези H можна розглядати як незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F(t)$. Але тоді μ є випадкова величина. При $F_X(t) = F(t)$ можна знайти розподіл μ . Для цього задамо таке мале число, $\alpha > 0$, при якому з імовірністю α можна вважати практично неможливим здійснення будь-якої події в

одиночному досліді. Вважаючи відомим розподіл для μ , можна знайти деяке μ_0 , що $P[\mu > \mu_0] = \alpha$. Тепер за даними x_1, x_2, \dots, x_n знайдемо $F_n^*(t)$ і обчислимо $\mu(F_n^*, F)$. Якщо одержане $\mu > \mu_0$, то гіпотеза невірна, тому що дістаємо такий випадок, ніби сталася неможлива подія. Тому при $P[\mu > \mu_0] = \alpha$ гіпотеза H невірна, а при $P[\mu < \mu_0] = \alpha$ гіпотезу потрібно вважати вірною. Число α , вибір якого залежить від характеру задачі, називається рівнем значущості критерію, а величина μ_0 , яка визначається з умови $P[\mu > \mu_0] = \alpha$ — межею значущості або **критичним значенням критерію згоди**. Величина $\mu(F_n^*, F)$ є функція від об'єму вибірки. Для перевірки справедливості гіпотези $\mu(F_n^*, F)$ звичайно обчислюють при $n \rightarrow \infty$.

У деяких випадках виявляється корисною схема застосування критеріїв згоди.

1. Висуваємо гіпотезу H відносно закону розподілу $F_X(t)$ величини X .
2. Вибираємо міру $\mu = \mu[F_n^*(t), F(t)]$.
3. Знаходимо величину μ_0 .
4. За вибіркою визначаємо μ .
5. Якщо $\mu > \mu_0$, то гіпотеза невірна, а при $\mu < \mu_0$ гіпотезу приймаємо.

15.6. Критерій згоди Колмогорова

Нехай функція розподілу $F_X(t)$ задана законом $F(t)$ і є неперервною. Задася рівнем значущості α . Міру μ_n визначимо за формулою (15.22). Оскільки μ_n випадкова величина, нас цікавить її граничне значення, обчислене в припущенні, що гіпотеза H справедлива. На це питання відповідає теорема.

Теорема. Якщо функція розподілу $F(t)$ неперервна, то закон розподілу випадкової величини $\sqrt{n}\mu$ незалежно від вигляду роз-

поділу випадкової величини X прямує до закону розподілу Колмогорова

$$P(\sqrt{n}\mu < t) \rightarrow k(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 t^2} & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (15.24)$$

Функція $k(t)$ є законом розподілу Колмогорова, значення функцій якого наведені в табл. 15.3.

Прийmemo $k(t) = 1 - \alpha$. Тоді

$$P(\sqrt{n}\mu < t_0) = 1 - \alpha,$$

а

$$P(\sqrt{n}\mu > t_0) = \alpha.$$

Покладемо $P(\mu > \mu_0) = \alpha$. При порівнянні з попередньою нерівністю приходимо до висновку, що $\mu_0 = \frac{t_0}{\sqrt{n}}$. Величина t_0 визначається з умови $P(\sqrt{n}\mu > t_0) = \alpha$.

Уточнимо ці міркування. Знаходимо $F_n(t_i)$ за теоретичною $F(t)$, а $F_n^*(t_i)$ – за вибіркою. Складаємо різниці $F_n^*(t_i) - F_n(t_i)$. З різниць $F_n^*(t_i) - F_n(t_i)$ вибираємо найбільшу (sup) величину. Це і є μ_n . Якщо можливо, відшукуємо μ для всіх t або $n \rightarrow \infty$. А якщо неможливо, то вважаємо $\mu_n \sim \mu$. За табл. 15.3 по α знаходимо t_0 , а за t_0 – $\mu_0 = \frac{t_0}{\sqrt{n}}$. Порівняємо знайдене $\mu(\mu_n)$ з μ_0 . При $\mu_n > \mu_0$ гіпотезу відкидаємо, а при $\mu_n < \mu_0$ приймаємо.

Таблиця 15.3. Значення функції розподілу Колмогорова

$\sqrt{n}\mu$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
Значення функції	1,224	1,358	1,52	1,627	1,950

15.7. Критерій χ^2 Пірсона

Для перевірки справедливості гіпотези H , яка полягає в тому, що $F_X(t) = F(t)$, Пірсон запропонував утворювати міру μ відхилення $F(t)$ від $F_n^*(t)$ таким чином.

Таблиця 15.4. Значення критичних точок критерію χ^2

Число степенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	16,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,733	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,943	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Розіб'ємо безліч значень X , що підкоряються нормальному закону розподілу, на k підмножин S_1, S_2, \dots, S_k без загальних точок.

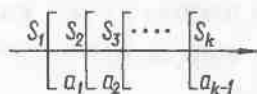


Рис. 6.24

Таке розбиття звичайно здійснюється за допомогою $(k-1)$ чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1}$ (рис. 6.24). При цьому правий кінець кожного інтервалу виключається з відповідної множини $S_i, i = 1, 2, \dots, k$, а лівий включається. Нехай $P_i, i = 1, 2, \dots, k$, — імовірність того, що величина X належить

множині S_i (нагадаємо, $\sum_{i=1}^k P_i = 1$).

При цьому $P_i = P[X < S_i]$, а $F(t) = P[X < t \in (a_{i-1}, a_i)]$. Тоді $\frac{v_i}{n}$ — частота попадання випадкової величини X в S_i при n спостереженнях. При цьому

$$\sum_{i=1}^k v_i = n; \quad \sum_{i=1}^k \frac{v_i}{n} = 1.$$

З іншого боку, для функції $F(t)$, представленої гіпотезою H на множині S_i, P_i є її приріст, $\frac{v_i}{n}$ є приріст емпіричної функції $F_n^*(t)$ на тій же множині S_i . За міру μ відхилення $F_n^*(t)$ емпіричної функції розподілу від теоретичної приймається величина χ^2 , що дорівнює

$$\chi_{n,k}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{n}{P_i} \left(\frac{v_i}{n} - P_i \right)^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - P_i n)^2}{n P_i}. \quad (15.25)$$

Нагадаємо, тут k — число розрядів, на які розбиті найрізноманітніші значення X ; P_i — імовірність попадання випадкової величини X в i -розряд, обчислена для теоретичного закону розподілу $F(t)$. Для кожного n потрібно записати закон розподілу χ^2 як випадкової величини. Пірсон запропонував розглядати закон розподілу χ^2 при $n \rightarrow \infty$.

Теорема Пірсона. При $n \rightarrow \infty$ розподіл випадкової величини χ^2 прагне до χ^2 -розподілу з $k-1$ степенями вільності, тобто при $n \rightarrow \infty$.

$$P(\chi^2 < t) \rightarrow \left(\int_0^t f_{k-1}(x) dx \right) \quad (15.26)$$

в кожній точці t , де $f_{k-1}(\chi^2)$ — густина розподілу вибірки χ^2 з $k-1$ степенями вільності. Про число степенів вільності в статистиці говорять стосовно певного виду розподілу. Обчислюють це число k за формулою $k = s - 1 - r$, де s — число груп (часткових інтервалів у вибірці), r — число параметрів у заданому розподілі.

Тепер визначимо критерій згоди Пірсона. Задаємося рівнем значущості α . Розглянемо інтеграл

$$\int_0^t f_{k-1}(\chi^2) d\chi^2 = 1 - \alpha.$$

За табл. 15.4 знаходимо корінь цього рівняння $t = t_1$.

Тоді $P(\chi^2 < t_1) = 1 - \alpha$; $P(\chi^2 > t_1) = \alpha$, звідки $\mu_0 = t_1$.

Далі критерій χ^2 Пірсона застосовується відповідно до загальної схеми п. 15.5.

Уточнимо схему. Нехай генеральна сукупність розподілена нормально. Обчислимо теоретичні частоти за формулою

$$\bar{n}_i = \frac{nh}{\sigma_B} \varphi(u_i), \quad (15.27)$$

де $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$; $\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_i^2}{2}}$; (15.28)

n — сума частот, що спостерігаються; h визначається за шкалою вибору інтервалів (див. п. 15.1). Частоти n_i , що спостерігаються, визначаються за вибіркою. Відшукуємо $\chi_{\text{спост}}^2$ за формулою (15.25) або

$$\chi_{\text{спост}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}. \quad (15.29)$$

За рівнем значущості α і числом степенів вільності з табл. 15.4 знаходимо $\chi_0^2 = \mu_0$. Якщо $\chi_{\text{спост}}^2 < \chi_0^2$, то гіпотеза H приймається, в іншому випадку — відкидається.

Застосування теореми Пірсона на практиці дає досить добрі результати у всіх випадках, коли величина $n P_i \geq 10, i = \overline{1, k}$.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ

§ 1. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Задачі оптимізації – це будь-які задачі, в яких треба знайти екстремуми функцій або функціоналів: локальні, глобальні або абсолютні на множинах, що визначаються деякими обмеженнями (умовами). Для постановки задачі оптимізації будують математичну модель. До моделі входять вибір функції $f(X)$, що описує процес, область її визначення (у вигляді рівностей і нерівностей), обмеження, що накладаються на функцію, а також цільова функція, яку треба оптимізувати. Іноді обмеження записують у вигляді включень: якщо множину обмежень позначити через Y , то $Y \in A$, де A – ширша множина, на якій визначена функція $f(X)$. Наприклад, всі незалежні змінні задачі мають бути більші нуля або дорівнювати нулю.

Розв'язуючи задачі оптимізації, завжди доводиться шукати відповіді на такі запитання: 1) чи існує розв'язок поставленої задачі; 2) якщо існує, то які умови він задовольняє; 3) як знайти розв'язок самої задачі? Перші два запитання звичайно складають необхідні і достатні умови існування екстремуму. Для аналітично заданих функцій однієї або багатьох змінних ці умови викладено в ч. 1, гл. 4. Щоб дати відповідь на третє запитання, звичайно використовують обчислювальні методи. Так, для задач на екстремум доводиться розв'язувати лінійні та нелінійні системи скінченних рівнянь. Наближені методи розв'язування таких рівнянь (метод ділення відрізка навпіл, метод хорд і дотичних, метод послідовних наближень) розглянуто у ч. 1, гл. 4, § 38. Зазначимо, що метод ділення відрізка навпіл можна застосовувати для відшукування екстремуму функції однієї змінної, не обчислюючи похідної від функції, тобто метод можна застосовувати для функцій, заданих таблично. Якщо в задачі оптимізації цільових функцій кілька, то йтиметься про задачі **багатокритеріальної оптимізації**, або керування.

В задачах оптимізації, або керування виникають ситуації, коли наявна повна інформація про всі умови оптимізації і коли у вихідній інформації про задачу є елемент невизначеності або деякі параметри мають випадковий характер з відомими ймовірнісними характеристиками. У першому випадку задачі оптимізації і керування називаються **детермінованими**, у другому – **стохастичними**. Наприклад,

екстремальна задача, що моделює роботу автоматичних пристроїв з урахуванням випадкових перешкод, є стохастичною задачею керування, як і задача планування виробничої діяльності підприємства за умов неповної інформації про реальну ситуацію, в якій має виконуватися план.

Задачі оптимізації можна класифікувати також за принципом досягнення екстремуму в точках, на лініях або поверхнях. Клас задач, в яких екстремум досягається в ізольованих точках або нескінченно малих околах цих точок, вивчається в розділі методів оптимізації, що називається математичним програмуванням. Клас задач, в яких екстремум досягається на лініях або поверхнях, вивчається в розділі методів оптимізації, що називається варіаційним численням. Отже, задачі оптимізації складаються із задач **математичного програмування, варіаційного числення і задач оптимального керування**.

Наведемо приклад **варіаційної задачі**. У «Бесідах» Г. Галілея розглядається така задача. Дві однакові кульки починають одночасно рухатись у вертикальній площині з точки A двома жолобами, один з яких є дугою кола, а другий – хордою цього кола. Кульки рухаються лише під дією сили тяжіння, без тертя. Треба визначити, за якою з траєкторій кулька швидше подолає шлях з A в B (рис. 7.1). Мінімум досягається на дузі кола. Ця задача у більш загальній постановці розглядається в § 6.



Рис. 7.1

§ 2. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

В ч. 1, гл. 4, § 36 був розглянутий метод відшукування умовного екстремуму функції

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

на m -вимірній поверхні, що задана системою рівностей-зв'язків

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n.$$

У багатьох практичних задачах економіки, транспорту тощо зустрічаються зв'язки, виражені у вигляді нерівностей (частина з них може бути рівностями)

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n. \quad (2.2)$$

Через ці обставини виникає задача пошуку екстремуму функції (2.1) у D -області її визначення при обмеженнях (2.2). Така задача є задачею математичного програмування. Останнє розподіляється на **лінійне програмування**, коли функції (2.1) та (2.2) лінійні, та **нелінійне** – у протилежному випадку. Функція (2.1) у цьому випадку є цільовою. В нелінійному програмуванні виділяють **квадратичне програмування**, коли функція (2.1) має квадратичну форму.

Існує ще один клас задач математичного програмування, в яких функція $f(X)$ є опуклою і множина, на якій розв'язується екстремальна задача, теж опукла. Означення опуклих функцій однієї змінної наведено в ч. 1, гл. 4, § 30. Такі задачі математичного програмування складають цілий розділ, який називається **опуклим програмуванням**.

2.1. Загальна постановка задачі лінійного програмування

У задачі лінійного програмування функції (2.1) і (2.2) є лійними, тобто

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j; \quad (2.3)$$

$$b_{i0} + b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.4)$$

або

$$b_{10} + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \geq 0;$$

$$b_{20} + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \geq 0;$$

.....

$$b_{m0} + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n \geq 0.$$

Система нерівностей (2.4) може бути і недодатною, тобто

$$b_{i0} + b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

У задачах з економіки треба накладати на невідомі параметри x_1, x_2, \dots, x_n додаткові умови, наприклад:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

а також вимогу, що x_j – ціле додатне число.

Функцію (2.1) звичайно позначають

$$L(X) = \sum_{j=1}^n c_jx_j, \quad \text{де } X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.6)$$

Сформулюємо загальну постановку задачі лінійного програмування. Нехай задана сумісна система лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Серед невід'ємних розв'язків (допустимих) нерівностей (2.7) треба знайти такий розв'язок (оптимальний), при якому лінійна функція (цільова функція)

$$L = \sum_{j=1}^n c_jx_j \quad (2.9)$$

має найбільше або найменше значення.

Іноді до системи обмежень (2.7) додають ще рівності

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = m+1, m+2, \dots, k. \quad (2.10)$$

У випадку двох або трьох змінних x_j , $j = 1, 2, 3$, задачу лінійного програмування можна розв'язати геометрично.

2.2. Геометричний метод розв'язування найпростіших задач лінійного програмування

Розглянемо конкретний приклад. Нехай треба мінімізувати лінійну функцію $L(\bar{X}) = 12x_1 + 4x_2$ за умов

$$x_1 + x_2 \geq 2; \quad x_1 \geq \frac{1}{2}; \quad x_2 \leq 4; \quad x_1 - x_2 \leq 0.$$

Побудуємо область розв'язків, обмежену прямими (рис. 7.2)

$$x_1 + x_2 = 2; \quad x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 4; \quad x_1 - x_2 = 0.$$

Як впливає з рис. 7.2, областю визначення функції (L -форми)

$$L = 12x_1 + 4x_2 \quad (2.11)$$

є опуклий чотирикутник $ABCD$. Надамо L якого-небудь конкретного значення, наприклад L_1 , тобто у цьому разі $L = \text{const}$. Якщо L -форма стала, то множина векторів \vec{X} , що її задовольняє, називається лінією рівня. Тоді сукупність точок, що задовольняють умову

$$L_1 = 12x_1 + 4x_2 \quad (2.12)$$

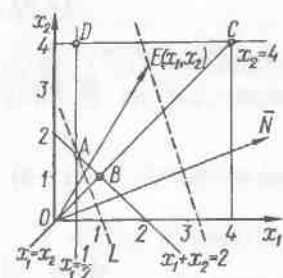


Рис. 7.2

у площині (x_1, x_2) , визначає пряму. Якщо рівняння (2.11) записати у вигляді $12x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 - L_1 = 0$, то це рівняння виражатиме площину, перпендикулярну до площини (x_1, x_2) , а пряма (2.12) є слідом цієї площини. Це саме стосується і (2.11). Розглядатимемо (2.12) як рівняння площини.

Введемо до розгляду два вектори: $\vec{N}(12; 4)$ і

$\vec{r}(x_1, x_2)$. Тоді (2.12) запишеться у вигляді

$$(\vec{N} \cdot \vec{r}) - L_1 = 0. \quad (2.13)$$

Пряма L_1 , що лежить у площині x_1, x_2 , перпендикулярна до \vec{N} . Тому умову (2.11) запишемо таким чином: $L = (\vec{N} \cdot \vec{r})$. Якщо переміщувати пряму у напрямі вектора \vec{N} паралельно самій собі (рис. 7.2), то L зростатиме (\vec{r} зростає), а якщо переміщувати пряму у протилежному напрямі, то L спадатиме. Отже, мінімального значення L -форма набуває у точці A — близькій вершині чотирикутника:

$$L_{\min} = 12x_1 + 4x_2 \text{ при } x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{3}{2};$$

$$L_{\min} = 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12.$$

Максимального значення L -форма набуває у далекій точці $C(4; 4)$:

$$L_{\max} = 12 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 64.$$

2.3. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування у n -вимірному просторі

Геометричні міркування з наведеного в п. 2.2 конкретного прикладу можна поширити на загальний випадок. Введемо n -вимірний простір. Тоді обмеження (2.5) і (2.6) при заміні нерівностей точними рівностями являтимуть собою рівняння n -вимірних площин, що обмежують у n -вимірному просторі опуклий многогранник, аналогічний опуклому чотирикутнику $ABCD$. Якщо такий опуклий многогранник побудувати не можна, тобто умови (2.7) і (2.8) несумісні, то задача нерозв'язна. Припустимо, що задача розв'язна і опуклий многогранник можна побудувати. Введемо два n -вимірних вектори

$$\vec{N} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ і } \vec{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тоді $L = \vec{N} \cdot \vec{r}$ — цільова функція і для будь-якого конкретного значення L вона являтиме собою n -вимірну площину, перпендикулярну до вектора \vec{N} . Рухаючись у напрямі \vec{N} , дістанемо дедалі більші значення L , а при русі у протилежному напрямі, — менші значення.

Опуклий многогранник, заданий умовами (2.7), (2.8), називається областю допустимих розв'язків. Лінійна форма, подана у вигляді n -вимірних площин, може досягти свого екстремуму на опуклому многограннику в одній єдиній точці або на нескінченній множині точок.

Отже, якщо задача (2.7), (2.8) має оптимальний розв'язок, то він досягається у деякій вершині опуклого многогранника, що є областю визначення лінійної форми (2.9).

ВПРАВИ. Знайти максимум і мінімум L -форми при відповідних обмеженнях.

1. $L = x_1 - x_2$; $2x_1 + x_2 - 4 \leq 0$; $x_1 - x_2 + 2 \geq 0$; $x_1 - 1 \geq 0$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Відповідь. $\max L = 0,5$ при $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1$; $\min L = -2$ при $x_1 = 0,67$, $x_2 = 2,67$.

2. $L = 2x_1 + x_2$; $x_1 + x_2 \geq 1$; $3x_1 + 4x_2 \leq 12$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Відповідь. $\max L = 8$ при $x_1 = 4$, $x_2 = 0$; $\min L = 2$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

3. $L = x_1 + x_2$; $x_1 + 2x_2 \geq 2$; $3x_1 + 4x_2 \leq 12$; $x_1 \leq 3$; $x_2 \leq 3$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Відповідь. $\max L = 3 \frac{3}{4}$ при $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{4}$; $\min L = 1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Приклад. Максимізувати форму $L = -x_4 + x_5$, маючи такі обмеження:

$$x_1 + x_4 - 2x_5 = 1; \quad x_2 - 2x_4 + x_5 = 2; \quad x_3 + 3x_4 + x_5 = 3.$$

З'ясуємо питання про сумісність обмежень. Для цього визначимо ранги основної і розширеної матриць:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Ранги обох матриць однакові і дорівнюють трьом. Система обмежень сумісна. Маємо $5 - 3 = 2$ вільних змінних. Нехай x_4 і x_5 - вільні змінні. Подамо обмеження і форму через ці змінні:

$$x_1 = 1 - x_4 + 2x_5; \quad x_2 = 2 + 2x_4 - x_5; \quad x_3 = 3 - 3x_4 - x_5; \quad L = -x_4 + x_5. \quad (2.23)$$

Покладаючи в (2.23) $x_4 = x_5 = 0$, дістанемо перший базисний розв'язок

$$B_1[1, 2, 3, 0, 0], \quad L_1 = 0.$$

Здобутий розв'язок є допустимим, оскільки $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, 5$. Спробуємо збільшити L . Це можна зробити, як впливає з $L = -x_4 + x_5$, за рахунок x_5 . Тому в (2.23) покладемо $x_4 = 0$.

Знаходимо

$$x_1 = 1 + 2x_5; \quad x_2 = 2 - x_5; \quad x_3 = 3 - x_5; \quad L = x_5. \quad (2.24)$$

Аналізуючи (2.24), помічаємо, що допустимі значення дістанемо при $x_5 = 2$. Звідси маємо новий базисний розв'язок $B_2[5, 0, 1, 0, 2]$, $L_2 = 2$. Значення форми збільшилося. Намагаючись далі збільшити значення форми, за нові вільні змінні візьмемо ті, що в останній формі перетворилися на нуль, тобто x_2 і x_4 , і виразимо всі обмеження через ці змінні. З (2.23) знаходимо

$$\begin{aligned} x_5 &= 2 + 2x_4 - x_2; \quad x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4; \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5 = 3 - 3x_4 - 2 - 2x_4 + x_2 = 1 + x_2 - 5x_4; \\ L &= -x_4 + 2 + 2x_4 - x_2 = 2 - x_2 + x_4. \end{aligned}$$

Отже,

$$x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4; \quad x_3 = 1 + x_2 - 5x_4; \quad x_5 = 2 + 2x_4 - x_2; \quad L = 2 - x_2 + x_4. \quad (2.25)$$

Із виразу форми випливає, що зростання L можливе при $x_2 = 0$ і $x_4 \geq 0$. Тоді

$$x_1 = 5 + 3x_4; \quad x_3 = 1 - 5x_4; \quad x_5 = 2 + x_4.$$

Враховуючи, що $x_1 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_5 \geq 0$, маємо

$$x_3 = 0; \quad 1 - 5x_4 = 0; \quad x_4 = \frac{1}{5}.$$

Базисний розв'язок має вигляд

$$B_3\left[\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{11}{5}\right], \quad \text{а } L = \frac{11}{5} > 2,$$

тобто форма зросла. Візьмемо тепер за вільні змінні x_2 і x_3 і запишемо обмеження через них:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1 + x_2 - x_3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3; \\ x_1 &= 5 - 2x_2 + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3; \\ x_5 &= 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 - x_2 = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3; \\ L &= 2 - x_2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{11}{5} - \frac{4}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що вільні змінні мають від'ємні коефіцієнти, тобто форма набуває максимального значення при $x_2 = x_3 = 0$, $L = 2\frac{1}{5}$.

Отже, форма почала спадати, тобто базисний розв'язок $B_3\left[\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{11}{5}\right]$ є оптимальним у тому розумінні, що при цьому базисному розв'язку $L = \frac{11}{5}$ є максимальним.

Тепер можна сформулювати загальне правило, яке дістало назву **симплекс-методу** (методу послідовного покращення плану) розв'язування задач лінійного програмування:

- 1) введенням додаткових змінних задач (2.7)–(2.9) зводяться до задач (2.15)–(2.17);
- 2) досліджується на сумісність система (2.16);
- 3) визначається число базисних і вільних змінних;
- 4) базисні змінні виражаються через вільні (це записується у вигляді так званої симплекс-таблиці);
- 5) методом проб вибирається такий базисний розв'язок, при якому L -форма має екстремальне значення.

2.5. Опуклі множини і функції.

Задача опуклого лінійного програмування

Нехай задано деяку множину Q n -вимірного евклідового простору. Множина Q є опуклою, якщо разом з двома будь-якими точками $M_1 \in Q$ та $M_2 \in Q$ їй належить і відрізок, що з'єднує ці точки. Нехай Q , наприклад, збігається з числовою віссю або її частиною. Візьмемо на осі $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$, $x_1 < x_2$. Відрізком $[x_1, x_2] = M_1M_2$, як відомо,

називається множина x точок, що мають властивість $(x_1 \leq x \leq x_2)$. Цю нерівність можна записати ще й так:

$$[x_1, x_2] = \{x \in Q | \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Відрізок є опуклою множиною. Нехай $Q \in E_2$ і $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, і $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Тоді відрізок $[M_1 M_2]$, що з'єднує точки $M_1(x_1, x_2)$ і $M_2(y_1, y_2)$, які належать E_2 , можна записати у вигляді

$$[M_1 M_2] = \{X, Y \in Q | \alpha X + (1 - \alpha)Y, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Відрізок $[M_1 M_2]$ є опуклою множиною. Нехай $Q \in E_n$. Візьмемо в Q дві точки $M_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $M_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$ і нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді відрізок $[M_1 M_2]$ є частиною множини Q

$$[M_1 M_2] = \{X, Y \in Q | \alpha X + (1 - \alpha)Y, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Відрізок $[M_1 M_2]$ є опуклою множиною. Позначимо частину множини Q , виражену характеристичною властивістю $\alpha X + (1 - \alpha)Y$, через $Q_1 \subset Q$.

Підмножина Q_1 множини Q називається опуклою, якщо вона разом з парою своїх точок містить відрізок, що їх з'єднує. Прикладами опуклих множин в E_2 є будь-яка пряма, трикутник, круг тощо.

Наведемо деякі елементарні властивості опуклих множин:

1) якщо A і B – опуклі множини, то їх об'єднання і перетин також будуть опуклими множинами;

2) при лінійному відображенні, якщо образ – опукла множина, прообраз також буде опуклою множиною.

Область D називається опуклою, якщо множина її елементів є опуклою. Поняття опуклої множини, або області, можна ввести та-

кож для векторного простору, якщо за елементи X і Y взяти вектори \bar{X} і \bar{Y} , записані матрицями-стовпцями. Тоді

$$[M_1 M_2] = \{\bar{X}, \bar{Y} \in Q | \alpha \bar{X} + (1 - \alpha)\bar{Y}, 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

У деяких випадках вираз $\alpha \bar{X} + (1 - \alpha)\bar{Y}$ зручно записувати у вигляді $\lambda \bar{X} + \mu \bar{Y}$, де $\alpha = \lambda$, а $1 - \alpha = \mu$, тобто $\lambda + \mu = 1$.

Тоді

$$[M_1 M_2] = \{\bar{X}, \bar{Y} \in Q | \lambda \bar{X} + \mu \bar{Y}, \lambda + \mu = 1\}.$$

Точка X множини Q називається кутовою (крайньою) точкою, якщо в Q не існує таких точок X' і X'' ($X' \neq X''$), що $X = \alpha X' + (1 - \alpha)X''$ при деякому $\alpha \in [0, 1]$.

Наприклад, для множини Q точок круга кутовими точками будуть точки кола. Всі вершини опуклого многогранника є кутовими точками. Точка $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ буде кутовою точкою, якщо ця точка не лежить на жодному відрізку, що сполучає точки множини Q .

Система обмежень (2.19) утворює деяку опуклу множину Q . Якщо множина розв'язків системи (2.19) не порожня, то у цієї множини є принаймні одна кутова точка.

Систему обмежень (2.19) можна записати в матричній і векторній формах. Якщо ввести вектори і матриці таким чином:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; A = (a_{ij}); i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n},$$

то (2.19) можна записати в матричній $A\bar{X} = \bar{b}$ і векторній $\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \dots + \bar{a}_n x_n = \bar{b}$ формах.

Припустимо, що серед векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \in r = m$ лінійно залежних. Тоді для того щоб точка $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, визначена обме-

женнями (2.19), була кутовою, необхідно і достатньо, щоб існувала така система лінійно незалежних векторів $\bar{a}_{k1}, \bar{a}_{k2}, \dots, \bar{a}_{kr}$, що

$$\bar{b} = \bar{a}_{k1}x_{k1}^0 + \bar{a}_{k2}x_{k2}^0 + \dots + \bar{a}_{kr}x_{kr}^0, \\ x_{kl}^0 \geq 0; l = \overline{1, r}; x_j^0 = 0,$$

коли $j \neq kl, j \leq kl \leq n$.

Система векторів $(\bar{a}_{k1}, \bar{a}_{k2}, \dots, \bar{a}_{kr})$ називається базисом кутової

точки X^0 , а змінні $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}$ — базисними змінними, решта змінних — вільними. Якщо серед базисних змінних немає нульових, то задача називається невинродженою, у противному разі — винродженою. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування являє собою впорядковане перебирання кутових точок, яке триває доти, доки форма (2.20) не набуде свого найбільшого або найменшого значення.

Нехай відомою є деяка кутова точка $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, а x_1, x_2, \dots, x_r — базисні змінні, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — вільні змінні. Розв'язуючи систему (2.19) відносно базисних змінних (див. (2.21)) і виключаючи з лінійної форми (2.20) всі базисні змінні (див. (2.22)), приходимо до такої задачі лінійного програмування, яка еквівалентна початковій. Необхідно мінімізувати форму

$$L(X) = L(X^0) + l_{r+1}x_{r+1} + l_{r+2}x_{r+2} + \dots + l_n x_n$$

за таких обмежень:

$$x_1 + d_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{1n}x_n = x_1^0; \\ x_2 + d_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{2n}x_n = x_2^0; \\ \dots \\ x_r + d_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{rn}x_n = x_r^0; \\ x_j \geq 0; j = \overline{1, n}.$$

Оскільки X^0 — невинроджена кутова точка, то $x_i^0 > 0, i = \overline{1, r}$.

Можливими є три випадки:

1) $kl \geq 0, k = r+1, r+2, \dots, n$; точка X^0 мінімізує форму L , тобто задачу розв'язано;

2) якщо для деякого k індекс $kl < 0$ і всі $d_{ik} \leq 0$, то задача не має розв'язків;

3) якщо для деякого k індекс $kl < 0$, але серед d_{ik} є додатні, то можливий перехід до іншої кутової точки X^1 такої, що $L(\bar{X}^1) \leq L(\bar{X}^0)$.

Нові базисні змінні вибирають з умови

$$\min_{1 \leq p \leq l} \frac{x_i^{0p}}{|d_{ik}^p|} = \frac{x_i^{0l}}{d_{ik}^l}, l = \overline{1, r},$$

де елемент d_{ik}^l називають розв'язним, а l -те рівняння — розв'язним рівнянням.

Наведемо означення опуклих (угнутих) функцій. Скалярна функція $\varphi(X)$ називається опуклою донизу на опуклій множині Q , якщо для будь-яких $X, Y \in Q$ і $\alpha \in [0, 1]$

$$\varphi[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \leq \alpha\varphi(X) + (1 - \alpha)\varphi(Y). \quad (2.26)$$

Якщо

$$\varphi[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \geq \alpha\varphi(X) + (1 - \alpha)\varphi(Y), \quad (2.27)$$

то функція називається опуклою догори. Якщо нерівності (2.26) і (2.27) для $\alpha \in (0, 1)$ строгі, то функції називаються **строго опуклими донизу (догори)**.

Прикладом опуклої вниз функції багатьох змінних є додатно визначена квадратична форма.

Поняття опуклості (угнутості), або опуклості догори (донизу), для функцій однієї змінної, визначеної на проміжку $\langle a, b \rangle$, було введено

у ч. 1, гл. 4, § 30. Опуклість (угнутість) була пов'язана з розміщенням графіка функції відносно дотичної, проведеної до якоїсь точки кривої. Отже, це означення пов'язано з гладкістю (диференційовністю) функції. Введені означення опуклості (угнутості) (2.26) і (2.27) геометрично можна

тлумачити таким чином. Розглянемо площину $X, \varphi(X)$ і в ній точку $M[\alpha X + (1 - \alpha)Y; \alpha\varphi(X) + (1 - \alpha)\varphi(Y)] = M[Z]$ (рис. 7.3). При $\alpha = 0$

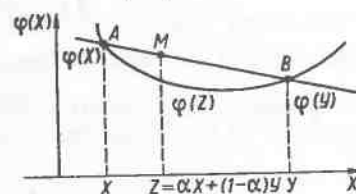


Рис. 7.3

маємо $\varphi(Y)$, при $\alpha = 1$ маємо $\varphi(X)$. Якщо змінюється $\alpha \in [0; 1]$, точка M описує хорду AB , яка лежить над графіком функції $\varphi(X)$ – функція угнута, під графіком – опукла. Отже, опукла функція, визначена умовою (2.26), порівняно з означенням, наведеним у ч. 1, є вгнутою, а вгнута функція, визначена умовою (2.27), – опуклою. Відповідно до цього, якщо $\varphi(X)$ є двічі диференційовною при $x \in [AB]$, то для опуклості $\varphi''(Z) > 0$, а для вгнутості $\varphi''(Z) < 0$. Функція $\varphi''(Z)$ є похідною за параметром α , тобто треба розглядати функцію $\psi(\alpha) = \varphi[\alpha X + (1 - \alpha)Y]$ і похідну $\psi''(\alpha)$. Звідси випливає, що функція однієї або багатьох змінних $\varphi(X)$ опукла (вгнута) на опуклій D -області тоді і тільки тоді, коли функція однієї змінної $\alpha, \psi(\alpha) = \varphi[\alpha X + (1 - \alpha)Y]$ опукла (вгнута). При $\psi''(\alpha) > 0$ функція $\varphi(X)$ буде опуклою, а при $\psi''(\alpha) < 0$ – вгнутою.

Для квадратичних функцій, тобто квадратичних форм, використовується інша форма визначення опуклості (вгнутості).

Нехай задано диференційовну функцію $u = f(x_1, \dots, x_n)$, визначену в опуклій області D . Побудуємо повний приріст $\Delta u = du + \frac{1}{2!} d^2 u + \dots$ цієї функції в точці $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Нехай $du = 0$ в точці X^0 , а знак приросту Δu визначається знаком другого диференціала. Тоді з точністю до знака

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \Phi(\bar{X}, \bar{X}),$$

тобто знак Δu визначається знаком квадратичної форми $\Phi(\bar{X}, \bar{X})$. Матрицею квадратичної форми буде матриця, утворена з других похідних,

$$A = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n \quad (2.28)$$

Функцію $f(x_1, \dots, x_n)$ називатимемо опуклою (вгнутою) в околі точки $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, якщо приріст Δu всюди в околі цієї точки

додатний (від'ємний). Це означає, що для опуклості (вгнутості) квадратична форма $\Phi(\bar{X}, \bar{X})$ має бути додатно (від'ємно) визначеною.

За критерієм Сільвестра (див. ч. 1, гл. 4, п. 34.1) для додатної визначеності форми необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці (2.28), обчислені в точці $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, були додатними:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.29)$$

Для від'ємно означеної форми знаки головних мінорів квадратичної форми мають бути переміжними.

Отже, функція n змінних $u = f(x_1, \dots, x_n)$ опукла (вгнута) в околі точки $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, якщо головні мінори матриці (2.28) додатні (мають переміжні знаки).

ВПРАВИ. 1. Знайти найбільше значення функції $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ за таких обмежень: $x_2 + x_3 \leq 3$; $x_1 - x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 1$; $3x_1 + x_2 \leq 15$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$. *Відповідь.* $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $L = 10$.

2. Мінімізувати функцію $L = x_2 + x_3$ за таких обмежень: $x_2 \geq 4$; $x_1 - x_2 + x_3 = 1$; $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$; $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, 4}$. *Відповідь.* $x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $x_3 = 2$; $x_4 = 2$; $L = 6$.

3. Мінімізувати функцію $L = 5x_1 + x_3$ за таких обмежень: $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3$; $x_2 + 2x_4 = 1$; $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, 4}$. *Відповідь.* $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $L = 10$.

§ 3. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДО ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. В ч. 1, гл. 4, § 36 задача на умовний екстремум функції $f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f(\bar{X}) \rightarrow \min \quad (3.1)$$

за обмежень:

$$\varphi_i(\bar{X}) = 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n, \quad (3.2)$$

зведена до задачі на безумовний екстремум з використанням функції Лагранжа.

Введемо вектор

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (3.3)$$

і функцію

$$L(\bar{X}, \bar{\lambda}) = f(\bar{X}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(\bar{X}), \quad (3.4)$$

де $L(\bar{X}, \bar{\lambda})$ — функція Лагранжа; λ_i — множники Лагранжа.

Знайдемо стаціонарні точки функції $L(X, \lambda)$, прирівнявши до нуля частинні похідні по λ_i , $i = \overline{1, m}$, та x_j , $j = \overline{1, n}$, тобто

$$\frac{\partial L(\bar{X}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(\bar{X}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial L(\bar{X}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

Якщо в стаціонарній точці $(\bar{X}^*, \bar{\lambda}^*)$ функція $L(\bar{X}, \bar{\lambda})$ досягає мінімуму, то \bar{X}^* забезпечує також мінімум функції $f(\bar{X})$ за умови виконання обмежень (3.2). А це приводить до розв'язку задачі, тобто

$$L(\bar{X}^*, \bar{\lambda}^*) = f(\bar{X}^*).$$

2. Розглянемо задачу, в якій обмеженнями є нерівності. Треба знайти \bar{X} , при якому

$$f(\bar{X}) \rightarrow \min \quad (3.7)$$

і виконуються умови

$$\varphi_i(\bar{X}) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \bar{X} \in G \subseteq E_n; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.8)$$

де $f(\bar{X})$, $\varphi_i(\bar{X})$ — опуклі функції, визначені на опуклій множині G . Так формулюється основна задача опуклого програмування. Припустимо також, що множина G задовольняє умови регулярності. Вони полягають у тому, що існує точка $\bar{X}^0 \in G$, в якій $\varphi_i(\bar{X}^0) < 0$, $i = \overline{1, m}$.

Замінімо нерівності (3.8) рівностями, ввівши невід'ємні змінні. Тоді вираз (3.8) набере вигляду

$$\varphi_i(\bar{X}) + z_k = 0, \quad z_k \geq 0, \quad x_j \geq 0,$$

де

$$z_k = \begin{cases} > 0, & \text{якщо } \varphi_i(\bar{X}) < 0, \\ = 0, & \text{якщо } \varphi_i(\bar{X}) = 0, \\ < 0, & \text{якщо } \varphi_i(\bar{X}) > 0. \end{cases}$$

Отже, задача (3.7)—(3.8) зводиться до розглянутої вище задачі (3.1)—(3.2) з обмеженнями типу рівностей зі змінними і з функцією Лагранжа

$$L(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{\lambda}) = f(\bar{X}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [\varphi_i(\bar{X}) + z_i].$$

Умови Лагранжа (існування оптимуму в точці \bar{X}) мають вигляд

$$\frac{\partial L(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{\lambda})}{\partial z_i} = \lambda_i, \quad \text{де } \lambda_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_i > 0; \\ > 0, & \text{якщо } z_i = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Звідси випливає, що в $L(\bar{X}, \bar{\lambda}, \bar{Z})$ відсутні обмеження типу нерівностей, тобто для них $\lambda_j = 0$. Тому функція Лагранжа фактично збігається з $L(\bar{X}, \bar{\lambda})$. Беручи до уваги, що

$$\frac{\partial L(\bar{X}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(\bar{X}),$$

і враховуючи обмеження (3.9) на λ_i , остаточної умови, які має задовольняти точка X^* , що є розв'язком задачі нелінійного програмування, запишемо у вигляді

$$\frac{\partial L(\bar{X}, \bar{\lambda})}{\partial x_j} = \begin{cases} > 0, \text{ якщо } x_j = 0; \\ = 0, \text{ якщо } x_j > 0, j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial L(\bar{X}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda_i} = \begin{cases} < 0, \text{ якщо } \lambda_i = 0; \\ = 0, \text{ якщо } \lambda_i > 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Умови (3.10), (3.11) називаються **умовами Куна–Таккера** і становлять зміст **теорему Куна–Таккера**.

Введемо поняття сідлової точки. **Сідловою точкою** функції $L(\bar{X}, \bar{\lambda})$ називається така точка, в якій вона досягає максимуму по \bar{X} і мінімуму по $\bar{\lambda}$, тобто сідловою точкою є така точка $(\bar{X}^0, \bar{\lambda}^0)$, що задовольняє умову

$$L(\bar{X}^0, \bar{\lambda}) \leq L(\bar{X}^0, \bar{\lambda}^0) \leq L(\bar{X}, \bar{\lambda}^0). \quad (3.12)$$

Умова (3.12) збігається з умовами (3.10) і (3.11), тому розв'язування даної задачі нелінійного програмування можна розглядати як відшукування сідлових точок функції Лагранжа. З цих позицій **теорему Куна–Таккера** сформулюємо таким чином: **вектор \bar{X}^* є оптимальним розв'язком нелінійної задачі тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор $\bar{\lambda}$, що пара $(\bar{X}^0, \bar{\lambda}^0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа $L(\bar{X}^0, \bar{\lambda}^0)$, тобто вектор \bar{X}^* має задовольняти також умови (3.10)–(3.12).**

Змінюючи знаки нерівності в (3.12) на протилежні, дістанемо теорему про максимум сідлової точки, тобто дістанемо задачу максимізації цільової функції $f(X)$ при

$$L(\bar{X}^0, \bar{\lambda}) \geq L(\bar{X}^0, \bar{\lambda}^0) \geq L(\bar{X}, \bar{\lambda}^0).$$

В задачах на екстремум функції однієї та багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ критичні точки екстремуму отримують з рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = (1, 2, \dots, n) \quad \text{або} \quad du = 0. \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) необхідно або розв'язувати (**непрямий метод**), або встановити екстремум безпосередньо з досвіду без обчислення похідних, аналізу відповідної задачі (**прямий метод**).

У випадку функції однієї змінної $u = f(x)$ часто використовується прямий метод, який полягає в підборі визначених значень x_i , що належать області визначення функції $f(x)$, наприклад $x_i \in [a, b]$, серед яких є деяке x^* , таке що

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \text{при} \quad x \in [a, b],$$

або

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Зрозуміло, в першому випадку x^* є точка максимуму, в другому — точка мінімуму. Для пошуку послідовності x_i використовується, наприклад, **метод поділу відрізка навпіл**. Нехай на $[a, b]$ є точка x^* така, що $f(x^*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Візьмемо точки

$$x_1 = \frac{1}{2}(a + b - \delta); \quad x_2 = \frac{1}{2}(a + b + \delta) = a + b - x_1,$$

де $\delta = \text{const}$; $0 < \delta < b - a$.

Обчислюємо $f(x_1)$ та $f(x_2)$. Якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$, то покладемо $a_1 = a$; $b_1 = x_2$. Якщо ж $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $a_1 = x_1$; $b_1 = b$. Маємо відрізок $[a_1, b_1]$, до якого застосовуємо ті ж самі дії до того часу, доки не наблизимося до точки x^* .

Відзначимо, метод має строге обґрунтування для опуклих функцій.

Є інші прямі методи пошуку екстремуму функцій. В непрямих методах треба розв'язати або одне рівняння (4.1)

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

або систему

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \right. \quad (4.2)$$

Для розв'язання рівнянь (4.1) треба використовувати відомі з ч. 1, § 38 методи розв'язування скінченних рівнянь: проб, хорд, дотичних, ітерацій та їх найрізноманітніших модифікацій. Тут розглянемо лише метод можливих напрямів, що використовується для опуклих функцій, визначених на опуклій множині.

§ 5. МЕТОД МОЖЛИВИХ НАПРЯМІВ

Одним із поширених методів розв'язування задач нелінійного математичного програмування є метод можливих напрямів. Нехай цільова функція $f(\bar{X})$ – угнута диференційовна функція з неперервним градієнтом

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \bar{e}_n = \text{grad} f(\bar{X}), \quad (5.1)$$

де $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – ортонормований базис n -вимірного простору. Нехай у D -області функції $\varphi_i(\bar{X}) \leq b_i$ опуклі і регулярні. Тоді задача максимізації $f(\bar{X})$, $\bar{X} \in D$, називається задачею опуклого програмування. Одним з методів розв'язування цієї задачі є метод можливих напрямів. Розглянемо його. Напрямок $\bar{U}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ у точці $\bar{X} \in D$ називається можливим, якщо досить мале переміщення з \bar{X} у напрямі \bar{U} не виводить точки за межі D , тобто існує деяке мале ε таке, що при $\bar{X} \in D$, $\bar{X} + \varepsilon \bar{U} \in D$.

Можливий напрямок \bar{U} у точці \bar{X} називається придатним, якщо

$$\left. \frac{\partial f(\bar{X} + \varepsilon \bar{U})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{X}} \cdot \bar{U} \right) > 0. \quad (5.2)$$

Теорема 1. Для того щоб напрям \bar{U} у точці \bar{X} був можливим, необхідно, щоб

$$\left(\frac{d\varphi_i(\bar{X})}{d\bar{X}} \cdot \bar{U} \right) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (5.3)$$

$$u_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.4)$$

де умови (5.2) і (5.3) записані у вигляді скалярних добутків.

Якщо $\varphi_i(\bar{X})$ – лінійні функції, то умови (5.3) і (5.4) є достатніми.

Наведемо доведення необхідності.

Нехай \bar{U} – можливий напрямок у точці \bar{X} . Тоді $\bar{X} + \varepsilon \bar{U} \in D$, тобто

$$\varphi_i(\bar{X} + \varepsilon \bar{U}) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.5)$$

і

$$\bar{X} + \varepsilon \bar{U} \geq 0. \quad (5.6)$$

За умовою $\varphi_i(\bar{X})$ опуклі. Тоді для будь-яких із цих функцій

$$\varphi_i[\bar{X}_1 + \varepsilon(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)] \leq \varphi_i(\bar{X}_1) + \varepsilon[\varphi_i(\bar{X}_2) - \varphi_i(\bar{X}_1)];$$

$$\frac{\varphi_i[\bar{X}_1 + \varepsilon(\bar{X}_2 - \bar{X}_1)] - \varphi_i(\bar{X}_1)}{\varepsilon} \leq \varphi_i(\bar{X}_2) - \varphi_i(\bar{X}_1).$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, дістанемо

$$\left[\frac{d\varphi_i(\bar{X}_1)}{d\bar{X}} \cdot (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \right] \leq \varphi_i(\bar{X}_2) - \varphi_i(\bar{X}_1).$$

Нехай $\bar{X}_1 = \bar{X}$; $\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = \varepsilon \bar{U}$, тоді

$$\varphi_i(\bar{X} + \varepsilon \bar{U}) - \varphi_i(\bar{X}) \geq \varepsilon \left(\frac{d\varphi_i(\bar{X})}{d\bar{X}} \cdot \bar{U} \right).$$

Поклавши в (5.5) $b_i = \varphi_i(\bar{X})$, дістанемо

$$\varphi_i(\bar{X} + \varepsilon \bar{U}) - \varphi_i(\bar{X}) \leq 0.$$

Тоді $\epsilon \left(\frac{d\varphi_i(\bar{X})}{d\bar{X}} \cdot \bar{U} \right) \leq 0$. Оскільки $\epsilon > 0$, то

$$\frac{d\varphi_i(\bar{X})}{d\bar{X}} \cdot \bar{U} \leq 0.$$

З умови (5.6) випливає, що $u_j \geq 0$.

Теорема 2. Для того щоб функція $f(\bar{X})$ досягала максимуму у точці $\bar{X} \in D$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\left(\frac{df(\bar{X})}{d\bar{X}} \cdot \bar{U} \right) \leq 0 \quad (5.7)$$

для будь-якого \bar{U} , що задовольняє умови (5.3) і (5.4).

Цю теорему наводимо без доведення. З неї випливає наслідок.

Наслідок. Якщо в точці $\bar{X} \in D$ не існує відповідного можливого напрямку, то функція $f(\bar{X})$ у цій точці досягає максимуму в області D .

Теорема 3. Для того щоб точка $\bar{X} \in D$ була точкою максимуму для функції $f(\bar{X})$, необхідно і достатньо, аби

$$\frac{df}{d\bar{X}} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{d\varphi_i(\bar{X})}{d\bar{X}} - \sum_{j=1}^n \beta_j \bar{e}_j, \quad \lambda_i \geq 0; \quad \beta_j \geq 0. \quad (5.8)$$

Доведення достатності. Нехай виконується умова (5.8). Тоді, помноживши скалярно рівняння (5.8) на будь-яке \bar{U} , дістанемо умову (5.7).

Із цих теорем випливає основна теорема загальної теорії математичного програмування, або теорема Куна—Таккера.

Побудуємо функцію Лагранжа

$$L(\bar{X}, \bar{\lambda}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)];$$

$$L(\bar{X}, \bar{\lambda}) = f(\bar{X}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - \varphi_i(\bar{X})],$$

де $\bar{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\bar{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектори n -вимірного простору ($m < n$). Побудуємо такі похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{X}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j} \bar{e}_j = \text{grad} L = \bar{L}'_X;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{X}} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right] \bar{e}_j;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \bar{e}_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \bar{e}_m$$

або

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} = \sum_{i=1}^m [b_i - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \bar{e}_i].$$

Нехай D -область опукла і регулярна, а угнута $f(\bar{X})$ і опуклі $\varphi_i(\bar{X})$ функції є двічі диференційовними в D -області. Тоді для того щоб у точці $\bar{X}_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ існував максимум $f(\bar{X})$, необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\bar{\lambda}_0(\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0})$ такий, що

$$\left| \frac{\partial L(\bar{X}_0, \bar{\lambda}_0)}{\partial \bar{X}} \right| \leq 0; \quad \left(\frac{\partial L(\bar{X}_0, \bar{\lambda}_0)}{\partial \bar{X}} \cdot \bar{X}_0 \right) = 0; \quad |\bar{X}_0| \geq 0; \quad (5.9)$$

$$\left| \frac{\partial L(\bar{X}_0, \bar{\lambda}_0)}{\partial \bar{\lambda}} \right| \geq 0; \quad \left(\frac{\partial L(\bar{X}_0, \bar{\lambda}_0)}{\partial \bar{\lambda}} \cdot \bar{\lambda}_0 \right) = 0; \quad |\bar{\lambda}_0| \geq 0. \quad (5.10)$$

Умови (5.9) і (5.10) можна записати у координатній формі

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j} \bar{e}_j \right|_{\substack{\bar{X}=\bar{X}_0 \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0}} \leq 0;$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{X}} \cdot \bar{X}_0 \right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j} \bar{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j \bar{e}_j \right) \Big|_{\substack{\bar{X}=\bar{X}_0 \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0}} = 0; \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} \cdot \bar{\lambda}_0 \right) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} x_j \right] \Big|_{\substack{\bar{X}=\bar{X}_0 \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0}} = 0;$$

$$|\bar{X}_0| = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + \dots + x_{n0}^2} \geq 0;$$

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}} \right| = \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \bar{e}_i \right] \Big|_{\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0} \geq 0;$$

$$\left[\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \right] \Bigg|_{\substack{\bar{X}=\bar{X}_0 \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0}} = 0$$

або

$$\left(\frac{\partial L(\bar{X}_0, \bar{\lambda}_0)}{\partial \bar{\lambda}} \cdot \bar{\lambda}_0 \right) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \lambda_i \right] \Bigg|_{\substack{\bar{X}=\bar{X}_0 \\ \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0}} = 0;$$

$$|\bar{\lambda}_0| = \sqrt{\lambda_{10}^2 + \lambda_{20}^2 + \dots + \lambda_{m0}^2} \geq 0; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \bar{e}_j \right) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} \leq 0; \quad (5.13)$$

$$\left[\sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} = 0;$$

$$\left[\sum_{i=1}^m \bar{e}_i (b_i - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} \geq 0; \quad (5.14)$$

$$\left[\sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} = 0.$$

Розглянемо випадки лінійного програмування, коли

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_j; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = a_{ij}.$$

У цьому разі умови (5.13) і (5.14) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \left[\sum_{j=1}^n (c_j - a_{ij} \lambda_i) \bar{e}_j \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} \leq 0; \\ \left[\sum_{j=1}^n x_j (c_j - a_{ij} \lambda_i) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} = 0; \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} \left[\sum_{i=1}^m \bar{e}_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} \geq 0; \\ \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - a_{ij} x_j) \right] \Bigg|_{\substack{x_j=x_{j0} \\ \lambda_i=\lambda_{i0}}} = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

У системі

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j x_j - \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m b_i \lambda_i - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5.17)$$

$m+n$ рівнянь невідомими є $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. У результаті розв'язування рівнянь (5.17) дістанемо значення $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0}$. Для цих розв'язків перевіряються умови (5.15) і (5.16).

Отже, серед можливих напрямів, що виходять з деякої точки $\bar{X}^{(0)} \in D$, вибирають напрям зростання або спадання функції $f(\bar{X})$ і здійснюють підймання (спускання) вздовж цього напрямку у точку $\bar{X}^{(1)}$. Починаючи з точки $\bar{X}^{(1)}$, процес повторюють.

§ 6. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

У § 1–5 розглянуто задачі на максимум і мінімум процесів, що можна описати функціями зі скінченним числом змінних. Основна задача варіаційного числення полягає у розробці методів розв'язування задач на екстремум процесів з нескінченним числом змінних. При цьому максимуми і мінімуми досягаються на лініях, поверхнях тощо, тобто на функціях. Якщо у першому випадку стаціонарні значення (точки екстремуму) визначаються із алгебраїчних рівнянь, то в другому випадку функції визначаються з диференціальних рівнянь.

6.1. Поняття про функціонал

Як відомо, поняття функції пов'язане з можливістю встановлення відповідності між двома множинами чисел, одна з яких називається аргументом, а друга – функцією.

Поняття функціонала пов'язане з відповідністю між множиною певного класу функцій (наприклад, раціональних, цілих, неперервних, диференційованих, визначених на скінченному або нескінченному проміжку) і множиною чисел. Якщо кожній функції $y = f(x)$ певного класу ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I , то цю змінну називають **функціоналом від однієї функціональної змінної** і записують таким чином:

$$I = I[y] = I[y(x)] = I[f(x)]. \quad (6.1)$$

За цим означенням функція y є незалежною змінною для функціонала. **Областю визначення функціонала** є певний клас функцій.

Серед функціоналів трапляються функціонали і від кількох функціональних змінних (аргументних) функцій. Якщо скінченному набору функцій $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$ з певного класу функцій ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I , то I називають **функціоналом від n функціональних змінних** і записують таким чином:

$$I = I[y_1, y_2, \dots, y_n].$$

Приклади. 1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на $[a, b]$ і диференційовна в (a, b) , де a, b – сталі. Функціоналом може бути, наприклад,

$$I[y] = \int_a^b y^3 dx. \quad (6.2)$$

Беручи конкретні функції, наприклад:

$$y = x^2, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = a^x, \quad y = e^x,$$

і підставляючи в (6.2), дістанемо різні числа. Сукупність цих чисел і становить значення функціонала.

Отже, формула (6.2) дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між різними диференційованими на $[a, b]$ функціями і числами. Таким чином, (6.2) є функціоналом. Областю визначення функціонала (6.2) є клас інтегрованих функцій, визначених на $[a, b]$.

2. Довжина дуги l кривої $y = f(x)$, визначеної на $[a, b]$ і диференційовної в (a, b)

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = I[y], \quad (6.3)$$

буде функціоналом від однієї функціональної змінної.

Для функціонала (6.3) поставимо задачу на його екстремум. Серед усіх неперервно диференційованих функцій $y = f(x)$, для яких $f(a) = y_a$, $f(b) = y_b$, знайти ту довжину дуги якої має найменше можливе значення, тобто знайти таку функцію $y(x)$, яка надає інтегралу (6.3) мінімум.

Зрозуміло, що розв'язком є лінійна функція, тобто пряма, що сполучає точки A і B (рис. 7.4, а).

3. Нехай задано дві точки площини $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ (рис. 7.4, б).

Треба сполучити точки A і B кривою $y = f(x)$, яка розміщена вище осі Ox і має ту властивість, що поверхня, утворена обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі, має найменшу

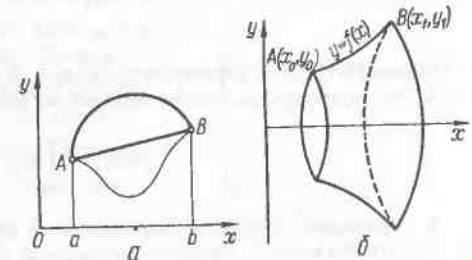


Рис. 7.4

можливу площу. Математично ця задача зводиться до пошуку функції $y = f(x)$, що задовольняє умови $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ і надає мінімум функціоналу

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (6.4)$$

Розв'язком є ланцюгова лінія $y = \operatorname{ch} x$.

4. Нехай у просторі задано дві точки: $A(x_0, y_0, z_0)$ і $B(x_1, y_1, z_1)$. Треба знайти такі дві функції $y(x)$ і $z(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$, які визначають найкоротшу відстань між точками A і B , тобто надають функціоналу

$$I[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx \quad (6.5)$$

найменше можливе значення. Задачу можна узагальнити: шукати не дві, а три функції: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, що задовольняють умови

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; \\ x(t_1) &= x_1; y(t_1) = y_1; z(t_1) = z_1 \end{aligned} \quad (6.6)$$

і визначають найкоротшу відстань між точками A і B , тобто надають функціоналу

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \quad (6.7)$$

найменше можливе значення. Розв'язком цієї задачі є пряма лінія, що проходить через точки A і B :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}; \quad (6.8)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t; \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t; \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t. \end{cases} \quad (6.9)$$

Вирази (6.5) і (6.7) є функціоналами двох (6.5), трьох (6.7) функціональних змінних.

5. Математичне сподівання випадкової величини X є функціонал

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

6. Ефективність роботи підприємства є функціонал. Функціональними змінними тут є якість технологій, продуктивність праці робітників тощо.

6.2. Класичні задачі варіаційного числення

Задача про геодезичні лінії. Нехай задано поверхню $\varphi(x, y, z) = 0$. Вибираємо на поверхні точки $A(x_0, y_0, z_0)$ і $B(x_1, y_1, z_1)$. Треба знайти рівняння кривої, що сполучає на поверхні точки A і B , довжина якої є якнайменшою. Наведемо аналітичне фор-

мулювання задачі: знайти функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ від параметра t , що задовольняють рівняння

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (6.10)$$

і умови

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; \\ x(t_1) &= x_1; y(t_1) = y_1; z(t_1) = z_1, \end{aligned}$$

а також надають мінімум інтегралу

$$I[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (6.11)$$

Лінії найменшої довжини, розміщені на поверхні, дістали назву геодезичних. Аналогічну назву має задача (6.10), (6.11). З іншого боку, ми маємо задачу на умовний екстремум функціонала (6.11), де умовою є рівняння (6.10). Задача про геодезичні лінії є задачею, яка досить часто використовується у практиці керування різними потоками. Так, під час перевезення промислових вантажів із пункту A в пункт B обирають, як правило, найкоротший шлях. Цими ж міркуваннями керуються пасажери.

Задача про геодезичні лінії (6.10), (6.11) відрізняється від задач (6.6), (6.7) наявністю умови (6.10). У задачі (6.10), (6.11) відповідь (6.8), (6.9) може бути лише у випадку, коли (6.10) є рівнянням площини, якій належать точки A і B .

Задача про максимальну швидкість. Першою з такого типу задач була така: знайти криву, розміщену у вертикальній площині, яка сполучає дві задані точки $A(a; y_a)$ і $B(b; y_b)$, що не належать одній вертикальній прямій, таку, щоб вага матеріальна точка під дією сили тяжіння, рухаючись без тертя по кривій, потрапила з A у B найшвидше. Ця задача була запропонована Й. Бернуллі близько 300 років тому і називається задачею про брахістохрону. Виведемо рівняння для часу падіння точки з A у B (рис. 7.5).

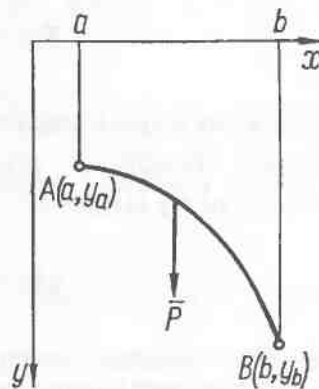


Рис. 7.5

Позначимо рівняння шуканої кривої через $y = f(x)$. За умовою $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ і $a < b$, $y_a < y_b$. Час руху точки кривої з A у B

дорівнює T . Початкову швидкість руху точки масою m і вагою p у точці A вважатимемо рівною нулю. За теоремою про зміну кінетичної енергії

$$\frac{mv^2}{2} = p(y - y_a) \text{ або } \frac{v^2}{2} = g(y - y_a).$$

Звідси

$$v = \sqrt{2g(y - y_a)}.$$

З іншого боку, швидкість

$$v = \frac{ds}{dt},$$

де ds – диференціал дуги кривої $y(x)$, тобто

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad v = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt};$$

$$\sqrt{2g(y - y_a)} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt}.$$

Звідси

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y - y_a)}} dx; \quad T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y - y_a)}} dx.$$

Покладемо $y_a = 0$, тоді

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Тепер можна сформулювати таку задачу: серед неперервно диференційовних функцій $y = y(x)$, для яких $y(a) = 0$, $y(b) = y_b$, знайти таку, що надає інтегралу

$$I[y] = T[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx \quad (6.12)$$

найменше можливе значення.

У більш загальному вигляді задача про максимальну швидкодню формулюється таким чином: дано деякий об'єкт, що визначається набором функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Треба перемістити цей об'єкт з положення A в положення B за найкоротший час.

Ізопериметрична задача. У цій задачі треба знайти лінію заданої довжини L , що обмежує максимальну площу S . Запишемо спрощене формулювання задачі в аналітичній формі. Розглянемо лінію, розміщену у площині. Кінці лінії закріплені у певних точках A і B . Проведемо через ці точки пряму і візьмемо її за вісь Ox (рис. 7.6).

Тоді задача зводиться до відшукування максимальної площі

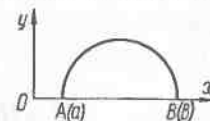


Рис. 7.6

$$S = \int_a^b y(x) dx \quad (6.13)$$

за умови, що довжина лінії

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (6.14)$$

збігається і

$$y(a) = 0; \quad y(b) = 0. \quad (6.15)$$

Відомим є розв'язок цієї задачі. Такою лінією є коло (рис. 7.6). Сформульована задача називається **задачею Дідо**. У більш загальній постановці можна говорити про максимум функціонала площі поверхні

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

за умови, що

$$L = \int_1^2 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$$

зберігає своє стале значення, а рівняння поверхні записано у вигляді

$$z = z[x(t), y(t)].$$

Буквальний зміст слів «ізопериметрична задача» – це задача із заданим (сталим) параметром.

Отже, варіаційне числення є розділом вищої математики, в якому визначаються умови екстремуму функціонала. Далі розглядатимемо екстремуми функціоналів виду

$$I = I[y] = \int_a^b F(x, y) dx; \quad (6.16)$$

$$I = I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad (6.17)$$

$$I = I[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx; \quad (6.18)$$

$$I = I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx, \quad (6.19)$$

в яких $y(x)$ і $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ є функціональними аргументами.

Екстремуми функціоналів так само, як і екстремуми функцій зі скінченним числом незалежних змінних, можуть бути абсолютними і локальними або відносними залежно від того, де шукаємо екстремум функціонала: у всьому класі функцій, для яких існує функціонал, чи у його частині.

Функції, для яких існує функціонал, називаються допустимими. Весь подальший виклад стосується відносних екстремумів функціоналів.

6.3. Варіація функції і приріст функціонала

Нехай задано функцію $y = f(x)$. Приріст аргументу Δx є різницею між значеннями аргументу x_1 і x_2 , тобто

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Для функціонала $I = I[y]$ роль аргументу виконує функція $y(x)$. Тому приріст аргументу функціонала можна визначити за аналогією з приростом аргументу функції як різницю між двома різними функціями при одному і тому самому аргументі самих функцій. Приріст аргументу функціонала дістав назву **варіації функції** і позначається δy . Отже, за означенням

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x). \quad (6.20)$$

Передбачається, що функція вибирається з одного класу області визначення функціонала. Із (6.20) функцію можна виразити через $f_1(x)$ і варіацію функції

$$y_2 = y_1 + \delta y.$$

Відкидаючи індекс у функції $y_1(x)$ у попередній формулі, дістаємо

$$y_2 = y + \delta y. \quad (6.21)$$

Якщо задано функціонал від кількох змінних, то варіацій функцій буде стільки, скільки функціональних змінних. Наприклад, для $I = I[y, z, u]$ можна утворити три варіації:

$$\delta y = y_1 - y; \quad \delta z = z_1 - z; \quad \delta u = u_1 - u.$$

Для функціонала $I = I[y_1, y_2, \dots, y_n]$ можна утворити n варіацій:

$$\delta y_1 = \bar{y}_1 - y_1; \quad \delta y_2 = \bar{y}_2 - y_2; \quad \dots; \quad \delta y_n = \bar{y}_n - y_n.$$

Розглянемо тепер **приріст функціонала**. Приріст функціонала є аналогом приросту функції. Як відомо, приріст функції однієї змінної $y = f(x)$ записується у вигляді

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Відповідно приріст функціонала $I[y]$ можна подати у вигляді

$$\Delta I[y] = I[y + \delta y] - I[y]. \quad (6.22)$$

Так, для функціонала $I = \int_a^b y(x) dx$ маємо

$$\Delta I[y] = \int_a^b (y + \delta y) dx - \int_a^b y dx = \int_a^b \delta y dx.$$

Вираз (6.22) є приростом функціонала однієї змінної. У випадку функціонала з кількома функціональними змінними, наприклад,

$$I = I[y, z, v],$$

аналогічно до функцій багатьох змінних можна побудувати і частинні прирости функціонала. Так, повний приріст функціонала від трьох функціональних змінних $y(x), z(x), v(x)$ має вигляд

$$\Delta I = I[y + \delta y; z + \delta z; v + \delta v] - I[y, z, v].$$

Частинний приріст, наприклад, по y , має вигляд

$$\Delta_y I = I[y + \delta y; z; v] - I[y, z, v].$$

Для функціонала з n функціональними змінними

$$I = I[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

повний приріст можна записати таким чином:

$$\Delta I = I[x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n] - I[x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (6.23)$$

У цьому випадку можна утворити n частинних приростів:

$$\Delta_{x_i} I = I[x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] - I[x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (6.24)$$

6.4. Неперервність функціонала

Як відомо, функція однієї змінної називається неперервною у деякій точці, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Аналогічно визначається умова неперервності функціонала. Якщо нескінченно малий зміні функції відповідає нескінченно мала зміна функціонала, то функціонал називається **неперервним**. У цьому означенні треба уточнити поняття малих змін функції або близькості функції. Дві криві $y(x)$ і $y_1(x)$, диференційовні при $x \in [a, b]$ k разів, мають близькість k -го порядку, якщо абсолютні величини різниць

$$|y^{(v)}(x) - y_1^{(v)}(x)| < \delta; \quad v = \overline{0, k}, \quad x \in [a, b] \quad (6.25)$$

малі. Тоді при $v = 0$ криві мають близькість нульового порядку, при $v = 1$ — першого порядку і т. д. Із означення випливає: якщо криві мають близькість k -го порядку, то вони мають будь-яку близькість нижчого порядку. Виходячи з цього, можна дати точне визначення неперервного функціонала. Функціонал $I[y(x)]$ називається неперервним на кривій $y = y_0(x)$ у розумінні близькості k -го порядку, якщо за заданим $\epsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що за умов

$$|y^{(v)}(x) - y_0^{(v)}(x)| < \delta, \quad v = \overline{0, k}, \quad (6.26)$$

виконується умова

$$|I[y(x)] - I[y_0(x)]| < \epsilon \quad (6.27)$$

для $x \in [a, b]$.

Дамо означення неперервності функціонала від n функціональних змінних на сукупності кривих

$$\{x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{n0}(t)\}.$$

Функціонал

$$I = I[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad t \in [t_0, T], \quad (6.28)$$

називається неперервним на сукупності кривих $\{x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{n0}(t)\}$ у розумінні близькості k -го порядку, якщо за заданим ϵ можна вказати таке $\delta > 0$, залежне від ϵ , що за умови виконання нерівностей

$$|x_i^{(v)}(t) - x_{i0}^{(v)}(t)| < \delta; \quad v = \overline{0, k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.29)$$

має місце нерівність

$$|I[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] - I[x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{n0}(t)]| < \epsilon \quad (6.30)$$

для $t \in [t_0, T]$.

6.5. Лінійний функціонал

Означення поняття лінійного функціонала від однієї або багатьох функціональних змінних аналогічне означенню лінійної форми. **Лінійним функціоналом**, визначеним на лінійному просторі, називається функціонал, для якого виконуються умови:

- 1) $I = I[cy(x)] = cI[y(x)]$;
- 2) $I = I[y_1(x) + y_2(x)] = I[y_1(x)] + I[y_2(x)]$.

Наприклад, лінійним є функціонал

$$I = \int_a^b [P(x)y(x) + g(x)y'(x)] dx,$$

а функціонал

$$I = \int_a^b [P(x)y(x) + g(x)(y'(x))^2] dx$$

не є лінійним. Дійсно, покажемо, що умова 2) для цього функціонала не виконується:

$$I[y_1(x) + y_2(x)] = \int_a^b \left\{ P(x)[y_1(x) + y_2(x)] + g(x)[y_1'(x) + y_2'(x)]^2 \right\} dx = \\ = \int_a^b \left\{ P(x)[y_1(x) + y_2(x)] + y(x) \left[(y_1')^2(x) + 2y_1'(x)y_2'(x) + (y_2')^2(x) \right] \right\} dx.$$

$$I[y_1(x)] + I[y_2(x)] = \int_a^b \left[P(x)y_1(x) + g(x)(y_1'(x))^2 \right] dx + \\ + \int_a^b \left[P(x)y_2(x) + g(x)(y_2'(x))^2 \right] dx; \\ I[y_1(x) + y_2(x)] \neq I[y_1(x)] + I[y_2(x)].$$

Аналогічно вводиться означення лінійного функціонала від багатьох функціональних змінних. Розглянемо, наприклад, функціонал від трьох функціональних змінних

$$I = I[x(t), y(t), z(t)].$$

Цей функціонал буде лінійним, якщо виконуються умови:

- 1) $I[ax(t), ay(t), az(t)] = aI[x(t), y(t), z(t)];$
- 2) $I[x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t), z_1(t) + z_2(t)] = \\ = I[x_1(t), y_1(t), z_1(t)] + I[x_2(t), y_2(t), z_2(t)].$

Наприклад, лінійним є функціонал від трьох функціональних змінних

$$I = \int_a^b [P(t)x(t) + Q(t)y(t) + R(t)z(t)] dt,$$

де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – функціональні змінні.

6.6. Варіація функціонала

Як відомо, функція $y = f(x)$ називається диференційовною, якщо її приріст Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x, \quad (6.31)$$

де

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(x, \Delta x) = 0. \quad (6.32)$$

Вираз $A(x)\Delta x = dy$ називається **диференціалом функції**. Диференціал функції однієї змінної є лінійною функцією відносно приросту її аргументу Δx .

Розглянемо тепер функціонал від однієї функціональної змінної $I = I[y]$ і знайдемо аналоги (6.31) і (6.32) у цьому випадку. Як аналог приросту Δx візьмемо варіацію δy , а як аналог приросту функції – приріст функціонала. Тоді аналогом диференціала буде лінійний відносно δy функціонал, який називається варіацією функціонала і позначається δI . Якщо приріст функціонала можна подати у вигляді

$$\Delta I = L(y, \delta y) + \beta(y, \delta y)|\delta y|, \quad (6.33)$$

де

$$\lim_{|\delta y| \rightarrow 0} \beta(y, \delta y) = 0, \quad (6.34)$$

а $L(y, \delta y)$ є лінійним відносно δy функціоналом, то $L(y, \delta y)$ називається варіацією функціонала:

$$\delta I = L(y, \delta y). \quad (6.35)$$

Отже, **варіація функціонала** однієї функціональної змінної є головною лінійною відносно δy частиною приросту функціонала.

Аналогічно вводиться поняття лінійного функціонала від багатьох змінних. Нагадаємо, що повним диференціалом функції n змінних називається головна лінійна відносно аргументу функції частина повного приросту функції. Так, якщо задано функцію

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Якщо для функціонала $I = I[y_1, y_2, \dots, y_n]$

$$\Delta I = L[y_1, y_2, \dots, y_n, \delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n] + \beta_1 |\delta y_1| + \beta_2 |\delta y_2| + \dots + \beta_n |\delta y_n|,$$

де

$$\lim_{|\delta y_i| \rightarrow 0} \beta_i = 0,$$

а

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n, \delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n) = \delta I \quad (6.37)$$

є лінійним функціоналом відносно варіацій $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$, то цей функціонал називається варіацією функціонала від n функціональних змінних.

Отже, варіація функціонала від n функціональних змінних є головною лінійною відносно варіацій функцій $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_n$ частиною приросту функціонала.

У дослідженні функціоналів варіація функціонала виконує роль, аналогічну тій ролі, яку виконує диференціал при дослідженні функції.

Введену вище варіацію звичайно називають варіацією першого порядку (аналогічно диференціалу першого порядку). Можна ввести поняття варіацій вищих порядків аналогічно тому, як це робилося для диференціалів вищих порядків. Введемо поняття варіації вищого порядку для функціонала від однієї функціональної змінної. Розглянемо функцію $I[y + \lambda \delta y]$ змінної λ при функціональних y і δy і розвинемо її в ряд Тейлора за степенями λ в околі точки $\lambda = 0$:

$$I[y + \lambda \delta y] = I[y] + \left\{ \frac{d}{d\lambda} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0} \lambda + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0} \lambda^2 + \frac{1}{3!} \left\{ \frac{d^3}{d\lambda^3} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0} \lambda^3 + \dots$$

Вираз у фігурних дужках являє собою відповідно варіації першого, другого і т. д. порядків:

$$\begin{aligned} \delta I[y, \delta y] &= \left\{ \frac{d}{d\lambda} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0}; \\ \delta^2 I[y, \delta y] &= \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0}; \\ \dots &\dots \\ \delta^k I[y, \delta y] &= \left\{ \frac{d^k}{d\lambda^k} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Отже, варіацією k -го порядку функціонала називається значення похідної того самого порядку по λ при $\lambda = 0$ від функціонала $I[y + \lambda \delta y]$. Знайдемо різницю $I[y + \lambda \delta y] - I[y]$, яка при $\lambda = 1$ є приростом функціонала, тобто $I[y + \delta y] - I[y] = \Delta I$:

$$I[y + \lambda \delta y] - I[y] = \left\{ \frac{d}{d\lambda} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0} \lambda + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{d\lambda^2} I[y + \lambda \delta y] \right\}_{\lambda=0} \lambda^2 + \dots$$

При $\lambda = 1$ ця різниця дає приріст функції: $\Delta I = I[y + \delta y] - I[y]$. Замінюючи λ на одиницю і позначаючи фігурні дужки відповідними варіаціями, дістанемо

$$\Delta I = \delta I[y, \delta y] + \frac{1}{2!} \delta^2 I[y, \delta y] + \frac{1}{3!} \delta^3 I[y, \delta y] + \dots \quad (6.38)$$

Звідси можна зробити висновок, що кожен наступну варіацію знаходимо, варіюючи попередню, тобто

$$\delta^2 I = \delta[\delta I]; \quad \delta^3 I = \delta[\delta^2 I],$$

причому δy вважається незалежною від y . Аналогічно до диференціалів кожна наступна варіація має на одиницю вищий порядок мализми, ніж попередня.

Введемо варіації вищого порядку для функціоналів від n функціональних змінних. Для спрощення візьмемо функціонал від двох функціональних змінних:

$$I = I[y, z].$$

Розглянемо

$$I[y + \lambda \delta y; z + \mu \delta z]$$

як функцію двох змінних λ і μ при фіксованому $y, \delta y, z, \delta z$ і розвинемо її в ряд Маклорена по λ і μ :

$$I[y + \lambda \delta y; z + \mu \delta z] = I[y, z] + \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} I[y + \lambda \delta y; z + \mu \delta z] \right\}_{\lambda=0, \mu=0} \lambda + \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} I[y + \lambda \delta y; z + \mu \delta z] \right\}_{\lambda=0, \mu=0} \mu + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} I[y + \lambda \delta y; z + \mu \delta z] \right\}_{\lambda=0, \mu=0} \lambda^2 +$$

$$+ \frac{2}{2!} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} \lambda \mu + \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} \mu^2 + \dots$$

Вирази у фігурних дужках при $\lambda = 0$ і $\mu = 0$ є частинними варіаціями першого, другого і вищих порядків від функціонала двох функціональних змінних:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} = \delta_y I[y, \delta y, z, \delta z],$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} = \delta_z I[y, \delta y, z, \delta z],$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} = \delta_{yy}^2 I[y, \delta y, z, \delta z],$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} = \delta_{yz}^2 I[y, \delta y, z, \delta z],$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] \right\} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} = \delta_{zz}^2 I[y, \delta y, z, \delta z].$$

Різниця $I[y + \lambda \delta y, z + \mu \delta z] - I[y, z]$ при $\lambda = 1$ і $\mu = 1$ є повним приростом ΔI функціонала. Тоді

$$\begin{aligned} \Delta I &= \delta_y I[y, \delta y, z, \delta z] + \delta_z I[y, \delta y, z, \delta z] + \\ &+ \frac{1}{2!} (\delta_{yy}^2 I + 2\delta_{yz}^2 I + \delta_{zz}^2 I) + \dots \end{aligned} \quad (6.39)$$

Зауваження. Варіації функціональних змінних часто позначають новими функціями, відмінними від фіксованих $y(x)$, $z(x)$, наприклад, $h(x)$ і $g(x)$, тобто $\delta I[y, h]$, $\delta_y I[y, h, z, g]$ і т. д.

Приклади. 1. Нехай задано функціонал $I = \int_a^b y^2 dx$. Знайти δI .

Розв'язання. Знайдемо приріст

$$\Delta I = I[y + \delta y] - I[y] = \int_a^b (y + \delta y)^2 dx - \int_a^b y^2 dx = 2 \int_a^b y \delta y dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx.$$

За означенням

$$\delta I = 2 \int_a^b y \delta y dx.$$

2. Задано функціонал $I = \int_a^b y^3 dx$. Знайти δI .

Розв'язання. Знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta I &= I[y + \delta y] - I[y] = \int_a^b [y^3 + 3y^2 \delta y + 3y(\delta y)^2 + (\delta y)^3] dx - \int_a^b y^3 dx = \\ &= 3 \int_a^b y^2 \delta y dx + 3 \int_a^b y(\delta y)^2 dx + \int_a^b (\delta y)^3 dx. \end{aligned}$$

За означенням

$$\delta I = 3 \int_a^b y^2 \delta y dx.$$

Досить часто для відшукування варіації функціонала використовують метод розв'язання нарощеного значення функціонала ΔI в ряд Тейлора з наступним виділенням лінійної відносно δy частини, тобто δI .

3. Визначити варіацію функціонала

$$I = \int_a^b F(x, y) dx; \quad (6.40)$$

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (6.41)$$

Розв'язання. Знаходимо

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y + \delta y) dx - \int_a^b F(x, y) dx;$$

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Розвинемо функції $F(x, y + \delta y)$ і $F(x, y + \delta y, y' + \delta y')$ в ряди в околах точок (x, y) і (x, y, y') :

$$F(x, y + \delta y) = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \text{ плюс члени вищого порядку мализни відносно } \delta y;$$

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y') = F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \text{ плюс члени вищого порядку мализни відносно } \delta y \text{ і } \delta y'.$$

Тоді

$$\Delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \delta y \right] dx + \dots,$$

$$\Delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx + \dots$$

Відповідно

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y \right] dx ; \quad (6.42)$$

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx . \quad (6.43)$$

4. Знайти першу варіацію функціонала

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) . \quad (6.44)$$

Розв'язання. Побудуємо ΔI :

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n, y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2, \dots, y'_n + \delta y'_n) dx - \\ - \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx .$$

Розвинемо функцію

$$F(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n, y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2, \dots, y'_n + \delta y'_n)$$

в ряд Тейлора в околі точки $(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$:

$$F(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, \dots, y_n + \delta y_n, y'_1 + \delta y'_1, y'_2 + \delta y'_2, \dots, y'_n + \delta y'_n) = \\ = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \text{ плюс члени вищих порядків}$$

мализни.

Тоді

$$\delta I = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx . \quad (6.45)$$

5. Показати, що для функціонала

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (6.46)$$

варіація

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) dx . \quad (6.47)$$

Розв'язання. Дійсно,

$$I(y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}) = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}) dx .$$

Розвинемо функцію

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)})$$

в ряд Тейлора в околі точки $(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$:

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}) = F(x, y', \dots, y^{(n)}) + \\ + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \dots$$

Тепер

$$\Delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right] dx + \frac{1}{2!} \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + \dots \right] dx + \dots$$

За означенням

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right] dx .$$

6. Знайти другу варіацію для функціонала

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx ;$$

$$I[y + \delta y] = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx .$$

Розв'язання. Розвинемо функцію $F(x, y + \delta y, y' + \delta y')$, як і в попередньому прикладі, в ряд Тейлора в околі точки (x, y, y') і врахуємо в ряду другі похідні. Тоді

$$I[y + \delta y] = \int_a^b \left[F(x, y, y') + (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y') + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} (F''_{yy} (\delta y)^2 + 2F''_{yy'} \delta y \delta y' + F''_{y'y'} (\delta y')^2 + \dots) \right] dx ,$$

але $I[y + \delta y] - I[y] = \Delta I$; тоді

$$\Delta I = \int_a^b \left[F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y' + \frac{1}{2!} (F''_{yy} (\delta y)^2 + 2F''_{yy'} \delta y \delta y' + F''_{y'y'} (\delta y')^2) + \dots \right] dx .$$

За означенням

$$\delta I = \int_a^b [F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y'] dx ;$$

$$\delta^2 I = \int_a^b [F''_{yy} (\delta y)^2 + 2F''_{yy'} \delta y \delta y' + F''_{y'y'} (\delta y')^2] dx . \quad (6.48)$$

ВПРАВИ. Знайти першу і другу варіації функціоналів.

$$\begin{aligned}
 1. I &= \int_{-1}^1 (y^3 - 3x^4 y) dx. \text{ Відповідь. } \delta I = \int_{-1}^1 (3y^2 \delta y - 3x^4 \delta y) dx; \delta^2 I = \int_{-1}^1 6y \delta^2 y dx. \\
 2. I &= \int_0^1 y(y+x) dx. \text{ Відповідь. } \delta I = \int_0^1 (2y \delta y + x \delta y) dx; \delta^2 I = \int_0^1 2\delta^2 y dx. \\
 3. I &= \int_2^3 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx. \text{ Відповідь. } \delta I = \int_2^3 (x \delta y + 2y \delta y - 4y y' \delta y - 2y^2 \delta y') dx; \delta^2 I = \\
 &= \int_2^3 (2\delta^2 y - 4y' \delta^2 y - 8y \delta y \delta y') dx. \\
 4. I &= \int_4^3 y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \text{ Відповідь. } \delta I = \int_4^3 \left(\delta y \sqrt{1 + (y')^2} + y \frac{y' \delta y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) dx; \delta^2 I = \\
 &= \int_4^3 \left(\frac{2y' \delta y \delta y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} + y \frac{\delta^2 y'}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right) dx.
 \end{aligned}$$

6.7. Необхідна умова екстремуму функціонала

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає у рівності нулю диференціала першого порядку.

Продовжуючи прийняту аналогію, ми маємо право сподіватись, що коли функціонал досягає екстремуму на яких-небудь функціях $y_{i0}(x)$, то на цих функціях варіація першого порядку від функціонала дорівнює нулю.

Отже, необхідну умову екстремуму функціонала запишемо у вигляді

$$\delta I[y_{i0}(x), \delta y_i] = 0. \quad (6.49)$$

Для функціонала $I = I[y_1, y_2, \dots, y_n]$ функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, на яких існує варіація функціонала, називаються **допустимими**. Якщо на цих функціях варіація функціонала дорівнює нулю, то функції називаються **екстремалами**, або **стаціонарними**.

Остання назва аналогічна поняттю стаціонарних точок.

Екстремалі завжди належать до класу допустимих функцій. У багатьох конкретних задачах (див. п. 6.2) клас допустимих функцій обмежують додатковими умовами:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad (6.50)$$

де y_a, y_b задані.

Оскільки умова (6.49) має виконуватися для будь-якої варіації функції, то для умов (6.50)

$$\delta y(a) = 0; \quad \delta y(b) = 0. \quad (6.51)$$

Виконання необхідної умови (6.49) так само, як і у випадку функцій зі скінченним числом незалежних змінних, надає інтегралам (6.40), (6.41), (6.44), (6.46) лише стаціонарних значень.

6.8. Диференціальні рівняння екстремалей. Канонічні рівняння

Поставимо таку задачу: виразити необхідну умову екстремуму функціонала

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

через функцію $F(x, y, y')$ та її похідні за умов (6.50). Для цього скористаємось виразом (6.43):

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

Застосуємо до другого доданку

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx$$

інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du;$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'}; \quad du = d \frac{\partial F}{\partial y'};$$

$$dv = \delta y' dx; \quad \delta y' = \delta \frac{dy}{dx}, \text{ але } \delta z = z_2(x) - z_1(x);$$

$$\delta \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{d}{dx} [y_2(x) - y_1(x)] = \frac{d}{dx} \delta y; \quad \delta y' = \frac{d}{dx} \delta y.$$

Отже, варіація похідної дорівнює похідній від варіації функції.
Тепер

$$dv = \delta y' dx = \frac{d}{dx} \delta y dx = d\delta y; \quad dv = d\delta y; \quad v = \delta y.$$

Нехай

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \varphi(x, y, y').$$

Тоді

$$du = d \frac{\partial F}{\partial y'} = d\varphi(x, y, y') = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy';$$

$$dy = y' dx; \quad dy' = y'' dx;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2};$$

$$du = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y'' \right) dx;$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y'' \right) \delta y dx$$

або

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Вираз

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} \delta y(b) - \frac{\partial F(a)}{\partial y'} \delta y(a) = 0,$$

оскільки $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Останні умови передбачають, що всі допустимі функції «проходять» через точки a і b . Якщо всі допустимі функції «проходять» через дві різні нерухомі точки, то така задача називається **варіаційною задачею з нерухомими кінцями**.

Варіацію (6.43) з урахуванням (6.49) можна записати таким чином:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (6.52)$$

або

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y'' \right) \right] \delta y dx = 0. \quad (6.53)$$

Рівність нулю виразів (6.52), (6.53) має виконуватись для варіації будь-якої функції в інтервалі (a, b) , взятої з класу допустимих функцій. Це можливо, якщо вираз у квадратних дужках під знаком інтеграла дорівнюватиме нулю для $x \in (a, b)$, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (6.54)$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y'' = 0. \quad (6.55)$$

Серед розв'язків диференціального рівняння (6.54) або (6.55) треба шукати екстремалі. Тому рівняння (6.54) і (6.55) дістали назву рівнянь екстремалей. Рівняння (6.54) було вперше знайдено Л. Ейлером, тому його ще називають рівнянням Ейлера. Рівняння (6.54), (6.55) є звичайними диференціальними рівняннями.

Розглянемо окремі випадки.

1. Для функціонала (6.16), як випливає з (6.54), рівняння Ейлера має вигляд $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Воно не є диференціальним рівнянням, тому лише у виключних випадках матиме розв'язок.

2. Якщо $F(x, y, y')$ не залежить явно від x , тобто

$$F(x, y, y') = \varphi(y, y'),$$

то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} = 0$$

і рівняння Ейлера набирає вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y'' = 0. \quad (6.56)$$

Це рівняння інтегрується у загальному вигляді. Дійсно, помноживши рівняння на y' , дістанемо

$$y' F_y - (y')^2 F_{yy'} - y' y'' F_{y'y'} = 0,$$

але

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F(y, y') - y'F'_y(y, y')] &= F'_y y' + F'_y y'' - (y')^2 F''_{yy'} - y' y'' F''_{y'y'} - y'' F'_y = \\ &= y' F'_y - (y')^2 F''_{yy'} - y' y'' F''_{y'y'} = 0. \end{aligned}$$

Отже, рівняння Ейлера запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dx} (F - y'F'_y) = 0,$$

а його перший інтеграл

$$F - y'F'_y = C. \quad (6.57)$$

Якщо цю рівність можна розв'язати відносно y' , тобто

$$y' = \psi(C, y),$$

то дістанемо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{\psi(C, y)} = dx,$$

звідки

$$x = \gamma(C, y) + C_1,$$

де C_1 — нова довільна стала.

Отже, дістали рівняння екстремалі. Використовуючи умови $y(a) = y_a$ і $y(b) = y_b$, знайдемо довільні сталі, тобто з усіх екстремалей виділимо ту, де функціонал, можливо, набуває екстремального значення.

3. Важливим окремим випадком 2 є той, коли

$$F(x, y, y') = \varphi(y, y') = \psi(y) \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Тоді з (6.57) з урахуванням того, що

$$F'_y = \psi(y) \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

маємо

$$\psi(y) \sqrt{1 + (y')^2} - \psi(y) \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

або

$$\frac{\psi(y)}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$\psi(y) = C \sqrt{1 + (y')^2}; \quad (y')^2 = \frac{\psi^2(y)}{C^2} - 1;$$

$$y' = \sqrt{\frac{\psi^2(y)}{C^2} - 1}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{\psi^2(y)}{C^2} - 1};$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{\psi^2(y)}{C^2} - 1}} = dx; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{\psi^2(y)}{C^2} - 1}} = x + C_1.$$

Це загальний розв'язок рівняння Ейлера з довільними сталими C_1 і C .

4. Розглянемо випадок, коли функція $F(x, y, y')$ не залежить від y , тобто $F(x, y, y') = \lambda(x, y')$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, а із (6.54) маємо

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \lambda(x, y')}{\partial y'} = C.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно y' :

$$y' = \mu(x, C),$$

то

$$y = \int_a^x \mu(t, C) dt + C_1.$$

Виведемо тепер необхідну умову екстремуму функціонала (6.19). Із рівності нулю виразу (6.45), враховуючи, що $\delta y_i(a) = 0$; $\delta y_i(b) = 0$, дістаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.58)$$

розв'язками якої є екстремалі. Рівняння (6.58) називаються **рівняннями Ейлера—Лагранжа**.

Для функціоналів (6.18) з умовами $\delta y(a) = 0$; $\delta y(b) = 0$ варіацію (6.47) можна подати у вигляді

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial y'''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right] \delta y dx. \quad (6.59)$$

Вираз (6.59) впливає з (6.47), якщо застосувати метод інтегрування частинами кожного, починаючи з другого, доданка підінтегральної функції (6.47). Рівність $\delta I = 0$ при $\delta y(a) = 0$; $\delta y(b) = 0$ можлива за умови

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial F}{\partial y'''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \quad (6.60)$$

Це звичайне диференціальне рівняння екстремалей називається **рівнянням Ейлера—Пуассона**. Диференціальні рівняння (6.54), (6.55), (6.58), (6.60) екстремалей ще називають умовами стаціонарності функціонала (згадайте стаціонарні точки).

Приклади. 1. Знайти екстремалі для функціонала

$$I = \int_0^{+\infty} (x^2 + T^2 \dot{x}^2) dt, \quad T = \text{const.}$$

Розв'язання. У цьому прикладі $F = x^2(t) + T^2 \dot{x}^2(t)$ роль $y(x)$ виконує $x(t)$. Тоді з урахуванням рівняння (6.55)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x(t); \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2T^2 \dot{x}(t); \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2T^2$$

диференціальне рівняння екстремалей Ейлера запишемо у вигляді

$$2x - 2T^2 \ddot{x} = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} - \frac{x}{T^2} = 0.$$

Дістали однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 - \frac{1}{T^2} = 0, \quad \text{а корені } k_{1,2} = \pm \frac{1}{T}.$$

Рівняння екстремалей

$$x(t) = C_1 e^{\frac{t}{T}} + C_2 e^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Наведемо розв'язання задачі про брахістохрону, тобто про функціонал (6.12). Розв'язання. Для цього функціонала

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} = \psi(y) \sqrt{1 + (y')^2},$$

де $\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, тобто можна використати результати п.3 даного параграфу, поклавши

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad \text{Тоді}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{C^2 y} - 1}} = x + C_1.$$

Покладемо

$$\frac{1}{C^2} = k; \quad y = kz = k \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

де $\theta(x)$ — нова невідома функція;

$$dy = \frac{k}{2} \sin \theta d\theta;$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{C^2 y} - 1}} = \frac{k}{2} \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} - 1}} = \frac{k}{2} \int \frac{\sin \theta \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} d\theta =$$

$$= \frac{k}{2} \int 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{k}{2} \int (1 - \cos \theta) d\theta = \frac{k}{2} (\theta - \sin \theta);$$

$$\begin{cases} x + C_1 = \frac{k}{2} (\theta - \sin \theta); \\ y = k \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{k}{2} (1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Останні два рівняння дають параметричне уявлення про брахістохрону, де θ — новий параметр. Як впливає з цих рівнянь, брахістохроною є звичайна циклоїда.

3. Розглянемо задачу про поверхню обертання найменшої площі.

Розв'язання. Ця задача зводиться до відшукування мінімуму функціонала (6.4). Оскільки у цьому випадку $F(x, y, y')$ не залежить від x , то можна скористатися формулою

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{\psi^2(y)}{C^2} - 1}} = x + C_1. \quad (6.61)$$

Поклавши $\psi(y) = y$, (6.61) запишемо

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = x + C_1; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = \text{Carcch} \frac{y}{C};$$

$$\text{Carcch} \frac{y}{C} = x + C_1; \quad y = C \text{ch} \frac{x + C_1}{C}.$$

Отже, поверхня обертання з найменшою площею може бути утворена кривою гіперболічного косинуса або ланцюговою лінією.

4. Записати рівняння Ейлера—Пуассона для функціонала

$$I = \int_a^b [(y'')^2 - 2x^2 y] dx.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера—Пуассона дістанемо з (6.60), поклавши $n = 2$, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0, \quad (6.62)$$

де $F = (y'')^2 - 2x^2 y$.

Знайдемо

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''; \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 2y''.$$

Підставляючи здобуті результати в (6.62), дістанемо

$$y'''' - x^2 = 0.$$

5. Скласти рівняння Ейлера—Пуассона для функціонала

$$I = \int_0^{+\infty} V dt = \int_0^{+\infty} \left\{ x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \tau_2^2 \ddot{x}^2 + \dots + \tau_{n-1}^2 [x^{(n-1)}]^2 \right\} dt, \quad (6.63)$$

де x — стійкий розв'язок однорідного диференціального рівняння n -го порядку з початковими умовами

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (6.64)$$

Розв'язання. Оскільки розв'язок стійкий, то

$$\frac{d^i x}{dt^i} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad i = \overline{0, (n-1)},$$

тобто

$$x(\infty) = \dot{x}(\infty) = \ddot{x}(\infty) = \dots = x^{(n-1)}(\infty) = 0. \quad (6.65)$$

Умови (6.64) і (6.65) для інтеграла (6.63) виконують роль граничних умов при $t = 0$ і $t = \infty$. Із (6.60) і (6.63) випливає, що

$$F = x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \tau_2^2 \ddot{x}^2 + \dots + \tau_{n-1}^2 [x^{(n-1)}]^2 \quad \text{і} \quad y(x) = x(t);$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\tau_1^2 \dot{x}; \quad \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 2\tau_2^2 \ddot{x}; \quad \dots;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}} = 2\tau_{n-1}^2 x^{(n-1)}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 2\tau_1^2 \ddot{x};$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \right) = 2\tau_2^2 x''''; \quad \dots; \quad \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}} \right) = 2\tau_{n-1}^2 x^{[2(n-1)]}.$$

Рівняння Ейлера—Пуассона запишемо у вигляді

$$x - \tau_1^2 \ddot{x} + \tau_2^2 x'''' - \tau_3^2 x^{(6)} + \dots + (-1)^{n-1} \tau_{n-1}^2 x^{[2(n-1)]} = 0. \quad (6.66)$$

Це лінійне диференціальне рівняння $2(n-1)$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Його характеристичне рівняння

$$1 - \tau_1^2 k^2 + \tau_2^2 k^4 - \tau_3^2 k^6 + \dots + (-1)^{n-1} \tau_{n-1}^2 k^{2(n-1)} = 0. \quad (6.67)$$

Якщо $k_i = \alpha_i + \beta_i j$ — корінь характеристичного рівняння, то $-k_i = \alpha_i - \beta_i j$ також є коренем, оскільки рівняння (6.67) має парний степінь. Корені рівняння (6.67) у площині (α, β) розміщені симетрично відносно початку координат.

Якщо (6.67) не має чисто уявних коренів, то одна половина його коренів розміщена у лівій півплощині, а друга — у правій. Ті корені, що розміщені у правій півплощині, мають бути відкинуті, оскільки у протилежному разі умови (6.65) не виконуватимуться.

Отже, екстремальми для інтеграла (6.63) є криві, що описуються, наприклад, рівнянням

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{(-\alpha_i + \beta_i j)t}, \quad (6.68)$$

де $\alpha_i > 0$.

Використовуючи умови (6.64), можна визначити C_i і єдину екстремаль, що задовольняє умови (6.64) і (6.65). На цій екстремалі інтеграл (6.63) набуває стаціонарного значення. Це значення може бути і максимальним і мінімальним. Лише додаткові достатні умови так само, як і у випадку функції зі скінченним числом незалежних змінних, дають змогу відтворити справжню картину.

Канонічні рівняння. У фізиці і технічних застосуваннях рівняння (6.54), (6.55), (6.58) і (6.60) перетворюються у форму, що має досить зрозумілий фізичний зміст. Так, перетворені рівняння екстремалей дістали назву **канонічних**. Покажемо це на прикладі системи рівнянь (6.58). Введемо позначення

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial y'_i} = F'_{y'_i}(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.69)$$

Функції $y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ називаються **канонічними змінними** для функціонала (6.19), y_i і p_i називаються **спряженими**. Введемо так звану **функцію Гамільтона**

$$\begin{aligned} H(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ = -F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \sum_{i=1}^n y'_i p_i. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Знайдемо диференціал функції H :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i; \quad (6.71)$$

$$\begin{aligned} dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_i} dy'_i + \\ + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \end{aligned}$$

З урахуванням (6.69) маємо

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (6.72)$$

Порівнюючи (6.71) і (6.72), дістаємо

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i. \quad (6.73)$$

Нехай функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ задовольняють рівняння (6.58):

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) = 0.$$

Тоді, враховуючи (6.69)—(6.73), запишемо

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Система $2n$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з $2n$ невідомими функціями y_i і p_i , $i = \overline{1, n}$, називається **канонічною системою рівнянь екстремалей для функціонала (6.19)**.

ВПРАВИ. Знайти екстремалі таких функціоналів:

$$1. I[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} dx. \quad 2. I[y(x)] = \int_a^b y'(1+x^2 y') dx.$$

$$3. I[y(x)] = \int_1^2 [(y')^2 + 2yy' - 16y^2] dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 2.$$

$$4. I[y(x)] = \int_1^{x_2} [16y^2 - (y'')^2 + x^2] dx.$$

Відповідь. 1. $(x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$. 2. $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$.

$$3. y(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sin 4 \\ 2 & \sin 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 4 & \sin 4 \\ \cos 8 & \sin 8 \end{vmatrix}} \cos 4x + \frac{\begin{vmatrix} \cos 4 & 1 \\ \cos 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 4 & \sin 4 \\ \cos 8 & \sin 8 \end{vmatrix}} \sin 4x.$$

$$4. y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

6.9. Достатні умови екстремуму функціоналів

Нехай функціонал (6.41) для функції $y = \bar{y}$ набуває стаціонарного значення, тобто виконується умова $\delta I(\bar{y}, \delta y) = 0$. Максимум або мінімум функціонала на екстремалі визначається знаком його приросту ΔI . За формулою (6.38) з урахуванням (6.49) маємо

$$\Delta I = \frac{1}{2!} \delta^2 I + \frac{1}{3!} \delta^3 I + \dots$$

Нехай знак ΔI визначається знаком $\delta^2 I$. Це можливо внаслідок мализни більш високого порядку наступних за $\delta^2 I$ доданків. Тоді

з урахуванням (6.48) знак приросту ΔI визначається знаком виразу

$$\int_a^b [F''_{yy}(\delta y)^2 + 2F''_{yy'}\delta y\delta y' + F''_{y'y'}(\delta y')^2] dx = \delta^2 I. \quad (6.74)$$

Останній вираз можна розглядати як аналог квадратичної форми. Тому достатні умови екстремуму функціонала можна сформулювати по аналогії з достатніми умовами екстремуму для функції із скінченим числом незалежних змінних. Якщо виконується необхідна умова екстремуму функціонала, то можливі такі розв'язки.

1. Якщо $\delta^2 I > 0$ для будь-якого δy , то на екстремалі $y = \bar{y}$ функціонал

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (6.75)$$

має мінімум.

2. Якщо $\delta^2 I < 0$ для будь-якого δy , то на екстремалі $y = \bar{y}$ функціонал (6.75) набуває максимуму.

3. Якщо $\delta^2 I$ для будь-якого δy на екстремалі $y = \bar{y}$ набуває значень обох знаків, то на цій екстремалі функціонал (6.75) екстремумів не має.

Сформульовані умови стосуються відносного (локального) екстремуму. Якщо йдеться про будь-яку варіацію δy , то це означає, що можна вибрати криві, які мають відносно екстремалі певну близькість. Якщо варіація δy у достатніх умовах розглядається на кривих, що мають нульову близькість, то відносний екстремум функціонала називається **сильним**. Якщо варіація розглядається на кривих, що мають відносно екстремалі близькість першого порядку, то відносний екстремум називається **слабким**. Так само, як і для функцій зі скінченим числом незалежних змінних, достатні умови екстремуму функціонала можна виразити через коефіцієнти (6.74) F''_{yy} , $F''_{yy'}$,

$F''_{y'y'}$.

Для слабкого мінімуму (максимуму) відомі необхідні умови Лежандра, а саме. Для того щоб екстремаль $y = \bar{y}(x)$ реалізовувала мінімум (максимум) функціонала

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

необхідно, щоб уздовж усієї екстремалі (тобто для $a \leq x \leq b$) виконувалась нерівність

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0 \right).$$

При цьому похідна обчислюється на екстремалі \bar{y} і її похідній \bar{y}' . Необхідність тут полягає в тому, що при $\delta^2 I > 0$ ($\delta^2 I < 0$) на екстремалі $y = \bar{y}(x)$ маємо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0 \right).$$

Для формулювання достатньої умови введемо поняття лінійного нормованого простору. Лінійний простір E називається нормованим лінійним простором, якщо кожному елементу $x \in E$ можна поставити у відповідність дійсне число $\|x\|$, яке називається нормою елемента x , що задовольняє такі умови:

- 1) $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0$, якщо $x \equiv 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ($\lambda = \text{const}$);
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Для евклідового простору норма елемента збігається з його довжиною (див. гл. 5, § 2). Для простору функцій f , заданих і неперервних на скінченному сегменті $x \in [a, b]$, нормою називають

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Простір таких функцій позначається $C[a, b]$.

Якщо функція $f(x)$ для $x \in [a, b]$ має неперервну похідну, то її норма

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Простір функцій з неперервними похідними позначають $C_1[a, b]$.

У просторі Гільберта $L_2[a, b]$ норма

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

(див. гл. 3, п. 4.1, формула (4.2)).

У нормованому просторі вводиться поняття відстані між елементами f і g цього простору за формулою

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

Наприклад, варіація $\delta y = y_2(x) - y_1(x)$, $x \in [a, b]$, має норму

$$\|\delta y\| = \|y_2(x) - y_1(x)\|,$$

яка обчислюється за вказаними вище формулами залежно від того, до якого класу функцій належать $y_1(x)$ і $y_2(x)$.

Тепер сформулюємо достатню умову. Якщо

$$\delta^2 I[\bar{y}, \delta y] \geq C \|\delta y\|,$$

або

$$\delta^2 I[\bar{y}, \delta y] \leq C \|\delta y\|,$$

то на екстремалі $\bar{y}(x)$ маємо мінімум (максимум). При цьому $C > 0$.

6.10. Умовний екстремум функціоналів

Задача на умовний екстремум функціоналів ставиться і розв'язується за аналогією з подібними задачами для функцій зі скінченим числом незалежних змінних. Нехай задано функціонал

$$I = \int_a^b f(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (6.76)$$

з n функціями $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, і на ці функції накладаються додаткові зв'язки

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad j = \overline{1, m}; \quad m < n, \quad (6.77)$$

а також граничні умови

$$x_i(t_1) = x_{ia}; \quad x_i(t_2) = x_{ib}, \quad (6.78)$$

що задовольняють рівняння зв'язків.

Ставимо задачу про відшукування екстремуму функціонала (6.76), тобто на умовний екстремум. Для її розв'язування або зведення до задачі на безумовний екстремум вводимо функцію Лагранжа

$$F = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.79)$$

де, на відміну від функцій зі скінченим числом незалежних змінних, λ_j є функціями незалежної змінної t . Для функції Лагранжа складаємо рівняння Ейлера—Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.80)$$

До цих рівнянь приєднуємо умови (6.77). Дістаємо систему $(m+n)$ рівнянь, що мають саме стільки невідомих. Граничні умови (6.78) дають змогу знайти $2n$ довільних сталих, що входять до розв'язків.

Зв'язок (6.77) може залежати не лише від функцій, а й від похідних цих функцій, тобто зв'язки мають характер диференціальних рівнянь (загальна задача Лагранжа):

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0. \quad (6.81)$$

У цьому випадку будують функцію (6.79), розв'язують системи (6.80) і (6.81). До рівняння Ейлера—Лагранжа увійдуть не лише функції $\lambda_j(t)$, а й їхні похідні.

Зв'язки виду (6.77), що не містять похідних, називаються **скінченими**, або **голономними**, а зв'язки (6.81) — **неголономними**, або диференціальними. Іноді рівняння зв'язку мають інтегральний характер, тобто задаються в інтегральній формі:

$$\int_a^b \varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt = l_j. \quad (6.82)$$

Рівняння (6.82) називаються **ізопериметричними**, або інтегральними, умовами, а відповідна задача — **ізопериметричною**. Прикладом може бути задача Дідо. Задачу з інтегральними зв'язками

іноді зручно зводити до задачі з диференціальними зв'язками, міркуючи таким чином. Розглянемо інтеграл

$$\int_4^t \varphi_j(\tau, x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) d\tau = y_j(t). \quad (6.83)$$

Здиференціювавши його, дістанемо рівняння диференціальних зв'язків

$$\dot{y}_j(t) - \varphi_j(t, x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0; \quad j = \overline{1, m}, \quad m < n. \quad (6.84)$$

Доповнимо (6.84) такою умовою: при $t = t_2$ $y_j(t_2) = l_j$. Отже, дану задачу формально зведено до попереднього випадку. Проте для інтегральних зв'язків (6.82) множники Лагранжа λ_j не залежать від часу, а функція Лагранжа має вигляд

$$F = f + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j, \quad (6.85)$$

де φ_j — підінтегральна функція (6.82).

Приклад. Наведемо розв'язання задачі Дідо: знайти криву, що надає максимуму площі

$$S[y(x)] = \int_a^b y(x) dx$$

за умови

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Складемо функцію (6.85)

$$F = y(x) + \lambda \sqrt{1 + (y')^2}; \quad F_{y'} = \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (6.86)$$

Оскільки до функції (6.86) явно не входить x , то інтеграл (6.57) запишеться у вигляді

$$y(x) + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{\lambda (y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C; \quad y(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Звідси знайдемо $\frac{dy}{dx}$:

$$C - y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}}; \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\lambda}{C - y(x)};$$

$$(y')^2 = \frac{\lambda^2}{[C - y(x)]^2} - 1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}}{C - y}.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{C - y}{\sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}} dy = dx; \quad \int \frac{(C - y) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}} = x + C_1.$$

Введемо нову змінну $z = \lambda^2 - (C - y)^2$, тоді

$$dz = 2(C - y) dy; \quad (C - y) dy = \frac{dz}{2};$$

$$\int \frac{(C - y) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}} = \int \frac{dz}{2\sqrt{z}}; \quad \sqrt{z} = \sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2}.$$

Екстремалі запишемо у вигляді

$$\pm \sqrt{\lambda^2 - (C - y)^2} = x + C_1.$$

Піднесемо до квадрата:

$$(x + C_1)^2 + (y - C)^2 = \lambda^2.$$

Дістанемо сім'ю кіл. Із граничних умов

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{і} \quad \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = l$$

визначимо C , C_1 , λ .

ВПРАВИ. Знайти екстремалі функціоналів.

1. $I[y(x)] = \int_0^{\pi} (y')^2 dx$, якщо $\int_0^{\pi} y^2 dx = 1$; $y(0) = y(\pi) = 0$. *Відповідь.* $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$; $k \in Z$.

2. $I[y(x)] = \int_0^{\pi} (y')^2 dx$, якщо $\int_0^{\pi} (y')^2 dx = 1$; $y(0) = y(\pi) = 0$. *Відповідь.* $y = \frac{\text{sh}x(\sqrt{\lambda+1})}{\text{sh}\pi(\sqrt{\lambda+1})}$.

6.11. Варіаційні задачі з рухомими кінцями

Нехай задано функцію $F(x, y, y')$ і в площині дві криві $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Візьмемо за клас допустимих диференційовні функції $y = f(x)$, кінці яких розміщені на $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Треба знайти екстремум функціонала

$$I = \int_y F(x, y, y') dx, \quad (6.87)$$

де інтегрування здійснюється вздовж кривої $y(x)$ (рис. 7.7). Нехай із рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \quad (6.88)$$

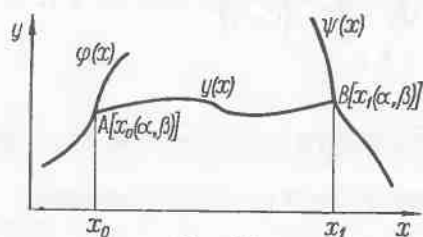


Рис. 7.7

знайдено екстремаль $y = y(x)$. Аргумент x цієї екстремалі, у свою чергу, залежить від координат точок перетину $y(x)$ з $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Позначимо поточні координати перетину через (α, β) . Тоді точками перетину на

кривих $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ будуть $x_0(\alpha, \beta)$ і $x_1(\alpha, \beta)$. Тепер задачу (6.87) можна подати як задачу про екстремум функціонала двох змінних α і β :

$$I = \int_{x_0(\alpha, \beta)}^{x_1(\alpha, \beta)} F[x, y(x, \alpha, \beta), y'(x, \alpha, \beta)] dx. \quad (6.89)$$

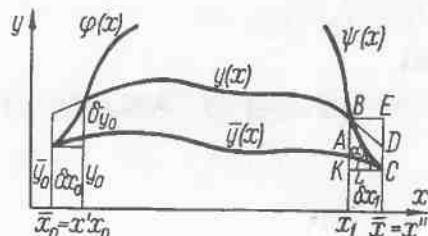


Рис. 7.8

Із такої постановки задачі випливає, що для відшукування екстремалі

$$y = y(x, \alpha, \beta) \quad (6.90)$$

одного рівняння (6.88) недостатньо. Треба мати ще дві додаткові умови для відшукування α і β . Щоб знайти ці умови, розглянемо узагальнене поняття відстані між кривими $y(x)$ і $\bar{y}(x)$ (рис. 7.8). Означимо криві на найбільшій області визначення $y(x)$ і $\bar{y}(x)$, для чого продовжимо відсутню частину на

кривій відрізком дотичної, проведеної у кінцевій точці. Позначимо цю область (x', x'') . Продовжені таким чином криві позначатимемо через $y(x)$ і $\bar{y}(x)$.

Відстанню між кривими $y(x)$ і $\bar{y}(x)$ назвемо найбільше із таких чисел:

$$\rho_0 = \sqrt{(x_0 - \bar{x}_0)^2 + (y_0 - \bar{y}_0)^2}; \quad \rho_1 = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (y_1 - \bar{y}_1)^2}. \quad (6.91)$$

Криві називаються **нескінченно близькими**, якщо відстань між ними нескінченно мала. Знайдемо тепер приріст функціонала на кривих $y(x)$ і $\bar{y}(x)$: $\Delta I = I(\bar{y}) - I(y)$. Введемо позначення

$$\bar{x}_0 - x_0 = \delta x_0; \quad \bar{y}_0 - y_0 = \delta y_0;$$

$$\bar{x}_1 - x_1 = \delta x_1; \quad \bar{y}_1 - y_1 = \delta y_1.$$

Використовуючи (6.87), знаходимо

$$I[\bar{y}] = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_{x_0}^{x_0 + \delta x_0} F dx + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F dx;$$

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

Знаходимо ΔI з точністю до членів, лінійних відносно варіацій δx_0 , δx_1 , δy :

$$\begin{aligned} \Delta I \cong & -F(x, y, y')|_{x=x_0} \delta x_0 - \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y|_{x=x_0} + F(x, y, y')|_{x=x_1} \delta x_1 + \\ & + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y|_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx, \end{aligned}$$

де $\bar{y}(x) - y(x) = \delta y$.

Знайдемо тепер зв'язок між варіаціями $[\delta y]|_{x=x_0}$, $[\delta y]|_{x=x_1}$ і варіаціями координат. Із рис. 7.8 випливає, що

$$[\delta y]|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1) \delta x_1;$$

$$[\delta y]|_{x=x_0} = \delta y_0 - y'(x_0) \delta x_0.$$

Тому

$$\begin{aligned} \Delta I = & -F(x, y, x')|_{x=x_0} \delta x_0 - \left[\frac{\partial F(x_0)}{\partial y'} \delta y_0 - \frac{\partial F}{\partial y'} y'(x_0) \delta x_0 \right] + \\ & + F(x, y, x')|_{x=x_1} \delta x_1 + \left[\frac{\partial F(x_1)}{\partial y'} \delta y_1 - \frac{\partial F}{\partial y'} y'(x_1) \delta x_1 \right] + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx; \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned} \Delta I \approx & - \left[F(x, y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \left[F(x, y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \\ & + \left[\frac{\partial F(x_1)}{\partial y'} \delta y_1 - \frac{\partial F(x_0)}{\partial y'} \delta y_0 \right] + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Тепер можна записати варіацію функціонала

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \delta I_1 + \delta I_2, \quad (6.94)$$

де δI_2 – варіація на кінцях інтервалу, а δI_1 – всередині інтервалу. Якщо $y(x)$ – екстремаль, то варіація всередині інтервалу буде дорівнювати нулю і залишиться тільки варіація на кінцях інтервалу:

$$\begin{aligned} \delta I_2 = & \left[F(x, y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y'}(x_1) \delta y_1 - \\ & - \left\{ \left[F(x, y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y'}(x_0) \delta y_0 \right\}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Подамо варіації δy_0 і δy_1 через функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Виходячи з рис. 7.8 і замінюючи відрізок кривої $\psi(x)$ відрізком дотичної до неї у точці B , з трикутника BKL дістаємо $BK = KL \cdot \operatorname{tg} \alpha$, але $KL \approx \delta x_1$; $\operatorname{tg} \alpha \approx \psi'(x_1)$. Тоді $BK \approx \psi'(x_1) \delta x_1$. З іншого боку, $BK \approx \delta y_1$. Отже,

$$\delta y_1 \approx \psi'(x_1) \delta x_1.$$

Аналогічно

$$\delta y_0 \approx \psi'(x_0) \delta x_0.$$

Тепер, користуючись (6.95), дістаємо

$$\begin{aligned} \delta I_2 = & \left[F(x, y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} \psi'(x_1) \delta x_1 - \\ & - \left\{ \left[F(x, y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_0} \varphi'(x_0) \delta x_0 \right\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Для того щоб крива $y(x)$ була екстремаллю, необхідно, щоб $\delta I = 0$, тобто $\delta I_1 = 0$; $\delta I_2 = 0$. А це можливо, якщо

$$\left[F + \frac{\partial F}{\partial y'} (\psi' - y') \right] \Big|_{x=x_1} = 0; \quad \left[F + \frac{\partial F}{\partial y'} (\varphi' - y') \right] \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (6.97)$$

Умови (6.97) дістали назву умов трансверсальності. Тепер можна сформулювати порядок розв'язання наведеної вище задачі.

1. Розв'язуємо рівняння Ейлера (6.88), з якого визначаємо екстремалі $y = y(x, \alpha, \beta) = f(x, \alpha, \beta)$.

2. Рівняння (6.97) доповнюємо двома рівняннями перетину кривої $f(x, \alpha, \beta)$ з кривими $\varphi(x)$ і $\psi(x)$:

$$f(x_0, \alpha, \beta) = \varphi(x_0); \quad f(x_1, \alpha, \beta) = \psi(x_1), \quad (6.98)$$

з яких визначаємо чотири невідомі: α, β, x_0, x_1 .

Якщо $F = A(x, y) \sqrt{1 + (y')^2}$, то умову трансверсальності запишемо у вигляді

$$A(x, y) \sqrt{1 + (y')^2} + (\varphi' - y') \frac{Ay'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0;$$

$$A(x, y) [1 + (y')^2] + Ay' \varphi' - A(x, y) (y')^2 = 0,$$

або

$$A(x, y) [1 + \varphi' y'] = 0.$$

Якщо $A(x, y) \neq 0$, то $1 + \varphi'y'$ або $\varphi'y' = -1$. А це є умовою перпендикулярності кривих. Отже, поняття трансверсальності є деяким узагальненням поняття ортогональності.

6.12. Прямі методи у варіаційному численні

Варіаційна задача

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) dx; \quad (6.99)$$

$$y_i(a) = A_i; \quad y_i(b) = B_i; \quad i = \overline{1, n},$$

зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.100)$$

з граничними умовами

$$y_i(a) = A_i; \quad y_i(b) = B_i. \quad (6.101)$$

Розв'язування подібних систем у скінченному вигляді є можливим у виключно поодиноких випадках. Тому природними були намагання знайти наближені методи розв'язування згаданих варіаційних задач. Ці методи дістали назву прямих методів розв'язування варіаційних задач. Суть їх полягає у розгляданні варіаційної задачі як граничної задачі на екстремум функції багатьох змінних. Покажемо це на прикладі функціонала

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (6.102)$$

Припустимо, що функцію $y(x)$ можна розвинути в ряд, наприклад степеневий

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (6.103)$$

або тригонометричний

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6.104)$$

або будь-який функціональний

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x). \quad (6.105)$$

Вважаючи ряд (6.105) рівномірно збіжним, а функцію $F(x, y, y')$ як таку, що допускає розвинення в ряд за функціями $\varphi_n(x)$, дістаємо функціонал

$$I[y] = \psi(C_1, C_2, \dots, C_n, \dots)$$

від нескінченної множини незалежних змінних. Отже, варіаційні задачі – це звичайні задачі на екстремум з нескінченним числом змінних. У прямих методах (наприклад, у методі Рітца) вибирають скінченне число функцій $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, і розв'язують задачу на екстремум із скінченним числом змінних C_1, C_2, \dots, C_n . Потім, якщо відомим є загальний вигляд коефіцієнтів C_n , здійснюють граничний перехід при $n \rightarrow \infty$ і дістають розв'язок варіаційної задачі.

Зупинимось докладніше на методі Рітца. Нехай треба знайти екстремум квадратичного функціонала

$$I(y) = \int_a^b [P(x)(y')^2 + Q(x)y^2 + R(x)y] dx \quad (6.106)$$

за умов

$$y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b. \quad (6.107)$$

Для цього функціонала запишемо рівняння Ейлера

$$F(x, y) = P(x)(y')^2 + Q(x)y^2 + R(x)y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2Q(x)y + R(x); \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2P(x)y';$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 2P'(x)y' + 2P(x)y''.$$

З рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

$$P(x)y'' + P'(x)y' - Q(x)y - \frac{R(x)}{2} = 0; \quad (6.108)$$

$$(P(x) \cdot y')' - Q(x)y = \frac{R(x)}{2}. \quad (6.109)$$

Рівняння (6.108) є лінійним, але зі змінними коефіцієнтами. Тому відшукування розв'язку цього рівняння пов'язане з певними труднощами. Наближене рівняння екстремалі за методом Рітца шукають у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (6.110)$$

де функції, що називаються базисними (координатними), вибираються такими, що задовольняють умови (6.107), наприклад,

$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді і (6.110) задовольняє умови (6.107). Звичайно за систему функцій $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, вибирають частину нескінченної системи $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$, лінійно незалежних функцій, визначених і неперервних на відрізку $[a, b]$, наприклад,

$$\varphi_i(x) = \sin \frac{i\pi(x-a)}{b-a}. \quad (6.111)$$

Підставляючи функції (6.106) в (6.103) та інтегруючи здобутий вираз, знаходимо

$$I = I[C_1, C_2, \dots, C_n].$$

Тепер необхідну умову екстремуму функціонала замінюємо на умову

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.112)$$

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь (6.112), знаходимо C_i , а отже, і функцію $y(x)$.

7.1. Загальна постановка задачі керування

Структурна схема задачі керування складається з двох ланок: керуючого органу і об'єкта керування (рис. 7.9). Об'єктом керування може бути, наприклад, космічний апарат, економіка галузі промисловості або організація галузі, система суден одного типу, машина, система машин, сімейний бюджет тощо.

Керуюча ланка з часу виникнення задач керування зазнала величезних еволюційних змін від найпростішого регулятора Ползунова-Уатта до сучасних обчислювальних машин.

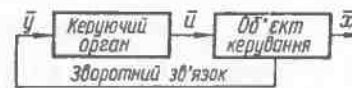


Рис. 7.9

Якщо керування здійснюється без участі людини, то воно називається автоматичним (наприклад, автопілот, що керує польотом літака, пристрій керування процесом обчислень ЕОМ тощо).

Системи керування, в яких обов'язковою є присутність людини, називають автоматизованими (наприклад, система керування військами, система керування виробництвом тощо).

Стан об'єкта керування характеризується n -вимірною вектор-функцією, наприклад часу $\bar{X}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. Функції $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ називаються фазовими координатами. Наприклад, шестивимірна вектор-функція часу повністю визначає місцезнаходження літака як твердого тіла у просторі. Три координати визначають положення центра мас, а три – обертання навколо центра мас. Фактично курс літака і є функцією, що визначає місцезнаходження об'єкта керування – літака.

До об'єкта керування додаються зовнішні збурення, що характеризуються вектор-функцією $\bar{Z}[z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]$. Для судна, наприклад, збуреннями є хвилювання моря, помилки прогнозу, морські течії тощо.

Від керуючого органу до об'єкта керування надходить вектор-функція керування $\bar{U}[u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]$. Так, під час керування рухом судна по заданій траєкторії роль вектор-функції керування виконують відповідні сили, що прикладаються до керма.

Вектор-функції $\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}$ у реальних задачах обмежені, тобто

$$|\bar{X}| \leq a; \quad |\bar{Z}| \leq b; \quad |\bar{U}| \leq c. \quad (7.1)$$

Вектори \bar{X} , \bar{Z} , \bar{U} звичайно пов'язані між собою якимось співвідношенням. Найбільш досконалим нині є керування, в якому вектори \bar{X} , \bar{Z} , \bar{U} пов'язані системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; z_1, \dots, z_m), \quad \bar{i} = 1, n, \quad (7.2)$$

або у векторній формі

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, \bar{U}, \bar{Z}). \quad (7.3)$$

Функції f_i мають задовольняти умови існування розв'язку системи (7.2). Функція $\bar{U}(t)$ може бути неперервною, кусково-неперервною, кусково-гладкою. Область визначення функції $f(\bar{X}, \bar{U}, \bar{Z})$ звичайно обмежена умовою (7.1) і може бути відкритою або замкненою. У загальній постановці задачі вектори \bar{X} , \bar{Z} , \bar{U} задовольняють операторне рівняння

$$L\bar{X} = \varphi(\bar{U}, \bar{Z}, \bar{X}), \quad (7.4)$$

де L – оператор, що визначає керувану систему; φ – відома функція. При цьому оператор L може бути не лише із звичайними, а й з частинними похідними, а також інтегро-диференціальним, нелінійним, лінійним, алгебраїчним, заданим у вигляді таблиці, графіка.

Визначимо мету керування або цільову функцію. У більшості випадків мета керування полягає в пошуку екстремуму функціонала

$$I = I[\bar{X}, \bar{U}, \bar{Z}]. \quad (7.5)$$

Треба вибрати вектор-функцію $\bar{U}(u_1, \dots, u_r)$ таким чином, щоб функціонал (7.5), визначений на деякій множині допустимих функцій, що задовольняють умови (7.1), (7.2), мав екстремальне значення. Якщо функціонал (7.5) лінійний і умови (7.2) також є лінійними, то керування називається лінійним. У цьому разі умова (7.4) відсутня. Лінійним також називається керування, в якому (7.2) або (7.3) є системою лінійних диференціальних рівнянь. Найчастіше під задачами керування розуміють задачі, в яких роль функціонала (7.5) виконує інтегральний функціонал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m; u_1, \dots, u_r) dt \quad (7.6)$$

або

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}) dt,$$

де F – задана функція.

Кожній функції $\bar{U}(t)$, взятій із області керування для $t_0 \leq t \leq t_1$, відповідає певне числове значення I . З усіх керувань $\bar{U}(t)$ треба вибрати те, при якому I набуває екстремального значення. Залежно від виду функціонала (7.6) задача розбивається на кілька окремих задач.

1. Задача про максимальну швидкість впливає з (7.6) при

$$F(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}) = 1; \quad (7.7)$$

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt \rightarrow T_{\min}. \quad (7.8)$$

У керуванні судном ця задача використовується в механізмах регулювання газовими турбінами, у розрахунках швидкості руху за траєкторією тощо.

2. Якщо в (7.6) функція $F(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U})$ визначає відхилення від усталеного процесу, то йдеться про інтегральні критерії якості перехідних процесів. Тоді

$$F(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}) = \varepsilon^2(t) + \tau_1^2 \dot{\varepsilon}^2 + \tau_2^2 \ddot{\varepsilon}^2 + \dots + \tau_{n-1}^2 (\varepsilon^{(n-1)})^2, \quad (7.9)$$

де τ_i , $i = 1, (n-1)$ – відомі параметри, а

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\varepsilon^2 + \tau_1^2 \dot{\varepsilon}^2 + \tau_2^2 \ddot{\varepsilon}^2 + \dots + \tau_{n-1}^2 (\varepsilon^{(n-1)})^2 \right] dt \rightarrow \min. \quad (7.10)$$

Умова (7.10) означає виключення не лише великих відхилень, а й похідних від них. Цей критерій дає змогу мінімізувати вільні коливання у коливальних системах. Якщо усталений рух взяти за початок відліку, то фактично координати стану і відхилення збігаються, тобто $\varepsilon = x$. У цьому разі критерій (7.10) запишемо у вигляді

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[x^2(t) + \tau_1^2 \dot{x}^2 + \tau_2^2 \ddot{x}^2 + \dots + \tau_{n-1}^2 (x^{(n-1)})^2 \right] dt. \quad (7.11)$$

Якщо швидкість перехідного процесу є несуттєвою (це характерно для повільно плинних процесів), то замість (7.11) використовують

$$I_3 = \int_0^{t_2} x^2 dt \rightarrow \min. \quad (7.12)$$

Зазначимо, що задача керування курсом літака за допомогою автопілота зводиться до задачі мінімуму I_3 .

3. Якщо функція

$$F(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}) = x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + a_1^2 u^2 + a_2^2 \dot{u}^2, \quad (7.13)$$

то йдеться про аналітичне конструювання регулятора. Задача зводиться до відшукування мінімуму функціонала

$$I_4 = \int_{t_0}^{t_1} [x^2 + \tau_1^2 \dot{x}^2 + a_1^2 u^2 + a_2^2 \dot{u}^2] dt. \quad (7.14)$$

4. Задача про обмеження енергетичних ресурсів ставиться як задача про мінімум функціонала

$$I_5 = \int_0^T x dt \rightarrow \min \quad (7.15)$$

за умови

$$I_5 = \int_0^T R y^2 dt = A, \quad (7.16)$$

де A визначає наявність ресурсів.

Приклади. 1. Нехай матеріальна точка сталої маси m рухається прямолінійно (рис. 7.10) під дією сили F . На точку діє сила опору, пропорційна швидкості, і пружна сила, пропорційна зміщенню.

Нехай у момент $t = 0$ матеріальна точка перебувала на осі Ox у нульовому положенні. При $t \neq 0$ положення точки описується координатою x . Тоді силу опору F_1 можна записати у вигляді $F_1 = -b\dot{x}$, а пружну силу F_2 — як $F_2 = -cx$. За другим законом Ньютона

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F.$$

Після ділення на масу і введення позначень $\frac{b}{m} = 2n$, $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{F}{m} = u$ дістанемо

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = u. \quad (7.17)$$

У цьому прикладі об'єктом керування є матеріальна точка, а x — фазова координата. Зовнішні збурення — сили F_1 і F_2 . Керування рухом матеріальної точки здійснюється силою F . Тому $u = \frac{F}{m}$ є керуванням.

Зазначимо, що, як правило, звичайні диференціальні рівняння, що описують об'єкт керування, подають у вигляді нормальної системи рівнянь першого порядку. Замінімо рівняння (7.17) системою. Для цього введемо позначення $\dot{x} = v$, $\dot{v} = \dot{v}$. Тоді рівняння (7.17) буде еквівалентне системі

$$\dot{x} = v; \quad \dot{v} = u - 2nv - k^2x. \quad (7.18)$$

У системі (7.18) фазовими координатами є x і v .

Сила F , що бере участь у керуванні, обмежена можливостями (наприклад, залежить від потужності двигуна). Оскільки сила обмежена, то обмеженням буде і керування, тобто $|u| \leq C$.

Поставимо задачу про керування. Нехай треба за мінімальний час перемістити точку із заданого положення, що відповідає часу $t_0(0)$ (нульового або ненульового), в інше положення (ненульове), що відповідає часу t_1 , тобто

$$\int_0^{t_1} dt \rightarrow T_{\min}.$$

Маємо задачу про швидкість.

2. Нехай задано електричне коло, що складається з індуктивного L_1 і активного опору R . До кола прикладається електрорушійна сила E . Таке електричне коло описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$L_1 \frac{dI}{dt} + RI = E,$$

де $I(t)$ — сила струму у колі у будь-який момент часу. Після ділення на R з урахуванням позначень

$$\frac{L_1}{R} = T; \quad \frac{E}{R} = ku; \quad I(t) = x(t)$$

маємо

$$T \frac{dx}{dt} + x = ku. \quad (7.19)$$

Очевидно, що керуванням у даному прикладі є величина E , об'єктом керування є електричне коло.

3. Наближене рівняння руху судна можна записати у вигляді

$$M \frac{dv}{dt} = CU_1 - f_1(t);$$

$$Mv \left(\omega - \frac{d\alpha}{dt} \right) = (a_1 - p)\alpha + a_2\omega + a_3\beta + f_2(t);$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = e_1\alpha + e_2\omega + e_3\beta + f_3(t). \quad (7.20)$$

тут M – маса судна; I – момент інерції відносно вертикальної осі; v – швидкість центра мас судна; α – кут дрейфу; β – кут перекидання керма; ω – кутова швидкість – похідна від кута рискання; f_1, f_2, f_3 – характеристики збурення (хвилі, вітер тощо); p – упор гвинтів; CU_1 – характеристика дії регулятора швидкості; $a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e_3$ – сталі.

Зазначимо, що система рівнянь (7.20) є нелінійною, отже, друге рівняння нелінійне. Перше рівняння описує зміну швидкості судна під дією регулятора швидкості, а також зовнішніх збурень $f_i(t)$. За керуючу координату тут взято U_1 , у двох інших рівняннях, що описують рух судна, керуючими координатами є α і ω .

7.2. Застосування варіаційного числення до задач керування

У термінах варіаційного числення можна сформулювати як пряму, так і обернену задачі керування.

Пряма задача: знайти керування, яке забезпечує екстремум функціонала (7.5), зокрема (7.6), за наявності зв'язків, заданих рівняннями (7.1), (7.3) або (7.4).

Обвернена задача: за відомим оптимальним розв'язком задачі (7.3) знайти оператор L із (7.4) і функціонал (7.5). Обвернена задача ще очікує свого розв'язання.

У класичній постановці варіаційної задачі на функції та їхні змінні, що входять до інтеграла (7.6), жодних обмежень типу (7.1) не накладається і передбачається, що функції диференційовні. У задачах керування ні перше, ні друге не виконується. Це привело до розробки нових методів розв'язування таких задач з урахуванням обмежень типу (7.1), зокрема принципу максимуму і методу динамічного програмування, які викладено нижче. Разом з тим багато задач такого класу успішно розв'язуються методами класичного варіаційного числення.

Проілюструємо сказане прикладом аналітичного конструювання регуляторів. Нехай об'єкт керування описується диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + x = a_3u. \quad (7.21)$$

Треба визначити закон керування u при переведенні об'єкта з початкового $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ у кінцевий $x(\infty) = \dot{x}(\infty) = 0$ стан за умови

$$I(u) = \int_0^{+\infty} v dt = \int_0^{+\infty} (x^2 + cu^2) dt \rightarrow \min. \quad (7.22)$$

Маємо задачу на умовний екстремум функціонала (7.22) з диференціальними зв'язками (7.21). Запишемо рівняння зв'язків (7.21) у вигляді

$$\varphi(\ddot{x}, \dot{x}, x, u) = a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + x - a_3u = 0. \quad (7.23)$$

Побудуємо функцію Лагранжа (див. п. 6.10)

$$F = x^2 + cu^2 + \lambda(t)\varphi(\ddot{x}, \dot{x}, x, u);$$

$$F = x^2(t) + cu^2(t) + \lambda(t)[a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + x - a_3u]. \quad (7.24)$$

Складаємо рівняння Ейлера–Пуассона (див. п. 6.10) для двох невідомих функцій $x(t)$ і $u(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} = 0; \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) = 0. \quad (7.26)$$

Обчислюючи відповідні похідні, дістанемо рівняння Ейлера–Пуассона

$$2x + \lambda(t) - a_1\dot{\lambda}(t) + a_2\ddot{\lambda}(t) = 0; \quad (7.27)$$

$$2cu + a_3\lambda(t) = 0. \quad (7.28)$$

Приєднавши до рівнянь (7.27) і (7.28) рівняння зв'язку (7.23), дістанемо можливість знайти $u(t), \lambda(t), x(t)$. Із рівнянь (7.23) і (7.28) знайдемо $u(t)$ і $\lambda(t)$. Підставивши їх у (7.27), дістаємо

$$u = \frac{1}{a_3} (a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + x); \quad (7.29)$$

$$\lambda(t) = \frac{2c}{a_3} u = \frac{2c}{a_3^2} (a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + x); \quad (7.30)$$

$$ca_1^2\ddot{x} + c(2a_2 - a_1^2)\dot{x} + (a_3^2 + c)x = 0. \quad (7.31)$$

Для (7.31) складаємо характеристичне рівняння

$$ca_2^2k^4 + c(2a_2 - a_1^2)k^2 + (a_3^2 + c) = 0$$

або

$$k^4 + \left(\frac{2}{a_2} - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) k^2 + \frac{1}{a_2^2} + \frac{a_3^2}{ca_2^2} = 0. \quad (7.32)$$

Нехай у результаті розв'язання характеристичного рівняння (7.32) здобуто чотири різні корені, які за будь-яких a_1, a_2, a_3, c можна записати у вигляді

$$k_1 = -\alpha_1 + \beta_1 j; \quad k_2 = -\alpha_2 + \beta_2 j; \\ k_3 = \alpha_1 - \beta_1 j; \quad k_4 = \alpha_2 - \beta_2 j,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - невід'ємні. Тоді

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + c_3 e^{k_3 t} + c_4 e^{k_4 t}; \quad (7.33)$$

$$\dot{x} = c_1 k_1 e^{k_1 t} + c_2 k_2 e^{k_2 t} + c_3 k_3 e^{k_3 t} + c_4 k_4 e^{k_4 t}. \quad (7.34)$$

За умовою при $t \rightarrow \infty, x(t) \rightarrow 0$ і $\dot{x}(t) \rightarrow 0$, тобто розв'язок має бути стійким. Тоді у розв'язках (7.33) і (7.34) корені k_3 і k_4 треба відкинути. Введемо позначення $x = x_1, \dot{x} = x_2$, тоді

$$x = x_1 = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}; \quad (7.35)$$

$$\dot{x} = x_2 = c_1 k_1 e^{k_1 t} + c_2 k_2 e^{k_2 t}. \quad (7.36)$$

У багатьох випадках при збереженні умов (7.22) керування u , що входить до (7.21), задається у вигляді

$$u = p_1 x + p_2 \dot{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad (7.37)$$

де p_1 і p_2 належить визначити, для чого запишемо (7.29) з урахуванням (7.37):

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + x - a_3 u = 0,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{a_1 - a_3 p_2}{a_2} \dot{x} + \frac{1 - a_3 p_1}{a_2} x = 0. \quad (7.38)$$

Характеристичне рівняння, що відповідає (7.38), має вигляд

$$k^2 + \frac{a_1 - a_3 p_2}{a_2} k + \frac{1 - a_3 p_1}{a_2} = 0, \quad (7.39)$$

а k_1 і k_2 - його корені. Для k_1 і k_2 також маємо рівняння

$$k^2 - (k_1 + k_2)k + k_1 k_2 = 0. \quad (7.40)$$

Порівнюючи (7.39) і (7.40), маємо

$$\frac{a_1 - a_3 p_2}{a_2} = k_1 + k_2; \quad \frac{1 - a_3 p_1}{a_2} = k_1 k_2.$$

Отже,

$$p_1 = \frac{1 - a_2 k_1 k_2}{a_3}; \quad p_2 = \frac{a_1 - a_2 (k_1 + k_2)}{a_3};$$

$$u_1 = \frac{1 - a_2 k_1 k_2}{a_3} x + \frac{a_1 - a_2 (k_1 + k_2)}{a_3} \dot{x}. \quad (7.41)$$

Вимірюючи вихідну координату x і швидкість \dot{x} за (7.41), будемо здійснювати керування. Передбачається, що таке керування є оптимальним.

Зазначимо, що викладена методика поширюється на випадок, коли (7.41) є рівнянням n -го порядку, а замість (7.22) взято (7.14).

Методами варіаційного числення можна розв'язувати задачі, в яких на керуючий вплив накладаються зв'язки у вигляді нерівностей. Нехай об'єкт керування описується системою рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.42)$$

Треба таким чином підібрати керування u_1, u_2, \dots, u_r , щоб інтеграл

$$I = \int_0^T V(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) dt \rightarrow \min \quad (7.43)$$

досягав мінімуму, де T нефіксоване, а функції V і f_i за припущенням диференційовні за всіма своїми аргументами. Відомими є початкові значення $x_i(0) = x_{i0}$. При цьому на керування накладається додаткове обмеження

$$\Psi(\bar{u}) = \Psi(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq 0. \quad (7.44)$$

З метою урахування (7.44) до обмежень вводять так звану «функцію штрафу» у вигляді

$$L(\bar{u}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \Psi(\bar{u}) \leq 0; \\ k\Psi^2, & \text{якщо } \Psi(\bar{u}) > 0, \end{cases} \quad (7.45)$$

де k - досить велика величина.

Сформулюємо задачу (7.42)–(7.44): необхідно вибрати таке керування, при якому інтеграл (7.43) досягає мінімуму при одночасному додержанні умови

$$\int_0^T L(\bar{u}) dt = 0. \quad (7.46)$$

Умова (7.46) є точною, оскільки при її виконанні буде виконуватись (7.45). Отже, замість мінімуму інтеграла (7.43) необхідно шукати мінімум інтеграла

$$I = \int_0^T [V(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) + L(u_1, u_2, \dots, u_r)] dt \rightarrow \min$$

із зв'язками

$$\dot{x}_i - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

тобто розв'язувати варіаційну задачу.

7.3. Принцип максимуму

Принцип максимуму був запропонований Л. С. Понтрягіним та його учнями і реалізується для неперервних і дискретних процесів. Розглянемо принцип максимуму для неперервних процесів.

Нехай рух об'єкта керування описується нормальною системою n диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.47)$$

При цьому t може бути не лише часом. Нехай керування ($\bar{u} = u_1, u_2, \dots, u_r$) підпорядковується умовам

$$\varphi_j(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (7.48)$$

Якщо умову, яка накладається на керування, можна подати у вигляді

$$\varphi_j(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq A_j,$$

то

$$\varphi_j(u_1, u_2, \dots, u_r) - A_j \leq 0. \quad (7.49)$$

Позначаючи $\varphi_j(u_1, u_2, \dots, u_r) - A_j = \Psi_j$, дістаємо

$$\Psi_j(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq 0. \quad (7.50)$$

Нехай вектор керування $\bar{U}(u_1, u_2, \dots, u_r)$ є кусково-неперервною функцією свого аргументу t , взятого з області визначення керування $\bar{U}(t)$. Нагадаємо, що функція $\bar{U}(t)$ називається кусково-неперервною, якщо вона неперервна для всіх розглядуваних значень $t_0 \leq t \leq T$, за виключенням, можливо, скінченного числа точок розриву першого роду (рис. 7.11). Далі будемо розглядати керування $\bar{U}(t)$, визначене у проміжку $t_0 \leq t \leq T$, причому при t_0 і T функція неперервна відповідно праворуч і ліворуч, а всі точки розриву містяться в інтервалі (t_0, T) . Функція $\bar{U}(t)$, що задовольняє вказані умови, називається допустимою. Нехай в момент t_0 положення об'єкта визначається вектором $\bar{X}_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ — лівий кінець, а в момент T — $\bar{X}_1(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$ (правий кінець) на рис. 7.11. Положення правого кінця може бути заданим, а може і не бути таким. Залежно від цього маємо два типи задач: задачі з фіксованим правим кінцем і задачі з вільним правим кінцем.

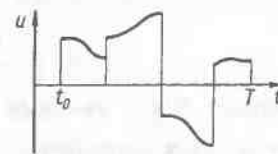


Рис. 7.11

Сформулюємо задачу керування як задачу про максимальну швидкість: серед допустимих керувань $\bar{U}(t)$, під дією яких об'єкт керування переходить із заданого положення \bar{X}_0 у положення \bar{X}_1 , знайти таке, для якого цей перехід здійснюється за мінімальний час. Загальніша постановка задачі зводиться до підбору керування, що забезпечує мінімум функціонала

$$I[T] = \sum_{i=1}^n C_i x_i(T), \quad (7.51)$$

де T — фіксоване. Припускається, що $\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0$.

Введення поняття кусково-неперервних керувань обумовлюється такими міркуваннями. Нехай вектор $\bar{U}(u_1, u_2, \dots, u_r)$ визначає положення керма корабля. Тоді миттєве переміщення керма з одного по-

ложення в інше і означає скінченний розрив функції $\bar{U}(t)$. Здатність керма миттєво переходити з одного положення в інше дістала назву безінерційності керма. Хоча на практиці реальне кермо майже завжди інерційне, введення безінерційного керма дає змогу дістати точний розв'язок математичної задачі вибору оптимального керування.

Для формулювання принципу максимуму задачі (7.47)–(7.51) введемо деякі допоміжні функції $\Psi_i(t)$ — спряжені функції, число яких дорівнює числу координат фазового простору, тобто n . Введемо також функцію Гамільтона (6.70). Підпорядкуємо ці функції таким умовам:

$$H[\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}] = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i(\bar{X}, \bar{U}), \quad i = \overline{1, n}; \quad (7.52)$$

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U})}{\partial x_i(t)}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (7.53)$$

$$\Psi_i(T) = -C_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.54)$$

Функції $\Psi_i(t)$ умовами (7.53), (7.54) і початковою $x_i(t_0) = x_{i0}$ визначаються однозначно. Рівняння (7.47) можна записати у вигляді

$$H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}) = \max_{\bar{U}} H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}). \quad (7.55)$$

Теорема (неперервний принцип максимуму). Якщо кусково-неперервне керування $\bar{U}(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, що задовольняє умови (7.48), надає мінімуму функціоналу (7.51) для процесу, що описується системою (7.47) або (7.55), то існує ненульова неперервна вектор-функція $\bar{\Psi}(t)$, що задовольняє умови (7.53), (7.54), яка разом з $\bar{U}(t)$ перетворює на максимум $H(t)$ для всіх $t \in (t_0, T)$, тобто

$$H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}) = \max_{\bar{U}} H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}).$$

Приклад. Визначити керування $\bar{U}(t)$, яке надає мінімуму інтегралу

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

у процесі, що описується рівнянням

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + u(t), \quad x_1(0) = x_{10}. \quad (7.56)$$

Позначимо $-ax_1 + u(t) = f_1(x_1, u)$, тоді $\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, u)$.

Розв'язання. Введемо додаткову змінну

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2(t) + u^2(t)) dt. \quad (7.57)$$

Для цієї змінної маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2} (x_1^2(t) + u^2(t)) = f_2(x, u) \quad (7.58)$$

з початковими умовами, здобутими з (7.57), тобто $x_2(0) = 0$. Мінімізуючий функціонал (7.51) для цієї задачі, враховуючи (7.57), можна записати у вигляді $J[T] = x_2(T)$, тобто в (7.51) $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Побудуємо функцію (7.52):

$$H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}) = \Psi_1 f_1 + \Psi_2 f_2 = \Psi_1(-ax_1 + u) + \Psi_2 \frac{1}{2} (x_1^2 + u^2);$$

$$H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}) = -a\Psi_1 x_1 + \frac{1}{2} \Psi_2 x_1^2 + \Psi_1 u + \frac{1}{2} \Psi_2 u^2.$$

Виходячи з рівняння (7.53), маємо

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = a\Psi_1 - \Psi_2 x_1; \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0. \quad (7.59)$$

Запишемо умови (7.54): $\Psi_1(T) = 0$ (оскільки $C_1 = 0$); $\Psi_2(T) = -1$. Із $\frac{d\Psi_2}{dt} = 0$ випливає, що $\Psi_2(t) = \text{const}$, але $\Psi_2(T) = -1$, тому $\Psi_2(t) = -1$.

Тепер функцію Гамільтона запишемо у вигляді

$$H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U}) = -a\Psi_1 x_1 + \Psi_1 u - \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} u^2.$$

За принципом максимуму функція $H(\bar{\Psi}, \bar{X}, \bar{U})$ при фіксованих x_1 і Ψ_1 досягає максимуму по u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \Psi_1 - u.$$

звідки

$$\Psi_1(t) = u(t).$$

Залишилося розв'язати систему рівнянь (7.56), (7.59) за умов

$$\Psi_2(t) = -1; \quad \Psi_1(t) = u(t);$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 + u(t); \quad \frac{du}{dt} = au + x_1 \quad (7.60)$$

з граничними умовами $x_1(0) = x_{10}$, $u(T) = 0$. Зведемо систему (7.60) до одного рівняння відносно u :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= a \frac{du}{dt} + \frac{dx_1}{dt}; \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = a \frac{du}{dt} - ax + u(t); \\ x_1 &= -au + \frac{du}{dt}; \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = a \frac{du}{dt} + a^2 u - a \frac{du}{dt} + u; \\ \frac{d^2 u}{dt^2} - (a^2 + 1)u &= 0. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Додамо до цього рівняння граничні умови

$$u(T) = 0; \quad \dot{u}(T) = \dot{u}_0$$

і розв'яжемо його, склавши характеристичне рівняння

$$\begin{aligned} k^2 - (a^2 + 1) &= 0; \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 + 1} = \pm \lambda; \\ u &= \bar{C}_1 e^{\lambda t} + \bar{C}_2 e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Знайдемо \bar{C}_1 і \bar{C}_2 : $\bar{C}_1 e^{\lambda T} + \bar{C}_2 e^{-\lambda T} = 0$; $\bar{C}_2 = -\bar{C}_1 e^{2\lambda T}$. Тоді

$$u(t) = \bar{C}_1 (e^{\lambda t} - e^{\lambda(2T-t)}); \quad \dot{u}(t) = \bar{C}_1 \lambda (e^{\lambda t} - e^{\lambda(2T-t)}).$$

Враховуючи умову $\dot{u}(T) = \dot{u}_0$, дістаємо

$$\bar{C}_1 = \frac{\dot{u}_0}{2\lambda} e^{-\lambda T}, \quad \bar{C}_2 = \frac{\dot{u}_0}{2\lambda} e^{\lambda T}.$$

Отже, визначено оптимальне керування

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{2\lambda} [e^{\lambda(t-T)} - e^{-\lambda(t-T)}]. \quad (7.62)$$

Зрозуміло, що можна розв'язати систему (7.60), не зводячи її до одного рівняння другого порядку типу (7.61).

Якщо на керування накласти обмеження типу

$$|u(t)| \leq u_{\max},$$

то розв'язок рівняння для оптимального керування можна записати у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\dot{u}_0}{2\lambda} [e^{\lambda(t-T)} - e^{-\lambda(t-T)}] & \text{при } |u(t)| \leq u_{\max}; \\ u_{\max} & \text{при } u(t) \geq u_{\max}; \\ -u_{\max} & \text{при } u(t) \leq -u_{\max}. \end{cases} \quad (7.63)$$

Керування можна виразити, скориставшись (7.60), через координату об'єкта керування $u(x) = ax_1 + \dot{x}_1$.

7.4. Принцип динамічного програмування

Постановка варіаційної задачі у принципі динамічного програмування аналогічна іншим варіаційним задачам. Розглянемо таку задачу: нехай між пунктами A і B треба прокласти шлях, виходячи з мінімальних витрат на його будівництво. Між цими пунктами є перешкоди, які треба обійти. Розіб'ємо весь шлях на ділянки горизонтальними і вертикальними прямими (рис. 7.12). Нехай відомою є вартість будівництва на окремих ділянках. Почнемо рух від точки B до точки A покроково. У точку B можна потрапити з точок C_1 і C_2 . Витрати на рух з C_1 в B в умовних одиницях становлять 10 одиниць, а з C_2 в B – 12 одиниць. Вибираємо ділянку з найменшими витратами і ставимо стрілку. Рухаємось до

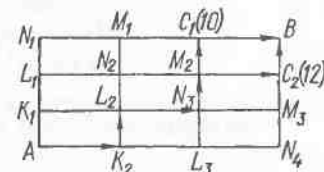


Рис. 7.12

точок M_i , $i = 1, 2, 3$. З точки M_1 можна потрапити в B через точку C_1 . Припустимо, що витрати при цьому становлять 25 одиниць. Із точки M_2 можна потрапити в точку B через C_1 і C_2 . Підрахуємо витрати. Виявляється, що у першому випадку (через точку C_1) витрати дорівнюють 28, а у другому (через точку C_2) – 26 одиниць. Отже, оптимальна траєкторія проходить через C_2 , оскільки витрати в цьому разі менші. Тому не розглядаємо траєкторію $M_2 C_1 B$. Аналогічно аналізуємо рух з точки M_3 .

Порівнюючи вартості шляхів в B з точок M_1 , M_2 , M_3 , знаходимо оптимальний шлях. Потім переходимо до точок N_1 , N_2 , N_3 , N_4 доти, доки не потрапимо в точку A . Отже, маємо покрокове керування вибором шляху, що забезпечує мінімальні витрати. У цьому полягає ідея методу динамічного програмування. Ця ідея дуже часто зовсім не потребує загального математичного запису, проте розрахунки всіх можливих варіантів майже завжди пов'язані зі значними труднощами.

При математичному оформленні розрізняють неперервну і дискретну форми рівнянь принципу динамічного програмування.

Нехай об'єкт керування описується рівнянням

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\bar{X}, \bar{U}), \quad \text{або} \quad \frac{d\bar{X}}{dt} = f(\bar{X}, \bar{U}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7.64)$$

а мінімізуючий функціонал має вигляд

$$I = \int_0^T G_1(\bar{X}, \bar{U}) dt + \Psi[X(T)], \quad (7.65)$$

де $\Psi[X(T)]$ – кінцевий стан системи, а величина T фіксована.

Розіб'ємо інтервал T на N рівних частин $\Delta = \frac{T}{N}$. Зробимо заміну

$$\frac{dx_i}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t},$$

де $\Delta x_i = x_i(t_k + \Delta t_k) - x_i(t_k) = x_i(k+1) - x_i(k)$, а k – номер ділянки.

Диференціальне рівняння (7.64) тепер можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\approx \frac{\bar{X}(k+1) - \bar{X}(k)}{\Delta} = f[\bar{X}(k), \bar{U}(k)]; \\ \bar{X}(k+1) &= \bar{X}(k) + f[\bar{X}(k), \bar{U}(k)]\Delta. \end{aligned} \quad (7.66)$$

У функціоналі (7.65) замінимо інтеграл наближено інтегральною сумою

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{N-1} G_1[\bar{X}(k), \bar{U}(k)]\Delta + \Psi[\bar{X}(N)] = \sum_{k=0}^{N-1} G[\bar{X}(k), \bar{U}(k)] + \Psi[\bar{X}(N)]; \\ I &= G[\bar{X}(0), \bar{U}(0)] + G[\bar{X}(1), \bar{U}(1)] + G[\bar{X}(2), \bar{U}(2)] + \dots \\ &\quad \dots + G[\bar{X}(N-1), \bar{U}(N-1)] + \Psi[\bar{X}(N)]. \end{aligned}$$

Введемо позначення $I_k = G[\bar{X}(k), \bar{U}(k)]$ для $k = 0, 1, 2, \dots, N-2$, а $I_{N-1} = G[\bar{X}(N-1), \bar{U}(N-1)] + \Psi[\bar{X}(N)]$, але $\bar{X}(N) = \bar{X}(N-1) + f[\bar{X}(N-1), \bar{U}(N-1)]\Delta$, тоді

$$I_{N-1} = G[\bar{X}(N-1), \bar{U}(N-1)] + \Psi[\bar{X}(N-1) + f\Delta].$$

Із цієї формули випливає, що функціонал залежить від положення системи і керування на попередньому кроці.

У випадку неперервного процесу будемо вважати заданим рівняння (7.64) з будь-якими початковими умовами $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$ і $\bar{U}(0) = \bar{U}_0$. Замість (7.65) виберемо критерій оптимальності

$$I = \int_0^{+\infty} G(\bar{X}, \bar{U}) dt. \quad (7.67)$$

Керування \bar{U} надає мінімуму цьому інтегралу. Припустимо, що є оптимальна траєкторія $\bar{X}(t)$ з оптимальним керуванням $\bar{U}(t)$, яке забезпечує мінімум функціонала (7.67).

Розіб'ємо цю траєкторію на дві ділянки: перша від 0 до $t = \tau$; друга – від $t = \tau$ до ∞ . Інтеграл (7.67) має вигляд

$$I = \int_0^{\tau} G(\bar{X}, \bar{U}) dt + \int_{\tau}^{+\infty} G(\bar{X}, \bar{U}) dt. \quad (7.68)$$

Якщо $\bar{X}(t)$ і $\bar{U}(t)$ забезпечує мінімум інтеграла (7.67), який буде залежати від \bar{X}_0 і \bar{U}_0 :

$$\omega(\bar{X}_0, \bar{U}_0) = \min I = \min \int_0^{+\infty} G(\bar{X}, \bar{U}) dt,$$

то ці функції забезпечують мінімум також інтегралам, що входять до (7.69):

$$\omega(\bar{X}_0, \bar{U}_0) = \min \int_0^{\tau} G(\bar{X}, \bar{U}) dt + \min \int_{\tau}^{+\infty} G(\bar{X}, \bar{U}) dt. \quad (7.69)$$

Проте $\min \int_{\tau}^{+\infty} G(\bar{X}, \bar{U}) dt$ визначається початковим станом \bar{X} і \bar{U} у будь-який момент $t = \tau$, тобто

$$\min_{\bar{u}} \int_{\tau}^{+\infty} G(\bar{X}, \bar{U}) dt = \omega[\bar{X}(\tau)].$$

Будемо вважати τ малим, тоді

$$\begin{aligned} \omega[\bar{x}(\tau)] &= \omega[\bar{x}_0 + \Delta \bar{x}]; \\ \Delta \bar{X} &= f(\bar{X}, \bar{U})\tau, \end{aligned}$$

але

$$\phi[\bar{X}(\tau)] = \omega[\bar{X}_0 + f(\bar{X}, \bar{U})\tau].$$

Застосуємо до функції $\omega[\bar{X}]$ формулу Лагранжа про скінченний приріст

$$\omega(b) - \omega(a) = \omega'(\alpha)(b - a),$$

взявши

$$b = \tau; a = 0; a < \alpha < b.$$

Тоді

$$\omega[\bar{X}_0 + f(\bar{X}, \bar{U})\tau] = \omega(\bar{X}_0, \bar{U}_0) + f(\bar{X}_0, \bar{U}_0) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}} \tau.$$

Далі

$$\int_0^{\tau} G(\bar{X}, \bar{U}) dt \cong G(\bar{X}_0, \bar{U}_0) \tau.$$

Тепер вираз (7.69) набуває вигляду

$$\omega(\bar{X}_0, \bar{U}_0) = \min \left[G(\bar{X}_0, \bar{U}_0) \tau + \omega[\bar{X}_0, \bar{U}_0] + f(\bar{X}_0, \bar{U}_0) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}} \tau \right]$$

або після спрощення

$$\min \left[G(\bar{X}_0, \bar{U}_0) \tau + f(\bar{X}_0, \bar{U}_0) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}} \tau \right] = 0. \quad (7.70)$$

Щоб дістати мінімум по \bar{U} , необхідно вираз (7.70) здиференціювати по \bar{U}_0 і здобутий вираз прирівняти до нуля, тобто

$$\frac{\partial G(\bar{X}_0, \bar{U}_0)}{\partial \bar{U}_0} + \frac{\partial f(\bar{X}_0, \bar{U}_0)}{\partial \bar{U}_0} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}} = 0. \quad (7.71)$$

Оскільки \bar{X}_0, \bar{U}_0 – довільні величини, то в рівняннях (7.70) і (7.71) їх можна замінити на \bar{X}, \bar{U} .

Отже, якщо функції \bar{X} і \bar{U} забезпечують оптимальність процесу в задачі (7.64), (7.67), то ці функції задовольняють векторні рівняння

$$G(\bar{X}, \bar{U}) + f[\bar{X}, \bar{U}] \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}} = 0; \quad (7.72)$$

$$\frac{\partial G[\bar{X}, \bar{U}]}{\partial \bar{U}} + \frac{\partial f[\bar{X}, \bar{U}]}{\partial \bar{U}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}} = 0 \quad (7.73)$$

або координатні рівняння

$$G(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) + \sum_{i=1}^n \bar{f}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0; \quad (7.74)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0; \quad k = \overline{1, r}. \quad (7.75)$$

Із рівнянь (7.72) і (7.73) можна виключити $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{X}}$ і дістати векторне рівняння

$$f(\bar{X}, \bar{U}) \frac{\partial G(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} = G \frac{\partial f(\bar{X}, \bar{U})}{\partial \bar{U}}. \quad (7.76)$$

Рівняння (7.72)–(7.76) називаються **рівняннями динамічного програмування**. Із цих рівнянь треба знайти дві функції $\bar{U}(t)$ і $\omega(t)$ або $\bar{U}[\bar{X}(t)]$ і $\omega[\bar{X}(t)]$. Розв'язування рівнянь (7.72)–(7.76) становить значні труднощі, оскільки вони нелінійні, крім того, вони є рівняннями з частинними похідними.

Приклад. Об'єкт керування описується системою

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u.$$

Критерій оптимальності:

$$I(u) = \int_0^{+\infty} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + u^2) dt.$$

Визначити $u = f(x_1, x_2)$.

Розв'язання. Складемо системи (7.74) і (7.75). Тут

$$G(\bar{X}, \bar{U}) = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + u^2; \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 2u;$$

$$\bar{f}_1 = x_2; \quad \bar{f}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u.$$

Рівняння (7.74) і (7.75) мають вигляд

$$q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + u^2 + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial u} = 1; \quad 2u + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0; \quad 2u + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0.$$

Із останнього рівняння знаходимо $u = -\frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ і підставляємо у перше рівняння:

$$q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \left(a_1 x_1 + a_2 x_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0;$$

$$q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_1 x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + a_2 x_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2. \quad (7.77)$$

Це нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку. З нього треба знайти $\omega(x_1, x_2)$. Для об'єктів керування, що описуються лінійними

диференціальними рівняннями з квадратичними критеріями оптимальності, функцію $\omega(x_1, x_2)$ шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$\omega = A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2$$

з невизначеними коефіцієнтами. Для визначення цих коефіцієнтів здиференціюємо функцію:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 2A_{11}x_1 + 2A_{12}x_2;$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 2A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2.$$

Підставивши здобуті вирази в (7.77), дістанемо

$$q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + 2A_{11}x_1x_2 + 2A_{12}x_2^2 + 2(a_1x_1 + a_2x_2)(A_{12}x_1 + A_{22}x_2) = (A_{12}x_1 + A_{22}x_2)^2.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, маємо

$$q_1 + 2a_1A_{12} = A_{12}^2;$$

$$2A_{11} + 2a_2A_{12} + 2a_1A_{22} = 2A_{12}A_{22};$$

$$q_2 + 2A_{12} + 2a_2A_{22} = A_{22}$$

$$A_{12}^2 - 2a_1A_{12} - q_1 = 0; \quad (7.78)$$

$$A_{22} - 2A_{12} - 2a_2A_{22} - q_2 = 0; \quad (7.79)$$

$$A_{11} + a_2A_{12} + a_1A_{22} - A_{12}A_{22} = 0. \quad (7.80)$$

Із квадратних рівнянь (7.78)–(7.79) знаходимо

$$A_{12} = a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + q_1}; \quad A_{22} = a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 2A_{12} + q_2}$$

Отже, в (7.80) тільки одне невідоме A_{11} , яке визначається як $A_{11} = A_{12}A_{22} - a_2A_{12} - a_1A_{22}$. З одержаних розв'язків для A_{11} , A_{12} , A_{22} вибираємо тільки додатні, оскільки квадратична форма $\omega(x_1, x_2)$ має бути додатно означеною. Дістанемо шукане керування

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} (2A_{12}x_1 + 2A_{22}x_2);$$

$$u = -(A_{12}x_1 + A_{22}x_2).$$

ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

§ 1. ВИМОГИ ДО ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ

Під **числовими методами** розв'язання математичних задач розуміють методи, в яких використовуються тільки числа як в процесі розв'язання задачі, так і у відповідях. Наприклад, у задачі потрібно знайти $\sqrt{5}$. Подаємо 5 у вигляді суми двох чисел, одне з яких допускає точне добування заданого кореня, тобто $5 = 4 + 1$, $\sqrt{4} = 2$. Число 4 є найближчим до 5 числом. Відома формула (див. ч. 1, гл. 4, п. 14.4)

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

У наведеному випадку ця формула запишеться так:

$$x = 4; \quad \Delta x = 1; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}}.$$

Тоді

$$\sqrt{4+1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 1 = 2 + \frac{1}{4} = 2,25.$$

Отже, $\sqrt{5} \approx 2,25$.

У цьому прикладі дії з числами були прості і обчислення також прості. Однак в більшості випадків обчислення і дії з числами є дуже трудомісткими. Тут на допомогу людині приходять обчислювальні машини, завдяки яким дії з числами прискорюються в мільйони разів. З цього не можна зробити висновку про те, що з появою обчислювальних машин числові методи стали менш цікавими для вчених. Поява швидкодіючої обчислювальної техніки дозволила числові методи, що раніше відкидалися через громіздкість обчислень, тривалість, слабку збіжність процесу обчислення, використовувати в розрахунках. Числовий метод розв'язання якоїсь задачі у наш час тоді має практичний інтерес, коли метод легко можна пристосувати до розв'язання на обчислювальній машині. Тому поява обчислювальних машин вплинула серйозним чином на розвиток і перегляд вже відомих числових методів розв'язання задач, розробку нових числових методів для розв'язання великих господарських, наукових задач і проблем, де потрібне виконання мільярдів арифметичних дій за частки секунди.

При викладі всього курсу вищої математики нам не раз доводилося вирішувати задачі, в яких як розв'язання, так і її відповідь було потрібно дати у вигляді або одного числа, або сукупності чисел. Перелічимо ці задачі.

1. Розв'язання одного лінійного рівняння або системи лінійних рівнянь, описаних в ч. 1, гл. 1, п. 3.2.

2. Обчислення визначників, оберненої матриці, описаних в ч. 1, гл. 1, п. 2.9.

3. Розв'язання характеристичних рівнянь, відшукування власних чисел лінійних перетворень (див. ч. 1, гл. 1, п. 4.8), стійкість розв'язків.

4. Обчислення функцій за допомогою їх розвинення в ряди (див. гл. 3).

5. Задачі на екстремум (необхідні і достатні умови).

6. Пошук частинних розв'язків диференціальних рівнянь і т. д.

Алгоритми, розроблені в перелічених темах, будуть використані в числових методах.

У всіх числових методах процеси розв'язання задачі і відповіді даються у вигляді наближених чисел. Звідси випливає необхідність розробки способу оцінки точності для кожного числового методу розв'язання задачі. При цьому бажано вказати цю оцінку залежно від номера n чисел, що отримують після коми.

У будь-якому числовому методі доводиться виконувати арифметичні дії з наближеними числами, округлення (заміна на нуль, 9 на 10 у великорозрядних числах) тощо, а значить свідомо робити помилки. Останніх буде тим менше, чим менше арифметичних дій в даному числовому методі. Тому, якщо дану математичну задачу можна вирішувати кількома числовими методами, перевага віддається тому числовому методу, в якому арифметичних дій менше.

У числовому методі дії з числами можуть бути прості й однотипні, а також різноманітні і складні. Перевага віддається тому з методів, в якому дії з числами є однотипними і простими.

Розв'язання будь-якої практичної задачі звичайно починається з фізичного опису. Після цього будується математична модель, що описує найбільш істотні сторони фізичного процесу. Модель складається з рівнянь, рівностей, математичних формул, іноді зі словесного опису. Потім будується алгоритм (спосіб) розв'язання математичної задачі. За алгоритмом здійснюється числове розв'язання задачі – так званий числовий експеримент, за яким оцінюються переваги і недоліки математичної моделі. При цьому модель може уточнюватися. Числовий експеримент проводиться багато разів на ЕОМ.

У зв'язку з проведенням цих робіт виникають різні похибки, які далі перелічимо. Відмінність між фізичною і математичною моделлю дає так звану неусувну похибку Δ_1 . Вирішуючи якимось числовим методом математичну модель задачі, отримуємо похибку цього методу Δ_2 . При округленні наближених чисел у числовому методі отримуємо похибку обчислення Δ_3 .

Таким чином, у процесі розв'язання фізичної задачі маємо мінімум три види похибок, підсумовуючи які знаходимо загальну похибку задачі:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

§ 2. ОСНОВНІ ДЖЕРЕЛА ПОХИБОК І ЇХ УРАХУВАННЯ В ЧИСЛОВИМУ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ

Основним джерелом всіх похибок є вимірювання різних величин. Істинне значення фізичних величин, що використовуються у виробництві, техніці, побуті, звичайно є невідомим. І як тільки ми починаємо вимірювати фізичну величину, наприклад A , ми робимо помилки. Справа в тому, що процес вимірювання величини A потрібно розглядати як випадковий дискретний процес з випадковими величинами $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ наближення до A . Ці випадкові величини в певних умовах можна розглядати як незалежні величини з однако-вими математичними сподіваннями M і дисперсією σ^2 . Тоді за наближене значення величини A можна прийняти середнє арифметичне значення \bar{x} (математичне сподівання).

Істинне значення A можна оцінити з використанням довірчого інтервалу з надійністю γ за формулою (див. гл. 6, § 15)

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < A < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (2.1)$$

2.1. Урахування похибки арифметичних дій

Якщо \bar{x} позначити a , то помилка або похибка вимірювання A

$$\Delta a = |A - a| = \Delta \quad (2.2)$$

називається абсолютною похибкою, яка фактично також є випадковою величиною. Це ж саме відноситься і до відносних похибок, що

представляють відношення абсолютної похибки до абсолютної величини або невідомого $|A|$, або вимірюваного середнього $|a|$:

$$\delta(a) = \delta = \frac{\Delta a}{|A|} \quad (2.3)$$

або

$$\delta a = \delta = \frac{\Delta a}{|a|} \quad (2.4)$$

Замість величин (2.3), (2.4) вводять граничні похибки за нерівностями

$$\Delta^* a \geq \Delta a, \quad \Delta^* \geq \Delta; \quad (2.5)$$

$$\delta^* a \geq \delta a, \quad \delta^* \geq \delta, \quad (2.6)$$

де Δ^* – гранична абсолютна; δ^* – відносна похибки.

Граничною абсолютною $\Delta^*(\Delta^* a)$ або відносною $\delta^*(\delta^* a)$ похибкою називається величина, близька до Δ або δ , не менша їх, тобто, що задовольняє нерівності (2.5), (2.6).

Розглянемо похибки, які з'являються в арифметичних діях з наближеними числами. Якщо $A + B = C$, то $c = a + b$, або $C = A - B$, $c = a - b$, то $\Delta c \leq \Delta a + \Delta b$, як для суми, так і для різниці. Для граничних похибок можна прийняти

$$\Delta^* c = \Delta^* a + \Delta^* b, \quad (2.7)$$

тут A, B, C – істинні значення; a, b, c – їх наближення.

Висновок. При додаванні і відніманні двох наближених чисел їх граничні абсолютні похибки складаються. Правило справедливе для скінченного числа доданків.

Для граничних похибок добутку

$$U = AB, \quad u = ab$$

і частки

$$V = \frac{A}{B}, \quad v = \frac{a}{b}$$

справедливі формули:

$$\Delta^* u \approx |b| \Delta^* a + |a| \Delta^* b; \quad (2.8)$$

$$\Delta^* v \approx \frac{|b| \Delta^* a + |a| \Delta^* b}{|b|^2}; \quad (2.9)$$

$$\delta^* u \approx \delta^* a + \delta^* b; \quad (2.10)$$

$$\delta^* v \approx \delta^* a + \delta^* b, \quad (2.11)$$

які приймаємо без доведення.

Висновок. При множенні і діленні наближених чисел у відповідності з (2.10) і (2.11), гранична відносна похибка добутку або частки наближених чисел дорівнює сумі граничних відносних похибок.

Оцінка похибки функції $u = f(x, y, \dots, t)$ від n незалежних змінних, які виміряні з точністю до $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$, розглянута в ч. 1, гл. 4, § 18.

2.2. Правило запису наближених чисел

Нехай наближене число a записане у вигляді

$$a = \pm d_n d_{n-1} \dots d_0 d_{-1} d_{-2} \dots d_{-m}, \quad (2.12)$$

де d_j – десяткові цифри (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). У стислій формі (2.12) можна записати

$$a = \pm \sum_{j=-m}^n d_j 10^j.$$

Якщо в десятковому зображенні числа відмінна від нуля перша зліва і всі розташовані праворуч цифри, то ці цифри називаються значущими. Наприклад, числа 28,035 і 0,000250 мають відповідно 5 і 3 значущі цифри.

Цифра d_j в десятковому зображенні числа називається вірною, якщо її абсолютна похибка не перевищує однієї одиниці відповідного розряду, тобто

$$\Delta a \leq 10^j.$$

Якщо наближене число a записується без вказування його граничної абсолютної похибки, то вписуються тільки вірні цифри. При цьому вірні цифри, рівні нулю, розташовані на правому кінці десяткового зображення числа, не відкидаються.

Наприклад, числа 0,254 і 0,0025400, як наближені числа, різні. Для 0,254 його абсолютна похибка не перевищує 0,001, а із запису числа 0,0025400 можна стверджувати тільки, що його похибка не перевищує 10^{-7} .

Зв'язок між точним значенням A вимірюваної величини і наближеним a з формули (2.2) можна записати таким чином:

$$a - \Delta^* a \leq A \leq a + \Delta^* a.$$

Останню нерівність часто записують у вигляді

$$A = a \pm \Delta^* a. \quad (2.13)$$

При цьому гранична похибка $\Delta^* a$ виписується з однією або двома значущими цифрами, а молодший розряд у $\Delta^* a$ відповідає молодшому розряду в a .

Наприклад, $A = 3,420 \pm 0,011$.

Записи $A = 3,42017 \pm 0,013$, $A = 3,42017 \pm 0,01391$ є неправильні.

Відмітимо, що абсолютна похибка наближеного числа цілком характеризується числом вірних цифр після коми, а відносна — числом вірних значущих цифр.

2.3. Округлення цифр

Наведемо **правило округлення чисел**, що застосовується в ЕОМ. Якщо в старшому з розрядів, що відкидаються, стоїть цифра менше п'яти, то вміст розрядів числа, що зберігається, не змінюється, а якщо більше п'яти, то в молодший розряд, що зберігається, додається одиниця з тим же знаком, що і у самого числа.

Приклад. Округлити з двома, трьома і чотирма знаками після коми числа: а) 3,14159 (число π); б) $-0,0025$; в) 84,009974. *Відповідь:* а) з двома 3,14; б) з трьома $-0,003$; в) з чотирма 84,0100.

Похибка, що з'являється при округленні, як впливає з правила, не перевищує за абсолютною величиною половини одиниці молодшого розряду, що залишається.

Наведемо правила округлення з наближеними числами в арифметичних операціях. Нехай перемножується два числа з різним числом вірних знаків. Відповідь потрібно округлити до числа вірних значущих цифр, співпадаючого з мінімальним числом вірних значущих цифр чисел, що перемножуються.

Наприклад: нехай перемножуються два наближених числа a з шістьма вірними значущими цифрами і b з вісьмома вірними значущими цифрами. У результаті отримуємо число $c = ab$, у якого значущих цифр буде 14. За правилом число c потрібно округлити так, щоб значущих цифр залишилося шість.

Вказане вище правило справедливе і для ділення наближених чисел.

При додаванні і відніманні наближених чисел, що мають однако-ве число вірних цифр після коми, округлення не проводиться, бо в цій операції число вірних знаків не змінюється.

При додаванні і відніманні наближених чисел, що мають різне число вірних цифр після коми, результат округлюється за мінімальним числом вірних цифр після коми у вихідних (початкових) чисел.

Іноді в операціях додавання, віднімання, множення, ділення в результаті крім вірних знаків залишають ще одну або дві значущі цифри (запасні). Це робиться у випадках, коли таких операцій досить багато. Відкидаються запасні цифри при округленні остаточної відповіді.

Зауваження. При відніманні близьких наближених чисел потрібно збільшити точність проміжних обчислень таким чином, щоб не втратити в результаті вірні значущі цифри.

Приклад. Знайти $\sqrt{543} - \sqrt{540}$, де числа 543 і 540 — точні, тобто мають три вірні значущі цифри.

Розв'язання. Обчислимо $\sqrt{543} \approx 23,30$; $\sqrt{540} \approx 23,23$. Округливши відповіді до трьох вірних значущих цифр, маємо $\sqrt{543} \approx 23,3$; $\sqrt{540} \approx 23,2$. Тепер різниця

$$\sqrt{543} - \sqrt{540} = 23,3 - 23,2 = 0,1.$$

Відповідь вийшла з однією значущою цифрою.

Знайдемо $\sqrt{543} - \sqrt{540}$ шляхом знищення ірраціональності в чисельнику

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{543} - \sqrt{540})(\sqrt{543} + \sqrt{540})}{(\sqrt{543} + \sqrt{540})} &= \frac{543 - 540}{(\sqrt{543} + \sqrt{540})} = \frac{3}{23,3 + 23,2} = \\ &= \frac{3}{46,5} = 0,06451 \approx 0,0645. \end{aligned}$$

Останнє число має три значущі цифри (645). Можна показати, здійснюючи більш точні обчислення, що в останній відповіді всі три значущі цифри є вірними. При роботі з близькими за значенням різницями швидко нагромаджуються помилки. Те саме відбувається при діленні. Цього треба уникати, складаючи більш якісні програми обчислень.

2.4. Середні квадратичні помилки

Нагадаємо, що процес вимірювання величини A є випадковим. Відхилення Δa за формулою (2.2) є лінійним порівняно з наближеним значенням, але це ж відхилення можна зробити і квадратичним,

тобто за Δa прийняти середнє квадратичне відхилення σ_x^2 або дисперсію результатів вимірювання $A - a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$D[A] = \sigma_A^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - A)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2, \quad (2.14)$$

де Δ_i^2 – абсолютні похибки вимірювання.

Як вказувалося вище, замість A можна взяти математичне сподівання результатів вимірювання

$$A = M[x] = \int_a^b x f(x) dx \quad \text{або} \quad M[x] = \sum_{i=1}^n p_i a_i = \sum_{i=1}^n p_i x_i = A, \quad (2.15)$$

де $f(x)$ – густина розподілу величини A , що вимірюється; x_i – її можливі значення; p_i – імовірність результату вимірювання.

§ 3. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕНАМИ. ІНТЕРПОЛЮВАННЯ

Всі види наближень функцій, визначених на скінченному або нескінченному проміжку, здійснюються многочленами або рядами. Наближення функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, многочленами можна здійснювати в околі заданої точки, $x_0 \in [a; b]$, як це робиться в наближеннях за допомогою алгебраїчних многочленів Тейлора $T_n(x)$ або $M_n(x)$ Маклорена відповідно в околі точки $x_0 \neq 0$ або при $x_0 = 0$, або степеневих рядів. При цьому вважаються відомими значення функції і її похідних до порядку старшого степеня многочлена, починаючи з нуля. Оскільки різниця $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$, то оцінку похибки заміни функції многочленом виражають через $R_n(x)$, наприклад, у формі Лагранжа (див. ч. 1, гл. 4, п. 26.1):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad x_0 < \xi < x \quad (x_0 < x).$$

Припускаючи, що

$$M_{n+1} = \max_{[a; b]} |f^{(n+1)}(x)| < \infty,$$

то

$$\max_{[a; b]} |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Вважаючи, що $l = \max[x_0 - a, b - x_0]$, дістанемо оцінку похибки заміни функції многочленом Тейлора

$$\max |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} e^{n+1}.$$

Наближення функції можна здійснювати аналогічно за допомогою методу найменших квадратів (ч. 1, гл. 4, § 37).

3.1. Постановка задачі інтерполювання

Наближене подання функції $y = f(x)$ на $[a; b]$ здійснюється за допомогою тригонометричних поліномів Фур'є (див. гл. 3, п. 3.9 і 3.10). Нарешті, можлива і така постановка задачі. Дана функція $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, і її значення в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i < x_{i+1}$) – $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Потрібно знайти функцію $\varphi(x)$, співпадаючу з $f(x)$ у вказаних точках, а в проміжних точках $\varphi(x)$ співпадає з $f(x)$ наближено. Процес пошуку функції $\varphi(x)$ називається **інтерполюванням**, функція $\varphi(x)$ – інтерполяційною (що інтерполює) функцією. Числа $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються вузлами інтерполювання. Якщо послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ укладається в $[a; b]$, то задача пошуку $f(x)$ для $x \in [a; b]$ називається **екстраполюванням**.

У даному параграфі розглянемо наближення функції $f(x)$ за допомогою функцій $\varphi(x)$, представлених многочленами різного степеня. Виберемо деякі функції $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ і інтерполяційну функцію запишемо у вигляді

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x), \quad (3.1)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n — невизначені параметри, величини яких мають підбиратися таким чином, щоб функція $\varphi(x)$ була рівна заданій функції $f(x)$ у вузлах інтерполювання, тобто задовольняла умови:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= f(x_0); \\ \varphi(x_1) &= f(x_1); \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(x_n) &= f(x_n). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Підставляючи вираз (3.1) в умови (3.2) для функції $\varphi(x)$, отримаємо систему $n+1$ рівнянь, що включають параметри a_0, a_1, \dots, a_n , як невідомі:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_0)a_0 + \varphi_1(x_0)a_1 + \dots + \varphi_n(x_0)a_n &= f(x_0); \\ \varphi_0(x_1)a_0 + \varphi_1(x_1)a_1 + \dots + \varphi_n(x_1)a_n &= f(x_1); \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_0(x_n)a_0 + \varphi_1(x_n)a_1 + \dots + \varphi_n(x_n)a_n &= f(x_n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Якщо основний визначник системи (3.3), виражений через $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, не рівний нулю, то отримаємо єдині розв'язки параметрів a_0, a_1, \dots, a_n , виражені через вузлові значення $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Залишилося знайти умови вибору функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. Функції $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ повинні бути досить простими і зручними для обчислень. Потрібно також дати оцінку похибки вираження заданої функції інтерполяційною функцією в точках, не співпадаючих з вузлами інтерполювання.

Розглянемо важливий для застосувань випадок інтерполювання за допомогою алгебраїчних многочленів.

3.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Поставимо задачу побудови алгебраїчного многочлена $\varphi_n(x)$ n -го степеня, який в заданих вузлах інтерполювання x_0, x_1, \dots, x_n дорівнює заданій функції $f(x)$.

Побудуємо спочатку функцію $\Phi_i(x)$ загального вигляду, яка в заданих точках $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ дорівнює нулю, а в точці x_i — одиниці. Очевидно, першу умову задовольняє функція

$$\Phi_i(x) = c_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n), \quad (3.4)$$

де c_i — довільний постійний множник.

З другої умови

$$\Phi_i(x_i) = c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n) = 1$$

отримаємо

$$c_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Звідси остаточно запишемо вираз

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (3.5)$$

Функцію $\varphi_n(x)$ можна тепер подати у вигляді:

$$\varphi_n(x) = f(x_0)\Phi_0(x) + f(x_1)\Phi_1(x) + \dots + f(x_n)\Phi_n(x). \quad (3.6)$$

Ця функція є такою, що інтерполює задану функцію $f(x)$ у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n . Дійсно, при $x = x_0$ функції $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$ обертаються в нуль і, оскільки $\Phi_0(x) = 1$, то $\varphi_n(x_0) = f(x_0)$. Так само при $x = x_1$ обертаються в нуль функції $\Phi_0(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$, функція $\Phi_1(x) = 1$, тому $\varphi_n(x_1) = f(x_1)$ і т. д.

Запишемо многочлен (3.6), позначивши його $L_n(x)$, в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ &+ f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ &\dots + f(x_n) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким чином, поставлена задача розв'язана. Функцію $L_n(x)$ називають **інтерполяційним многочленом Лагранжа**.

Для зручності, особливо у випадках, коли доводиться обчислювати значення $L_n(x)$ при багатьох значеннях x , функцію $L_n(x)$ після перетворень можна привести до вигляду

$$L_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0. \quad (3.8)$$

При великих значеннях коефіцієнтів і номера n такі перетворення і обчислення за формулами (3.7) або (3.8) виявляються дуже трудомісткими, виконувати їх рекомендується на ЕОМ.

Як приклад складемо інтерполяційний многочлен Лагранжа третього степеня для функції $f(x)$, що має значення, наведені в таблиці:

x	0	2	5	10
$f(x)$	10	17,84	53,75	110

Обчислимо значення цієї функції, що виражається інтерполяційним многочленом, при $x=1$ і визначимо відносну похибку цього значення, якщо відомо, що $f(1) = 11,99$.

Відповідно до заданої таблиці за вузли інтерполяції приймемо $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 10$ і $n = 3$. За формулою (3.7) складемо многочлен

$$\begin{aligned} L_3(x) &= f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \\ &+ f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \\ &+ f(x_3) \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= 10 \frac{(x-2)(x-5)(x-10)}{(0-2)(0-5)(0-10)} + 17,84 \frac{(x-0)(x-5)(x-10)}{(2-0)(2-5)(2-10)} + \\ &+ 53,75 \frac{(x-0)(x-2)(x-10)}{(5-0)(5-2)(5-10)} + 110 \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(10-0)(10-2)(10-5)}. \end{aligned}$$

Зведемо многочлен $L_3(x)$ до вигляду (3.8):

$$L_3(x) = -0,1703x^3 + 2,804x^2 - 0,9952x + 10.$$

При $x=1$ многочлен $L_3(x)$ набуває значення $L_3(1) = 11,6385$. Таким чином,

$$\delta(x=1) = \frac{11,99 - 11,6385}{11,99} = 0,02932.$$

Якщо відстань між усіма сусідніми вузлами інтерполявання є однаковою (рівновіддалені вузли), то $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$, то вираз (3.7) істотно спрощується. Введемо нову змінну $t = \frac{x-x_0}{h}$, тоді, оскільки $x = x_0 + ht$, $x_i = x_0 + ih$, після ряду перетворень

$$\Phi_i(x) = (-1)^{(n-i)} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)n!}. \quad (3.9)$$

Визначимо $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, тоді многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)n!} f(x_i). \quad (3.10)$$

Коефіцієнти, що стоять у виразі (3.10) перед величинами $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_i)$, ..., $f(x_n)$:

$$L_i^{(n)}(t) = (-1)^{n-i} C_n^i \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(t-i)n!}, \quad i = \overline{0, n},$$

називаються **коефіцієнтами Лагранжа**. Коефіцієнти $L_i^{(n)}(t)$ не залежать від вигляду функції $f(x)$ і величини h , а залежать лише від величин i , n . Тому таблиці, складені одного разу для різних значень n , можна використовувати при розв'язуванні найрізноманітніших задач інтерполявання для рівновіддалених вузлів.

3.3. Оцінка похибки

При побудові інтерполяційних функцій важливою є можливість оцінки похибок подання заданої функції в проміжках між вузлами інтерполювання.

Якщо функція $f(x)$ є многочленом степеня не вище n , то дана функція і відповідний інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ тотожно співпадають.

Якщо $f(x)$ – многочлен степеня вище n , то многочлен $L_n(x)$ збігається з $f(x)$ тільки у вузлах інтерполювання. В інших точках многочлен $L_n(x)$ зображає функцію $f(x)$ з похибками, які, очевидно, належать до похибок методу.

Оскільки функція $f(x)$ може також з певними похибками виражати описувану нею залежність між y і x , то значення $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ можуть також містити в собі похибки, неусувні в процесі розв'язання задачі.

Нарешті, під час побудови інтерполяційного многочлена, а також при обчисленні його значень в заданих точках можуть виникнути похибки ще одного типу – похибки округлення.

Дамо оцінку похибки методу.

Нехай функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ має диференційовані похідні включно до n -го порядку, а похідна $(n+1)$ -го порядку неперервна. Для оцінки похибки введемо допоміжну функцію

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - \gamma(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \quad (3.11)$$

де γ – деяка стала. Очевидно, $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = 0$. Підберемо для деякої довільної точки x_k , в якій проводиться оцінка, таке значення γ , щоб виконувалася умова $\varphi(x_k) = 0$. Із (3.11) легко побачити, що в цьому випадку

$$f(x_k) - L_n(x_k) - \gamma(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_n) = 0,$$

звідки

$$\gamma = \frac{f(x_k) - L_n(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_n)}. \quad (3.12)$$

Оскільки знаменник дробу (3.12) відрізняється від нуля, необхідне значення параметра γ існує. Тоді функція $\varphi(x)$ обертається в нуль, принаймні, в $n+2$ точках $x_k, x_0, x_1, \dots, x_n$ на відрізку $[a; b]$. Отже, відповідно до теореми Ролля перша похідна функції $\varphi'(x)$ обертається в нуль на інтервалі $(a; b)$, принаймні, $n+1$ разів. Нехай це відбувається в точках

$$x = \xi_0^{(1)}, x = \xi_1^{(1)}, \dots, x = \xi_n^{(1)}.$$

Застосовуючи теорему Ролля до функції $\varphi''(x)$, можемо стверджувати, що принаймні, в n точках (позначимо їхні координати $\xi_0^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}$) обертається в нуль друга похідна $\varphi''(x)$ функції $\varphi(x)$.

Продовжуючи такий самий хід міркувань аж до похідної $(n+1)$ -го порядку функції $\varphi(x)$, знайдемо, що на інтервалі $(a; b)$ існує, принаймні, одна точка ξ , в якій $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Оскільки похідна $(n+1)$ -го порядку від многочлена $L_n(x)$ n -го порядку дорівнює нулю, а похідна від многочлена $(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, в якому коефіцієнт при x^{n+1} дорівнює одиниці, виражається величиною $(n+1)!$, то справедлива рівність

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \gamma(n+1)!. \quad (3.13)$$

Вважаючи в (3.13) $x = \xi$, маємо

$$\gamma = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Звідси похибка

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n). \quad (3.14)$$

Вважаючи $M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, дістаємо оцінку для абсолютної похибки

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|. \quad (3.15)$$

Якщо відома оцінка похідної $f^{(n+1)}(\xi)$ на $[a; b]$, то формули (3.14) і (3.15) дають змогу оцінити похибку вираження функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом $L_n(x)$.

Як приклад, оцінимо точність обчислення величини $\sin \frac{5}{180}\pi$ за інтерполяційною формулою Лагранжа, якщо за вузли інтерполювання вибрані чотири значення аргументу $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$. У цьому випадку

$$f(x) = \sin x, \quad n = 3, \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{3},$$

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(4)}(x) = \sin x, \quad M_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

максимальне значення модуля функції $f(x) = \sin x$ на відрізку від 0 до $\frac{\pi}{3}$. Застосовуючи умову (3.15), отримаємо

$$\left| \sin \frac{5\pi}{180} - L_3\left(\frac{5\pi}{180}\right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4!} \left| \left(\frac{5\pi}{180} - 0\right) \left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right) \right| \approx 0,0009.$$

3.4. Многочлени Чебишова

Як видно з формул (3.14), (3.15), похибка вираження функції інтерполяційним многочленом залежить від вибору вузлів інтерполювання x_0, x_1, \dots, x_n .

Перш ніж перейти до питання про раціональний вибір вузлів інтерполювання, розглянемо деякі основні властивості одного з важливих і добре вивчених класів спеціальних функцій — многочленів Чебишова першого роду, які часто використовуються для наближення обчислень функцій. Многочлен $T_n(x)$ n -го степеня визначається формулою

$$T_n(x) = \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \sqrt{x^2 - 1} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.16)$$

Вважаючи в (3.16) $n = 0, 1, 2, 3, 4$, отримаємо перші п'ять многочленів Чебишова першого роду:

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = x;$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Кажуть, що многочлени Чебишова першого роду ортогональні (див. гл. 3, § 4, п. 3) на відрізку $[-1; 1]$ з вагою $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, оскільки виконується співвідношення

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_k(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad \text{якщо } k \neq m. \quad (3.17)$$

Для визначення многочленів Чебишова першого роду часто застосовують також формулу

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1, \quad (3.18)$$

яка приводить до таких самих виразів для $T_n(x)$, що і формула (3.16).

Дійсно,

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = \cos 0 = 1.$$

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \arccos x) = x.$$

При $n = 2$ (застосуємо формулу для косинуса подвійного кута)

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cos(2 \arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = \\ &= \cos^2(\arccos x) - (1 - \cos^2(\arccos x)) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

З тотожності $\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cdot \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$ при $\theta = \arccos x$ маємо рекурентну формулу

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Многочлен $T_n(x)$ степеня n має n коренів, які одержуємо з рівняння

$$\cos(n \arccos x) = 0 \quad (3.19)$$

або

$$\begin{aligned} n \arccos x &= \frac{\pi}{2}(2m+1); \\ x &= \cos \frac{(2m+1)\pi}{2n}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Як видно з виразу (3.20), всі n коренів, що відповідають значенням $m = 0, 1, \dots, n-1$, знаходяться на відрізку $[-1; 1]$, причому ці точки не є рівновіддаленими, а густішають ближче до кінців даного відрізка. З формули (3.18) також ясно, що на відрізку $[-1; 1]$, максимальне значення якого можуть набувати многочлени Чебишова першого роду, дорівнює 1, тобто на відрізку $[-1; 1]$

$$\max |T_n(x)| = 1. \quad (3.21)$$

Доведено, що серед всіх можливих n значень x на відрізку $[-1; 1]$ корені $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{n-1}^{(n)}$ многочлена $T_n(x)$ мають таку чудову властивість, що для них величина

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \quad (3.22)$$

має найменше за абсолютною величиною максимальне значення. Беручи до уваги (3.21), запишемо

$$\max |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (3.23)$$

Повернемося до формули (3.14) для оцінки похибки інтерполювання многочленами Лагранжа. Як видно з формули (3.14), похибка визначається функцією

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

величина якої при кожному значенні x залежить від вибраних вузлів інтерполювання. Виходячи з властивостей коренів многочленів Чебишова першого роду і визначення многочлена Лагранжа $L_n(x)$ n -го степеня на відрізку $[-1; 1]$, можна стверджувати: якщо за вузли інтерполювання прийняти корені многочлена $T_n(x)$, то максимальне значення похибки на цьому відрізку буде найменшим для всіх можливих варіантів вибору n вузлів інтерполювання. Інтерполяційний многочлен, що має таку властивість, будемо називати многочленом найкращого наближення. Оцінка (3.15) при цьому набуває вигляду

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

Якщо інтерполювання проводиться на довільному відрізку $[a; b]$, то заміною змінної

$$x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a)) \quad \text{на} \quad z = \frac{1}{b-a}(2x - b - a)$$

цей відрізок можна звести до відрізка $[-1; 1]$. При цьому корені многочлена $T_n(x)$ будуть знаходитися в точках

$$x_m = \frac{1}{2}(b-a) \cos \frac{2m+1}{2n} \pi + (b+a).$$

Оцінка має вигляд

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \quad (3.24)$$

3.5. Інтерполювання сплайнами

Нехай про інтерполяційну функцію $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, відомо лише її значення y_i у вузлах $a = x_0, x_1, \dots, x_n$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), а в

проміжних точках функція може набувати будь-яких значень. Тоді заміна функції $y = f(x)$ навіть дуже високого степеня інтерполяційним многочленом, крім великої обчислювальної роботи, нової інформації може і не дати. У цих випадках область визначення функції, тут $[a, b]$, розділяють вузлами на проміжки $x_{i-1} < x < x_i$, в кожному з яких функцію подають алгебраїчним многочленом, а на всьому відрізьку $[a, b]$ кусково-неперервним многочленом разом зі своїми кількома похідними. Такий алгебраїчний многочлен отримав назву **сплайн**.

Найлегший для обчислень спосіб заміни функції $f(x)$ на $x \in [x_{i-1}; x_i]$ — лінійним многочленом, тобто геометрично — прямою. Тоді графік функції на $[a, b]$ заміниться ламаною лінією, що проходить через точки $(x_i; y_i)$ і складатиметься з n відрізків прямої. У кожному вузлі цієї ламаної перша похідна має розрив першого роду, а друга похідна не існує. Ламана в нашому випадку — це сплайн. Заміну кривої ламаною звичайно відкидають. Найбільш поширений сплайн — це многочлен третього степеня (так званий кубічний сплайн). Для побудови кубічного сплайна будемо шукати його на кожному з часткових відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ у вигляді

$$s(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (3.25)$$

де a_i, b_i, c_i, d_i — четвірка невідомих коефіцієнтів для одного часткового відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Таких відрізків у нашому випадку n — $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$, а невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i — $4n$.

За умовою функція $s(x)$ у вузлах повинна співпадати зі значенням функції $f(x)$, тобто

$$\begin{cases} s(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i; \\ s(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \end{cases} \quad (3.26)$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Число рівнянь (3.26) дорівнює $2n$, а нам треба $4n$. Для отримання додаткових умов вимагаємо неперервності першої і другої похідних від $s(x)$ у всіх точках, включаючи і вузли:

$$\begin{aligned} s'(x) &= b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2; \\ s''(x) &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Для неперервності $s'(x)$ і $s''(x)$ у вузлах треба знайти $s'(x-0)$, $s'(x+0)$, $s''(x-0)$, $s''(x+0)$ і прирівняти їх:

$$s'(x_i - 0) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2; \quad s'(x_i + 0) = b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

У другому випадку в $s'(x)$ потрібно замінити i на $i+1$

$$s''(x_i - 0) = 2c_i + 6d_i h_i; \quad s''(x_i + 0) = 2c_{i+1}.$$

Прирівнюючи похідні, розміщені ліворуч і праворуч, отримаємо

$$\begin{cases} b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2; \\ c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.27)$$

Це ще $2n-2$ умови. Таким чином, маємо $4n-2$ умови для визначення $4n$ невідомих. Дві умови, що залишилися, звичайно замінюють вимогою в точках $x_0 = a$ і $x_n = b$ нульової кривизни, тобто рівності нулю другої похідної, це дає

$$c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0.$$

Тепер система (3.26) замкнена, запишемо її знову, замінивши $a_i = y_{i-1}$

$$\begin{cases} b_i h_i - c_i h_i^2 - d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

У цій системі $3n$ рівнянь, а невідомих b_i, c_i, d_i також $3n$. Система звичайно розв'язується методом Гаусса. Обчислюється сплайн $s_i(x)$

$$s_i(x) = y_{i-1} + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3. \quad (3.29)$$

Відшукання всіх кубічних сплайнів $s_i(x)$ можливе тільки з використанням обчислювальної техніки.

Приклад. Інтерполяційна функція задана табл. 3.1, що складається з 4 вузлів ($n = 3$)

Таблиця 3.1

$x_0 = 2$	$x_1 = 3$	$x_2 = 5$	$x_3 = 7$
$y_0 = 4$	$y_1 = -2$	$y_2 = 6$	$y_3 = -3$
$h_1 = 1$	$h_2 = 2$	$h_3 = 2$	

Знайти значення коефіцієнтів $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$, що визначають кубічний сплайн на трьох часткових відрізках

$$[2; 3], [3; 5], [5; 7] - s_1(x), s_2(x), s_3(x).$$

Розв'язання. За даними табл. 3.1 складемо систему (3.28). Отримаємо систему з дев'яти рівнянь. Основним визначником системи буде визначник дев'ятого порядку. Рекомендється знайти невідомі самостійно.

ВПРАВИ 1. Функція $f(x)$ задана табл. 3.2. Побудувати за її даними інтерполяційний многочлен Лагранжа, обчислити його значення при $x = 0,5, x = 2$. Дати оцінку похибки, якщо четверта похідна заданої функції відома: $f^{(4)}(x) = 2x - x^2$.

Таблиця 3.2

i	0	1	2
x_i	-6	-1	2
$f(x_i)$	0,12	0,47	0,44

Відповідь. $L(x) = 5x^3 - 8x^2 + 0,3x - 1$.

2. Побудувати інтерполяційний многочлен найкращого наближення третього степеня для функції $y = 2x^5 - x^3 + 2x$ на відрізку $[-1; 1]$. Прийняти значення коренів многочлена Чебишова $T_3(x)$: $x_1 = -0,866, x_2 = 0, x_3 = 0,866$.

Відповідь. $y(x) = x^3 + x^2 - 0,3x + 1$.

3. Виконати інтерполювання многочлена Лагранжа на відрізку $[3; 5]$ за значеннями заданої функції в трьох вузлах (табл. 3.3). Знайти координати вузлів інтерполювання, при яких максимальна похибка буде найменшою для всіх варіантів вибору вузлів.

Таблиця 3.3

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	3
$f(x_i)$	$\frac{23}{360}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{719}{360}$

Відповідь. $y(x) = 2x^2 + 0,1x - 0,7$.

3.6. Обчислення значень многочлена за схемою Горнера

Оскільки наближеним значенням функції є многочлен, то потрібно навчитися економно обчислювати його.

Найекономніший спосіб обчислення значень многочлена

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.30)$$

в точці $x = a$ полягає в поданні многочлена у вигляді

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n)))) \dots \quad (3.31)$$

Обчислення $P_n(a)$ тепер виконується за формулами:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n; \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + ab_n; \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + ab_{n-1}; \\ &\dots \\ b_1 &= a_1 + ab_2; \\ b_0 &= a_0 + ab_1 = P_n(a). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Схема обчислення $P_n(a)$ за формулами (3.32) називається **схемою Горнера**, яка реалізується за допомогою $2n$ арифметичних операцій додавання (n) і множення (n). Схема зручна для реалізації на ЕОМ.

Якщо многочлен має парний степінь, тобто $n = 2k$ і

$$P_{2k}(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2k}x^{2k}, \quad (3.33)$$

то замість (3.31) його зручно розписати у вигляді

$$P_{2k}(x) = a_0 + x^2(a_2 + x^2(a_4 + \dots + x^2(a_{2k-2} + a_{2k}x^2))) \dots, \quad (3.34)$$

а якщо многочлен непарного степеня, тобто $n = 2k + 1$ і

$$P_{2k+1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots + a_{2k+1}x^{2k+1},$$

то його для обчислення потрібно записати у вигляді

$$P_{2k+1}(x) = x(a_1 + x^2(a_3 + x^2(a_5 + \dots + x^2(a_{2k-1} + a_{2k+1}x^2)))) \dots$$

які запишемо ліворуч. Розв'яжемо перше рівняння відносно x_1 , друге відносно x_2 , третє — x_3 . Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a'_{11}} - \frac{a''_{11}}{a'_{11}} x_1 - \frac{a_{12}}{a'_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a'_{11}} x_3; \\ x_2 = \frac{b_2}{a'_{22}} - \frac{a_{21}}{a'_{22}} x_1 - \frac{a''_{22}}{a'_{22}} x_2 - \frac{a_{23}}{a'_{22}} x_3; \\ x_3 = \frac{b_3}{a'_{33}} - \frac{a_{31}}{a'_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a'_{33}} x_2 - \frac{a''_{33}}{a'_{33}} x_3. \end{cases} \quad (4.2)$$

Вважаючи в (4.2), наприклад праворуч, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, матимемо перше наближення

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1}{a'_{11}}; \quad x_2^{(1)} = \frac{b_2}{a'_{22}}; \quad x_3^{(1)} = \frac{b_3}{a'_{33}}.$$

Знайдені $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ знову підставляємо в праву частину (4.2), отримаємо $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ і т. д.

У результаті маємо послідовність

$$\begin{aligned} & x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n)}; \\ & x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(n)}; \\ & x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, \dots, x_3^{(n)}. \end{aligned}$$

Розрахунок припиняємо після досягнення заданої точності.

У подальшому зручно систему (4.2) записати в матричній формі. Визначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{a''_{11}}{a'_{11}} & -\frac{a_{12}}{a'_{11}} & -\frac{a_{13}}{a'_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a'_{22}} & -\frac{a''_{22}}{a'_{22}} & -\frac{a_{23}}{a'_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a'_{33}} & -\frac{a_{32}}{a'_{33}} & -\frac{a''_{33}}{a'_{33}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = BX + b. \quad (4.3)$$

Рівність (4.3) можна витлумачити як можливість запису системи не тільки для системи трьох рівнянь, але і будь-якої сумісної неоднорідної системи n лінійних рівнянь з n невідомими в матричному вигляді. У цьому випадку матриця B буде квадратною n -го порядку.

Метод простої ітерації полягає у виборі початкового наближення X_0 і подальших наближень $X^{(k)}$ таким чином, щоб

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + b, \quad \text{де } k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

У розглянутому вище конкретному прикладі $X_0 = 0$. Систему (4.1) також можна записати в загальному матричному вигляді (див. ч. 1, гл. 1, п. 3.6)

$$AX = b, \quad (4.5)$$

де в загальному вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

у вигляді стовпців або рядків.

Якщо для матриці A визначник $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок X^* . З'ясуємо питання наближення $X^{(k)}$ до X^* . Наведемо тут лише формулювання найбільш використовуваних теорем, в яких дається розв'язок питання. Процес послідовних наближень розв'язків (4.4) або системи (4.5) збігається до X^* , якщо виконана одна з таких умов (запис для системи (4.5)).

1. а) $\max_i \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1;$
- б) $\max_j \sum_{i=1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1;$
- в) $\sum_{i,j=1}^n \frac{|a_{ij}|^2}{|a_{ii}|} < 1,$

$$(4.7)$$

де «'» означає, що в сумах відсутні доданки, для яких $i = j$.

2. Для збіжності $X^{(k)}$ до X^* при будь-якому виборі X_0 необхідно і достатньо, щоб власні числа матриці B за модулем були меншими одиниці.

3. Послідовність $X^{(k)}$ збігається до X^* , якщо для всіх i виконана умова

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{in}|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Умова (4.8) вказує, що елемент, який стоїть на головній діагоналі, за абсолютною величиною більший суми абсолютних величин інших елементів рядка. Матриці, для яких виконана умова (4.8), називаються **матрицями з діагональним переважанням**.

Іноді перестановкою рядків можна досягти виконання умов (4.8).

Якщо знайдено послідовності $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$, то оцінку похибки δ визначають таким чином. Відшукують відносні похибки

$$\delta_i^{(k)} = \frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k+1)}|} \quad (4.9)$$

і, якщо $\delta_i^{(k)} < \delta$ для $i = \overline{1, n}$, то процес припиняють.

Приклад 1. Розв'язати методом простої ітерації (зі збереженням 5 значущих цифр) систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 8 = 0; \\ 0,5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6,5 = 0; \\ 20x_1 + x_2 + x_3 - 23 = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Розв'язання. Обчислення будемо проводити доти, доки не виконається умова

$$\delta_i = \frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < 0,05, \quad i = 1, 2, 3.$$

Коефіцієнти заданої системи не задовольняють умову (4.8). Однак, якщо поміняти місцями перше і третє рівняння

$$\begin{cases} 20x_1 + x_2 + x_3 - 23 = 0; \\ 0,5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 6,5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 8 = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

то ця умова виконується.

Прийнявши $a_{ii}^{(2)} = 20$, $i = 1, 2, 3$, і виходячи з формул (4.2), зведемо систему (4.11) до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = -0,05x_2 - 0,05x_3 + 1,15; \\ x_2 = 0,1x_1 + 0,6x_3 + 1,3; \\ x_3 = -0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,8. \end{cases}$$

За нульове наближення приймаємо $x_1^{(0)} = 1,15$; $x_2^{(0)} = 1,3$; $x_3^{(0)} = 0,8$. У першому наближенні обчислюємо відповідно до (4.2)

$$x_1^{(1)} = -0,05 \cdot 1,15 - 0,05 \cdot 0,8 + 1,15 = 1,045;$$

$$x_2^{(1)} = 0,1 \cdot 1,15 + 0,6 \cdot 0,8 + 1,3 = 1,895;$$

$$x_3^{(1)} = -0,2 \cdot 1,15 + 0,2 \cdot 1,3 + 0,8 = 0,83.$$

Обчислимо величини $\delta_i^{(0)}$:

$$\delta_1^{(0)} = \frac{|1,0525 - 1,15|}{|1,0525|} = 1,004784 > 0,05;$$

$$\delta_2^{(0)} = \frac{|1,3 - 1,895|}{|1,895|} = 0,31398 > 0,05;$$

$$\delta_3^{(0)} = \frac{|0,83 - 0,8|}{|0,8|} = 0,0375 < 0,05.$$

Оскільки необхідна умова $\delta_i < 0,05$ досягнута не для всіх значень індексу i , продовжуємо обчислення.

Друге наближення:

$$x_1^{(2)} = -0,05 \cdot 1,895 - 0,05 \cdot 0,83 + 1,15 = 1,0138;$$

$$x_2^{(2)} = 0,1 \cdot 1,045 + 0,6 \cdot 0,83 + 1,3 = 1,9025;$$

$$x_3^{(2)} = 0,2 \cdot 1,045 + 0,2 \cdot 1,895 + 0,8 = 0,970;$$

$$\delta_1^{(1)} = \frac{|1,0138 - 1,045|}{|1,0138|} = 0,030775 < 0,05;$$

$$\delta_2^{(1)} = \frac{|1,9025 - 1,895|}{|1,9025|} = 0,00394 < 0,05;$$

$$\delta_3^{(1)} = \frac{|0,970 - 0,83|}{|0,970|} = 0,14433 > 0,05.$$

Третє наближення:

$$x_1^{(3)} = -0,05 \cdot 1,9025 - 0,05 \cdot 0,970 + 1,15 = 1,006375 ;$$

$$x_2^{(3)} = 0,1 \cdot 1,0138 + 0,6 \cdot 0,970 + 1,3 = 1,98338 ;$$

$$x_3^{(3)} = -0,2 \cdot 1,0138 + 0,2 \cdot 1,9025 + 0,8 = 0,97774 ;$$

$$\delta_1^{(2)} = \frac{|1,006375 - 1,0138|}{|1,006375|} = 0,007353 < 0,05 ;$$

$$\delta_2^{(2)} = \frac{|1,98338 - 1,9025|}{|1,98338|} = 0,04078 < 0,05 ;$$

$$\delta_3^{(2)} = \frac{|0,97774 - 0,970|}{|0,97774|} = 0,007916 < 0,05 .$$

Таким чином, результати третього наближення приймаємо за шуканий розв'язок. Помітимо, що точним розв'язком системи (4.10) є значення $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, до яких методом ітерації можна наблизитися з будь-якою наперед заданою похибкою.

Рекомендуємо читачеві пересвідчитися в правильності наведених результатів самостійно.

4.3. Метод Зейделя

Для описування методу використовуємо запис системи у вигляді формули (4.5)

$$AX = b .$$

Припустимо, що у матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ всі діагональні елементи відмінні від нуля, тобто $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Якщо i -те рівняння розділити на a_{ii} , а потім всі невідомі, крім x_i , перенести праворуч, отримаємо систему, еквівалентну системі (4.5), записану у вигляді

$$X = cX + d , \quad (4.12)$$

де

$$c = (c_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{при } j \neq i, \\ 0 & \text{при } j = i; \end{cases} \quad (4.13)$$

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n), \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} . \quad (4.14)$$

Метод Зейделя полягає в тому, що

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.15)$$

тобто для знаходження k -го наближення невідомого x_i відразу використовуються вже знайдені компоненти наближення з меншими ніж k номерами.

Наведемо тут лише формулювання теореми про достатні умови збіжності методу Зейделя.

Теорема. Для існування єдиного розв'язку системи (4.5) і збіжності методу досить виконання однієї з умов:

1) (4.8);

2) матриця A — симетрична (додатно визначена), тобто всі її власні числа додатні.

Приклад. Розв'язати методом Зейделя систему (4.10), звівши її до вигляду (4.11).

Розв'язання. Як і в попередньому пункті, за нульове наближення приймаємо значення відповідних вільних членів:

$$x_1^{(0)} = 1,15; \quad x_2^{(0)} = 1,3; \quad x_3^{(0)} = 0,8 .$$

Перше наближення:

$$x_1^{(1)} = -0,05x_2^{(0)} - 0,05x_3^{(0)} + 1,15 = -0,05 \cdot 1,15 - 0,05 \cdot 0,8 + 1,15 = 1,0525 ;$$

$$x_2^{(1)} = 0,1x_1^{(1)} - 0,6x_3^{(0)} + 1,3 = 0,1 \cdot 1,0525 + 0,6 \cdot 0,8 + 1,3 = 1,8853 ;$$

$$x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(1)} + 0,2x_2^{(1)} + 0,8 = -0,2 \cdot 1,0525 + 0,2 \cdot 1,8853 + 0,8 = 0,96655 .$$

Друге наближення:

$$x_1^{(2)} = -0,05x_2^{(1)} - 0,05x_3^{(1)} + 1,15 = -0,05 \cdot 1,8853 - 0,05 \cdot 0,96655 + 1,15 = 1,00740 ;$$

$$x_2^{(2)} = 0,1x_1^{(2)} + 0,6x_3^{(1)} + 1,3 = 0,1 \cdot 1,00740 + 0,6 \cdot 0,96655 + 1,3 = 1,98067 ;$$

$$x_3^{(2)} = -0,2x_1^{(2)} + 0,2x_2^{(2)} + 0,8 = -0,2 \cdot 1,00740 + 0,2 \cdot 1,98067 + 0,8 = 0,99465 .$$

Результати другого наближення методом Зейделя практично збігаються зі значеннями невідомих, отриманими методом простої ітерації в третьому наближенні.

ВПРАВА. Методами простої ітерації і Зейделя розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 10x_4 + 144 = 0; \\ 2x_1 + 0,5x_3 + 19,5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 3 = 0; \\ 0,8x_1 + 5,6x_2 + x_4 + 26 = 0. \end{cases}$$

Заздалегідь необхідно провести аналіз виконання умови збіжності. За розв'язок прийняти результати $(k+1)$ -го наближення для того значення k , при якому $\delta_i^{(k)} \leq 0,05$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Обчислення виконувати з точністю до п'яти значущих цифр. Відповідь. $x_1 = 2$; $x_2 = 1,7526$; $x_3 = 10,215$; $x_4 = -4,0217$.

4.4. Метод прогону

Метод застосовується і використовується для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь спеціального вигляду

$$A_j Z_{j-1} - C_j Z_j + B_j Z_{j+1} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.16)$$

$$Z_0 = \mu_0 Z_1 + \nu_0, \quad Z_N = \mu_N Z_{N-1} + \nu_N, \quad (4.17)$$

де Z_0, Z_1, \dots, Z_N — невідомі; $A_j, B_j, C_j, F_j, \nu_j, \mu_i$ — задані числа. При цьому

$$|C_j| \geq |A_j| + |B_j| \geq |A_j| > 0; \quad |\mu_0| < 1; \quad |\mu_N| < 1. \quad (4.18)$$

Систему (4.16) можна записати в матричній формі

$$AZ = b,$$

де $Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_N)$; $b = (\nu_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}, \nu_N)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \mu_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_1 - C_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 - C_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 - C_3 & B_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} - C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Як видно з (4.19), матриця A , так звана тридіагональна матриця, тобто всі її елементи, що лежать на головній діагоналі і на сусідніх ліворуч і праворуч, не дорівнюють нулю, інші елементи матриці дорівнюють нулю. Це пов'язано з тим, що в рівняння (4.16), (4.17) входять невідомі з номерами, відмінними від номера рівняння не більш ніж на одиницю. Якщо врахувати ще і умови (4.18), то матриця A є матрицею з діагональним переважанням.

Система (4.16) називається різницевою рівнянням другого порядку, а умови (4.17) — крайовими (граничними) умовами для різницевого рівняння. Наведені назви пов'язані з розв'язанням диференціальних рівнянь з частинними похідними, наближене розв'язання яких розглянуте нижче.

Методом прогону користуються таким чином. З (4.17) $Z_0 = \mu_0 Z_1 + \nu_0$ підставляємо в рівняння (4.16) для $j = 1$:

$$\begin{aligned} A_1 Z_0 - C_1 Z_1 + B_1 Z_2 &= F_1; \\ A_1(\mu_0 Z_1 + \nu_0) - C_1 Z_1 + B_1 Z_2 &= F_1; \\ (A_1 \mu_0 - C_1) Z_1 + A_1 \nu_0 + B_1 Z_2 &= F_1; \\ Z_1 &= \mu_1 Z_2 + \nu_1, \end{aligned} \quad (4.20)$$

де

$$\mu_1 = \frac{B_1}{C_1 - A_1 \mu_0}; \quad \nu_1 = \frac{A_1 \nu_0 - F_1}{C_1 - A_1 \mu_0}.$$

Отриманий вираз для Z_1 підставляємо в рівняння (4.16) для $j = 2$. В результаті знайдемо зв'язок між Z_2 і Z_3 :

$$Z_2 = \mu_2 Z_3 + \nu_2$$

і т. д. до отримання рівняння зв'язку

$$Z_{k-1} = \mu_{k-1} Z_k + \nu_{k-1}, \quad k < N-1,$$

або

$$Z_k = \mu_k Z_{k+1} + \nu_k, \quad (4.21)$$

де

$$\mu_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \mu_{k-1}}; \quad \nu_k = \frac{A_k \nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \mu_{k-1}}. \quad (4.22)$$

Підставляючи в (4.21) замість k $N-1$, знайдемо

$$Z_{N-1} = \mu_{N-1} Z_N + \nu_{N-1}. \quad (4.23)$$

Останнє підставимо в друге рівняння (4.17) $Z_N = \mu_N Z_{N-1} + \nu_N$ і отримаємо

$$\begin{aligned} Z_N &= \mu_N (\mu_{N-1} Z_N + \nu_{N-1}) + \nu_N, \\ Z_N &= \frac{\nu_N + \mu_N \nu_{N-1}}{1 - \mu_N \mu_{N-1}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Тепер виконуємо дії в зворотному порядку. За (4.23) знаходимо Z_{N-1} , за (4.22) — μ_k, ν_k , а за (4.21) — всі Z_k .

Метод отримання рівнянь зв'язку типу (4.21) називається прямим ходом прогону, а визначення Z_N, Z_{N-1}, \dots, Z_0 — зворотним ходом прогону.

На закінчення зазначимо, існує ще досить велика кількість інших підходів до розв'язання систем лінійних рівнянь, про які ми згадаємо лише побіжно.

До числа таких підходів відноситься **метод ортогоналізації**. Систему (4.5) можна розписати в розгорнутій формі таким чином:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1} = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Якщо ввести вектори $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, a_{i,n+1})$, $i = \overline{1, n}$, і $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$, то систему (4.25) у векторній формі можна записати у вигляді скалярного добутку векторів \bar{a}_i і \bar{x}

$$\bar{a}_i \cdot \bar{x} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.26)$$

З (4.26) випливає, що треба шукати вектор \bar{x} , ортогональний системі векторів \bar{a}_i . Додамо до системи векторів \bar{a}_i , ще $(n+1)$ -й вектор $\bar{a}_{n+1} = (0, 0, \dots, 1)$. Тепер у векторному просторі розмірності $n+1$ треба побудувати деякий ортогональний базис u_1, u_2, \dots, u_k і нормалізувати його. Це і буде розв'язком системи (4.25).

4.5. Метод введення параметра (варіації) розв'язання нелінійних систем скінченних рівнянь

Якщо задана система дозволяє виключити всі невідомі задачі, крім однієї, то можна користуватися методами, розглянутими в п. 4.1.

Якщо задана система містить малі параметри, то можна користуватися методами малого параметра розв'язання системи. Однак і в цьому випадку невідомі треба відокремити або отримати рівняння, в яких міститься тільки одне невідоме. Відокремлюємо невідомі за **методом введення в рівняння параметра і його зміни** (варіації).

1. Викладення методу почнемо з системи двох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Відшукаємо дійсні корені системи. Будемо розглядати невідомі x і y як незалежні змінні. Це дозволить будь-яку із змінних, наприклад y , розглядати як параметр p , тобто покласти $y = p$. Вважаючи параметр p невідомим, систему (4.27) запишемо

$$\begin{cases} f_1(x, p) = 0; \\ f_2(x, p) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Розв'язуючи рівняння, отримаємо два значення невідомого x у функції від p . З першого рівняння $x_I^{(0)} = x_I(p)$, а з другого $x_{II}^{(0)} = x_{II}(p)$.

Тепер вводим так звану нев'язку

$$\delta^*(p) = x_I(p) - x_{II}(p). \quad (4.29)$$

Прирівнюючи нев'язку до нуля, запишемо

$$\delta^*(p) = x_I(p) - x_{II}(p) = 0, \quad (4.30)$$

отримали ще одне рівняння з невідомим $p = y$.

Розв'язуючи останнє рівняння з одним невідомим, отримаємо розв'язок системи. Іншими словами, введенням нев'язки систему зв'язних рівнянь (4.27) звели до системи трьох незв'язних рівнянь, що містять тільки одне невідоме.

2. Розглянемо випадок трьох нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0; \\ f_2(x, y, z) = 0; \\ f_3(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Введемо параметр, наприклад $z = q$. Тоді система (4.31) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f_1(x, y, q) = 0; \\ f_2(x, y, q) = 0; \\ f_3(x, y, q) = 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

тобто задачу звели до розв'язання системи двох рівнянь. Знаходимо розв'язки системи (4.32)

$$x^{(0)} = x^{(0)}(q); y^{(0)} = y^{(0)}(q).$$

Ці розв'язки підставимо в третє рівняння

$$f_3(z, x^{(0)}(q), y^{(0)}(q)) = 0. \quad (4.33)$$

Корінь рівняння (4.33) буде також залежати тільки від параметра q : $z^{(0)} = z^{(0)}(q)$. Тепер введемо нев'язку $\delta_1^*(q) = q - z^{(0)}(q)$ і прирівняємо її до нуля

$$\delta_1^*(q) = q - z^{(0)}(q) = 0. \quad (4.34)$$

Звідси знаходимо $z = z^{(0)}(q)$. Цей розв'язок буде, очевидно, задовольняти систему (4.31). Укажемо, що для розв'язання системи (4.32) можна ввести ще один параметр, наприклад, $y = p$. Підставивши в перше рівняння системи (4.32) $y = p$, отримаємо рівняння з одним невідомим

$$f_1(x, p, q) = 0. \quad (4.35)$$

Розв'язки цього рівняння позначимо $x^{(0)} = x^{(0)}(p, q)$ і підставимо у друге рівняння

$$f_2(y, x^{(0)}, z^{(0)}) = 0. \quad (4.36)$$

З цього рівняння знаходимо $y^{(0)} = y^{(0)}(p, q)$. Тепер вводимо другу нев'язку $\delta_2^*(p, q)$ і прирівнюємо її до нуля

$$\delta_2^*(p, q) = p - y^{(0)}(p, q) = 0. \quad (4.37)$$

Звідси знаходимо $y^{(0)} = y^{(0)}(p, q)$.

Викладене вказує на можливість перенесення методу на випадок, якщо система містить n нелінійних скінченних рівнянь.

Приклад. Знайти з п'ятьма десятковими знаками всі дійсні корені системи

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 y - 2z + 5 = 0; \\ f_2(x, y, z) = x^4 + y - z = 0; \\ f_3(x, y, z) = xz - y + 3 = 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Розв'язання. Вводимо параметр $x = p$, вносимо його в перші два рівняння

$$\begin{cases} p^2 y - 2z + 5 = 0; \\ p^4 + y - z = 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Отримуємо лінійну відносно y і z систему. Розв'яжемо її відносно y і z :

$$y^{(0)} = \frac{2p^4 - 5}{p^2 - 2}; z^{(0)} = \frac{p^6 - 5}{p^2 - 2}. \quad (4.40)$$

Підставимо ці корені в третє рівняння системи (4.38), маємо

$$x^{(0)} = \frac{y^{(0)} - 3}{z^{(0)}} = \frac{2p^4 - 3p^2 - 1}{p^6 - 5}. \quad (4.41)$$

Введемо нев'язку

$$\delta(p) = p - x^{(0)}(p) \quad (4.42)$$

і прирівняємо її до нуля. Отримаємо розв'язувальне рівняння

$$\delta(p) = \frac{p^7 - 2p^4 + 3p^2 - 5p - 1}{p^6 - 5} = 0. \quad (4.43)$$

Нам залишилися розв'язати рівняння з одним невідомим. Методи розв'язання описані в п. 4.1.

Знайдемо корені рівняння (4.43) побудовою графіка $\delta(p)$ і наданням p різних значень. Для цього знайдемо

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \delta(p) = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{p - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^4} - \frac{5}{p^5} - \frac{1}{p^6}}{1 - \frac{5}{p}} = p,$$

що означає, бісектриси першого і третього координатних кутів є асимптотами функції. Асимптотами також є вертикальні прямі, що знаходяться з рівняння $p^6 - 5 = 0$ або $p = \pm\sqrt[6]{5} = \pm 1,3076605$.

Побудувавши графік функції, можна виявити, що у функції $\delta(p)$ є три нулі. З

(4.42) знайдемо $x^{(0)}(p)$:

$$p_1 = x_1^{(0)} = -1,25936; p_2 = x_2^{(0)} = -0,18081; p_3 = x_3^{(0)} = +1,37700.$$

За формулами (4.40) знаходимо $y^{(0)}$ і $z^{(0)}$.

Описана тут методика розв'язання систем нелінійних рівнянь взята з «Довідника з вищої математики» П. Ф. Фільчакова. — Київ, Наук. думка. — 1972.

§ 5. Формули числового диференціювання

Задача числового диференціювання є некоректно поставленою задачею. Задача називається коректно поставленою, якщо виконані три умови:

- 1) розв'язок існує;
- 2) розв'язок єдиний;
- 3) розв'язок стійкий.

Пояснимо останнє. Розв'язується задача $y = A(x)$. Нехай у x з'явилася помилка δx , тоді і y має помилку δy , яка дорівнює

$$\delta y = A(x + \delta x) - A(x).$$

Якщо при $\|\delta(x)\| < \mu$, $\|\delta(y)\| < \epsilon$, де μ, ϵ — малі, то задача називається стійкою за вхідними даними. В іншому випадку — нестійка. Задача називається некоректно поставленою, якщо її розв'язок нестійкий, тобто при малій зміні вхідних даних (початкових умов) δx значення δy велике.

Наприклад, наближене значення функції $y(x)$ дорівнює

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \frac{1}{n} \sin n^2 x;$$

$$\tilde{y}'(x) = y'(x) + n \cos n^2 x.$$

Тоді $\Delta y'(x) = n \cos n^2 x$. При малій зміні δx $\Delta y'$ за рахунок вибору n можна зробити і не малим. Тому при використанні формул числового диференціювання, що пропонуються нижче, факт некоректності повинен враховуватися.

Задачу числового диференціювання доводиться вирішувати в тих випадках, коли функція задана таблично, або ж коли функціональна залежність між незалежною змінною і функцією має складний аналітичний вираз. У першому випадку методи диференціювання, розглянуті в ч. 1, гл. 4, просто незастосовні, а у другому — їхнє використання пов'язане зі значними труднощами.

Ідея числового диференціювання заснована на заміні функції $f(x)$ інтерполяційною функцією $\varphi(x; a)$ і допущенні, що похідні від $f(x)$ приблизно дорівнюють похідним від $\varphi(x; a)$:

$$f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x; a), \quad k = \overline{1, n}.$$

Якщо ввести похибку інтерполювання $R(x; a)$, тобто

$$f(x) = \varphi(x; a) + R(x; a), \quad (5.1)$$

то для похідної маємо

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x; a) + R^{(k)}(x; a).$$

Вибираючи відповідним чином в (5.1) значення a для $R(x; a)$, а також інтерполяційні функції, можна отримати потрібну точність процесу числового диференціювання. У даному параграфі розглянемо випадок, коли для числового диференціювання функції $f(x)$ при рівновіддалених вузлах використовується інтерполяційний многочлен Лагранжа (3.10), в якому C_n^i замінимо його значенням.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{1}{i!(n-i)!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} f(x_i), \quad (5.2)$$

де

$$t = \frac{x - x_0}{h}. \quad (5.3)$$

Формула (5.2) зручна тим, що множники $(-1)^{n-i} \frac{1}{i!(n-i)!}$ не залежать від координат вузлів інтерполювання і можуть обчислюватися один раз з подальшим застосуванням для розв'язання різних задач.

Многочлен (5.2) при $x = x_0, \dots, x = x_n$ дорівнює заданій функції $f(x)$, а її похідну можна виразити наближено:

$$f'(x) \approx L_n'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{1}{i!(n-i)!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} f(x_i) \right). \quad (5.4)$$

Оскільки

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}, \quad (5.5)$$

то формулу (5.4) можна записати у вигляді

$$f'(x) \approx \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{f(x_i)}{i!(n-i)!} \frac{d}{dt} \left(\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right). \quad (5.6)$$

Керуючись такими самими міркуваннями, можна виразити і похідні більш високих порядків від функції $f(x)$.

Нехай відома функція $R_n(x)$, що визначає похибку наближеного вираження функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом $L_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x). \quad (5.7)$$

Похибку $L_n(x)$ наближеного виразу $f^{(i)}(x)$ функції $f(x)$ похідної інтерполяційного многочлена $L_n(x)$ можна виразити відповідно до (5.7):

$$r_n(x) = f'(x) - L_n'(x) = R_n'(x). \quad (5.8)$$

Функція $R_n(x)$ згідно з формулою (3.14) має вигляд

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad (5.9)$$

де ξ — проміжне значення між заданими величинами x_0, x_1, \dots, x_n .

Звідси

$$\begin{aligned} r_n(x) = R_n'(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)] = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} Q(x) \end{aligned} \quad (5.10)$$

і

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{d}{dx} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n)] = \\ &= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\dots \\ &\dots(x-x_i)\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots \\ &\dots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_i)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Вираз (5.11) є сума n доданків, кожний з яких є добуток $n-1$ співмножників. При $x = x_i$ всі доданки в (5.11) обертаються в нуль, крім доданку, в якому немає множника $x - x_i$. Таким чином,

$$Q(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n). \quad (5.12)$$

У разі рівновіддалених вузлів

$$x_i - x_{i-1} = h, \quad i = \overline{1, n},$$

звідки $x_i = x_0 + ih$, можна записати

$$\begin{aligned} Q(x_i) &= (x_0 + ih - x_0)(x_0 + ih - x_0 - h)\dots h(-h)\dots(x_0 + ih - x_0 - nh) = \\ &= iht(i-1)\dots h(-h)\dots h(i-n) = h^n i(i-1)\dots 1 \cdot (-1)\dots (-1)(n-i) = \\ &= h^n (-1)^{n-i} (i(i-1)(i-2)\dots 2 \cdot 1)(1 \cdot 2 \dots (n-(i+1))(n-i)) = \\ &= h^n (-1)^{n-i} i!(n-i)!. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тоді

$$r_n(x_i) = R_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} Q(x_i).$$

Це оцінка помилки в похідній $f'(x)$ з урахуванням (5.13) у рівновіддалених вузлах

$$r_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

де ξ — проміжне значення між x_0, x_1, \dots, x_n .

Якщо

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|,$$

то дістанемо верхню оцінку абсолютної помилки числового диференціювання (першої похідної) у вузлах

$$|r_n(x_i)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^n i!(n-i)!$$

§ 6. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Зауважимо, що задача числового інтегрування $I = \int_0^1 f(x) dx$ є коректно поставленою задачею. Дійсно, замінимо $f(x)$ її наближеним значенням $\bar{f}(x)$.

Введемо $\bar{I} = \int_0^1 \bar{f}(x) dx$, тоді можна ввести дві різниці (нев'язки)

$$\delta f = f(x) - \bar{f}(x) \quad \text{і} \quad \delta I = I(x) - \bar{I}(x) = \int_0^1 \delta f dx, \quad 0 < x < 1. \quad \text{Звідси}$$

$|\delta I| \leq \max |\delta f(x)|$, і якщо $|\delta f(x)| < \mu$, то $|\delta I| < \epsilon$, $0 < x < 1$, тобто задача коректна. Оскільки відома можливість відображення сегмента $[a; b]$ в $[0; 1]$, то коректність забезпечена для будь-якого $[a; b]$, де $a < b < \infty$.

Якщо в інтервалі $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ $f(x)$ задана у вигляді таблиці або відноситься до так званих інтегралів, що не беруться, то для обчислення інтеграла $f(x)$ замінюють наближено якимсь інтерполяційним многочленом. У результаті одержимо формули для обчислення інтеграла, які отримали назву **квадратурних формул**.

6.1. Постановка задачі числового інтегрування

Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$F = \int_a^b f(x) p(x) dx, \quad (6.1)$$

де $p(x) > 0$ для $x \in [a; b]$, $a < b$, $f(x)$ — неперервна на $[a; b]$. Функція $p(x)$ називається **ваговою функцією**.

Якщо покласти $f(x)$ такою, що дорівнює деякому інтерполяційному многочлену, коефіцієнтами якого є значення функції у вузлах x_0, x_1, \dots, x_n , тобто $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, а апроксимуючими функціями є функції $\varphi_i(x)$, то

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x) + r(x), \quad (6.2)$$

де $r(x)$ — залишковий член апроксимації.

Підставимо (6.2) в (6.1), отримаємо узагальнену квадратурну формулу

$$F = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + R, \quad (6.3)$$

де c_i — вага, $c_i = \int_a^b \varphi_i(x) p(x) dx$; R — залишковий член формули або

похибка, $R = \int_a^b r(x) p(x) dx$.

6.2. Формули трапецій, прямокутників, Сімпсона наближеного обчислення інтегралів

Розглянемо обчислення інтеграла (6.1), коли $p(x) = 1$, тобто

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i).$$

Якщо на відрізку $[a; b]$ замінити $f(x)$ многочленом Лагранжа першого степеня з вузлами $x_0 = a$, $x_1 = b$, то шуканий інтеграл замінюється площею трапеції:

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]. \quad (6.4)$$

Знайдемо похибку формули (6.4). Як видно з (6.3), похибка є різниця між точним значенням інтеграла і його наближеним значенням,

$$\text{тобто } R = \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]. \quad (6.5)$$

Для оцінки похибки розвинемо функцію $f(x)$ в ряд Тейлора, прийнявши за x_0 середину відрізка $[a; b]$: $x_0 = \frac{b+a}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Підставивши (6.6) в (6.5), отримаємо

$$\begin{aligned} R &= \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] = \int_a^b f(x_0) dx + \\ &+ \int_a^b \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) dx + \int_a^b \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 dx + \dots \\ &\dots - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a) \cong -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(x_0). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$R \approx -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(x_0). \quad (6.7)$$

Якщо довжина відрізка $b - a$ досить велика, то відрізок можна розділити точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ на сітку з різними кроками і до кожного кроку застосувати формулу (6.4). Отримаємо узагальнену формулу трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})(f_{i-1} + f_i);$$

$$R \approx -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i), \quad (6.8)$$

де $f_i = f(x_i)$; $f_{i-1} = f(x_{i-1})$; $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

Якщо сітка рівномірна, тобто кожний крок один і той самий h , то

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right); \quad (6.9)$$

$$R \approx -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n h^3 f''(\bar{x}_i) \approx -\frac{1}{12} h^2 \int_a^b f''(x) dx, \quad (6.10)$$

$$h = x_i - x_{i-1} = \text{const.}$$

Для оцінок R виду (6.7), (6.10) потрібна неперервність $f''(x)$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Якщо $f''(x)$ кусково-неперервна, то для R можна написати лише таку оцінку

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2; \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (6.11)$$

Звернемося до формули прямокутників або формули середніх. Нехай

$$F = \int_a^b f(x) dx.$$

Припустимо $f(x)$ неперервна для $x \in [a; b]$. Тоді справедлива теорема про середнє (див. ч. 1, гл. 6, § 5): $F = f(\xi)(b - a)$.

Прийmemo за $\xi = \frac{1}{2}(a + b) = \bar{x}_0$. Тоді

$$F = \int_a^b f(x) dx \approx (b - a) f(\bar{x}_0), \quad (6.12)$$

а

$$R = \int_a^b f(x) dx - (b - a) f(\bar{x}_0). \quad (6.13)$$

Підставивши (6.6) в (6.13), наближено знайдемо

$$R \approx \frac{1}{24} (b - a)^3 f''(\bar{x}_0). \quad (6.14)$$

Для поліпшення точності на сегмент $[a; b]$ накладається сітка $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$. Застосовуючи до кожного з сегментів $[x_{i-1}, x_i]$ формулу (6.12), отримаємо узагальнену формулу середніх

$$F = \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right); \quad R \approx \frac{1}{24} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^3 f''(\bar{x}_i). \quad (6.15)$$

Помітимо, що залишковий член формули середніх приблизно вдвічі менший, ніж у формулі трапецій. Тому, якщо є можливість знайти середній вузол \bar{x}_i , то потрібно користуватися формулою середніх (прямокутників). Формулою трапецій користуються тоді, коли відомі значення функції тільки у вузлах сітки.

Якщо ведеться розрахунок за формулами трапецій і прямокутників, то більш точне значення інтеграла лежить у вилці між значеннями цих розрахунків. Розподіл цієї різниці 2:1 відповідає розрахунку за формулою парабол або Сімпсона. Тому тут не будемо розглядати формулу Сімпсона (її наведено в Ч.1. гл. 6. п.13.3).

6.3. Квадратурна формула Гаусса

Розглядаючи квадратурну формулу (6.3), можна відзначити, що в формулі є $2n$ параметрів-ваг c_i , $i = \overline{1, n}$, і вузлів x_i , $i = \overline{1, n}$, тобто $2n$ параметрів. Якщо взяти многочлен степеня $2n - 1$, то число па-

раметрів многочлена також буде $2n$. Значить, параметри квадратурної формули c_i, x_i можна підібрати так, щоб квадратурна формула

$$F = \int_a^b f(x)p(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (6.16)$$

була точна для будь-якого многочлена максимального степеня не вище $2n-1$.

Максимальний степінь многочлена менше $2n$, оскільки при будь-якому виборі вузлів x_i і ваг c_i многочлен $p_{2n}(x) = (x-x_1)^2 \times \dots \times (x-x_n)^2$ має властивість

$$\int_a^b p_{2n}(x)dx > 0, \text{ але } \sum_{i=1}^n c_i p_{2n}(x_i) = 0.$$

Оскільки за умовою вага $p(x) > 0$ і неперервна на $(a; b)$, то існує $\int_a^b p(x)dx$. При виконанні цих умов існує повна система алгебраїчних

многочленів $p_m(x)$, ортогональних на $[a; b]$, з вагою $p(x)$, тобто

$$\int_a^b p_k(x)p_m(x)p(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq k; \\ \int_a^b p_k^2(x)dx, & \text{якщо } m = k. \end{cases}$$

За многочлен $p_m(x)$ можна взяти многочлени Лежандра (див. гл. 3, п. 4.2). Всі нулі цих многочленів дійсні і розташовані на $(a; b)$. Тепер за вузли в (6.16) можна взяти нулі многочленів $p_m(x)$, ортогональних з вагою $p(x)$. Для визначення ваги потрібно вибрати многочлен степеня $n-1$ таким чином, щоб, наприклад, для стандартного відрізка $[-1; 1]$ було справедливо

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) dt = \sum_{i=1}^n a_i F(t_i),$$

де

$$F(t_j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t_j^i,$$

тут i — число вузлів, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

У загальному випадку

$$c_i = \int_a^b \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2}{(x_i-x_1)^2 \dots (x_i-x_k)^2 \dots (x_i-x_n)^2} p(x)dx, \quad (6.17)$$

де в знаменнику $i \neq k$.

Формула (6.3), в якій за вузли вибрані нулі ортогональних на $(a; b)$ з вагою $p(x)$ поліномів, а за вагу прийнято (6.17), називається **формулою Гаусса**.

6.4. Метод випадкових випробувань (Монте-Карло)

1. Визначення невідомої величини. Метод полягає в проведенні незалежних однаково розподілених випадкових випробувань x_1, \dots, x_n таким чином, щоб математичне сподівання $M[X]$ дорівнювало невідомій величині a

$$M[X] = a. \quad (6.18)$$

За наближення a беруть середнє (якщо випробування ведуться без повторення):

$$X = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n x_i,$$

тоді

$$M[X] = \frac{1}{h} M \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{na}{n} = a.$$

Якщо випробування поставлені добре, то вони підкоряються нормальному закону. Тоді за правилом трьох сигм

$$|a - X| < 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (6.19)$$

тобто випробування виконуються з імовірністю, близькою до одиниці.

2. Перший спосіб обчислення визначених інтегралів. Для обчислення інтеграла

$$\int_0^1 f(x)dx \quad (6.20)$$

відшуковують на відрізку $[0; 1]$ рівномірно розподілену випадкову величину ξ , з густиною

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Тоді $\eta = f(\xi)$ також буде випадковою величиною. Будемо вважати, що η має таку саму густину $p(x)$. Тоді

$$M[\eta] = \int_0^1 f(x)p(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = I,$$

а

$$I \approx \bar{\eta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad (6.21)$$

де ξ_i — можливі значення випадкової величини ξ .

Середнє квадратичне відхилення оцінюють звичайно за виправленою дисперсією, а похибку $I - \bar{\eta}_i$ за формулою (6.19),

Зауваження. Інтеграл (6.20) може бути і невласним. Для застосування методу в цьому випадку необхідне існування інтеграла $\int_0^1 f^2(x)dx$. Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ зводиться до інтеграла $\int_0^1 f(x)dx$ лінійною

заміною $u = \frac{x-a}{b-a}$.

3. Другий спосіб обчислення інтеграла (6.20). Обчислити наближено

$$I = \int_0^1 f(x)dx, \quad (6.22)$$

де $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Для розв'язання цієї задачі побудуємо графік функції $y = f(x)$, $x \in [0; 1]$, і значення функції помістимо також в $[0; 1]$. Отримаємо

квадрат. Величина $\int_0^1 f(x)dx$ займає частину площі квадрата

(рис. 8.1). Побудуємо двовимірну випадкову величину $X(x, y)$, можливі значення якої позначимо x_i, y_i . Вважатимемо, що x, y в $[0; 1]$ розподілені рівномірно.

Будемо кидати точку $M_i(x_i, y_i)$ в одиничний квадрат і перевіряти, які з точок M_i потрапили в заштриховану область, а які ні. Знайдемо число влучень у заштриховану область. Позначимо це число m . Нехай загальне число кидань n . При великих m і n отримаємо статистичну ймовірність попадань у заштриховану область

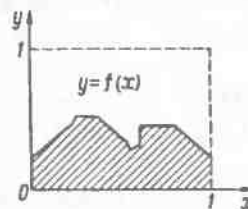


Рис. 8.1

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \quad (6.23)$$

де A — подія, яка полягає у влученні в заштриховану область.

З іншого боку, геометрична ймовірність $P(A)$ влучень у заштриховану область дорівнює відношенню площі S цієї області до площі квадрата, тобто

$$P(A) = \frac{S}{1}, \quad (S < 1).$$

Але площа області $S = I$, тому

$$P(A) = \frac{I}{1}, \quad (I < 1). \quad (6.24)$$

Приймаючи $P(A) \cong P^*(A)$, отримуємо наближену формулу для обчислення інтеграла

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{m}{n}. \quad (6.25)$$

Відзначимо, що обчислення за формулою (6.25) можна виконувати і на обчислювальній машині. Для розрахунків за методом Монте-Карло необхідно мати послідовності випадкових чисел з різною густиною ймовірності $p(x)$. Будь-яку таку послідовність можна отримати з послідовності рівномірно розподілених чисел в інтервалі $(0; 1)$.

Існує три способи відшукування таких чисел: таблиці випадкових чисел, генератори випадкових чисел і метод псевдовипадкових чисел.

Таблицею випадкових чисел називають таблицю, що містить цифри, які чергуються у випадковому порядку 0, 1, 2, ..., 9. Випадковість тут гарантується використанням методу випадкової вибірки з поверненням з 10 цифр по одній цифрі. Таблицю випадкових чисел звичайно вводять в ЕОМ.

Спосіб генераторів випадкових чисел базується на використанні шумів. Якщо останні перевищили заданий рівень шуму парне число разів за певний проміжок часу, то цій події приписується нуль, а якщо непарне, то — одиниця. При паралельній роботі m генераторів в комірці цифрової машини вийде одне m -розрядне двійкове число, яке дає досить точне наближення до значення рівномірно розподіленої випадкової величини.

Суть методу псевдовипадкових чисел покажемо на прикладі методу, запропонованого Нейманом. Беруть довільне число і підносять його до квадрату. В отриманому результаті відкидають цифри з обох кінців. Цифри, що залишилися, утворюють послідовність випадкових чисел. Наприклад:

$$\begin{aligned} R_0 &= 0,2061; & R_0^2 &= 0,04|2477|21; \\ R_1 &= 0,2477; & R_1^2 &= 0,06|1355|29; \\ R_2 &= 0,1355; & R_2^2 &= 0,01|8360|25 \text{ і т. д.} \end{aligned}$$

Числа 2477, 1355, 8360 утворюють рівномірно розподілену послідовність випадкових чисел в сегменті $[0; 10\ 000]$.

Процедура отримання псевдовипадкових чисел легко реалізується на ЕОМ.

§ 7. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нагадаємо, в гл. 1, п. 1.4 і п. 1.5 розглянуто методи ізоклін і ламаних Ейлера наближеного розв'язання задачі Коші для рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (7.1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (7.2)$$

7.1. Метод Рунге—Кутта розв'язання задачі Коші (7.1)—(7.2)

Метод Рунге—Кутта є більш точним способом розв'язання задачі Коші (7.1)—(7.2). Тут розв'язання y_{i+1} за відомим розв'язком y_i визначається при $x = x_i$, $h = x_{i+1} - x_i$ формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (7.3)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \frac{1}{6} (T_1^{(i)} + 2T_2^{(i)} + 2T_3^{(i)} + T_4^{(i)}); \\ \begin{cases} T_1^{(i)} = hf(x_i, y_i); \\ T_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{T_1^{(i)}}{2}\right); \\ T_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{T_2^{(i)}}{2}\right); \\ T_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + T_3^{(i)}\right). \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Якщо $f(x, y)$ в (7.1) має неперервні похідні до п'ятого порядку, то похибка методу на кожному кроці є величина порядку h^5 .

Розроблені численні модифікації викладеного методу. Особливо відзначимо метод послідовних наближень, розглянутий в гл. 3, п. 6.4.

7.2. Методи розв'язання крайової задачі лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

Раніше подібна задача була розглянута в гл. 3, п. 6.5. Сформулюємо більш загальну задачу.

Потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (7.6)$$

що задовольняє дві крайові умови

Цю умову можна записати детальніше:

$$\begin{cases} a_1(L\varphi_1 \cdot L\varphi_1) + a_2(L\varphi_2 \cdot L\varphi_1) + \dots + a_n(L\varphi_n \cdot L\varphi_1) = \\ \quad = (f - L\varphi_0) \cdot L\varphi_1; \\ a_1(L\varphi_1 \cdot L\varphi_2) + a_2(L\varphi_2 \cdot L\varphi_2) + \dots + a_n(L\varphi_n \cdot L\varphi_2) = \\ \quad = (f - L\varphi_0) \cdot L\varphi_2; \\ \dots \\ a_1(L\varphi_1 \cdot L\varphi_n) + a_2(L\varphi_2 \cdot L\varphi_n) + \dots + a_n(L\varphi_n \cdot L\varphi_n) = \\ \quad = (f - L\varphi_0) \cdot L\varphi_n, \end{cases} \quad (7.12)$$

де $(L\varphi_i \cdot L\varphi_j) = \int_a^b L\varphi_i \cdot L\varphi_j dx$ — скалярний добуток.

Якщо визначник Грама (див. ч. 1, гл. 1, п. 2.17), тут це основний визначник системи (7.12), не рівний нулю, то система функцій $L\varphi_1, L\varphi_2, \dots, L\varphi_n$ є лінійно незалежною на $[a; b]$. Система (7.10) в цьому випадку має єдиний розв'язок a_1, a_2, \dots, a_n . Підставляючи ці розв'язки в (7.8), отримуємо мінімум нев'язки.

3. Дискретний метод найменших квадратів. Тут замість інтеграла (7.11) розглядають скінченну суму

$$\sum_{i=1}^N \psi^2(x_i, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (7.13)$$

де x_i — деякі точки, що належать інтервалу $(a; b)$, $N > n$. Діючи аналогічно до інтегрального випадку методу найменших квадратів, отримуємо систему, аналогічну (7.12), розв'язуючи яку знайдемо a_i ($i = \overline{1, n}$).

4. Метод Б. Г. Гальоркіна (або Бубнова-Гальоркіна). У методі Б. Г. Гальоркіна базисні функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ вибирають з умови їх ортогональності до нев'язки

$$\int_a^b \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.14)$$

Цю умову можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь відносно a_i ($i = \overline{1, n}$):

$$\begin{cases} a_1 L\varphi_1 \cdot \varphi_1 + a_2 L\varphi_2 \cdot \varphi_1 + \dots + a_n L\varphi_n \cdot \varphi_1 = (f - L\varphi_0) \cdot \varphi_1; \\ a_1 L\varphi_1 \cdot \varphi_2 + a_2 L\varphi_2 \cdot \varphi_2 + \dots + a_n L\varphi_n \cdot \varphi_2 = (f - L\varphi_0) \cdot \varphi_2; \\ \dots \\ a_1 L\varphi_1 \cdot \varphi_n + a_2 L\varphi_2 \cdot \varphi_n + \dots + a_n L\varphi_n \cdot \varphi_n = (f - L\varphi_0) \cdot \varphi_n. \end{cases} \quad (7.15)$$

§ 8. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

8.1. Метод скінченних різниць розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо диференційовну функцію $y = f(x)$, $x \in [a_1; b_1]$.

Розіб'ємо $[a_1; b_1]$ на n частин точками. Кожну точку розподілу будемо називати вузлом (рис. 8.2). Суть методу скінченних різниць полягає в заміні неперервних функцій їх значеннями у вузлах. Похідні від функцій, що входять у рівняння, замінюються значеннями різниць функцій, обчислених у вузлах. Так, наприклад, похідну від функції $y = f(x)$ у вузлі k (рис. 8.3) можна наближено визначити за такими формулами:

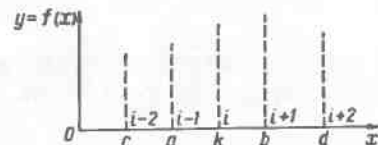


Рис. 8.2

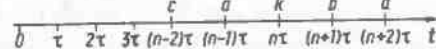


Рис. 8.3

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_k = \frac{y_k - y_a}{h_{ak}}, \quad (8.1)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_k = \frac{y_b - y_k}{h_{kb}}, \quad (8.2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_k = \frac{y_b - y_a}{h_{ak} + h_{kb}}. \quad (8.3)$$

Вирази $(y_k - y_a)$, $(y_b - y_k)$, $(y_b - y_a)$ називаються різницями, відповідно лівою, правою односторонніми і центральною.

Якщо $h_{ak} = h_{kb} = h$, то формули (8.1)–(8.3) запишуться у вигляді

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_k \approx \frac{y_k - y_a}{h}; \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_k \approx \frac{y_b - y_k}{h}; \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_k \approx \frac{y_b - y_a}{2h}. \quad (8.4)$$

Оскільки точці k відповідає i -поділлка $[a_1; b_1]$, а іншим точкам $a: i-1, c: i-2, b: i+1, d: i+2$, то формули (8.1)–(8.3) запишуться

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}; \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \left(\frac{dy}{dx}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (8.5)$$

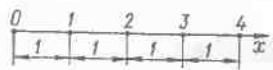


Рис. 8.4

тоді при $y = x$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_k = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{n\tau} \approx \frac{x[n\tau] - x[(n-1)\tau]}{\tau}; \quad (8.6)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_k = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{n\tau} \approx \frac{x[(n+1)\tau] - x[n\tau]}{\tau}; \quad (8.7)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_k = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{n\tau} \approx \frac{x[(n+1)\tau] - x[(n-1)\tau]}{2\tau}. \quad (8.8)$$

Знайдемо вираження других похідних:

1) через центральні різниці

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_k &= \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_k \right] \approx \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b - \left(\frac{dy}{dx}\right)_a}{2h} \approx \\ &\approx \frac{\frac{y_d - y_k}{2h} - \frac{y_k - y_c}{2h}}{2h} = \frac{y_d - 2y_k + y_c}{4h^2} \end{aligned}$$

або

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i = \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{4h^2};$$

2) якщо перші похідні замінити через односторонні різниці, то

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_k \approx \frac{y_k - 2y_a + y_c}{h^2} \text{ або } \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}; \quad (8.9)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \quad (8.10)$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{n\tau} \approx \frac{x[(n+2)\tau] - 2x[(n+1)\tau] + x[n\tau]}{\tau^2}; \quad (8.11)$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{n\tau} \approx \frac{x[(n+1)\tau] - 2x[n\tau] + x[(n-1)\tau]}{\tau^2} \text{ і т. д.} \quad (8.12)$$

Таким чином, одну другу похідну можна записати дев'ятьма способами. Аналогічно можна записати і похідні більш високого порядку через скінченні різниці.

Нехай задане звичайне диференціальне рівняння, визначене на $[a_1, b_1]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин і замінимо в рівнянні всі похідні скінченними різницями, а функцію — значеннями у вузлах. Отримаємо, взагалі кажучи, систему алгебраїчних рівнянь з нескінченним числом невідомих функцій, обчислених у вузлах. Розв'язуючи цю систему, отримаємо наближені значення функції, а значить і розв'язок рівняння. Таким чином, метод скінченних різниць зводить розв'язання звичайних диференціальних рівнянь до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\ddot{x} + k^2x = 0 \quad (8.13)$$

з початковими умовами

$$x(0) = 0 \text{ і } \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (8.14)$$

Розв'язання. Використовуючи формули (8.11) і (8.12), задане рівняння можна записати двома способами:

$$a) \quad x[(n+1)\tau] - 2x[n\tau] + x[(n-1)\tau] + k^2\tau^2x[n\tau] = 0;$$

$$b) \quad x[(n+2)\tau] - 2x[(n+1)\tau] + x[n\tau] + k^2\tau^2x[n\tau] = 0.$$

вважаючи $\dot{x}(0) = \frac{x(\tau) - x(0)}{\tau} = \frac{x(\tau)}{\tau}$, тобто $x(\tau) = \dot{x}(0)\tau$, $n=1$, де τ — малий проміжок часу з початку руху.

Тоді з а)

$$x(2\tau) - 2x(\tau) + x(0) + k^2\tau^2x(\tau) = 0. \quad (8.15)$$

Оскільки $x(\tau) = \dot{x}(0)\tau$; $x(0) = 0$, то з останнього рівняння знайдемо

$$x(2\tau) = 2x(\tau) - k^2\tau^2x(\tau). \quad (8.16)$$

За відомими $x(0)$, $x(\tau)$ і $x(2\tau)$ знайдемо $x(3\tau)$ і т. д.

Аналогічно розв'язується і рівняння б).

Побудувавши наближено розв'язок $x(n\tau)$, отриманий за рівнянням а), побачимо, що він носить коливальний характер, близький до відомого розв'язку рівняння (8.13). Розв'язок, отриманий за рівнянням б), також носить коливальний характер, але з усе зростаючою амплітудою (із зростанням n амплітуда росте як $(1 + k\tau^2)^{n/2}$).

Отже, при виборі скінченної різниці, що замінює другу похідну, треба наперед знати, хоч би якісно, який розв'язок очікується в поставленій задачі.

8.2. Метод сіток. Розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних

Основне значення методу скінченних різниць зберігається і при розв'язуванні задач для багатовимірних областей. У двовимірній області вибираються вузли, які після з'єднання їх відрізками прямої утворюють сітку. Тому метод скінченних різниць, що застосовується для розв'язання двовимірних задач, часто називають ще **методом сіток**. Найбільш широко застосовуються типи сіток з прямокутними і квадратними комірками. Запишемо декілька формул, що виражають похідні функції двох змінних в скінченних різницях для сітки з квадратними комірками і кроком сітки h (рис. 8.5). Аналогічно формулам (8.1), (8.3)

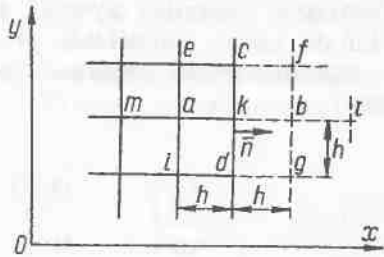


Рис. 8.5

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_k = \frac{u_c - u_d}{2h}; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_k = \frac{u_b - 2u_k + u_a}{h^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_k = \frac{u_c - 2u_k + u_d}{h^2}. \quad (8.17)$$

Отримаємо тепер формулу для змішаної похідної

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_k = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_b - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_a}{2h} =$$

$$= \frac{u_f - u_d}{2h} - \frac{u_e - u_i}{2h} = \frac{u_f - u_d - u_e + u_i}{4h^2}. \quad (8.18)$$

Виразимо також ліву частину рівняння Лапласа (див. гл. 4, п. 2), застосовуючи формулу (8.17):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_b - 2u_k + u_a}{h^2} + \frac{u_c - 2u_k + u_d}{h^2} =$$

$$= \frac{u_b + u_a + u_c + u_d - 4u_k}{h^2}. \quad (8.19)$$

Отже, рівняння Лапласа в формі методу сіток може бути записане таким чином (рис. 8.5):

$$u_a + u_b + u_c + u_d - 4u_k = 0. \quad (8.20)$$

Приклад. Визначити методом сіток функцію $u(x; y)$, що задовольняє рівняння Лапласа в квадраті $(-2h \leq x \leq 2h; 0 \leq y \leq 4h)$ і умови на границі (рис. 8.6):

$$x = \pm 2h; u = 0; y = 0; u = 0;$$

$$y = 4h; -2h \leq x \leq 0; u = 1 + \frac{x}{2h}; \quad (8.21)$$

$$y = 4h; 0 \leq x \leq 2h; u = 1 - \frac{x}{2h}.$$

Розв'язання. Система рівнянь Лапласа методу сіток (8.20) для внутрішніх вузлів 1–9 області (рис. 8.6) записується у вигляді (рекомендуємо скласти ці рівняння самостійно):

$$u_2 + u_{25} + u_{11} + u_4 - 4u_1 = 0; \quad u_3 + u_1 + u_{12} + u_5 - 4u_2 = 0;$$

$$u_{15} + u_2 + u_{13} + u_6 - 4u_3 = 0; \quad u_5 + u_{24} + u_1 + u_7 - 4u_4 = 0;$$

$$u_6 + u_4 + u_2 + u_8 - 4u_5 = 0; \quad u_{16} + u_5 + u_3 + u_9 - 4u_6 = 0; \quad (8.22)$$

$$u_8 + u_{23} + u_4 + u_{21} - 4u_7 = 0; \quad u_9 + u_7 + u_5 + u_{20} - 4u_8 = 0;$$

$$u_{17} + u_8 + u_6 + u_{19} - 4u_9 = 0.$$

Підставимо в рівняння системи (8.22), задані умовами (8.21), значення функції u у вузлах на границі $u_{11} = u_{13} = 0,5$; $u_{21} = 1$; $u_{15} = u_{16} = u_{17} = u_{19} = u_{20} = u_{23} = u_{24} = u_{25} = 0$. Врахуємо також, що внаслідок симетрії відносно осі Oy справедливі рівності $u_3 = u_1$, $u_6 = u_4$, $u_9 = u_7$, а рівняння, записані для вузлів 3, 6, 9, виражають

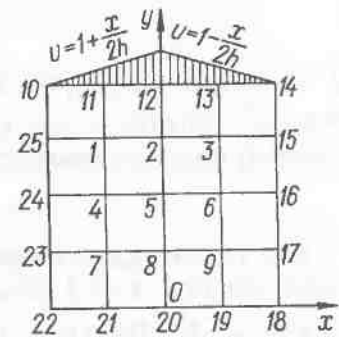


Рис. 8.6

співвідношення, які повністю співпадають зі співвідношеннями, що записуються рівняннями для вузлів 1, 4, 7. Тому одну з цих груп рівнянь потрібно з розгляду виключити.

Вилучивши з розгляду рівняння для вузлів 3, 6, 9, остаточно отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 4u_1 - u_2 - u_4 - 0,5 &= 0; & 2u_1 - 4u_2 + u_5 + 1 &= 0; \\ u_1 - 4u_4 + u_5 + u_7 &= 0; & u_2 + 2u_4 - 4u_5 + u_8 &= 0; \\ u_4 - 4u_7 + u_8 &= 0; & u_5 + 2u_7 - 4u_8 &= 0. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Розв'язками системи (8.23) є значення $u_1 = 0,26340$; $u_2 = 0,42855$; $u_4 = 0,12501$; $u_5 = 0,1875$; $u_7 = 0,04911$; $u_8 = 0,07144$.

Отримані розв'язки, зокрема, можуть виражати характер розподілу температури у вибраних точках пластинки, на границі якої температура постійно виражена умовами (8.21).

§ 9. ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Нехай диференціальне рівняння граничної задачі записане у вигляді

$$Au = f, \quad (9.1)$$

де $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — невідома функція; A — заданий диференціальний оператор, визначений в деякій G -області, а на границі s області G оператор задовольняє деякі додаткові граничні умови

$$L_i u = g. \quad (9.2)$$

Так, наприклад, в задачі Діріхле для тривимірної області G рівняння Лапласа $\Delta u = f$ всюди на границі s задовольняє умову, наприклад $u = 0$ (див. гл. 4, п. 4.7).

Введемо як звичайно скалярний добуток

$$v \cdot w = \int_G v w dG, \quad (9.3)$$

Введення скалярного добутку переводить задачу в простір Гільберта. Оператор A називається самоспряженим, якщо для будь-яких елементів v, w , що належать області визначення оператора A , виконана умова

$$Av \cdot w = v \cdot Aw. \quad (9.4)$$

Легко перевірити, що, наприклад, оператор Лапласа є самоспряженим.

У задачі

$$\operatorname{div}[k(X)\operatorname{grad} u] - \rho(X)u(X) = -f(X), \quad X \in G; \quad (9.5)$$

$$u_r(X) = \mu(X), \quad (9.6)$$

де $u_r(X)$ — значення функції на границі G .

Диференціальний оператор

$$A = -\operatorname{div}[k \operatorname{grad} u] + \rho \quad (9.7)$$

є самоспряженим.

Самоспряжений оператор A називається додатно визначеним, якщо $(Au \cdot u) \geq 0$.

Якщо A — додатний оператор, то гранична задача (9.1) має не більше одного розв'язку.

Має місце така теорема.

Теорема. Якщо рівняння (9.1), де A — додатно визначений оператор, має розв'язок, то цей розв'язок повідомляє функціоналу

$$F(u) = Au \cdot u - 2u \cdot f \quad (9.8)$$

найменший розв'язок.

Справедливе і обернене твердження.

Якщо існує елемент u , що реалізує мінімум функціонала $F(u)$, то цей елемент є розв'язком рівняння (9.1).

Приклад. В області $G: -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$, відшукується розв'язок рівняння

$$\Delta u = 2(x-a)^2 + 2(y-b)^2,$$

що задовольняє граничні умови $u = 0$, Δu — оператор Лапласа.

Розв'язання. Знайдемо функціонал $F(u)$ даної задачі

$$F(u) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \Delta u \cdot u dx dy - 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b u [2(x-a)^2 + 2(y-b)^2] dx dy \quad (9.9)$$

і будемо шукати мінімум цього функціонала (див. гл. 7, § 6). Точним розв'язком задачі, що повідомляє мінімум функціоналу (9.9), є функція $u = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$.

9.1. Метод Рітца

У цьому методі підбирається спочатку функція $\varphi_0(x)$, яка задовольняє задані граничні умови, наприклад, умови (9.6). Потім підбирається повна (тобто лінійно незалежна) система n функцій $\varphi_i(x)$,

що задовольняє нульові граничні умови. Потім будується наближений розв'язок u_n

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x), \quad (9.10)$$

де a_i — постійні коефіцієнти.

Підберемо a_i таким чином, щоб при вибраному числі n функцій $\varphi_i(x)$, визначених у багатовимірному просторі, функціонал (9.8) був мінімальним, тобто

$$F(u_n) = Au_n \cdot u_n - 2u_n \cdot f = \min. \quad (9.11)$$

Замінімо тут Au_n на $A\left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)\right)$ і u_n на $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$, припускаючи, що оператор A є лінійним. Тоді отримаємо

$$F(u_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i A\varphi_i(x)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)\right) - 2a_i \varphi_i(x) \cdot f(x) = \min. \quad (9.12)$$

Функціонал $F(u_n)$ матиме екстремум, якщо $\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i}$, $i = \overline{1, n}$, дорівнюватиме нулю, тобто $\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0$. Звідси отримуємо систему n рівнянь для визначення a_i , $i = \overline{1, n}$.

Запишемо рівняння для a_i стосовно оператора (9.7). Будемо далі вважати, що в задачі (9.5) $u_n(X) = 0$, тобто $\varphi_0(x) = 0$. Тоді (9.11) запишеться

$$\int_G \left[\sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^n a_r a_i (k \operatorname{grad} \varphi_r \operatorname{grad} \varphi_i + \rho \varphi_r \varphi_i) - 2f \sum_{r=1}^n a_r \varphi_r \right] dG = \min. \quad (9.13)$$

Прирівнюючи до нуля похідні по коефіцієнтах, отримуємо для визначення a_i систему лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_G (k \operatorname{grad} \varphi_r \operatorname{grad} \varphi_i + \rho \varphi_r \varphi_i) dG = \int_G f \varphi_r dG, \quad r = \overline{1, n}. \quad (9.14)$$

Варіаційний метод Рітца застосовується для розв'язування еліптичних рівнянь.

9.2. Метод Бубнова-Гальоркіна розв'язання граничних задач з несамоспряженим оператором

Як вказувалося в попередньому пункті, метод Рітца застосовується для рівнянь (9.1), якщо оператор A є самоспряженим. Якщо оператор A є несамоспряженим, застосовують метод Бубнова-Гальоркіна, вибираючи систему функцій $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, ортогональну до нев'язки, як зроблено в методі Б. Г. Гальоркіна для звичайних диференціальних рівнянь. Нам залишилося для рівняння (9.1) знайти нев'язку

$$Au = f \text{ або } Au - f = 0.$$

Будемо далі вважати граничні умови (9.2) однорідними, тобто $L_i u = 0$, $i = \overline{1, m}$, а L_i — взагалі кажучи, — диференціальний оператор на границі s_i .

Замінімо всі похідні, що входять в оператор A , скінченними або сітковими різницями, а точне розв'язання наближеним

$$u \approx u_n = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i(X).$$

Оператор A замінимо на A_h , що враховує скінченні різниці, функцію $f(X)$ замінимо на сіткову φ_h . У результаті отримаємо новий оператор $A_h u_n = \varphi_h$ або $A_h u_n - \varphi_h = 0$. Функцію $u(X)$ можна і не замінювати на u_n , тобто новий оператор записати у вигляді $A_h u - \varphi_h$. Нев'язкою для рівняння $Au = f$ називається функція

$$\psi = Au - f - (A_h u - \varphi_h) \quad (9.15)$$

або

$$\psi = Au - f - (A_h u_n - \varphi_h). \quad (9.16)$$

Іноді нев'язку записують ще й у вигляді

$$\psi(X, a_1, a_2, \dots, a_n) = f - Au. \quad (9.17)$$

Якщо шукати u_n у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(X)$, то нев'язка ψ буде функцією від X і коефіцієнтів a_i

$$\psi = \psi(X, a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (9.18)$$

Тепер базисні функції $\varphi_i(X)$ вибираються з умови ортогональності нев'язки, тобто

$$\int_G \psi(X, a_1, a_2, \dots, a_n) \varphi_i(X) dG = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.19)$$

Для нев'язки виду (9.17) умова (9.19) запишеться

$$\int_G \left[f - A \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right) \right] \varphi_k dG = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.20)$$

У цій системі невідомими є a_i , $i = \overline{1, n}$. Рівнянь також n . Задача може мати розв'язок. Якщо оператор A лінійний, тобто

$$\int_G \left(f - \sum_{i=1}^n a_i A \varphi_i \right) \varphi_k dG = 0. \quad (9.21)$$

Останню систему можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_G A \varphi_i \varphi_k dG \right) a_i = \int_G f \varphi_k dG, \quad k = \overline{1, n}.$$

Це лінійна система з невідомими a_i . Метод можна застосовувати тільки з використанням обчислювальних машин.

9.3. Метод скінченних елементів

Винесений в заголовок метод складається з сукупності різних методів, пов'язаних з теоремою про функціонал (9.8) для розв'язування рівняння (9.1) з умовами (9.2) за методом Рітца. У методі Рітца наближений розв'язок u_n будується за формулою (9.10), в якій базисні функції n змінних $\varphi_i(X)$ визначені для всієї області G і на границі.

У методі скінченних елементів область G розбивається на скінченне число підобластей G_i , які називаються скінченними елементами. Для кожного з таких елементів будується з оператора A свій оператор і своє f . Функції $\varphi_i(X)$ визначаються тільки в підобласті

G_i , тобто на скінченному елементі. Отримана таким чином гранична задача розв'язується одним з указаних вище методів. Після розв'язання граничних задач для кожного елемента здійснюється стикування розв'язків на границі скінченних елементів.

9.4. Метод Бубнова—Гальоркіна для багатовимірних задач

Для диференціального рівняння (9.1), заданого в G -області з границею s і однорідних граничних умовах на частині границі s_i ,

$$L_i u = 0.$$

Метод будується за тією ж самою схемою, що і для одновимірного випадку (див. п. 7.4).

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютно інтегровна функція 312
 Аксиоми теорії ймовірностей 507

Базис гільбертового простору 304
 Бета-розподіл 578
 Біномний ряд 265
 Біфуркація 460

Варіація функціонала 662
 Відокремлення змінних 19
 Вибірка 508
 Визначник Вронського 59
 Випадкова величина 529
 Вишнградського діаграма 445
 — умова (критерій) 442
 Властивості класичної ймовірності 510
 — операцій оцінки похибок результатів арифметичних дій 717
 Вузел інтерполювання 723

Гармоніка проста 277
 Гармонічний аналіз 295
 Генеральна сукупність 508
 Геодезична лінія 655
 Геометричний критерій стійкості (умова Михайлова) 435
 Граничний цикл 459
 Густина розподілу ймовірності 539

Дельта-функція 324
 Дискретний варіаційний ряд 606
 Дисперсія дискретної випадкової величини 550
 Диференціальне рівняння 5
 Довірчий інтервал 616
 D-розбиття 437

Ейлера кути 487
 — рівняння 673
 Екстраполювання 723
 Екстремум функціонала, достатні умови 681
 — необхідні умови 670

Задача варіаційна з нерухомими кінцями 672
 — Дідо 657
 — Діріхле 380
 — ізопериметрична 657, 685
 — коректно поставлена 752
 — Коші 12
 — для нормальної системи диференціальних рівнянь 111
 — про аналітичне конструювання регулятора 698
 — про геодезичні лінії 654
 — про інтегральний критерій якості перехідних процесів 697
 — про максимальну швидкість 655, 697
 Закон великих чисел 579
 Застосування диференціальних рівнянь 100–107
 Збурення стаціонарні 415
 Зв'язки голономні 685
 — інтегральні 685
 — скінченні 685
 Згортка функцій 145
 Змінні канонічні 680
 Зображення 123

Ізокліна 15
 Ймовірності апостеріорні 516
 — апріорні 516
 — геометричні 509
 — класичні 504
 — перехідні 595
 — умовні статистичні 504
 — фінальні 598
 Інтеграл диференціального рівняння 10
 — Дюамеля 147
 — загальний 7, 9, 10
 — (оператор) Лапласа 124
 — Фур'є в комплексній формі 315
 — частинний 11
 Інтегральна крива 6
 Інтегральний метод найменших квадратів 767
 Інтегрувальний множник 38

Інтенсивність (густина) потоку подій 600

Квадратично сумовані функції 301
 Коефіцієнт підсилення системи 481
 Коефіцієнти Лагранжа 727
 — тригонометричного ряду 279
 — Фур'є 282
 Комплексна форма ряду Фур'є 297
 Косинус-формула Фур'є 314
 Крайова задача 380
 Крива Михайлова 433
 Критерій згоди Колмогорова 621
 — Пірсона 623
 — Коші рівномірної збіжності послідовності функцій 213
 — — — функціонального ряду 230
 Крок процесу 17
 Кут нутації 487
 — прецесії 487
 — чистого обертання 487

Ланцюг Маркова 594
 Лінеаризація рівнянь 417
 Лінія вузлів 487
 Лишок функції 274

Математичне сподівання випадкової величини 545
 — невідповідної величини 548
 Матриця Гурвіца 429
 — деформацій 371
 — з діагональним переважанням 742
 — напружень 371
 — перехідних ймовірностей 595
 Матричне розв'язання систем диференціальних рівнянь 118
 Метод Бубнова-Гальоркіна 768, 777, 779
 — варіації сталей 74
 — Зейделя 744
 — ізоклін 462
 — колокації 767
 — комплексних амплітуд 88
 — ламаних Ейлера 16
 — Ляпунова 418, 469
 — Монте-Карло (випадкових випробувань) 761
 — подібності 184
 — прогону 746
 — простої ітерації лінійних систем 738
 — Рітца 775
 — розв'язання нелінійних систем скінченних рівнянь 748
 — Рунге-Кутта 765

— сіток 772
 — скінченних елементів 778
 — різниць 769
 — Фур'є 31
 — характеристик (Д'Аламбера) 382
 Многочлен Лагранжа інтерполяційний 724
 — Тейлора 260
 Многочлени Чебишова 730
 Множина елементарних подій 500
 Мода 531, 569
 Момент випадкової величини 559

Нерівність Бесселя 295
 — Чебишова 555
 Нормування послідовності функцій 303

Обвідна сім'ї кривих 45
 Об'єм сукупності 509
 Область збіжності функціонального ряду 223
 — нестійкості 437
 — розбіжності функціонального ряду 223
 — стійкості 437
 Однопараметрична сім'я кривих 45
 Ознака Вейєрштрасса 234
 — Д'Аламбера 238
 — Коші 242
 — Лейбніца 246
 Окіл нескінченно віддаленої точки 275
 Оператор Д'Аламбера 367
 — Лапласа 124
 — самоспряжений 774
 — несамоспряжений 777
 Оригінал 123
 Осцилятор гармонічний 101
 Оцінка ефективна 609
 — зміщена 608
 — незміщена 608
 — спроможна 609

Параметри потоку подій 601
 Перетворення Карсона 205
 — Лапласа 124
 — Мелліна 206
 Повний (точний) диференціал 34
 Події випадкові 499
 — вірогідні 499
 — єдиноможливі 500
 — неможливі 499
 — незалежні 517
 — несумісні 499
 — протилежні 500
 — рівноможливі 500
 Поліноми Лежандра 304

Полос 273
Портрет фазовий 409
Порядок диференціального рівняння 6
Послідовність 207
— збіжна 208
— розбіжна 208
Потік подій 600
Похилка 717
— абсолютна 717
— арифметичних дій 717
— відносна 717
— гранична 718
— заміни функції многочленом Тейлора 722
— округлення цифр 720
Принцип максимуму 704
Приріст функціонала 659
Програмування динамічне 709
— лінійне 628
— математичне 627
Продовження функції 291
Простір Гільберта 301
— подій 503

Радіус збіжності ряду 222
Рівень значущості подій 514
Рівність Парсеваля–Ляпунова 295
Рівняння Бернуллі 33
— Клеро 41
— Лагранжа 42
— Лапласа 388
— Максвелла 366
— Фредгольма 193
— хвильове 376
Рівняння гіперболічного типу 379
— диференціальні в повних диференціалах 34
— звичайні 5
— з однорідною функцією 20
— з частинними похідними 5
— зі спеціальною правою частиною 79
— нерозв'язані відносно похідної 41
— Ейлера–Лагранжа 676
— Ейлера–Пуассона 676
— еліптичного типу 379
— збурень 413
— інтегральні 193
— канонічні 27, 680
— Клеро 41
— Колмогорова 599
— Маркова 596
— характеристичні 66, 70
Розв'язок збурений 332, 398
— ізольований 459

— незбурений 331, 398
— рівнянь загальний 8
— — особливий 47
— — частинний 8, 11
Розвинення в ряд Маклорена 254, 264
— функцій комплексної змінної в ряди 267
Розподіл Бернуллі 563
— Вейбулла 577
— геометричний 575
— логарифмічний нормальний 573
— нормальний 567
— Пуассона 563
— Релея 577
Ряд біномний 265
— гармонічний 229
— геометричний 221
— збіжний 219
— Лорана 269, 272
— Маклорена 259
— розбіжний 219
— статистичний 531
— степеневий 221
— Тейлора 259
— тригонометричний 279
— умовно збіжний 233
— Фур'є 277
— функціональний 215
— числовий 215
— — знакозмінний 215
— — накопереміжний 215
— — з додатними членами 215
— — з комплексними числами 215

Сепаратриса 460
Середнє квадратичне відхилення 551
Сідло 452
Сідлова точка 644
Симплекс-метод 635
Синус-формула Фур'є 314
Система автономна 346
— диференціальних рівнянь 5, 108
— неавтономна 347
— функцій нормована 303
Спектр функції 293, 299
Спектральна густина функції 317
Спектральні (хвильові) числа функції 300
Сплайн 734
Способи отримання випадкових чисел 763
Стійкість асимптотична 399
— за Ляпуновим 398
— нульового розв'язку 406
Структурна схема системи регулювання 480
Сума ряду частинна (зрізана) 218

— подій 502
Схема Горнера 737
Таблиця оригінал—зображення 197
Теізори 371
Теорема Бернуллі 582
— Діріхле 283
— додавання ймовірностей 511
— Ефроса 147
— єдиності 126
— існування і єдиності розв'язку зведеного лінійного диференціального рівняння n -го порядку 56
— Коші 12
— Лапласа інтегральна 526
— Маркова 584
— множення ймовірностей 514
— Муавра–Лапласа 523
— про відкидання скінченного числа членів ряду 227
— — диференціювання зображення 136
— — оригіналу 138
— — додавання ряду 227
— — збіжність геометричного ряду 222
— — інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку 61
— — лінійно залежну систему функцій 59
— — множення ряду 226
— — незалежну систему функцій 60
— — неперервність функціонального ряду 250
— розвинення однозначної функції в ряд 269
— Пуассона 522
— Чебишова 580
— Четаєва 476
— центральна гранична (Ляпунова) 587
Теорема Ляпунова 418, 474
Теорія регулювання 476
Точка зображувальна 409
— множини кутова (крайня) 637
Точки особливі 273, 411, 446
— регулярні 411
Умова від'ємності дійсної частини коренів характеристичного рівняння 428
— ергодичності 593
— збіжності методу простої ітерації 741
— Лоренца 367
— Льєнара–Шилара 431
— Михайлова 433

— Рауса–Гурвіца 429
Умови граничні 339
— крайові 339
— Куна–Гаккера 644
— стаціонарності функціонала 676

Фазова площина 409
— траєкторія 408
— швидкість 409
Фазовий простір 409
Фокус нестійкий 454
— стійкий 454
Формула ймовірності гіпотез (Бейєса) 516
— Лівівля–Остроградського 62
— повної ймовірності 515
— прямокутників наближеного обчислення інтегралів 757
— обернення 153
— Тейлора 259
— трапецій наближеного обчислення інтегралів 757
Фундаментальна система розв'язків 61
Функції знаковизначені 471
— Ляпунова 469
— допустимі 670
— стаціонарні (екстремальні) 670
— строго опуклі (угнуті) 639
Функціонал від декількох змінних 652
— — однієї змінної 652
— лінійний 661
— неперервний 660
Функція вагова 756
— гармонічна 277
— Гаусса 524
— Гріна 159
— Дірака 324
— кусково-гладка 284
— монотонна 284
— однорідна n -го порядку виміру 20
— ортогональна 302
— передавальна 480
— періодична 278
— розподілу ймовірності 533
— Хевісайда 126
— штрафу 703

Центр 454

Числа випадкові 763
— псевдовипадкові 763

ЗМІСТ

Передмова.....	3
Глава 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	
§ 1. Загальні відомості про диференціальні рівняння.....	5
1.1. Означення.....	5
1.2. Загальний і частинний інтеграл. Загальні і частинні розв'язки. Інтегральні криві.....	8
1.3. Теорема про існування і єдиність розв'язку диференціальних рівнянь першого і n -го порядків.....	12
1.4. Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної.....	14
1.5. Метод ламаних Ейлера.....	16
§ 2. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку.....	18
2.1. Рівняння з відокремленими змінними.....	18
2.2. Рівняння з відокремлюваними змінними.....	19
2.3. Рівняння першого порядку з однорідною функцією.....	20
2.4. Рівняння, що зводяться до рівнянь з однорідною функцією.....	23
2.5. Лінійні рівняння першого порядку.....	27
2.6. Рівняння Бернуллі.....	33
2.7. Рівняння у повних диференціалах.....	34
2.8. Інтегровальний множник.....	38
§ 3. Рівняння, не розв'язані відносно похідної.....	39
§ 4. Обвідна сім'ї кривих.....	45
4.1. Рівняння обвідної.....	45
4.2. Особливий розв'язок і обвідна.....	47
§ 5. Рівняння вищих порядків.....	48
5.1. Рівняння вищих порядків, що розв'язуються у квадратурах.....	48
5.2. Рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку.....	52
5.3. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку.....	55
5.4. Загальна теорія однорідних диференціальних рівнянь n -го порядку із змінними коефіцієнтами.....	57
5.5. Визначник Вронського та його властивості.....	59
5.6. Фундаментальна система розв'язків.....	61
5.7. Формула Ліувілля-Остроградського.....	62
5.8. Побудова рівняння за фундаментальною системою.....	64
5.9. Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	65
5.10. Лінійні однорідні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	69
5.11. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.....	72
5.12. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.....	79
5.13. Лінійні неоднорідні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	84
5.14. Метод комплексних амплітуд.....	88

5.15. Коливання у замкнутому електричному контурі з ємністю.....	92
5.16. Застосування диференціальних рівнянь другого порядку в техніці.....	100
§ 6. Деякі відомості про системи диференціальних рівнянь першого порядку.....	108
6.1. Основні поняття і означення.....	108
6.2. Теорема про існування і єдиність розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь.....	111
6.3. Системи лінійних диференціальних рівнянь.....	114
6.4. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	117
6.5. Матрична форма запису системи диференціальних рівнянь і її розв'язки.....	118

Глава 2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

§ 1. Оригінал і зображення за Лапласом.....	122
1.1. Теорема про область визначення зображення.....	124
1.2. Теорема єдиності зображення-оригінал.....	126
§ 2. Зображення деяких функцій.....	126
2.1. Одиначна функція Хевісайда.....	126
2.2. Показникова функція.....	128
§ 3. Властивості перетворення Лапласа.....	128
3.1. Властивість лінійності.....	128
3.2. Теорема подібності (зображення функцій зі змінним масштабом).....	130
3.3. Теорема зміщення в аргументі зображення.....	132
3.4. Теорема зміщення в аргументі оригіналу.....	133
3.5. Теорема про диференціювання зображення.....	136
3.6. Теорема про диференціювання оригіналу.....	138
3.7. Теорема про інтегрування оригіналу.....	141
3.8. Теорема про інтегрування зображення.....	142
3.9. Поняття про згортку функцій. Теорема про згортку.....	145
3.10. Теорема про граничні співвідношення.....	148
§ 4. Зображення періодичного оригіналу.....	149
§ 5. Зображення оригіналу, заданого різними способами в області визначення.....	152
§ 6. Обернене перетворення Лапласа (формула обернення).....	153
§ 7. Операційний метод розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	154
§ 8. Приклади розв'язування рівнянь.....	160
§ 9. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку.....	167
§ 10. Теорема розкладання.....	170
§ 11. Операційний метод розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь.....	175
§ 12. Операційний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Метод подібності.....	180
§ 13. Деякі відомості про інтегральні рівняння. Операційний метод їх розв'язання.....	193
§ 14. Перетворення Карсона. Інші перетворення.....	205

§ 1. Збіжність послідовностей.....	207
1.1. Числові і функціональні послідовності.....	207
1.2. Збіжність числових послідовностей.....	208
1.3. Збіжність функціональних послідовностей.....	209
1.4. Рівномірна збіжність послідовностей функцій.....	211
1.5. Критерій (ознака) Коші рівномірної збіжності послідовності функцій.....	213
§ 2. Числові і функціональні ряди. Збіжність рядів.....	214
2.1. Означення ряду. Класифікація рядів.....	214
2.2. Визначення збіжності (розбіжності) рядів.....	218
2.3. Залишок ряду. Теорема про залишок.....	220
2.4. Геометричний ряд. Степеневий ряд і його збіжність. Радіус збіжності степеневому ряду.....	221
2.5. Загальні властивості рядів.....	226
2.6. Необхідна умова збіжності рядів.....	227
2.7. Гармонічний ряд і його розбіжність.....	229
2.8. Рівномірна збіжність рядів.....	230
2.9. Абсолютно і умовно збіжні ряди.....	232
2.10. Лема про збіжність рядів з невід'ємними членами.....	233
2.11. Ознаки порівняння. Ознака Вейерштрасса.....	234
2.12. Ознака Д'Аламбера.....	238
2.13. Використання ознаки Д'Аламбера для визначення абсолютної збіжності довільних рядів.....	240
2.14. Визначення радіуса збіжності степеневому ряду за допомогою ознаки Д'Аламбера.....	240
2.15. Ознака Коші з коренем і її застосування.....	242
2.16. Інтегральна ознака Коші збіжності рядів.....	243
2.17. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів.....	246
2.18. Теорема Абеля про збіжність степеневих рядів.....	247
2.19. Теорема про рівномірну збіжність степеневому ряду.....	249
2.20. Арифметичні властивості абсолютно збіжних рядів.....	250
2.21. Функціональні властивості рівномірно збіжних рядів.....	250
2.22. Розвинення функції $\arctg x$ в ряд. Число π	254
2.23. Логарифмічний ряд.....	254
2.24. Теорема про диференціювання рівномірно збіжних функціональних рядів.....	256
2.25. Розвинення функції $y = e^x$	257
2.26. Ряди Тейлора і Маклорена.....	259
2.27. Достатні умови зображуваності функції рядом.....	263
2.28. Основні розвинення.....	264
2.29. Узагальнення. Розвинення функцій комплексної змінної в ряди.....	267
2.30. Формули Ейлера.....	268
2.31. Ряд Лорана.....	269
2.32. Класифікація ізольованих особливих точок. Лишки.....	273
2.33. Застосування рядів Лорана в операційному численні.....	275
§ 3. Ряди Фур'є.....	277
3.1. Періодичні функції та їхні властивості.....	278
3.2. Тригонометричний ряд і характер його збіжності.....	279
3.3. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є для 2π -періодичної функції.....	280
3.4. Достатні ознаки розвинення 2π -періодичної функції в ряд Фур'є.....	283
3.5. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій.....	284
3.6. Розвинення періодичних функцій з будь-яким періодом у ряд Фур'є. Розвинення парних і непарних 2π -періодичних функцій у ряд Фур'є.....	287

3.7. Розвинення неперіодичної функції, заданої на скінченному проміжку, в ряд Фур'є.....	290
3.8. Різні варіанти запису ряду Фур'є.....	293
3.9. Наближене зображення функції за допомогою тригонометричного полінома.....	293
3.10. Елементи гармонічного аналізу. Оцінка залишку ряду Фур'є.....	295
3.11. Комплексна форма ряду Фур'є для 2π - і 2ℓ -періодичної функції.....	297
§ 4. Розвинення функцій за довільною ортогональною системою функцій.....	301
4.1. Поняття про простір Гільберта.....	301
4.2. Поліноми Лежандра.....	304
4.3. Ряди за ортогональними функціями.....	306
§ 5. Інтеграл і перетворення Фур'є.....	311
5.1. Інтеграл Фур'є.....	311
5.2. Різні форми зображення інтеграла Фур'є.....	313
5.3. Комплексна форма інтеграла Фур'є.....	315
5.4. Перетворення Фур'є.....	316
5.5. Зв'язок між перетворенням Фур'є і перетворенням Лапласа.....	317
5.6. Безпосереднє обчислення спектральної густини для абсолютно інтегрованих функцій.....	320
5.7. Відшукування спектральної густини для неабсолютно інтегрованих функцій.....	323
5.8. Зображення функції Дірака.....	324
§ 6. Застосування числових і функціональних рядів.....	330
6.1. Застосування рядів до обчислення функцій та інтегралів.....	330
6.2. Метод малого параметра наближеного розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.....	331
6.3. Застосування рядів до розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.....	333
6.4. Метод послідовних наближень розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.....	337
6.5. Застосування рядів у граничних задачах для звичайних диференціальних рівнянь.....	339
§ 7. Методи малого параметра наближеного розв'язування звичайних нелінійних диференціальних рівнянь.....	341
7.1. Метод малого параметра Пуанкаре–Ляпунова для граничних задач.....	341
7.2. Метод збурень (метод Пуанкаре–Ляпунова) наближеного відшукування періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.....	345
7.3. Метод межового шару.....	350
7.4. Асимптотичні методи розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь.....	352

Глава 4. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ..... 355

§ 1. Поняття про рівняння математичної фізики. Граничні, початкові умови. Моделі, що описуються хвильовими рівняннями.....	355
§ 2. Моделі, описувані рівняннями теплопровідності, дифузії, Максвелла.....	361
§ 3. Рівняння механіки суцільних середовищ.....	368
§ 4. Канонічні форми та класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Характеристичне рівняння. Класифікація крайових задач.....	377
§ 5. Розв'язування задачі Коші для рівнянь коливання струни методом Д'Аламбера.....	382
§ 6. Розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння коливань струни методом розподілу змінних (метод Фур'є).....	384
§ 7. Розв'язування задачі Діріхле у крузі методом Фур'є.....	388
§ 8. Операційний метод розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.....	391

Глава 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ ЗА ЛЯПУНОВИМ

§ 1. Означення. Поняття стійкості за Ляпуновим. Асимптотична стійкість.....	397
§ 2. Означення стійкості в термінах руху.....	402
§ 3. Фазовий простір. Диференціальні рівняння фазових траєкторій.....	407
§ 4. Рівняння збуреного руху.....	412
§ 5. Рівняння першого наближення.....	415
§ 6. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням.....	418
§ 7. Про стійкість розв'язку одного рівняння n-го порядку.....	425
§ 8. Умови від'ємності дійсної частини коренів характеристичного рівняння.....	428
8.1. Необхідна умова від'ємності дійсної частини коренів характеристичного рівняння. Випадок рівняння першого і другого степеня.....	428
8.2. Умова (критерій) Рауса-Гурвіца.....	429
8.3. Умова Ляпунова-Шипара.....	431
8.4. Умова Михайлова.....	433
§ 9. D-розбиття.....	437
§ 10. Особливі точки системи двох диференціальних рівнянь першого порядку.....	446
§ 11. Особливі траєкторії.....	459
§ 12. Методи побудови фазових траєкторій.....	462
12.1. Метод ізоклін.....	462
12.2. Метод Ляпунова.....	467
§ 13. Функція Ляпунова і її побудова.....	469
§ 14. Другий метод Ляпунова.....	474
§ 15. Стійкість у теорії регулювання.....	479
§ 16. Стійкість навігаційних систем.....	486
16.1. Визначення положення твердого тіла, що має одну нерухому точку.....	486
16.2. Гіроскоп.....	489
16.3. Двогіроскопний компас.....	493

Глава 6. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

§ 1. Про предмет "Теорія ймовірностей і математична статистика".....	498
§ 2. Випадкові події і дії над ними.....	498
2.1. Події. Простір подій.....	498
2.2. Дії над подіями.....	501
§ 3. Ймовірність подій.....	503
3.1. Зв'язок між статистичною і класичною ймовірностями.....	507
3.2. Генеральна сукупність та вибірки.....	508
3.3. Геометричні ймовірності.....	509
3.4. Властивості класичної ймовірності.....	510
3.5. Теорема про додавання ймовірностей подій.....	511
3.6. Принцип значущості подій.....	514
3.7. Теорема множення ймовірностей будь-яких подій.....	514
3.8. Формула повної ймовірності.....	515
3.9. Формула ймовірності гіпотез (формула Бейсса).....	516
3.10. Незалежні події.....	517
3.11. Випробування Бернуллі.....	519

3.12. Гранична поведінка ймовірностей у випробуваннях Бернуллі.....	521
§ 4. Випадкові величини. Поняття про одновимірну і багатовимірну випадкові величини.....	529
§ 5. Функція розподілу ймовірності випадкової величини.....	532
§ 6. Густина розподілу ймовірностей одновимірної і багатовимірної випадкових величин.....	539
6.1. Властивості густини розподілу ймовірності.....	540
6.2. Функція і густина розподілу змішаної випадкової величини.....	542
6.3. Випадкові функції, функція і густина їх розподілу.....	543
§ 7. Числові характеристики випадкових величин.....	544
7.1. Математичне сподівання одновимірної випадкової величини.....	545
7.2. Невипадкова функція випадкової величини, її математичне сподівання і дисперсія. Початковий і центральний моменти.....	547
§ 8. Властивості математичного сподівання і дисперсії.....	553
§ 9. Моменти багатовимірних випадкових величин. Кореляційний момент і його властивості.....	559
§ 10. Найбільш поширені закони розподілу одновимірних і багатовимірних випадкових величин.....	563
10.1. Біномний розподіл Бернуллі та розподіл Пуассона.....	563
10.2. Рівномірний розподіл.....	565
10.3. Нормальний розподіл.....	567
10.4. Експоненціальний розподіл.....	574
10.5. Деякі інші розподіли.....	575
§ 11. Закон великих чисел.....	579
11.1. Теорема Чебишова, Бернуллі, Маркова.....	580
11.2. Характеристичні функції та їхні властивості.....	585
11.3. Центральна гранична теорема.....	587
§ 12. Числові характеристики випадкових функцій.....	588
§ 13. Послідовності випадкових залежних величин. Ланцюги Маркова.....	594
§ 14. Потoki.....	600
§ 15. Додаткові відомості з математичної статистики.....	606
15.1. Статистичні і варіаційні ряди.....	606
15.2. Статистична оцінка параметрів розподілу. Незміщена, ефективна і спроможна оцінка.....	608
15.3. Середні, математичне сподівання і дисперсія генеральної сукупності, вибірки. Їх оцінки.....	611
15.4. Довірчі ймовірності. Довірчий інтервал.....	616
15.5. Побудова і перевірка статистичних гіпотез.....	620
15.6. Критерій згоди Колмогорова.....	621
15.7. Критерій Пірсона.....	623

Глава 7. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ

§ 1. Класифікація задач оптимізації.....	626
§ 2. Математичне програмування.....	627
2.1. Загальна постановка задачі лінійного програмування.....	628
	789

2.2. Геометричний метод розв'язування найпростіших задач лінійного програмування	629
2.3. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування у n -вимірному просторі	631
2.4. Аналітичний метод розв'язування задач лінійного програмування	632
2.5. Опуклі множини і функції. Задача опуклого лінійного програмування	635
§ 3. Застосування методу умовного екстремуму до задач нелінійного програмування	642
§ 4. Числові методи пошуку екстремуму	645
§ 5. Метод можливих напрямів	646
§ 6. Варіаційне числення	652
6.1. Поняття про функціонал	652
6.2. Класичні задачі варіаційного числення	654
6.3. Варіація функцій і приріст функціонала	658
6.4. Неперервність функціонала	660
6.5. Лінійний функціонал	661
6.6. Варіація функціонала	662
6.7. Необхідна умова екстремуму функціонала	670
6.8. Диференціальні рівняння екстремалей. Канонічні рівняння	671
6.9. Достатні умови екстремуму функціоналів	681
6.10. Умовний екстремум функціоналів	684
6.11. Варіаційні задачі з рухомими кінцями	688
6.12. Прямі методи у варіаційному численні	692
§ 7. Задачі керування	695
7.1. Загальна постановка задачі керування	695
7.2. Застосування варіаційного числення до задач керування	700
7.3. Принцип максимуму	704
7.4. Принцип динамічного програмування	709
Глава 8. ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ МЕТОДИ	715
§ 1. Вимоги до числових методів	715
§ 2. Основні джерела похибок і їх урахування в числовому розв'язанні задач	717
2.1. Урахування похибки арифметичних дій	717
2.2. Правило запису наближених чисел	719
2.3. Округлення цифр	720
2.4. Середні квадратичні помилки	721
§ 3. Наближення функцій многочленами. Інтерполювання	722
3.1. Постановка задачі інтерполювання	723
3.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа	724
3.3. Оцінка похибки	728
3.4. Многочлени Чебишова	730
3.5. Інтерполювання сплайнами	733
3.6. Обчислення значень многочлена за схемою Горнера	737
§ 4. Числові методи розв'язання скінченних рівнянь	738
4.1. Числові методи розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною	738
4.2. Метод простої ітерації розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь	738
4.3. Метод Зейделя	744
4.4. Метод прогону	746

4.5. Метод введення параметра (варіації) розв'язання нелінійних систем скінченних рівнянь	748
§ 5. Формули числового диференціювання	752
§ 6. Додаткові відомості про числові методи інтегрування	755
6.1. Постановка задачі числового інтегрування	756
6.2. Формули трапецій, прямокутників, Сімпсона наближеного обчислення інтегралів	757
6.3. Квадратурна формула Гаусса	759
6.4. Метод випадкових випробувань (Монте-Карло)	761
§ 7. Наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	764
7.1. Метод Рунге-Кутта розв'язання задачі Коші (7.1)-(7.2)	765
7.2. Методи розв'язання крайової задачі звичайного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами	765
§ 8. Метод скінченних різниць розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	769
8.1. Метод скінченних різниць розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	769
8.2. Метод сіток. Розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних	772
§ 9. Варіаційний метод розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних	774
9.1. Метод Рітца	775
9.2. Метод Бубнова-Гальоркіна розв'язання граничних задач з несамоспряженим оператором	777
9.3. Метод скінченних елементів	778
9.4. Метод Бубнова-Гальоркіна для багатовимірних задач	779
Предметний покажчик	780