МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад

«Київський електромеханічний коледж»

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА

з предмету

«Математика»

ТЕМА:

«Тригонометричні нерівності»

для спеціальностей

5.05020203 «Монтаж, обслуговування та ремонт автоматизованих систем керування рухом на залізничному транспорті»,
5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем та мереж»
5.05020204 «Обслуговування та ремонт пристроїв електрозв'язку на транспорті»,
5.05070103 «Електропостачання»,
5.07010501 «Технічне обслуговування, ремонт та експлуатація тягового рухомого складу».

Викладача Балякіної В.

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад

«Київський електромеханічний коледж»

РОЗГЛЯНУТО ТА УХВАЛЕНО
циклового комісією
природничо-математичних
дисциплін
Протокол № 1 від
«   »   2017 р.
Голова циклової комісії
______________(С..І.Дуднік)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з НР
________________(О. І. Марченко)

“____”___________20___ р.

«Тригонометричні нерівності»

Викладача
Балякіної В.Н.

Київ 2014

Вступ

Дана методична розробка написана у відповідності до діючої програми «Математика» для студентів першого курсу. Дана програма містить тему «Тригонометричні нерівності» для самостійного вивчення студентами на яку програмою передбачено 12 годин. Автор ставив собі за мету викласти матеріал в такій формі, щоб максимально допомогти студентам самостійно розібратися з цією темою.

Методична розробка містить теоретичний матеріал, розібрані приклади вправ та завдання для самостійного розв’язування.

1.*НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ.*

Нерівності, що містять невідомі під знаками тригонометричних функцій, називають тригонометричними нерівностями.

Прикладами тригонометричних нерівностей є нерівності

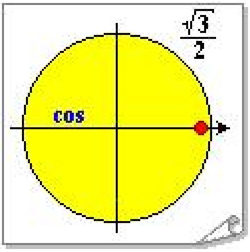
$$\sin x < \frac{1}{2}, \quad \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -\sqrt{3}$$

тощо.

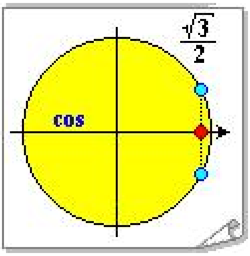
До найпростіших будемо відносити нерівності виду $\sin t > a, \ \cos t > a, \ \mathrm{tg} t > a, \ \mathrm{ctg} t > a$ та інші, у яких на місці знака > стоїть один із знаків ≥, < або ≤. Загальні формули для розв'язування цих нерівностей є досить громіздкими. Тому розглянемо методи розв'язування цих нерівностей на прикладах. Для наочності будемо використовувати одиничне коло, лінії тангенса і котангенса.

2.Зразок розв'язування найпростішої тригонометричної нерівності з повним поясненням

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

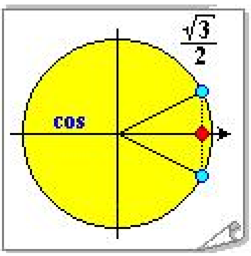


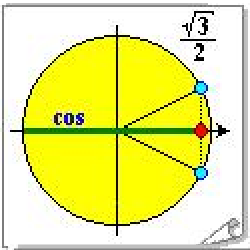
1. На осі косинусів відзначаємо задане значення. (Окружністю, якщо нерівність строга, і залитим колом, якщо нерівність нестрога).



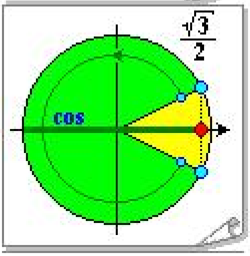
2. Проводимо пунктирну вертикаль до перетинання з одиничним колом і відзначаємо точки їхнього перетину. (Окружністю, якщо нерівність строга, і залитим колом, якщо нерівність нестрога).

3. Проводимо радіуси від точок на окружності до центра одиничного кола.

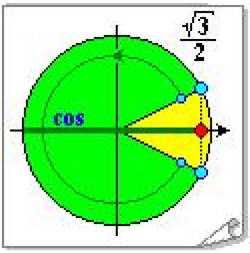




4. Відзначаємо на осі косинусів інтервал, заданий вихідною нерівністю.

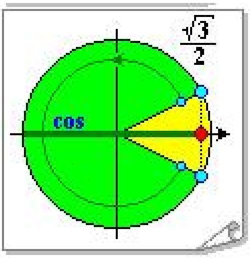


5. Проводимо дугу від початкового до кінцевого кута шуканого діапазону так, щоб вона перетинала виділений на осі синусів інтервал



6. Визначаємо приватні рішення найпростішої показової нерівності, тобто, початковий і кінцевий кути шуканого інтервалу в одному з кіл.

$$\left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{\pi}{6} + \ldots \\ x < \dfrac{11\pi}{6} + \ldots \end{array}\right.$$



7. Додаємо до обох кінців інтервалу загальний період рішення н $2\pi\cdot k,\ k\in Z$ ої тригоном... ті

$$\begin{cases} x > \frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot k \\ x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi\cdot k \end{cases},\ k\in Z$$

8. Виписуємо відповідь

$$x\in\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot k;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi\cdot k\right),\ k\in Z$$

3.*Зразки розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей*

Приклад 1. Розв’язати нерівність

$$\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Розв’язання. sin t - це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту t. Спочатку позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких більші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ці точки знаходяться вище прямої

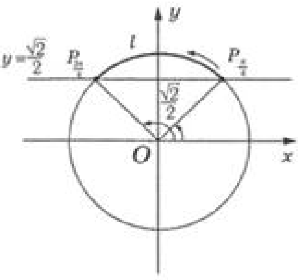
$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 1). Множина всіх таких точок — дуга l. Якщо рухатися по цій дузі проти руху годинникової стрілки, то початкова точка дуги l відповідає куту $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$, а кінцева — $\pi - arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Кути, що відповідають цим точкам, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≥), а тому на малюнку точки позначені жирно. Таким чином ,нерівність

$\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ задовольняють всі значення t такі, що $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$ Оскільки синус є функцією періодичною з найменшим додатним періодом 2π, то множину всіх розв'язків нерівності отримаємо, додавши до чисел π/4 і 3π/4 числа виду 2πk, $k \in Z$. Отже, маємо:

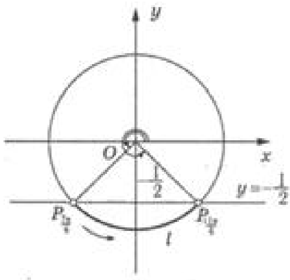
$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Відповідь можна подати і так:

$$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right],\ k \in Z.$$



мал. 1



мал. 2

Приклад 2. Розв’язати нерівність

$$\sin 2x < -\frac{1}{2}$$

Розв’язання. Позначимо 2x= t, маємо нерівність sin t < -1/2. Позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких менші за -1/2, це точки дуги l, які розташовані нижче прямої y = -1/2 (мал. 2). Кінці цієї дуги — точки, ординати яких дорівнюють -1/2; кути, що відповідають цим точкам, не входять у відповідь, оскільки знак нерівності “<“. Тому точки на малюнку «виколоті».

Якщо рухатися по дузі 1 проти годинникової стрілки, то початкова точка дуги 1 відповідає куту $\pi + arcsin\frac{1}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ а кінцева куту $2\pi - arcsin\frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Враховуючи періодичність, маємо:

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Повертаємося до змінної x:

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Розділимо всі три частини подвійної нерівності на 2. Маємо:

$$\frac{7\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$$

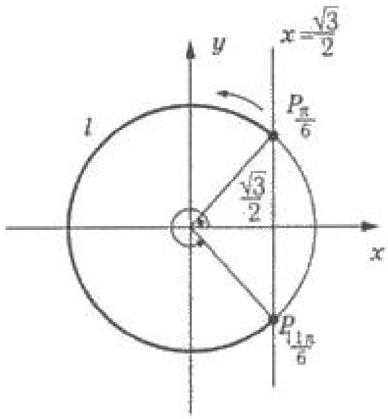
Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\mathbf{\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Розв'язання. cos t — це абсциса точки одиничного кола, що відповідає куту t. Позначимо на одиничному колі всі точки, абсциси яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ці точки розташовані лівіше прямої x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (мал.3), утворюють дугу l. Кути, що відповідають крайнім точкам дуги, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), тому точки на малюнку позначені жирно. При русі проти годинникової стрілки початкова точка дуги l відповідає куту arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ =π/6, а кінцева — куту $2\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Враховуючи періодичність косинуса, отримаємо розв'язки нерівності:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le t \le \frac{11\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$



мал. 3

Приклад 4. Розв’язати нерівність

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$$

Розв’язання. Позначимо x + π/3 = t, маємо cos t > 1/2. На малюнку 4 виділено відповідну дугу l, її кінцева точка відповідає куту arccos 1/2 = π/3, а початкова — куту arccos 1/2 = = -π/3. Маємо:

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k < t < \frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k \in Z.$$

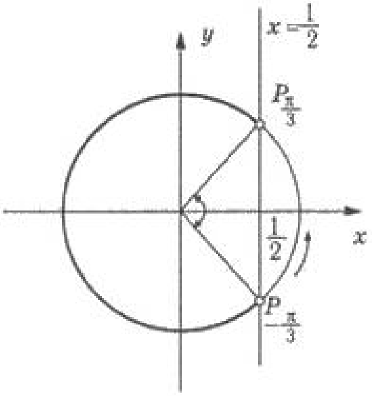
Повертаємося до змінної x:

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k < x+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k \in Z.$$

Віднімемо від трьох частин подвійної нерівності π/3. Маємо:

$$-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k \in Z;$$

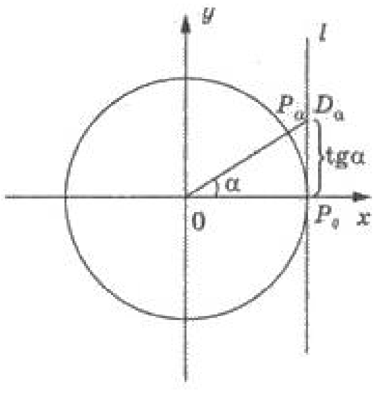
$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < 2\pi k, \quad k \in Z.$$



мал. 4

Для ілюстрації розв'язків нерівностей, у яких в лівій частині знаходиться tg t, а в правій — число, ознайомимося з лінією тангенсів.

Розглянемо пряму l, яка є дотичною до одиничного кола і проходить через точку (1;0)(мал. 5). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α. Нехай пряма OP_α перетинає пряму l у точці D_α. Тоді ордината точки D_α дорівнює тангенсу α.



мал. 5

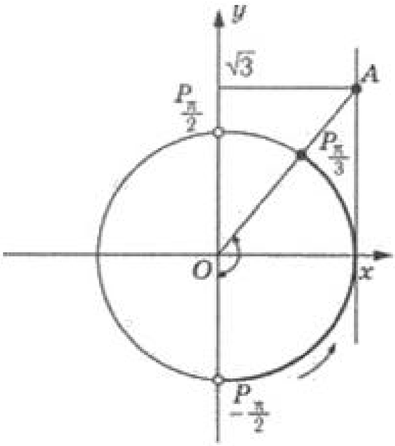
Приклад 5. Розв’язати нерівність

$$\mathbf{tg\ t \le \sqrt{3}.}$$

Розв’язання. Період функції тангенс дорівнює π,тому спочатку знайдемо розв’язки нерівності на проміжку (-π/2;π/2), а потім використаємо періодичність.

Проведемо лінію тангенсів, tg t - це ордината точки лінії тангенсів, що відповідає куту t. Позначимо на лінії тангенсів точку, ордината якої дорівнює $\sqrt{3}$ — точку А (мал. 6). Ця точка відповідає куту $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ а точки лінії тангенсів, у яких ординати менші за $\sqrt{3}$,відповідають кутам від -π/2 до π/3. Зауважимо, що кут π/3 буде входити у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), а кут -π/2 - не буде, оскільки tg (-π/2) — не існує. Отже на проміжку (-π/2;π/2) нерівність tg t ≤ $\sqrt{3}$ має розв'язки

$-\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{3}$. Враховуючи періодичність, маємо:



мал. 6

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z.$$

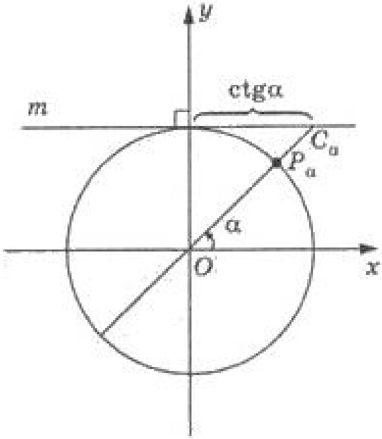
Приклад 6. Розв’язати нерівність

$$\mathbf{tg\ t \geq \sqrt{3}.}$$

Розв’язання. Використовуючи малюнок 6 та періодичність, маємо:

$$\frac{\pi}{3} + \pi k \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Пряму m, яка проходить через точку (0;1) перпендикулярно до осі ординат, називають лінією котангенсів (мал. 7). Абсциса точки C_α перетину прямої OP_α з лінією котангенсів дорівнює котангенсу α. Слід пам’ятати , що функція $y = \text{tg}\, x$ не визначена у точках вигляду: $x = \pi n, n \epsilon z$.

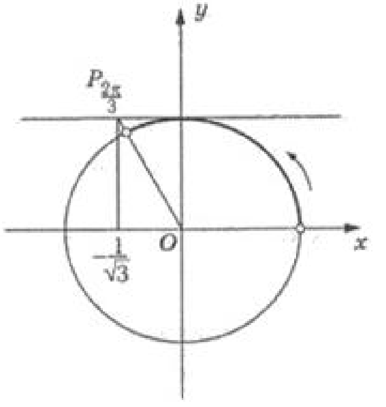


мал. 7

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\mathbf{ctg\ t > -\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Розв'язання (мал. 8). Використовуючи лінію котангенсів, отримаємо розв'язок нерівності на проміжку $(0;\pi)$: $0 < t < \frac{2\pi}{3}$. Далі використаємо періодичність:

$$\pi k \leq t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z.$$



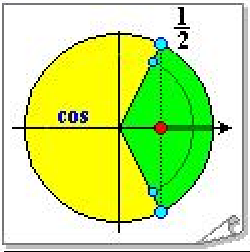
мал. 8

4.Завдання для самоконтролю.

Самостійно розв’яжить нерівності та звіртеся з відповідями:

1.

$$\cos x > \frac{1}{2}$$



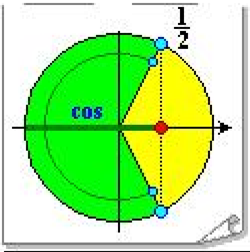
$$\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \\ x < \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \end{cases}, \; k \in Z$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\; \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k\right),\; k \in Z$$

2.

$$\cos x < \frac{1}{2}$$



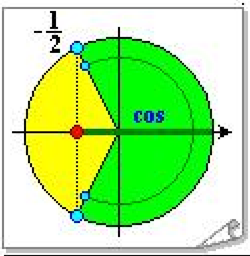
$$\cos x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \\ x < \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k \end{cases}, \ k \in Z$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; \ \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k \right), \ k \in Z$$

3.

$$\cos x > -\frac{1}{2}$$



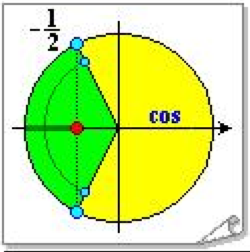
$$\cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k \\ x < \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k \end{cases}, \ k \in Z$$

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k; \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k \right), \ k \in Z$$

4.

$$\cos x < -\frac{1}{2}$$



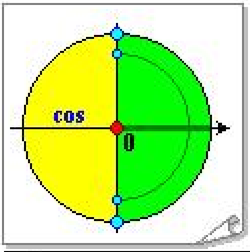
$$\cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \\ x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k \end{cases}, \ k \in Z$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k \right), \ k \in Z$$

5.

$$\cos x > 0$$



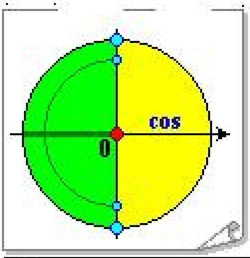
$$\cos x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \\ x < \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \end{cases}, \ k \in Z$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right), \ k \in Z$$

6.

$$\cos x < 0$$



$$\cos x < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \\ x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \end{cases}, \ k \in Z$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \ \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right), \ k \in Z$$

5. Розв’яжить самостійно:

1. Розв’яжіть нерівності:

1) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\operatorname{tg} x \geq -1$;

6) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$;

7) $\operatorname{tg} x \geq 2$;

8) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

Відповіді: 1) $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \epsilon Z$;

2) $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \epsilon Z$;

3) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right],\ n \epsilon Z$;

4) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \epsilon Z$;

5) $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$;

6) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$ **;**

7) $\left[arctg\, 2 + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z$;

8) $\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in Z$.

6.Завдання підвищеного рівня складності.

Розв’яжіть нерівність:

а) $|\sin x| > \frac{1}{2}$; б) $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Відповідь: а) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{5\pi}{6} + \pi n\right),\ n\epsilon Z$

б) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right],\ n\epsilon Z$