

**Дікарєв О.В.**

**ЦИФРОВА  
ОБРОБКА СИГНАЛІВ**

*Учбово-методичний посібник*

**2009**

**Державний комітет зв'язку та інформатизації України  
Міністерство освіти і науки України  
Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій**

**Дікарєв О.В.**

**ЦИФРОВА  
ОБРОБКА СИГНАЛІВ**

*Учбово-методичний посібник*

**2009**

*Учбово-методичний посібник О.В.Дікарєва  
“Цифрова обробка сигналів” був затверджений на  
кафедрі обчислювальної техніки ДУІКТ.*

*Протокол засідання кафедри №1 від 1.09.2009 р.*

## Тема №1

### Математичний апарат цифрової обробки сигналів

**Ціль.** Вивчення особливостей математичного апарата опису сигналів і лінійних систем.

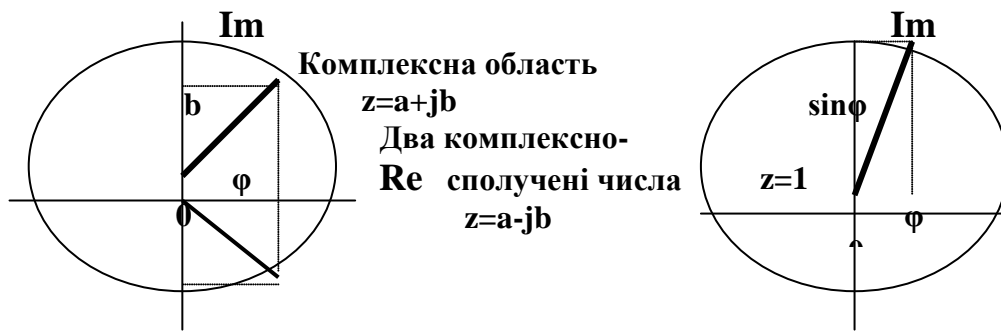
#### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

У 1933р. у матеріалах 1-му Всесоюзному з'їзду по електротехніці В.О. Котельніков сформулював свою відому теорему про дискретизацію сигналів: “Будь-яку функцію  $f(t)$ , що складається з частот від 0 до  $f(\max)$  можна передавати з будь-якою точністю за допомогою чисел, що впливають друг за другом через інтервали  $1/2f(\max)$  секунд”. Як числа фігурують миттєві значення функції. З цього часу цифрова обробка сигналів одержала своє визнання як наука.

#### §1. Комплексні числа

Сигнали, з якими приходиться мати справу в ЦОС, звичайно мають значення з області дійсних чисел. Однак математичні вираження для ряду Фур'є в комплексній формі набагато простіше і з ними постійно приходиться працювати.

Комплексне число  $z$  представляється як  $z=a+jb$ , де  $j$ -мніма одиниця, значення модуля дорівнює  $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ , а аргумент – кут між вектором  $z$  і віссю абсцис:  $\varphi=\arctg(b/a)$ . Два числа  $z=a+jb$  і  $z=a-jb$  називаються комплексно-сполученими. Вісь абсцис називається дійсною, а вісь ординат – мнімою. Розміщення комплексного числа у виді вектора в комплексній формі предсавлено на рис.1. Поруч показана тригонометрична форма представлення комплексного числа з модулем (радіусом), що дорівнює 1.



**Рис.1. Графічне представлення комплексно-сполучених чисел і формули Ейлера**

На підставі тригонометричної форми комплексного числа можливий перехід до його показової форми і формули Ейлера.

Її легко отримати, якщо тригонометричні функції й експоненту представити їх розкладанням у ряд Тейлора і порівняти результати:

$$\exp(jx) = \cos x + j \sin x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots;$$

$$e^{jx} = 1 + \frac{jx}{1!} + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + j(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots) = \cos x + j \sin x$$

На підставі формули Ейлера тригонометричні функції записуються як:

$$\cos x = 0.5[\exp(jx) + \exp(-jx)]$$

$$\sin x = 0.5j[\exp(jx) - \exp(-jx)]$$

Відзначимо, що функції  $\exp(jkx)$  і  $\exp(-jkx)$  є сполученими.

## § 2. Три способи опису аналогових і дискретних лінійних систем і сигналів

На практиці для спрощення обчислень використовується три способи математичного опису аналогових і дискретних лінійних систем і сигналів, між якими не скрізь мається взаємо-однозначна відповідність:

а) Перетворення Лапласа. Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем виконується в деякій абстрактній комплексній  $p$ (чи  $s$ ) – області Лапласа. Використовуються однобічні і двосторонні перетворення Лапласа.

Оператор Лапласа  $p=\delta+jk$ . Однобічне пряме і зворотне перетворення Лапласа для функцій  $f(t)$ , задовольняючих умові Дирихле, має вид:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} * \oint_C F(p) e^{pt} dp$$

Перетворення  $F(p)$  зветься ‘зображенням’ функції  $f(t)$ , а  $f(t)$ - оригіналом функції.  $C$  – замкнутий контур в області збіжності інтеграла по контуру існування функції.

Перетворення Лапласа існує для дійсної області  $Re(p)=c$ , якщо при деякім значенні “ $C$ ” сходиться інтеграл для абсолютного значення подинтегральної функції  $f(t)$ :

$$\int_0^{\infty} |f(t) * e^{at}| * dt.$$

б) Перетворення Фур'є. Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем виконується в конкретній частотно-часовий комплексній  $p$ (чи  $s$ ) області, де  $p=j\omega$ , тут  $\omega$  -кругова частота  $\omega=2\pi f$ ,  $f=1/T$ ,  $T$ -період повторення сигналу.  $j$ -мнима одиниця. Оскільки  $p=j\omega$ , перетворення Фур'є тотожно перетворенню Лапласа на комплексній осі  $j\omega$   $p$ -плоскості. Відповідно, однобічне пряме і зворотне перетворення Фур'є для функцій  $f(t)$ , задовольняючих умові Дирихле, має вигляд:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

**в) Z-перетворення.** При дослідженні дискретних сигналів і лінійних дискретних систем замість аналогового і дискретного перетворення Лапласа математики використовують так назване Z-перетворення, що виходить з перетворення Лапласа шляхом заміни перемінних  $z = \exp(p)$ . При цьому аналогова функція  $f(t)$  розбивається на дискрети згідно теореми Котельнікова-Найквіста і стає ґратчастою  $f(n)$ , T-інтервал дискретизації, n-номер вибірки. Вихідна аналогова функція  $f(t)$  у результаті дискретизації представляється у виді ґратчастої функції  $f(n)$ , а F(z)- її z-перетворення має вид:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}.$$

В останній формулі n-номер дійсної чи комплексної вибірки сигналу,  $f(n)$  – оригінал- послідовність дійсних або комплексних відліків, а F(z)-z-зображення функції  $f(n)$ .

### § 3. Співвідношення між p- і Z-площинами

Z-перетворення через оператор Лапласа  $p = \delta + j\kappa$  задається як  $z = \exp(p)$  і є комплексною величиною, яку можна записати в такий спосіб

$$z = m + jn,$$

або в полярних координатах  $z = r * \exp(j * \Theta)$ , де

$$r = |z| = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\Theta = \arg(z) = \arctg \frac{n}{m}$$

Доведено, що z-перетворення має сенс тільки в тому випадку, якщо сходиться інтеграл

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n},$$

а критерієм цього є збіжність (кінцевість)  $z$  – перетворення  $F(z)$  часової функції  $f(t)$  і збіжності її до деякого радіуса збіжності  $R$ , що задається у такий спосіб:

$$|z| > R \equiv \max_n \sqrt[n]{f(nT)}$$

Умовно графічно це показано на рис. 2:

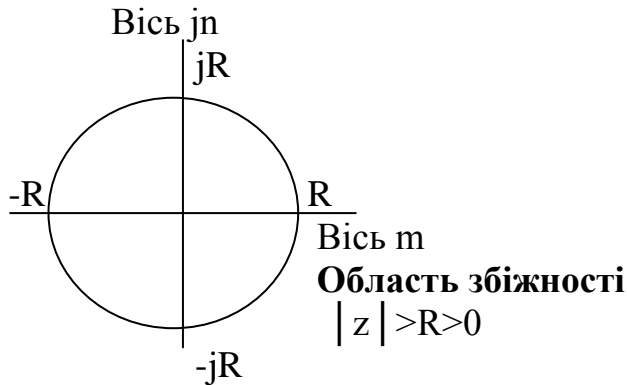


Рис.2. Область збіжності  $z$ -перетворення

Продовжимо розгляд взаємозв'язку  $p$ - і  $z$ -площин, що визначається наступним ланцюжком рівностей:

$$\begin{aligned} z &= e^{pT}, \\ p &= m + jn, \\ d + jg &= e^{mT + jnT} = e^{mT} * e^{jnT}. \end{aligned}$$

З урахуванням формули Ейлера і величини одного періоду множника, що повертає,  $e^{j\omega} = 2\pi$ , останнє вираження перетвориться таким чином:

$$\begin{aligned} d &= e^{mT} * \cos(nT + 2\pi k), \\ g &= e^{mT} * \sin(nT + 2\pi k), \\ k &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots, \\ z &= e^{mT} * e^{j(nT + 2\pi k)}. \end{aligned}$$

Найбільш характерні точки відповідності  $p$ - і  $z$ -площин:



- Точка р-площини з координатами  $m=0$  і  $n=0$  відображається в точку z-площини з координатами  $d=1$  і  $g=0$ :

$$z = e^{mT} * e^{j(nT+2\pi k)} = e^0 * e^{j(2\pi k)} = 1.$$

- Точка р-площини з координатами  $m=0$  і  $n=\pi/2T$  відображається в точку z-площини з координатами  $d=0$  і  $g=1$ :

$$z = e^{mT} * e^{j(nT+2\pi k)} = e^0 * e^{j(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = j.$$

Точки р-площини з координатами  $m=0$  і  $n=\pm\pi/T$  відображається в точку z-площини з координатами  $d=-1$  і  $g=-1$ :

$$z = e^0 * e^{j(\pm\pi+2\pi k)} = -1.$$

Усі ці точки р-площини лежать на мнимій осі ( $m=0$ )  $[n-\pi/T, n+\pi/T]$ . Цим точкам відповідають такі точки z-площини:

$$z = e^{j(nT+2\pi k)}.$$

Ці точки відповідають одиничної окружності, коли мнима вісь збігається з нескінченним числом одиничних співпадаючих кіл, що проектуються на мниму вісь.

- Точки лівої р-полуплоскості з координатами  $m < 0$  відображається усередину кола одиничного радіуса, оскільки:

$$|z| = e^{-mT} < 1.$$

- Центру кола на z-площині ( $z=0$ ) відповідає точка р-площини з координатами  $m=-\infty$  і  $n=0$ , тому що:

$$z = \frac{\exp(j(nT+2\pi k))}{\exp(\infty)} = 0.$$

## Завдання 1

1. Вивчити математичний апарат опису лінійних аналогових систем і сигналів.
2. Пояснити необхідність опису дійсних сигналів математичним апаратом комплексних чисел.
3. Чим замінюються аналогові сигнали в ЦОС?
4. Що дає використання формули Ейлера.

**5. Пояснити доцільність переходу від опису дискретних сигналів дискретним перетворенням Фур'є до z-перетворення.**

**Висновки за завданням 1 повинні містити порівняльну оцінку способів і методів опису аналогових і дискретних сигналів і лінійних систем, прийнятих у ЦОС.**

## Тема №2

### Основні типи дискретизованих сигналів

**Ціль.** Знайомство з основними типами сигналів, оброблюваних методами ЦОС.

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Сигнали, оброблювані методами цифрової обробки, ніколи не бувають одномірними. Звичайно вони описуються двома і більш параметрами: час – амплітуда, час – частота – фаза тощо. Часова зміна цих параметрів описується векторами станів. Вектор з нормою рівній одиниці, називається одиничним вектором. Одиничні вектори сигналу утворюють базис. Взаємно – перпендикулярні одиничні вектори, що описують параметри сигналу чи системи, утворюють ортонормований базис.

#### §1. Ортонормований базис

Нехай два вектори  $v_1$  і  $v_2$  взаємно перпендикулярні і дорівнюють 1, іншими словами, утворюють ортонормований базис. Нехай деякий сигнал, що виражається функцією  $f$ , по кожному з напрямків ортонормованого базису описується набором розмірів-векторів  $c_1$  і  $c_2$ . Цю функцію-сигнал через вектори ортонормованого базису можна виразити як  $f=c_1v_1+c_2v_2$ .

Коефіцієнти-вектори  $z_1$  і  $z_2$  виражають величину складових вектора  $f$  по напрямках  $c_1$  і  $c_2$ . Два вектори  $c_1v_1$  і  $c_2v_2$  називають проєкціями вектора  $f$ . Одержання проєкцій вектора  $f$  по проєкціях ортонормованого базису найпростіше продемонструвати на конкретних прикладах.

**Приклад 1.** Показати, що два вектори

$$v_1 = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right], \quad v_2 = \left[ \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \text{ утворюють ортогональний базис.}$$

**Рішення.** Виконаємо наступні операції:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right] * \left[ \frac{-1}{2} \right] + \left[ \frac{1}{2} \right] * \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 0,$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \right]^2} = 1, \quad \|v_2\| = \sqrt{\left[ \frac{-1}{2} \right]^2 + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2} = 1.$$

Добуток векторів дорівнює 0, модуль кожного вектору дорівнює 1, отже, зазначені вектори утворюють ортонормований базис.

**Приклад 2.** Розкласти вектор  $f = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right]$  по базису  $(v_1, v_2)$ ,

заданому в прикладі 1.

**Рішення.** Вектор  $f$  можна представити як  $f = c_1v_1 + c_2v_2$ .

Виконаємо ці операції:

$$c_1 = \langle f, v_1 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} * \frac{1}{2} = 2$$

$$c_2 = \langle f, v_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{-1}{2} + \frac{5}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Отже,  $f = 2v_1 + \sqrt{3}v_2$ .

Якщо сигнал представлений великим числом своїх вимірів  $N$ , то приходимо до необхідності одержання норми  $N$ -мірного простору, що визначається в такий спосіб:

$$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_{31}^2 + \dots + f_N^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^N f_k^2}. \quad (1)$$

Для безперервного вектора від підсумовування під знаком радикала переходять до інтегрування. Якщо до

того ж відомий інтервал усіх складових [a,b], норму вектора нормують по його величині:

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{b-a} * \int_a^b f^2(t) dt}. \quad (2)$$

По цій же причині у формулах розкладання і перетворення Фур'є використовується множник, що нормує, по періоду сигналу.

**Висновок.** Система функцій, використовувана в розкладанні Фур'є періодичних сигналів, а саме:

$$\cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \cos 3\omega t, \sin 3\omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin n\omega t$$

має властивість ортогональності, а сигнали, що розкладаються по системі цих функцій, називаються сигналами, розкладеними по ортогональному базису. Основна властивість таких сигналів полягає в тім, що інтеграл, узятий від добутку будь-яких двох функцій на періоді  $T=2\pi/\omega$  завжди дорівнює 0:

$$\int_0^T \cos k\omega t dt = 0; \int_0^T \sin k\omega t dt = 0; \int_0^T \cos k\omega t \cos n\omega t dt = 0;$$

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin n\omega t dt = 0; \int_0^T \sin k\omega t \sin n\omega t dt = 0 \dots$$

## §2. Дискретизація квадратурних сигналів

Розглянемо сигнал, у якому функцією часу є амплітуда і фаза:  $s(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$ .  $\omega$ -несуща частота сигналу, у порівнянні з який зміна амплітуди і фази відбувається значно повільніше. Частоту дискретизації сигналу виконаємо на підставі алгоритму квадратурної дискретизації, що передбачає додаткову його обробку.

Вихідний сигнал можна записати, як  $s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} e^{j\omega t}$ .

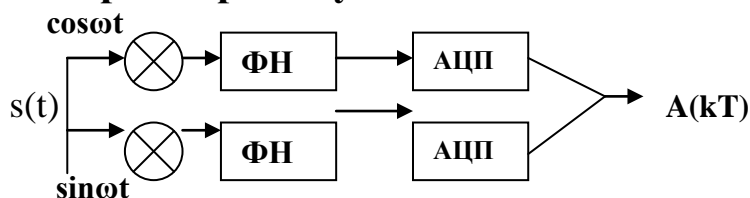
Інформативною є перша частина сигналу, до складу якої входить функція зміни амплітуди в часі:  $A(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ .

Спектр цього комплексного сигналу  $\omega \ll \omega$  частоти дискретизації вихідного сигналу, однак для своєї реалізації він має потребу в квадратурній дискретизації, алгоритм якої полягає в наступному.

**Вхідний сигнал збільшується на два коливання генератора-гетеродина несущої частоти  $\omega$ , що зрушений друг щодо друга на 90 градусів:  $\cos\omega t$  і  $\sin\omega t$ . Розглянемо отримані перетворення:**

$$\begin{aligned}
 s(t)\cos\omega t &= A(t)\cos(\omega t + \phi(t))\cos\omega t = \\
 &= \frac{1}{2} * A(t)\cos\phi(t) + \frac{1}{2} * A(t)\cos(2\omega t + \phi(t)) = \\
 &= \frac{1}{2} * \text{Re } A(t) + \frac{1}{2} * A(t)\cos(2\omega t + \phi(t)), \\
 s(t)\sin\omega t &= A(t)\cos(\omega t + \phi(t))\sin\omega t = \\
 &= -\frac{1}{2} * A(t)\sin\phi(t) + \frac{1}{2} * A(t)\cos(2\omega t - \phi(t)) = \\
 &= -\frac{1}{2} * \text{Im } A(t) + \frac{1}{2} * A(t)\cos(2\omega t - \phi(t)).
 \end{aligned}$$

**Отже, для одержання дійсної і мнимі частин комплексної обгинаючої сигналу потрібно після перемноження пропустити результати через фільтри нижніх частот для усунення другої гармоніки несущої. Після цього отримані сигнали, пропорційні дійсної і мнимі частини, піддаються дискретизації. Такий процес у радіотехніці називається гетеродинуванням. Він просто реалізується аналоговими схемами.**



**Рис.1. Квадратурний детектор**

### **§3. Амплітудна модуляція**

**Модулятори – після фільтрів є найбільш розповсюдженими вузлами радіотехнічної апаратури. У загальному випадку модулятори по заздалегідь заданому закону змінюють амплітуду, частоту або фазу несущого гармонійного сигналу. Найпростішим пристроєм зазначеного типу є амплітудний модулятор. Амплітудний модулятор здійснює множення несущого гармонійного сигналу  $s(t)=A\cos\omega t$  на сигнал, що**

модулює,  $q(t)$ :  $s(t)=A\cos\omega t * q(t)$ . Для перенесення спектру промодульованого сигналу необхідно знайти згортку спектрів несущого і сигналів, що модулюють. Спектр сигналу, що модулює, [4]:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-j\omega t} dt,$$

Спектри синусоїдального і косинусоїдального сигналів [4]:

$$S(\cos \omega t) = \pi[\delta(\omega - \omega_{\text{mod}}) + \delta(\omega + \omega_{\text{mod}})],$$

$$S(\sin \omega t) = -j\pi[\delta(\omega - \omega_{\text{mod}}) - \delta(\omega + \omega_{\text{mod}})].$$

Згортка спектрів несущого і сигналів, що модулюють, дає шуканий спектр промодульованого сигналу:

$$S(\omega) = A\pi[G(\omega)(\omega - \omega_{\text{mod}}) + G(\omega)(\omega + \omega_{\text{mod}})].$$



**Рис.2. Структурна схема амплітудного модулятора**

### Завдання

1. Законспектувати в протоколі приклади 1 і 2, докладно викласти особливості побудови ортонормованого базису.
2. Описати, яким образом функція розкладається по ортах базису.
3. За аналогією з прикладами 1 і 2 створити ортонормований і неортонормований базиси і методом підстановки показати їхні розходження.
4. Ввійти в програму MathCad, розкрити файл “Орт” і за аналогією з проробленим у ньому прикладом довести рівності:

$$\int_0^T \cos k\omega t dt = 0; \int_0^T \sin k\omega t dt = 0; \int_0^T \cos k\omega t \cos n\omega t dt = 0;$$

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin n\omega t dt = 0; \int_0^T \sin k\omega t \sin n\omega t dt = 0....$$

**Результати зафіксувати в протоколі і продемонструвати викладачу.**

**Висновки по роботі повинні містити зведення по перевагах ортонормованих базисів і ортогональних перетворювань.**



## Тема №3

### Розкладання періодичних сигналів у ряд Фур'є

**Ціль.** Вивчення методів і форм розкладання періодичних послідовностей сигналів у ряд Фур'є. Освоєння прямого і зворотного перетворення Фур'є.

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

У процесі освоєння курсу цифрової обробки сигналів необхідно мати на меті, що вивчається не конкретна фізична реалізація струму або напруги, а тільки їхня математична модель.

Історична довідка. У 1738р. акад. Данило Бернуллі досліджував хвильове рівняння коливання струни з жорстко закріпленими кінцями, де широко використовував гармонійні функції. Теоретично ці питання намагалися обґрунтувати Лаплас (1749-1827). Велику роль зіграли роботи акад. Л.Ейлера (1707-1783). У 1822р. французький інженер і математик Жан Батист Жозеф Фур'є (1768-1830) узагальнив результати, отримані для хвильового рівняння, показавши, що функцію довільного періоду у самому загальному виді можна описати як  $s(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ , де  $A$ -амплітуда,  $\omega$ -кругова частота і  $\varphi$ -початкова фаза, представивши її нескінченною дискретною сумою (1) періодичних

**тригонометричних функцій в ортонормованому базисі:**

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k * \cos(k\omega t) + b_k * \sin(k\omega t)), \\
 a_k &= \frac{2}{T} * \int_{-0.5T}^{0.5T} s(t) * \cos(k\omega t) dt, \\
 b_k &= \frac{2}{T} * \int_{-0.5T}^{0.5T} s(t) * \sin(k\omega t) dt, \\
 \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} * \int_{-0.5T}^{0.5T} s(t) * dt, \\
 \omega &= \frac{2\pi}{T}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

**У 1933р. В.А.Котельніков сформулював основну теорему, зміст якої полягає в тім, що будь-яка функція  $s(t)$ , з обмеженим спектром частот частот від 0 до  $s(\max)$  цілком визначається своїми значеннями, відліченими через інтервали часу  $1/2s(\max)$  секунд. Для такої функції не потрібно передавати в канал усі її значення, а лише окремі відліків. У якості відліків фігурують миттєві значення функції. На підставі цієї теореми в 1946р. В.А.Котельніков розробив теорію класичного гармонійного аналізу. З цього часу ця гілка цифрової обробки сигналів одержала своє визнання як наука.**

**У першій половині 20-го століття ЦОС була основою для створення статистичних методів виділення сигналів на тлі перешкод.**

**У 1927р. англійський математик Дж. Дзиг запропонував описувати періодичні процеси рекурсивною гармонійною кривою:**

**$U(k)=a(k-1)-U(k-2)+\varepsilon(k)$ , де  $\varepsilon(k)$  – мале короткочасне збурювання, зв'язане з кожним індексом  $k$ . Великий поштовх практичному використанню ЦОС дали розроблені Лантухом і Тьюкі алгоритми швидкого перетворення Фур'є з проріджуванням у часовій області. При довжині вибірки  $N$  використання алгоритму ШПФ приводить до зменшення обчислювальних операцій відповідно до вираження [3]:  $N^2 - \frac{N}{2} * \log_2 N$ .**

**Основні визначення.**

- Періодичною з періодом  $T$  називається функція, що описується вираженням  $s(t+nT)=s(t)$ ,  $n$ -довільне ціле число.
- Гармонійною називається функція, що у загальному випадку описується вираженням:  $s(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ , де  $A$ -амплітуда,  $\omega$ -кругова частота і  $\varphi$ -початкова фаза.
- Величина, зворотна періоду, називається частотою  $f=1/T$ .
- У теорії сигналів одержало поширення поняття кругової частоти  $\omega=2\pi f$ , вимірюваної в радіанах у секунду.
- Пари взаємно перпендикулярних векторів  $[v_1, v_2]$  називається ортогональним базисом. Якщо, крім того  $|v_1|=|v_2|=1$ , базис називається ортонормованим. Вектор з нормою рівною 1 називається одиничним вектором. Для двовимірної площини вектор  $f$  можна виразити через вектори ортонормованого базису і коефіцієнти  $C_1$  і  $C_2$  у такий спосіб  $f=C_1*v_1+C_2*v_2$ .
- Функцією Дирака або символом Кронекера  $\delta(t)$  називається нескінченно вузький імпульс з нескінченною амплітудою, розташований при нульовому значенні аргументу, і площа дельта-імпульсу дорівнює 1:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau).$$

Остання рівність характеризує фільтруючу властивість дельта-імпульсу.

## §1. Форми представлення ряду Фур'є

Дійсна форма. Формула (1) ряду Фур'є незручна в тім плані, що для кожної гармоніки розкладання сигналу в частотний ряд має два доданки із синус- і косинусними

складовими. Скориставшись формулою тригонометричних перетворень, цю суму можна замінити однією лише парною функцією косинуса з тією же основною круговою частотою, але іншою початковою фазою, отримуємо рівність (2):

$$\cos(M+N) = \sin M \cdot \cos N + \cos M \cdot \sin N, \text{Тогда}$$

$$A_k \cdot \cos(k\omega t + \varphi_k) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t), \quad (2)$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k).$$

**Комплексна форма.** Комплексна форма розкладання функції в ряд Фур'є виходить на підставі відомої формули Ейлера, у якій косинус виражається сумою експонент:

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t, \text{От куда}$$

$$\cos t = 0.5(e^{jt} + e^{-jt}),$$

(3)

$$s(t) = 0.5 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0.5 A_k (\exp(jk\omega t + \varphi_k) + \exp(-jk\omega t - \varphi_k)),$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk\omega t}.$$

**Комплексні коефіцієнти ряду зв'язані з амплітудами і фазами вказаного розкладання наступними співвідношеннями:**

$$C_k = 0.5 A_k \exp(j\varphi_k),$$

$$A_k = |C_k|, \dots, \varphi_k = \arg(C_k), \dots, C_k = 0.5(a_k - j b_k), \dots, a_k = 2 \operatorname{Re}(C_k), b_k = 2 \operatorname{Im}(C_k),$$

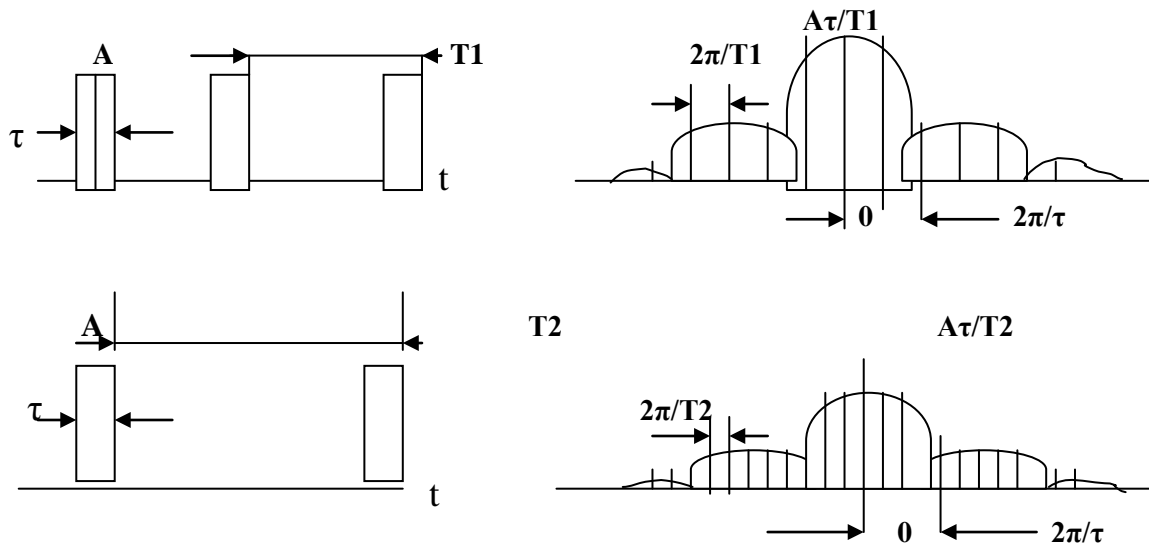
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} s(t) e^{(-jk\omega t)} dt \dots \dots \dots (4)$$

Якщо функція s(t) парна, коефіцієнти C(k) будуть чисто дійсними, а якщо s(t)-непарна C(k) будуть чисто мнимими.

Сукупність амплітуд гармонік ряду Фур'є називають його амплітудним спектром, а сукупність фаз – фазовим спектром.

## §2. Приклади розкладання періодичних послідовностей у ряд Фур'є

**Приклад 1.** Розкладання в ряд Фур'є послідовності прямокутних імпульсів з періодом  $T_1$ , амплітудою  $A$  і тривалістю кожного імпульсу  $\tau$  (рис.1):



**Рис.1.** Зміна спектра послідовності прямокутних імпульсів при дворазовому збільшенні їхнього періоду

Прямокутний імпульс є парною функцією, тому для його розкладання зручно користатися синусно-косинусним представленням ряду Фур'є (1), у якому будуть присутні тільки косинусні складові співмножників  $a(k)$  формули (1):

$$a_k = \frac{2}{T} * \int_{-0.5T}^{0.5T} A \cos\left(\frac{2k\pi}{T} * t\right) dt = \frac{2A}{k\tau} * \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right), \quad (6)$$

Позначимо відношення періоду  $T$  послідовності до довжини прямокутного імпульсу  $\tau$ , так названу скважність послідовності, як  $q=T/\tau$ . Тоді коефіцієнти згідно (6) можна розрахувати по формулі (7):

Постійна складова ряду  $a(0)$  дорівнює  $i$   $a(0)=(2A/q)=A\tau/T$ .

$$a(k) = (2A/k\pi) * \sin(k\pi/q) = (2A/q) * (\sin(k\pi/q)) / (k\pi/q). \quad (7)$$

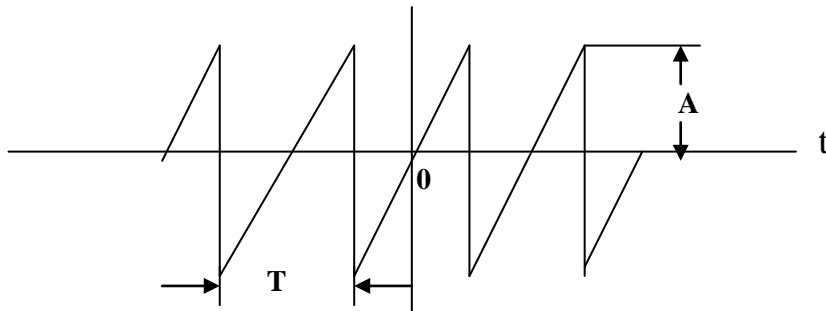
Таким чином, розкладання Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів у ряд Фур'є має вид:

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} * \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) * \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\right)t. \quad (8)$$

**Приклад 2.** Розкладання в ряд Фур'є послідовності пилкоподібних імпульсів (9) з періодом  $T$  і амплітудою  $A$ , що описується лінійною функцією (рис. 2):

$$s(t) = \frac{2A}{T} * (t - kT), \quad (9)$$

$$(k - 0.5)T < t \leq (k + 0.5)T.$$



**Рис.2. Послідовність пилкоподібних імпульсів**

Пилкоподібний сигнал – непарна функція, тому містить лише синусні доданки  $b(k)$ . Ці доданки і сам ряд мають вид виражень (10):

$$b_k = \frac{2}{T} * \int_{-0.5T}^{0.5T} \frac{2At}{T} * \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt = \frac{2A}{\pi k} * (-1)^k, \quad (10)$$

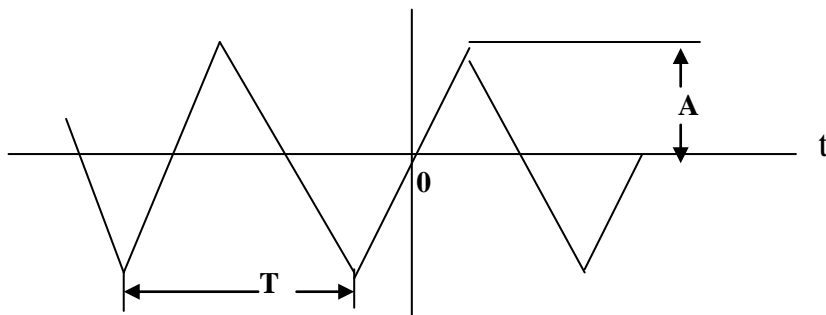
$$s(t) = \frac{2A}{\pi} * \left( \sin\left(\frac{2t\pi}{T}\right) - \frac{1}{2} * \sin\left(2 * \frac{2t\pi}{T}\right) + \frac{1}{3} * \sin\left(3 * \frac{2t\pi}{T}\right) - \frac{1}{4} * \sin\left(4 * \frac{2t\pi}{T}\right) + \dots \right)$$

У спектрах прямокутних і пилкоподібних імпульсів амплітуди гармонік убувають пропорційно їхньому номеру “k”.

**Приклад 3.** Розкладання в ряд Фур'є послідовності трикутних імпульсів (11) з періодом T і амплітудою A, що описується лінійною функцією (рис. 3):

$$s(t) = A \left( 1 - 4 \frac{|t - kT|}{T} \right), \quad (11)$$

$$(k - 0.5)T < t \leq (k + 0.5)T.$$



**Рис.3.** Послідовність трикутних імпульсів

Трикутний імпульс – парна функція, тому в представленні ряду Фур'є (1) будуть присутні тільки косинусні складові співмножників  $a(k)$  формули (1):

Ці доданки і сам ряд мають вид виражень (12):

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-0.5T}^{0.5T} A \left( 1 - 4 \frac{|t|}{T} \right) \cos\left(\frac{2kt\pi}{T}\right) dt = \frac{4A}{k\pi} \left( 1 - (-1)^k \right),$$

Здесь, 0..при..k = 2m..и..  $\frac{8A}{(k\pi)^2}$  ..при..k = 2m+1.

$$s(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left( \cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) + \frac{1}{3^2} \cos\left(3 \cdot \frac{2t\pi}{T}\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(5 \cdot \frac{2t\pi}{T}\right) + \frac{1}{7^2} \cos\left(7 \cdot \frac{2t\pi}{T}\right) + \dots \right)$$

(12).

У спектрах трикутних імпульсів амплітуди гармоніки убувають пропорційно квадрату номера “k”.

**Приклад 4.** Меандр. Меандром називається послідовність прямокутних імпульсів зі скважністю  $q=2$ ,

коли відстань між двома сусідніми імпульсами дорівнює його тривалості  $\tau$  (рис.4):

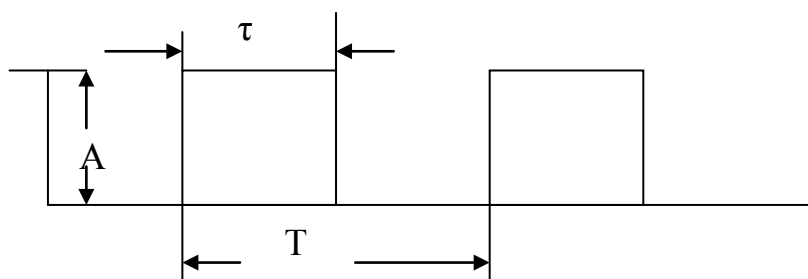


Рис. 4. Меандр

Меандр є різновидом періодичної послідовності прямокутних імпульсів. Дані до отримання спектру меандра:

$$b_k = \frac{A \cdot \sin(0.5 \cdot k\pi)}{0.5 \cdot k\pi}$$

$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left( \cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(3 \cdot \frac{2t\pi}{T}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5 \cdot \frac{2t\pi}{T}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7 \cdot \frac{2t\pi}{T}\right) + \dots \right)$$

### §3. Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є використовується для спектрального аналізу періодичних сигналів. Ідея (але не висновок!) одержання формул прямого і зворотного перетворення Фур'є достатня проста і легко просліджується на перетворенні періодичної послідовності прямокутних імпульсів рис.1.

Розглянемо другу частину рис.1, де період  $T=T_1$  збільшений у 2 рази. Кількість складових частот  $\omega=2\pi/T_2$  подвоїться, на осі кругових частот вони будуть розташовуватися в 2 рази частіше, амплітуда їх зменшиться, відстань між сусідніми бічними пелюстками  $2\pi/\tau$  не зміниться. Можна допустити, що спрямувавши період послідовності  $T \rightarrow \infty$  і залишивши в межі на часовій осі одиночний імпульс, одержимо суцільний безперевний спектр частот з нескінченно



малими амплітудами, у формулі (4) границі в інтегралі змінюються від  $-\infty$  до  $+\infty$ , оскільки вони все рівно захоплюють тільки один період, кругова частота перестає бути дискретною, стає безперечною і характеризується своєю щільністю, у формулі (4) убирається множник, що нормує,  $1/T$ , у результаті чого формула (4) перетворюється у формулу прямого перетворення Фур'є. У формулі (3) самого ряду Фур'є операція підсумовування заміняється інтегруванням, у неї вводиться множник, що нормує,  $1/2\pi$ , у результаті чого вона трансформується у формулу зворотного перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) * e^{-j\omega t} dt, \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо використовувати не кругову, а звичайну частоту, формули прямого і зворотного перетворення Фур'є виходять абсолютно симетричними:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) * e^{-j2\pi ft} dt, \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) * e^{j2\pi ft} df. \end{aligned}$$

#### §4. Основні властивості перетворення

Нижче без доказів сформульовані основні властивості перетворення Фур'є (доказу їх можна знайти в різних підручниках):

##### 1. Лінійність

$$\begin{aligned} s(t) &= af(t) + bg(t), \\ S(\omega) &= aF(\omega) + bG(\omega). \end{aligned}$$

##### 2. Затримка

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t - \tau), \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) * e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) * e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} = \\ &= F(\omega) e^{-j\omega\tau}. \end{aligned}$$

### 3. Зміна масштабу осі часу

$$s(t) = f(at),$$

$$S(\omega) = \frac{1}{a} * F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

### 4. Диференціювання сигналу

$$s(t) = \frac{df}{dt} = j\omega F(\omega)..$$

### 5. Інтегрування сигналу (без постійної складової)

$$S(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}..$$

### 6. Спектр згортки сигналів

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)d\tau = \\ = F(\omega)G(\omega).$$

## Завдання 1

1. Ввійти в систему MathCad і викликати свій робочий файл з ім'ям “номер\_групи\_номер\_бригади”, у який скопіювати уміст файлу “Ряд.mcd”. Закрити файл “Ряд.mcd”. Попередження ! З вихідним файлом-зразком “Ряд.mcd” ніяких операцій а також змін не проводити!

2. Вивчити теоретичні положення методичних вказівок до практичної роботи, особливу увагу приділяючи переходу від ряду до прямого і зворотного перетворення Фур'є, паралельно описуючи у своєму протоколі наступні питання:

- Для якої основної мети використовується ряд і розкладання Фур'є.
- Що являє собою спектр періодичної послідовності й окремого сигналу.
- Як задаються параметри послідовності і окремого сигналу.
- Яким образом у протоколі “Ряд.mcd” задається математична модель розкладання в ряд періодичної послідовності сигналів різної форми і спектра тієї ж самої послідовності.

- Пояснити, чому в протоколі графік вихідної послідовності має вид прямої лінії.

3. Провести експерименти з різними значеннями амплітуди  $A = 0.1, 2, 5, 10, 20$  і довжини імпульсу  $\tau = (0.1, 2, 5, 10, 20) * \tau$ , зробити висновок про характер змін у спектрі і результати відбити у своєму протоколі. Графіки в протоколі повинні ці тенденції наочно показати.

Висновки за завданням 1 повинні містити зведення по методах спектрального розкладання сигналів, що є основою їхнього гармонійного аналізу.

За 15 хвилин до закінчення заняття протокол повинний бути затверджений викладачем.

## Тема №4

### Формування імпульсів.

#### Перекручування імпульсів у каналі з перешкодами

**Ціль. Частина 1.** Вивчення способів формування одиночних імпульсів різної форми, а також періодичної послідовності імпульсів у середовищі MathCad. Представлення сигналів у часовій і частотній формі. Побудова і форматування демонстраційних графіків.

**Частина 2.** Вивчення особливостей прямого і зворотного перетворення Фур'є. Моделювання дискретних сигналів і передатної функції лінійного дискретного каналу. Способи моделювання перекручувань форми сигналів при проходженні їх по каналу з перешкодами в середовищі MathCad.

### ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

**Частина 1.** Вивчення способів формування одиночних імпульсів різної форми, а також періодичної послідовності імпульсів студенти виконують по зразках тих операцій, що представлені в демонстраційній програмі з ім'ям "Пркт1.mcd" у середовищі Mathcad. У зазначеному файлі послідовність виконуваних операцій описана в коментарях, якими вони супроводжуються. Особлива увага в роботі необхідно приділити створенню і застосуванню індексованих перемінних.

**Частина 2.** Виконується студентами по додаткових методичних вказівках - опису практичної роботи - яке додається особисто. Оформлення початку протоколу частини 2 практичної роботи проводиться в комп'ютерному класі.

Сама робота базується на наступних положеннях. У курсі “Цифрова обробка сигналів” розглядаються сигнали з кінцевим частотним спектром, що задовольняють умовам Дирихле, і лінійні канали (перетворювачі сигналів), у яких діють пряме і зворотне перетворення Фур'є, описуване парою симетричних перетворень:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * \exp(-j\omega t) * dt \quad x(t) = (1/2\pi) * \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \exp(j\omega t) * d\omega .$$

Для безперервних лінійних систем комплексна частотна характеристика перетворювача знаходиться щодо комплексного оператора Лапласа -  $W(s)$   $s=a+j$ , де  $a$  – константа, абсциса збіжності перетворення Лапласа. Такий вид комплексної частотної характеристики зветься передатною функцією каналу для перетворювача  $W(s)$ . У більш загальному випадку при заміні в  $W(s)$  оператора Лапласа комплексною круговою частотою  $j\omega$  передатна функція каналу - перетворювача переходить у його комплексну частотну характеристику  $W(j\omega)$ , що складається з двох компонентів: ампліудно-частотної (АЧХ) і фазочастотної характеристик каналу  $A(j\omega)$  і  $B(j\omega)$ . Комплексний спектр  $X(j\omega)$  лінійної системи представляється композицією цих компонентів:

$$X(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega).$$

На підставі основної властивості згортки лінійних систем: спектр згортки дорівнює добутку спектрів вхідних у неї співмножників – виходить простий універсальний трьохетапний алгоритм отримання сигналів після проходження їх через ЛНС (лінійну неперервну систему):

- На першому етапі знаходиться АЧХ перетворювача і спектр сигналу за допомогою прямого перетворення Фур'є.
- На другому етапі знаходиться їхній добуток (у середовищі MathCad).

- На третьому етапі зворотним перетворенням Фур'є знаходиться вид і параметри сигналу на виході ЛНС.

Розглянутий алгоритм реалізований у протоколі додаткового завдання практичної роботи № 3 і докладно розписаний у методичних указівках до нього.

Для того, щоб у системі MathCad перейти від часових параметрів сигналів до їх частотних аналогів (у протилежному разі закладені в MathCad функції прямого  $\text{fft}(x)$  і зворотного перетворення Фур'є  $\text{ifft}(X)$  працювати не будуть) необхідно, щоб для сигналу на вході ЛНС були задані його наступні параметри:

- Верхня гранична частота сигналу  $f_m$ .
- Інтервал Котельнікова-Найквіста  $T=1/2*f_m$ .
- Число дискретних відліків сигналу (наприклад,  $N=256$ ).
- Кутова верхня частота сигналу  $\Omega=2\pi f_m$ .
- Загальна тривалість сигналу в секундах  $T_M$ .
- Дискретний час відліку сигналу на часовій осі  $dt$ .
- Масив відліків дискретного сигналу  $t$ .
- $t_n$  і  $t_k$  – час початку і кінця відліків сигналу.
- Дискретність відліків спектральних складових сигналів  $df$ .
- Масив відліків сигналу по частоті  $\omega$ .

## Завдання 1

1. Ввійти в систему MathCad і викликати свій робочий файл з ім'ям “номер\_групи\_номер\_бригади”, у який скопіювати зміст файлу “Имплс1.mcd”. Закрити файл “Имплс1.mcd”. Попередження ! З вихідним файлом-зразком “Имплс1.mcd” ніяких операцій не проводити!

2. Вивчити і скласти блок-схему операцій, виконуваних при створенні одиночного прямокутного і пилкоподібного сигналу.

Провести експерименти, змінюючи амплітуду одиночного імпульсу  $a=1, 3, 7$  одиниць і тривалість 20,

60 і 100 одиниць. Зробити висновки по тенденції, що має місце щодо зміни спектру. Експерименти проводяться окремо для прямокутного і трикутного імпульсів, для чого в підменю **Format/Properties/Calculation/Evaluation/Enable** міняється на **Disable** і навпаки.

3. Замалювати графіки періодичних послідовностей спрямлених синусоїдальних і трикутних імпульсів. Пояснити, у чому виявляється рекурсія при створенні їх у середовищі MathCad.

4. Пояснити, чому формули прямого і зворотного перетворення Фур'є для періодичних послідовностей не діють.

У Висновках за завданням 1 повинні знайти відображення питання створення моделей сигналів різної форми, їхньої періодичної послідовності і демонстраційних графіків.

## Завдання 2

1. Ввійти в систему MathCad і викликати свій робочий файл з ім'ям "номер\_групи\_номер\_бригади", у який скопіювати уміст файлу "Имплс2.mcd". Закрити файл "Имплс2.mcd". Попередження ! З вихідним файлом-зразком "Имплс2.mcd" ніяких а також змін операцій не проводити!

2. Вивчити в додаткових методичних вказівках до практичної роботи №3 а також файлі "Имплс2.mcd", паралельно відображаючи у своєму протоколі наступні питання:

- Як описується передатна функція ЛНС через оператор Лапласа на початку протоколу.
- Що являє собою групова частота спектру ЛНС  $T_n$ .
- Як задаються параметри минаючого по ЛНС сигналу.
- Яким образом у протоколі "Имплс2.mcd" задається математична модель ідеальної і перекрученої АЧХ і ФЧХ.

- Як у програмі MathCad відкриваються і закриваються окремі математичні вираження при їхній компіляції і виконанні.

**3. Провести експерименти відповідно до вимог додаткових методичних вказівок і результати відбити у своєму протоколі.**

**Висновки за завданням 2 повинні містити зведення щодо методів перекручування сигналу в ЛНС та їхньої реалізації у середовищі MathCad.**

**Протокол повинний бути затверджений викладачем.**



## Тема №5

### Лінійні аналогові системи. Аналогові фільтри-прототипи

**Ціль.** Освоєння способів опису аналогових лінійних систем, їхніх параметрів, передачі сигналів і аналогових фільтрів-прототипів.

### ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

**Визначення.** Лінійною безперевною системою (ЛНС) називається стаціонарна в часі система передачі з постійними зосередженими параметрами, для якої виконується принцип суперпозиції: реакція системи на суму сигналів дорівнює сумі реакцій на ті ж сигнали, подавані порізно.

#### §1. Опис лінійних безперевних систем

Під описом лінійних систем із зосередженими стаціонарними параметрами розуміють зв'язок між наступними по ній вхідними і вихідними сигналами. У загальному виді цей зв'язок виражається диференціальним рівнянням (1-4):

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d y}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{d x}{dt} + b_0 x(t), \quad (1)$$

$a_k, b_k$  –

постійні коефіцієнти,  $x(t)$ ,  $y(t)$ -вхідний і вихідний сигнали,  $m \leq n$ . Якщо задатися конкретною функцією вхідного сигналу  $x(t)$ , вийде лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами,

рішення якого дозволяє одержати сигнал на виході ЛНС  $y(t)$ .

Застосуємо до обох частин рівняння (1) перетворення Лапласа:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s^1 + a_0}. \quad (2)$$

Функція  $H(s)$  є найважливішою характеристикою лінійної безперервної системи і називається її передатною функцією. Корені рівнянь:

$$M(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s^1 + b_0 = 0,$$

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s^1 + a_0 = 0$$

називаються відповідно нулями і полюсами передатної функції. Передатна функція являє собою оператор, що вхідний вплив ЛНС перетворить у вихідну реакцію, причому  $m < n$ .

Перейдемо від оператора Лапласа до перетворення Фур'є  $s = j\omega$ :

$$K(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + b_{m-2} (j\omega)^{m-2} + \dots + b_1 (j\omega)^1 + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 (j\omega)^1 + a_0}.$$

Якщо знайти для вираження (2) корені поліномів чисельника і знаменника, то його можна представити як:

$$H(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})(s - z_{m-2}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})(s - p_{n-2}) \dots (s - p_1)}, \quad (3)$$

$$k = \frac{b_m}{a_n} \dots \dots \dots$$

У вираженні (3)  $k$ -коефіцієнт посилення,  $\{z(i)\}$  – нулі функції передачі і  $\{p(i)\}$ -полюси, у яких функція передачі дорівнює нескінченності. Функцію передачі можна зобразити також у виді суми простих дробів:

$$H(s) = C_0 + \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \frac{r_{n-2}}{s - p_{n-2}} + \dots + \frac{r_1}{s - p_1}. \quad (4)$$

У вираженні (4)  $C(0)$ -ціла частина функції передачі,  $r(i)$ -полюси,  $r(i)$ -відраховання, що можуть бути комплексними і комплексно-сполученими.

## §2. Параметри лінійних безперевнних систем

**Твердження 1.** Імпульсною характеристикою лінійної безперевнної системи називається реакція на проходження по ній безперевнного  $\delta(t)$ -імпульсу. Для ЛНС імпульсна характеристика позначається як  $h(t)$ .

**Твердження 2.** Вихідний сигнал ЛНС із постійними параметрами дорівнює згортку вхідного сигналу і її імпульсною характеристикою:

$$s_{vix}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{vx}(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (5)$$

Цей факт можна уявити собі як результат теореми Котельнікова для сигналу з необмеженою верхньою частотою.

На підставі властивостей перетворення Фур'є спектр вихідного сигналу ЛНС знаходиться у виді добуток спектра вхідного сигналу на комплексну частотну характеристику ЛНС:  $S(\omega)_{vix} = S(\omega)_{vx} K(\omega)$ .

**Твердження 3.** Перехідна характеристика  $g(t)$  являє собою реакцію ЛНС на вхідний сигнал у формі одиничного стрибка.

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \text{ От кудa } g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau.$$

**Твердження 4.** Комплексним коефіцієнтом передачі називається перетворення Фур'є імпульсної характеристики ЛНС із постійними параметрами:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jt\omega} dt. \quad (6)$$

Комплексний коефіцієнт передачі  $D(\omega)$  – це характеристика, що показує зміну комплексної частоти  $\omega$ . Модуль комплексного коефіцієнта передачі являє собою амплітудно-частотну характеристику ЛНС, а аргумент – фазочастотну характеристику. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) показує, у скількох разів міняється її амплітуда в ЛНС, а фазочастотна характеристика (ФЧХ) показує її фазове зрушення.

**Твердження 5.** Фазова затримка на частоті  $\omega$  – це затримка, внесена ЛНС на даній частоті зі зворотним знаком:  $t(\text{зад}) = -\phi(\omega)/\omega$ .

Групова затримка на частоті  $\omega$  – це затримка що обгинає узкополосного сигналу із середньою частотою  $\omega$  з зворотним знаком  $t(\text{зад}) = -d\phi(\omega)/d\omega$ .

Для ЛНС без перешкод комплексна частотна характеристика дорівнює 1 або константі, фазочастотна характеристика лінійна і групова затримка постійна.

### §3. Аналогові фільтри-прототипи

Як і аналогові, цифрові фільтри підрозділяються на фільтри нижніх, верхніх частот і смугові фільтри. Розроблено різні способи синтезу дискретних фільтрів. Велике поширення одержав спосіб розрахунку дискретних фільтрів на підставі перетворенні комплексній частотній характеристиці аналогового фільтра-прототипу.

**Визначення.** Фільтром-прототипом називають ідеалізований аналоговий фільтр нижніх частот з частотою зрізу  $1\text{рад}\cdot\text{сек}$ , що допускає перетворення, необхідні для розрахунку дискретних фільтрів нижніх частот (ФНЧ), верхніх частот (ФВЧ) і смугових фільтрів (ПФ).

При проектуванні фільтрів задаються двома основними параметрами, що у літературі позначаються

по-різному: нерівномірністю АЧХ у смузі пропускання  $R=20\log(\delta A(\omega))$ дБ і загасанням у смузі затримування  $L=20\log(\xi A(\omega))$ дБ.

**Фільтр Батерворта.** Функція передачі фільтра Батерворта:  $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_{cp})^{2n}}}$ , тут  $n$  – порядок фільтра,

$\omega(0)$ - частота зрізу на рівні  $1/\sqrt{2}=0.707=-3$ дБ. Полюса фільтра, число яких дорівнює порядку фільтра, розташовуються в лівій частині комплексної області. Порядок  $n$  фільтра Батерворта при заданих значеннях  $R$  і  $L$  визначаються по формулі:

$$n \geq \frac{\log \sqrt{(10^{0.1L} - 1)/(10^{0.1R} - 1)}}{\log(\omega/\omega_1)}, \text{ — } \omega_1 \text{ — частота _среза.}$$

**Передатна функція нормованого фільтра Батерворта нижніх частот:**

$$H(p) = 1/N(p) = 1/\prod_{k=1}^n (p - p_k).$$

$N(p)$ - поліном Батерворта  $n$ -ого порядку,  $p_k$ -полюси фільтра:

$$p_k = \cos \pi \frac{n-1+2k}{2n} + j \sin \pi \frac{n-1+2k}{2n}.$$

Поліноми  $N(p)$  нормованих фільтрів Батерворта затабулировані.

**Фільтр Чебишева 1-го роду.** Функція передачі фільтра

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_{cp})}}, \dots, T_n(\omega) = \frac{\cos(n \arccos(\omega))}{2^{n-1}}.$$

тут  $T(\omega)$ - поліном Чебишева  $n$ -ого порядку, де  $n$  - порядок фільтра. Полином Чебишева коливається в смузі  $[-1,1]$ , у результаті чого АЧХ фільтра Чебишева 1-го роду в смузі пропускання пульсує в інтервалі  $[1, \sqrt{1 + \varepsilon^2}]$ , где  $\varepsilon$  - величина пульсацій. Порядок фільтра

Чебишева визначається формулою:

$$n \geq \frac{\text{Arch} \sqrt{(10^{0.1L} - 1)/(10^{0.1R} - 1)}}{\text{Arch}(\omega/\omega_1)}, \text{ — } \omega_1 \text{ — частота _среза.}$$

У фільтрах Чебишева 1-го і 2-го роду просліджується взаємозв'язок між тригонометричними й еліптичними функціями.

У порівнянні з фільтром Батерворта того ж порядку фільтр Чебишева забезпечує більш крутий спад АЧХ у перехідній області від смуги пропущення до смуги затримування.

**Фільтр Чебишева 2-го роду. Функція передачі фільтра**

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{T_n^2(\omega_0/\omega)}}}$$

АЧХ фільтра Чебишева 2-го роду монотонно загасає в смузі пропущення, а в смузі затримування коливається в інтервалі між нулем і величиною  $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ . Коефіцієнт передачі на нульовій частоті дорівнює 1, а в смузі затримування – заданому рівню пульсацій напруги.

**Еліптичний фільтр Кауэра. Функція передачі фільтра**

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega_0/\omega), L}} \text{.Здесь: } R_n -$$

функція Чебишева n-го порядку. Фільтр Кауэра поєднує в собі достоїнства фільтрів Чебишева 1-го і 2-го роду: має пульсації заданої величини як у смузі пропущення, так і в смузі затримування і максимальну крутість переходу між зазначеними областями.

**Фільтр Бесея.** Фільтр Бесея не апроксимує прямокутну АЧХ, а скоріше функцію близьку до експоненти. Для фільтра Бесея груповий час у смузі пропущення залишається постійним. Функція передачі фільтра описується вираженням:

$$H(s) = \frac{d_0}{\sum_{k=0}^n d_k s^k}, \text{ где } d_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-1} k!(n-k)!} - \text{коэффициенти полинома.}$$

Зміна частоти зрізу ФНЧ фільтра-прототипу для перетворення його у ФВЧ виробляється по формулі  $s > s/\omega$ , де  $\omega$ -частота зрізу ФНЧ.

## **Тема №6**

## Спектр дискретного сигналу. Теорема і формула Котельнікова

**Ціль.** Вивчення методів дискретизації аналогового сигналу з обмеженим спектром. Інтервал Найквіста. Теорема і формула Котельнікова.

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Перетворення Фур'є дозволяє одержати спектральну щільність сигналу, як функцію часу, Оскільки дискретні відліки аналогового сигналу являє собою звичайний набір дійсних чисел, не зв'язаних між собою функціональною залежністю, потрібно таку залежність установити. Математично дискретизований сигнал звичайно представляється у виді суми окремих значень аналогового сигналу, узятих на відстані інтервалу Найквіста  $T$ , помножених на дельта-функцію:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t-k). \quad (1)$$

Щоб правомочність такого представлення була більш ясною, необхідно розглянути особливості спеціальної  $\delta$ -функції.

#### §1. Дельта-функція і білий шум

$\delta$ -функція ( $\delta$ -імпульс) – це прямокутний дуже короткий імпульс, ширина якого  $\tau$ , а висота  $1/\tau$ . При  $\tau \rightarrow 0$  площа  $\delta$ -імпульсу дорівнює 1. Висота імпульсу прагне до нескінченності, а ширина до 0. Для  $\delta$ -функції справедливі наступні рауенства (2)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & : t=0 \\ 0 & : t \neq 0. \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(t) dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt = f(\tau). \quad (2)$$



З (2) випливає, що  $\delta$ -функція в нульовій точці має фільтруючу властивість, що дозволяє вибрати в цій крапці значення сигналу  $f(T)$ .

Якщо  $\delta$ -функції рівномірно розмістити на тимчасовій осі через інтервали часу  $T$  – інтервали дискретизації Найквіста – те можна знайти спектр уже періодичної  $\delta$ -функції, розклавши її в статичній ряд Фур'є. Оскільки спектр  $\delta$ -функції одиничний, а інтервал її повторення дорівнює  $T$ , ряд Фур'є на інтервалі періоду дискретизації дорівнює частоті дискретизації  $f(T)=1/T$ . Виходять наступні закономірності:

$$\sigma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

$$S(\delta(kT)) = \frac{1}{T} * \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) * e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T}. \quad (3)$$

Отже, періодична послідовність  $\delta$ -функцій, зрушених на крок дискретизації,  $\omega=2\pi n/T$ , має вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}. \quad (4)$$

Формула (3) показує, що по всьому нескінченному частотному спектрі амплітуди всіх частот  $\delta$  – імпульсу однаковий і сам частотний спектр дорівнює 1. Фази ж усіх частот строго упорядковані, оскільки усі вони починаються на початку координат де для  $\delta(\tau)$   $\tau=0$ . Якщо ж на тимчасовій осі фази частотного спектра короткого прямокутного сигналу еквівалентного  $\delta$ -імпульсу неупорядковані, випадкові, безладні, виходить білий шум. Завдяки такій властивості фаз частотного спектра спектр  $\delta$ -імпульсу і білий шум – два абсолютно різних фізичних явища.

## §2. Спектр дискретного сигналу

У результаті розгляду особливостей періодичної  $\delta$ -функції з періодом  $T$  стає очевидним, що до значення кожного відліку дискретизованого сигналу без порушення фізики явищ можна додати додатковий співмножник  $\exp(j\omega t)$ :

$$s(t)_{dickr} = \frac{1}{T} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t) e^{jt\omega}$$

Тоді, по формулі розкладання в ряд Фур'є дискретизованого сигналу (1), з урахуванням множення значення кожної вибірки на  $\exp(j\omega t)$ , спектр вихідного сигналу, відновлений по спектрах окремих його вибірок, відповідає зрушенню його спектральної функції на кутову частоту дискретизації аналогового сигналу  $\omega$  (5):

$$S(\omega)_{dickr} = \frac{1}{T} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - \frac{2k\pi}{T}). \quad (5)$$

Формула (5) показує, що спектр дискретизованого сигналу являє собою в загальному випадку нескінченний ряд копій вихідного сигналу (мал.1), зрушених друг щодо друга на тимчасову відстань, рівна частоті дискретизації  $\omega=2\pi/T$ . Звідси ж (мал.1) стає зрозумілим, що якщо частота дискретизації менше частоти Найквіста (випадок 2, рис.1), відновлення аналогового сигналу по його дискретним відлікам стає неможливим. У випадку (3) пропускну здатність дискретного каналу використовується не цілком. Приведені міркування в строгому математичному обґрунтуванні доведені в теоремі Котельнікова, з якої виходить основоположуюча формула, що зв'язує аналоговий і дискретний сигнали.

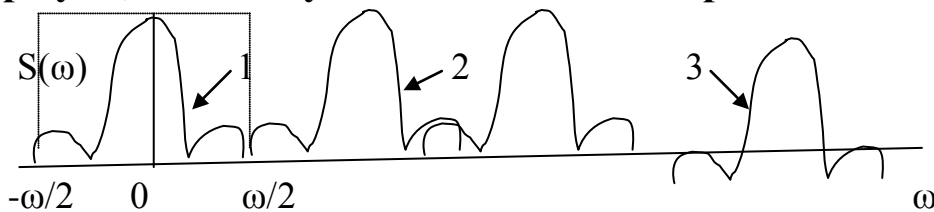


Рис.1. Спектр дискретизованого сигналу

З рис.1 випливає і ще один висновок: якщо використовувати низькочастотний чи смуговий фільтр із кутовою смугою пропущення ? і вирізувати на осі частот спектр однієї вибірки аналогового сигналу, те

зворотним перетворенням Фур'є цей сигнал може бути відновлений у первісному виді.

### §3. Теорема і формула Котельнікова

**Теорема.** Будь-яку функцію  $f$ , що складається з частот від 0 до  $f(\max)$  включно, можна передавати з будь-яким ступенем точності за допомогою чисел, що впливають друг за другом через інтервали часу  $1/2f(\max)$  секунд.

**Доказ** (по А.А.Харкевичу). Застосуємо формули прямого і зворотного перетворення Фур'є:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-j\omega t} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * e^{j\omega t} d\omega.$$

У нашому окремому випадку обмеженого спектра  $\omega(\max)=2\pi f(\max)$  вираження прямого Фур'є-перетворення прийме вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\omega(\max)}^{\omega(\max)} S(\omega) * e^{j\omega t} d\omega,$$

Оскільки частотний спектр за межами  $f(\max)$   $S(\omega)=0$ , те саму функцію  $S(\omega)$  на інтервалі  $[-\omega(\max), \omega(\max)]$  по періоду  $T$  також можна розкласти в ряд Фур'є:

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k * e^{jk\pi(\omega / \omega(\max))}.$$

Тут  $D(\omega)$ -обмежене значенням  $f(\max)$  пряме перетворення Фур'є: частотна функція вихідного сигналу. Ця функція з частотою дискретизації  $T$  точно так само може бути розкладена в ряд Фур'є (по формулі прямого перетворення):

$$D_k = \frac{1}{2\omega(\max)} * \int_{-\omega(\max)}^{\omega(\max)} S(\omega) * e^{-jk\pi(\omega / \omega(\max))} d\omega.$$

Підставляючи останнє вираження в аналогічну формулу прямого перетворення Фур'є і змінюючи порядок виконання операцій, одержуємо:

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} * \int_{-\omega(\max)}^{\omega(\max)} (\sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\pi\omega / \omega(\max)}) e^{jt\omega} d\omega,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \sum_{-\infty}^{\infty} D_k * \int_{-\omega(\max)}^{\infty} e^{j\omega(t + \pi / \omega(\max))} d\omega.$$

Після інтегрування це вираження має вид:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} * \sum_{-\infty}^{\infty} D_k * \frac{\sin(\omega(\max))(t + \pi / \omega(\max))}{(t + \pi / \omega(\max))}. \quad (6)$$

Зворотнє переутворення Фур'є частотної функції з обмеженим спектром у (5) приводить до рівності  $D_k = f(kT)$ . Остаточний вид формули Котельнікова:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) * \frac{\sin(\pi * \frac{t - kT}{T})}{(\pi * \frac{t - kT}{T})}. \quad (7)$$

З формули (7) випливає основна властивість сигналу з обмеженим спектром – він нескінченний у часі. І хоча кількість ненульових відліків цього сигналу складає рахункове множество, сам сигнал на тимчасовій осі, наближаючи до 0, ніколи не кінчається.

### Завдання

1. Ввійти в систему Mathcad і викликати свій робочий файл з ім'ям “номер\_групи\_номер\_бригади”, у який скопіювати уміст файлу “Найквист.mcd”. Закрити файл “Найквист.mcd”, нічого в ньому не змінюючи!
2. Вивчити теоретичні основи дискретизації аналогових сигналів, виклавши їх у виді реферату у своєму протоколі по даній роботі.
3. Налагодити в середовищі Mathcad розрахункові вираження, що входять у формулу (7) для перебування одного складової аналогового сигналу і всього сигналу в цілому.

4. Під відповідними розрахунковими вираженнями побудувати демонстраційні графіки, отформатувати і отмасштабувати їх.
5. Змінюючи в розрахункових формулах значення параметрів “k”, “T”, “t”, “f” у межах півтора-два порядку, досліджувати тенденцію, що має місце, зміни розрахункових співвідношень.
6. Оформити протокол проробленої роботи і представити його на перевірку і твердження викладачу.  
Висновки по роботі повинні містити зведення по теоретичних і практичних основах дискретизації і відновленню аналогових сигналів з обмеженим спектром.

## Тема №7

### Перетворення Лапласа, Фур'є і Z-перетворення

**Ціль.** Освоєння способів опису аналогових і дискретних лінійних систем. Основні властивості Z-перетворення.

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

З метою спрощення математичних розрахунків лінійні дискретні системи прийнята представляти в Z-області. Нагадаємо, що z-перетворення виходить з формули Лапласа шляхом заміни перемінних  $z = \exp(p)$ ,  $p = \delta + j\omega$ ,  $\delta$ -дійсна перемінна.

#### §1. Нормування частоти

Частота Котельнікова-Найквіста завжди в два рази більше максимісної частоти аналогового сигналу  $f(\max)$ , що піддається дискретизації і складає  $w = 2f(\max)$ . Відповідно кругова частота і період дискретизації Котельнікова – Найквіста рівні  $\omega = 2\pi f(\max)$  і  $T = 1/2f(\max)$ . Звідси випливає, що частота і кругова частота дискретизації являють собою ту постійну межу, до якого можна віднести поточну частоту дискретизуемого сигналу (іншими словами, пронормировать сигнал) і ця відносна нормировуванна частота завжди буде знаходитися в межах  $w = 0 \dots 0.5$ :

$$w = \frac{\text{текущая частота аналогового сигнала}}{\text{частота дискретизации Найквиста}} = 0 \dots 0.5.$$

Такий підхід дозволяє частотний спектр аналогових сигналів вивчати в нормованих частотах в інтервалі  $w = 0 \dots 0.5$ .

Наприклад, нехай два періодичних сигнали описуються функціями  $g(t) = A \sin(2\pi F_1(1))t$  і  $x(t) = B \cos(2\pi F_2(1))t$ , причому поточна частота першого

сигналу  $F1(1)=40\text{Гц}$ , а другого  $F2(1)=1000\text{Гц}$ . Верхня частота першого сигналу  $F1(\text{max})=200\text{Гц}$  і другого  $F2(\text{max})=5000\text{Гц}$ . Нормована відносна частота обох сигналів однакова і дорівнює  $w=0.1$ , що легко перевірити.

## §2. Перетворення Фур'є в $p$ - і $z$ -областях

Однобічне і двостороннє перетворення Фур'є відкриває можливості опису лінійних сигналів і систем у  $p$ -області Лапласа й у частотних областях. Нехай  $z=a+jb$ , а  $p=\delta+j\omega$ . Тоді при переході від  $p$ -області Лапласа до  $Z$ -перетворення і безперевинному збільшенні перемінної  $j\omega$  у  $p$ -області відбувається багаторазовий циклічний обхід одиничної окружності в  $z$ -області проти вартовий стрілки (рис.1):

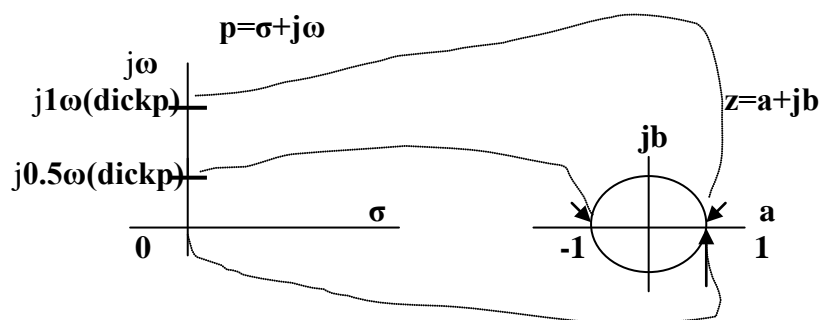


Рис.1. Перехід від  $p$ - до  $z$ -області

Перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(p) e^{pt} dp.$$

Пряме і зворотнє перетворення Фур'є:  
Якщо використовувати перехід  $F(j\omega)=F(p)$  при  $p=j\omega$ , одержимо пряме і зворотнє перетворення Фур'є:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

У (1) використовується одностороннє перетворення Фур'є, оскільки передбачається що в ЛНС сигнал починається на початку координат при нульовому часі.

### §. 3. Перехід до математичного представлення дискретних сигналів і лінійних систем

**Ряд Фур'є.** При дискретизації аналогового сигналу з періодом Найквіста  $T$ , аналоговий сигнал замінюється періодичним набором його вибірок з періодом  $\omega(\text{дискр}) = \Omega = 2\pi/T$ . Первісний сигнал замість безперервної функції  $f(t)$  тепер представляється ґратчастою функцією  $f(n)$ . Обидві форми опису сигналу згідно теореми і формули Котельнікова рівноправні. Але цей факт дозволяє від Фур'є-перетворення (2) перейти до ряду Фур'є:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) e^{jk\Omega t}, \quad (3)$$

$$F(k) = \frac{1}{T} * \int_{-0.5T}^{0.5T} f(t) e^{-jk\Omega t} dt, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

У (3) “ $k$ ”-нормована частота, що відповідає  $k$ -ому номеру дискретної вибірки. Дійсне значення цієї частоти по номері вибірки знаходиться як  $\omega = k\Omega$ . Комплексні коефіцієнти ряду Фур'є знаходяться на інтервалі періоду дискретизації  $[0.5T, 0.5T]$ .

**Дискретне перетворення Лапласа.** Перехід від аналогової до ґратчастої форми представлення вихідної функції, що еквівалентно переходу від аналогового до дискретного часу  $t \rightarrow n$  і від аналогового сигналу до ґратчастого  $f(t) \rightarrow f(n)$ , приводить до заміни в (1) інтеграла нескінченною сумою й одержанню дискретного перетворення Лапласа:



$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT}. \quad (4)$$

Вираження (4) справедливо лише в тому випадку, якщо сума має кінцеву межу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| e^{-pnT} < \infty.$$

**Z-перетворення.** Якщо у вираженні (4) провести заміну  $z = e^{pT}$ , приходимо до **Z-перетворення функції f(n)** (5):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-n}. \quad (5)$$

Далі без доказу приводяться основні властивості Z-перетворення.

#### §4. Основні властивості Z-перетворення

##### 1. Лінійність:

**Якщо**  $s(nT) = ax(nT) + by(nT)$ ,

**то**  $S(Z) = aX(Z) + bY(Z)$ .

##### 2. Запізнювання:

**Якщо**  $s(nT) = ax(nT - \Psi T)$ ,

**то**  $S(Z) = aX(Z) Z^{-\Psi}$ .

##### 3. Згортка сигналів:

**Якщо**  $S(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT) y(nT - kT)$ ,

**то**  $S(Z) = X(Z)Y(Z)$ .

##### 4. Множення сигналів:

**Якщо**  $s(nT) = x(nT) y(nT)$ ,

**то**  $S(Z) = \frac{1}{2\pi j} * \oint_c X(V)Y\left(\frac{Z}{V}\right) V^{-1} dV$ ,

де V і Z – перемінні на площині.

**Z-перетворення дискретних сигналів еквівалентно перетворенню Лапласа для безперервних сигналів.**

## Тема №8

### Опис лінійних дискретних перетворювачів

**Ціль.** Освоєння способів опису дискретних лінійних систем у тимчасовій і частотній областях.

## ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

### §1. Опис лінійних дискретних перетворювачів

Перша форма опису лінійного дискретного перетворювача.

Відомо, що зв'язок вхідного впливу і реакції лінійних безперевних систем із зосередженими стаціонарними параметрами виражається диференціальним рівнянням

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d y}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{d x}{dt} + b_0 x(t),$$

Где:  $a_k, b_k$  –

постійні коефіцієнти,  $x(t)$ ,  $y(t)$  – вхідний і вихідний сигнали,  $m \leq n$ . Заміна безперевного часу дискретними відліками “ $k$ ”  $t \rightarrow n$  приводить до заміни приведенного вище диференційного рівняння кінцево-різницеvim рівнянням у рекурсивній формі:

$$y(kT) = b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T) + b_2 x(kT - 2T) + b_3 x(kT - 3T) + \dots$$
$$b_m x(kT - mT) - a_1 y(kT - T) - a_2 y(kT - 2T) - \dots - a_n y(kT - nT). \quad (1)$$

У цьому вираженні  $x(\dots)$  і  $y(\dots)$  – відповідні часові відліки сигналу збудження на вході і виході лінійного дискретного ланцюга,  $a(i)$  і  $b(i)$  – деякі константи, що залежать від її параметрів. З (1) випливає твердження.

**Твердження.** Значення  $k$ -ого відліку сигналу на виході лінійного дискретного ланцюга залежить від значень вхідного сигналу в моменти часу від  $k$ -ого до  $(k-m)$ -го включно і попередніх відліків вихідного сигналу від  $(k-1)$ -го до  $(k-n)$ -го.

Друга форма опису лінійного дискретного перетворювача. Друга форма опису в часовій області лінійного дискретного перетворювача (ЛДП) базується на властивостях його імпульсної характеристики, що у відмінності від імпульсної характеристики ЛНС, де вона позначалася як  $h(t)$ , тут має позначення  $g(k)$ .

**Визначення.** Імпульсною характеристикою ЛДС  $g(k)$  називається її реакція на вхідний сигнал у виді дискретного  $\delta$ -імпульсу:  $\delta(kT) = \frac{1: k = 0}{0: k \neq 0}$ .

**Твердження.** Значення  $k$ -ого відліку сигналу на виході ЛДС дорівнює дискретній згортці  $k$  відліків вхідного сигналу з імпульсною характеристикою ЛДС :

$$y(kT) = \sum_{n=0}^k x(kT)g(kT - nT). \quad (2)$$

## §2. Передатна функція лінійного дискретного ланцюга

У рівності (2) маємо справу з дискретними відліками вихідного сигналу і тому можемо піддати його ліву і праву частини  $Z$ -перетворенню. Тоді:

$$Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT)g(kT - jT) Z^{-k}. \quad (3)$$

Співмножники (3) некорельовані, тому маємо право розділити суми і співмножники:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT)g(kT - jT) Z^{-k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT - jT) Z^{-k}. \quad (4)$$

Уведемо нову перемінну в індексах:  $n=k-j$ ,  $k=n+j$ . З обліком “ $n$ ” і “ $k$ ”, вираження (4) перепишемо в такий спосіб:

$$Y(Z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) Z^{-n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) Z^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) Z^{-n}. \quad (5)$$

В останнім вираженні маємо дві незалежні суми, а саме -  $Z$ -перетворення двох функцій, що описують вхідний

сигнал і імпульсну характеристику, їх позначимо в такий спосіб:

$$X(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) z^{-j}, \quad (6)$$

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) z^{-n}.$$

Приймаючи до уваги рівність (5), у результаті пророблених перетворень маємо:

$$Y(z) = X(z)W(z).$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (7)$$

**Висновок 1.** Z-перетворення передатної функції W(z) ЛДС дорівнює відношенню Z-перетворень вихідного сигналу до сигналу на вході системи.

**Висновок 2.** Передатна функція W(z) ЛДС являє собою Z-перетворення її імпульсної характеристики.

**Висновок 3.** Z-перетворення вихідного сигналу для ЛДС дорівнює добутку Z-перетворення сигналу на вході на Z-перетворення передатної функції.

Повернемося до опису ЛДС кінцево-різницеvim рівнянням у рекурсивній формі (3) і доданки, що відносяться до відліків сигналу на вході, перенесемо в ліву частину, а доданки, що відносяться до відліків сигналу на виході системи - у праву частину:

$$b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T) + b_2 x(kT - 2T) + \dots + b_m x(kT - mT) =$$

$$= y(kT) + a_1 y(kT - T) + a_2 y(kT - 2T) + \dots + a_n y(kT - nT)$$

Виконаємо Z-перетворення цього вираження:

$$b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2} + b_3 X(z) z^{-3} + \dots + b_m X(z) z^{-m} =$$

$$= Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + a_3 Y(z) z^{-3} + \dots + a_n Y(z) z^{-n}$$

Подальші операції дозволяють одержати передатну функцію ЛДС через кінцеворізнцеве рівняння:

$$X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_m z^{-m}) =$$

$$= Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}), \quad (8)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}}.$$

Вираження (8) показує, яким образом передатна функція лінійного дискретного перетворювача може

бути отримана безпосередньо з кінцеворізнцевого рівняння.

### §3. Загальний вид опису лінійної дискретної системи

Для лінійних дискретних систем з відомими постійними параметрами взаємозв'язок між впливом на вході  $x(n)$  і реакцією на виході  $y(n)$  описується різницеvim рівнянням:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(nT - iT) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(nT - kT). \quad (9)$$

Для нормованого часу дискретизації  $T=1$ :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (10)$$

Різницеве рівняння (9) має пряму аналогію з лінійним диференціальним рівнянням, що описує залежності між входом і виходом аналогової лінійної системи:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=0}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}. \quad (11)$$

Перехід від диференційних рівнянь (10) до різницевого обумовлений розходженнями між аналоговими і гратчастими входними функціями входних сигналів для цих систем. Реакція для різницевого рівняння знаходиться методом підстановки, що у кінцевий результат не вносить погрешностей в кінцевий результат.

Приклад. Вирішити різницеве рівняння для 5-и відліків.

$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-1), \quad x(n) = (0.1)^n.$$

Рішення.  $x(0) = 0, y(0) = x(0) - 0.5y(-1) = 0 - 0.5 \cdot 0 = 0;$

$$x(1) = 0.1, y(1) = x(1) - 0.5y(0) = 0.1 - 0.5 \cdot 0 = 0.1;$$

$$x(2) = 0.01, y(2) = x(2) - 0.5y(1) = 0.01 - 0.5 \cdot 0.1 = -0.04;$$

$$x(3) = 0.001,$$

$$y(3) = x(3) - 0.5y(2) = 0.001 - 0.5 \cdot (-0.04) = 0.21;$$

$$x(4) = 0.0001,$$

$$y(4) = x(4) - 0.5y(3) = 0.0001 - 0.5 \cdot 0.21 = -0.1049 \dots$$

#### §4. Рекурсивні і нерекурсивні лінійні дискретні системи

**Визначення.** ЛДС називається рекурсивною, якщо хоча б один з коефіцієнтів  $a^k$  кінцеворізнцевого рівняння не дорівнює нулю  $a^k \neq 0$ . Іншими словами, ЛДС зі зворотним зв'язком описується рекурсивним кінцеворізнцевим рівнянням. І навпаки, ЛДС без зворотного зв'язку описується нерекурсивним кінцеворізнцевим рівнянням і називається нерекурсивною.

**Визначення.** Порядком нерекурсивної ЛДС називають найбільше число відліків сигналу збудження  $N$  чи реакції системи  $M$ :

$$\max\{(M-1), (N-1)\}.$$

Приклад різницевого рівняння рекурсивної ЛДС першого порядку:

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1).$$

Приклад різницевого рівняння нерекурсивної ЛДС другого порядку:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 y(n-2).$$

#### §5. Імпульсна характеристика ЛДС

Це питання зручно розглядати на конкретних прикладах.

**Приклад 1.** Обчислити імпульсну характеристику нерекурсивної ЛДС другого порядку, описуваної рівнянням:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(kT-T) + b_2 y(kT-2T). \quad (12)$$

Скористаємося тим фактом, що якщо на вхід ЛДС подати дискретний  $\delta$ -імпульс, на виході  $y$  вийде реакція системи одержимо її імпульсну характеристику. Тоді (12) прийме наступний вид:

$$g(k) = b_0 \delta(k) + b_1 \delta(kT-T) + b_2 \delta(kT-2T).$$

Методом прямої підстановки, використовуючи властивості  $\delta$ -імпульсу, обчислимо відліки імпульсної характеристики ЛДС:

$$k=0, \quad g(0) = b_0;$$

$$\begin{aligned} k=1, & \quad g(T) = b_1; \\ k=2, & \quad g(2T) = b_2; \\ k=3, & \quad g(3T) = 0. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Обчислити імпульсну характеристику рекурсивної ЛДС другого порядку, описуваної рівнянням:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(kT-T) - a_1 y(kT-T). \quad (13)$$

Замінивши вхідний сигнал дискретним  $\delta$ -імпульсом, а вихідний сигнал - імпульсною характеристикою, одержимо:

$$g(kT) = b_0 \delta(kT) + b_1 \delta(kT-T) - a_1 g(kT-T).$$

$$\begin{aligned} k=0, & \quad g(0) = b_0; \\ k=1, & \quad g(T) = b_1 - a_1 g(0) = b_1 - a_1 b_0; \\ k=2, & \quad g(2T) = (a_1)^1 * (b_1 - a_1 b_0); \\ k=3, & \quad g(3T) = (a_1)^2 * (b_1 - a_1 b_0); \\ k=4, & \quad g(4T) = (a_1)^3 * (b_1 - a_1 b_0); \end{aligned}$$

.....

$$k=n, g(nT) = (a_1)^{n-1} * (b_1 - a_1 b_0) \dots$$

Загальний вид формули обчислення імпульсної характеристики ЛДС:

$$g(k) = b_0 \delta(k) + b_1 \delta(kT-T) + b_2 \delta(kT-2T) + \dots + b_m \delta(kT-mT) - a_1 g(kT-T) - a_2 g(kT-2T) - a_3 g(kT-3T) - \dots - a_n g(kT-nT) \dots \quad (14)$$

Розрахунок імпульсної характеристики в загальному вигляді дає наступні результати:

$$\begin{aligned} k=0, & \quad g(0) = b_0; \\ k=1, & \quad g(T) = b_1 - a_1 g(0) = b_1 - a_1 b_0; \\ k=2, & \quad g(2T) = b_2 - a_1 g(T) - a_2 g(0) = b_2 - a_1 b_1 - (a_1)^2 * b_0 - a_2 b_0; \\ k=3, & \quad g(3T) = b_3 - a_1 g(2T) - a_2 g(T) - a_3 g(0); \\ k=4, & \quad g(4T) = b_4 - a_1 g(3T) - a_2 g(2T) - a_3 g(T) - a_4 g(0); \end{aligned}$$

.....

$$k=n, \quad g(n) = b_n - a_1 g[(n-1)T] - a_2 g[(n-2)T] - \dots - a_n g(0) \dots$$

**Висновок.** Імпульсна характеристика нерекурсивних ЛДС без зворотного зв'язку кінцева, а нерекурсивних ЛДС зі зворотним зв'язком нескінченна.

## §6. Основні властивості ЛДС

1. **Властивість пам'яті.** У випадку нерекурсивної ЛДС для отримання реакції  $y(n)$  ЛДС на  $n$ -й відлік повинна пам'ятати значення  $(n-1)$  попередніх відліків. У випадку рекурсивної ЛДС для цього ж випадку треба пам'ятати всю передісторію впливів, а, отже, пам'ять рекурсивної ЛДС нескінченна.
2. **Властивість стійкості.** Ця властивість полягає в тому, що при обмеженому впливі і довільних початкових умовах реакція ЛДС також обмежена. В часовій області стійкість визначається по імпульсній характеристиці і стійка ЛДС повинна відповідати вимозі:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |g(m)| < \infty. \quad (14)$$

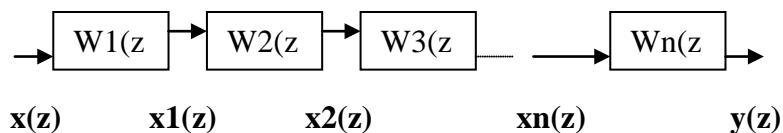
Таким чином, нерекурсивні лінійні дискретні системи з кінцевою імпульсною характеристикою завжди стійкі. Рекурсивні системи з нескінченною імпульсній ханактикою вимагають перевірки на стійкість по формулі (14).

### §6. Z-передатна функція складного перетворювача

Кожний складний лінійний дискретний перетворювач можна розглядати як систему ланок, з'єднаних рівнобіжно, або послідовно чи зі зворотним зв'язком.

Z-передатна функція їх розраховується по-різному.

#### 1. Послідовне з'єднання ланок

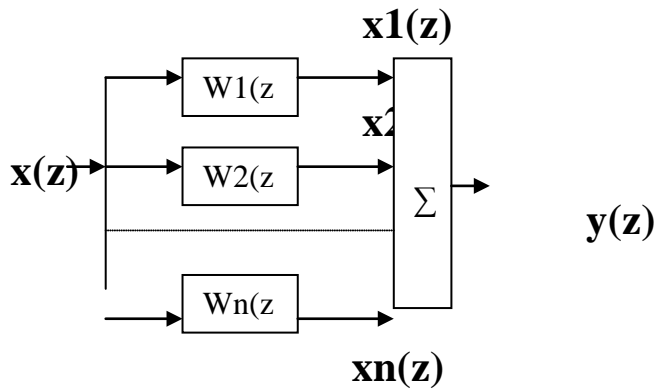


Z-передатна функція отримується таким чином:

$$\begin{aligned}
 x_1(z) &= W_1(z)x(z), \\
 x_2(z) &= W_2(z)x_1(z) = W_2(z)W_1(z)x(z), \dots, \\
 y(z) &= W_n(z)x_{(n-1)}(z) = W_n(z) * W_{(n-1)}(z) * \dots * W_1(z)x(z), \quad (15) \\
 W(z) &= \prod_{i=1}^n W_i(z)
 \end{aligned}$$

#### 2. Рівнобіжне з'єднання ланок





$$y(z) = x(z)W_1(z) + x(z)W_2(z) + x(z)W_3(z) + \dots + x(z)W_n(z),$$

$$W(z) = \sum_{i=1}^n W_i(z). \quad (16)$$

### Завдання

1. Написати рівняння, еквівалентне (13), для  $k$  відліків реакції ЛДС  $y(k)$  рекурсивної ЛДС при  $m=n=5$ , причому  $a(0)=b(0)=P$ ,  $a(1)=P+1$ ,  $b(1)=P-1$ ,  $a(2)=P+2$ ,  $b(2)=P-2$  і т.і, де  $P$ - порядковий номер студента по журналу.
2. Трансформувати отримане рівняння для нерекурсивної ЛДС і знайти 5 перших відліків реакції ЛДС.
3. Вивести формулу визначення імпульсної характеристики  $g(k)$  для випадку рекурсивної і нерекурсивної ЛДС для  $m=n=2, 4$ ,
4. Оформити протокол. Зробити висновки по характері отриманих результатів.

## Тема №9

### Лінійна дискретна і кругова згортка

**Ціль. 1.** Вивчення способів створення і роботи з масивами, векторами і матрицями в середовищі MathCad. Освоєння алгебраїчних операцій з ранжованими перемінними, векторами і матрицями. Рішення алгебраїчних рівнянь векторно-матричними методами.

**2.** Використання лінійної і кругової дискретної згортки в цифровій обробки сигналів. Три основних алгоритми одержання значень відліків дискретної і кругової згортки. Особливості розрахункових співвідношень. Реалізація розрахунків у середовищі MathCad.

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

У цифрових системах аналогові сигнали збудження на вході звичайно представляються їхніми значеннями в точках дискретизації, що вибираються відповідно до критерію Котельнікова-Найквіста. У системі MathCad ці точки задаються елементами масивів, векторів і матриць. Для побудови графіків і таблиць використовують ранжовані перемінні, що представляють собою упорядкований ряд значень якої-небудь перемінної. До окремого значення ранжованої перемінної звернутися неможливо, а лише до всього масиву в цілому.

Матриці і вектори будуються як і звичайні таблиці. У MathCad для цього використовуються спеціальні опції на вкладках математичної палітри.

## §1. Згортка сигналів

Згортка сигналів є однією з головних характеристик лінійних систем. Відповідно до фільтруючої властивості дельта-функції, будь-який сигнал на вході лінійної системи можна представити у виді безперервної згортки, під знаком інтеграла якої знаходиться добуток вхідного сигналу і дельта-функції, у такий спосіб:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-\tau) d\tau. \quad \text{У процесі проходження сигналу по}$$

лінійній системі дельта-функція перетворюється в її імпульсну характеристику і сигнал на виході знаходиться як згортка вхідного сигналу й імпульсної характеристики каналу  $g(t-\tau)$ :  $x(t)_{\text{вих}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_{\text{вх}} g(t-\tau) d\tau.$

Аналогічно знаходиться вихідний сигнал дискретного каналу. Інтеграл у цьому випадку замінюється нескінченною кінцевою сумою.

Дану практичну роботу передбачається виконувати по зразках тих заготівель, що демонструють реалізовані в MathCad окремі операції і дії над матрицями, векторами і математичними вираженнями.

### Завдання 1

1. У середовищі MathCad створити файл з ім'ям "№\_групи№\_бригади", у якому за допомогою вкладок математичної палітри створити прямокутну матрицю розміром 3\*4, квадратну матрицю розміром 4\*4, вектор-стовпець, вектор-рядок і ранжовану перемінну 'j'. Елементами рядків і стовпців узяти натуральний ряд чисел, кожен наступний елемент якого збільшується на число: N-останній знак залікової книжки, а з отриманого добутку N віднімається. Вивести на екран монітору отримані матриці, окремі рядки й окремі елементи їх. Результати зафіксувати в протоколі роботи.

2. Транспонувати матрицю, перемножити матрицю на вектор, записати до протоколу отримані результати.
3. Створити зворотну матрицю, одержати одиничну матрицю і квадратну матрицю з елементами  $3 \cdot a(i,j) - N$  і зворотну їй матрицю. Зафіксувати результати в протоколі.
4. За допомогою опцій меню 'Symbolics' одержати інвертовану, транспоновану квадратну матрицю і її детермінант. Записати результат.

Зробити висновки щодо можливостей програми MathCad.

## Завдання 2

Дискретна згортка дозволяє знайти наступне значення сигналу по його попереднім відлікам. Вона представляється сумою добутку значень послідовностей відліків двох сигналів при ковзанні одного з них щодо значень відліків іншого. Порядок виконання операцій дискретної лінійної і кругової згортки ілюструють рис.1..3. Попередньо студенти повинні вручну виконати алгоритми всіх трьох типів згортки для двох послідовностей  $(3,4,6,9)+N$  і  $(5,2,4)+N$ , де  $N$ -номер бригади, і результати перевірити по двох еквівалентних розрахункових формулах, приведених у демонстраційній програмі.

Нижче дані демонстраційні приклади алгоритмів обчислення окремих відліків дискретної згортки.

### §2. Алгоритми обчислення лінійної дискретної згортки

Вихідні сигнали:  $x(k)$ 

1	2	4	
---	---	---	--

 $g(k)$ 

2	3	4	
---	---	---	--

		1	2	4	8
5	4	3	2		

 $y(0)=1 \cdot 2=2$

		1	2	4	8
5	4	3	2		

4
---

$$y(1)=1*3+2*2=7$$

	1	2		8
5	4	3	2	

$$y(2)=1*4+2*3+4*2=18$$

1	2	4	8
5	4	3	2

$$y(3)=1*5+2*4+4*3+8*2=41$$

1	2	4	8	
	5	4	3	2

$$y(4)=2*5+4*4+8*3=50$$

1	2	4	8		
		5	4	3	2

$$y(5)=4*5+8*4=52$$

1	2	4	8			
			5	4	3	2

$$y(6)=8*5=40$$

Результат

2	7	18	41	50	52	40
---	---	----	----	----	----	----

**Рис.1. Лінійна дискретна згортка**

### §3. Обчислення кругової згортки

1	2	4	8
2	5	4	3

$$y(0)=1*2+2*5+4*4+8*3=52$$

1	2	4	8
3	2	5	4

$$y(1)=1*3+2*2+4*5+8*4=59$$

1	2	4	8
4	3	2	5

$$y(2)=1*4+2*3+4*2+8*5=58$$

1	2	4	8
5	4	3	2

$$y(3)=1*5+2*4+4*3+8*2=41$$

Результат

52	59	58	41
----	----	----	----

**Рис.2. Кругова дискретна згортка**

#### §4. Загальний алгоритм дискретної згортки

**Вихідні сигнали  $x(k)$  і  $g(k)$**

$x(kT)$

1	2	4	8	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

$g(kT)$

2	3	4	5	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---

**Послідовність обчислення круговій згортки**

1	2	4	8	0	0	0
2	0	0	0	5	4	3

$$y(0)=1*2=2$$

1	2	4	8	0	0	0
3	2	0	0	0	5	4

$$y(1)=1*3+2*2=7$$

1	2	4	8	0	0	0
4	3	2	0	0	0	5

$$y(2)=1*4+2*3+4*2=18$$

1	2	4	8	0	0	0
5	4	3	2	0	0	0

$$y(3)=1*5+2*4+4*3+8*2=41$$

1	2	4	8	0	0	0
0	5	4	3	2	0	0

$$y(4)=2*5+4*4+8*3=50$$

1	2	4	8	0	0	0
0	0	5	4	3	2	0

$$y(5)=4*5+8*4=52$$

1	2	4	8	0	0	0
0	0	0	5	4	3	2

$$y(6)=8*5=40$$

Результат

1	7	18	41	50	52	40
---	---	----	----	----	----	----

Перевірку контрольного приклада по приведених трьох алгоритмах кожна бригада виконує по двом альтернативним формулам дискретної згортки. При цьому кожна розрахункова послідовність, що входить у добуток, доповнюється неіснуючими нулями до величини  $(v_1+v_2-1)$ , де  $v_1$  і  $v_2$  – вихідні послідовності відліків сигналів.

Висновки за завданням 2 повинні містити зведення по призначенню згортки і дискретної згортки, наявних алгоритмів її розрахунку, реалізації у середовищі MathCad.

За 15 хвилин до закінчення заняття протоколи роботи повинні бути представлені викладачу на затвердження.

## Тема №10

### Швидке дискретне перетворення Фур'є

**Ціль. 1.** Вивчення алгоритмів і способів переходу від перетворення Фур'є до швидкого дискретного перетворення Фур'є.

**2.** Особливості і властивості швидкого дискретного перетворення Фур'є (ШПФ).

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дискретизація аналогового сигналу з інтервалом дискретизації Найквіста-Котельнікова приводить до того, що спектр його стає періодичним з періодом повторення рівним частоті дискретизації. Сигнал, що надходить у виді набору дискретних відліків, несе в собі отримані їм у каналі перекручування, що повинні бути усунуті різними методами усереднення в безлічі його реалізацій. Тому від алгоритмів і формул перетворення Фур'є необхідний перехід до більш простих формул дискретного і швидкого перетворення Фур'є.

#### §1. Дискретне перетворення Фур'є

Уявимо собі ситуацію, коли в нашому розпорядженні мається лише одна реалізація аналогового сигналу, задана своїми  $N$  дискретними періодичними вибірками. Віртуально поширимо цю послідовність по часовій осі в нескінченність, вважаючи її періодично повторювальною. У цьому випадку справедливим стає рівність  $x(k+N)=x(k)$ . Відповідно до фільтруючої властивості  $\sigma$ -функції розглянутий безперевний сигнал може бути представлений своїми дискретними вибірками, як показано у формулі (1):



$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) * \delta(t - kT). \quad (1)$$

Очевидно, що поставлений у відповідність безперевному сигналу  $s(t)$  дискретний сигнал, що складається з  $N$  своїх дискретних вибірок  $x(k)$  є періодичним з мінімальним періодом  $NT$ . Спектр такого сигналу є періодичним з періодом  $2\pi/T$ . Сам сигнал є по нашому допущенню також періодичним з періодом  $TN$ . Тоді відстань між окремими гармоніками складає  $2\pi/TN$ . Один період містить рівно  $N$  гармонік.

Необхідно знайти спектр періодичного дискретного сигналу, розкладаючи вихідний сигнал у ряд Фур'є, використовуючи загальну формулу такого розкладання:

$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{1}{NT} * \int_0^{NT} s(t) * e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{NT} * \int_0^{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) * \delta(t - kT) e^{-j\omega_n t} dt = \\ &= \frac{1}{NT} * \sum_{k=0}^{N-1} x(k) * \int_0^{NT} \delta(t - kT) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{NT} * \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega_n kT} = \\ &= \frac{1}{NT} * \sum_{k=0}^{N-1} x(k) * e^{-j \frac{2kn\pi}{N}}. \end{aligned}$$

Ці перетворення дають підстави зробити висновок, що для дискретизованого аналога безперевного сигналу існують симетричні формули прямого і зворотного перетворення Фур'є (2):

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) * \exp(-j \frac{2nk\pi}{N}), \\ x(k) &= \frac{1}{N} * \sum_{n=0}^{N-1} X(n) * \exp(j \frac{2nk\pi}{N}). \end{aligned} \quad (2)$$

## §2. Властивості дискретного перетворення Фур'є

Основні властивості дискретного перетворення Фур'є багато в чому аналогічні розглянутим раніше властивостям перетворення Фур'є:

### 2. Лінійність

$$\begin{aligned} x(k) &= af(k) + bg(k), \\ X(n) &= aF(n) + bG(n). \end{aligned}$$

### 2. Затримка

$$Y(n) = X(n) * \exp(-j \frac{2n\pi}{N}).$$

#### 4. Симетрія

Коефіцієнти Фур'є, отримані за допомогою ДПФ, зв'язані співвідношенням

$$X(N-k) = X(-k) = X(k).$$

Остання рівність означає, що спектри періодичних сигналів з періодом  $N$  також періодичні і мають той же період  $N$ . Це легко показати:

$$X(k+N) = \frac{1}{N} * \sum_{n=0}^{N-1} f(n) * e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} =$$

$$= \frac{1}{N} * \sum_{n=0}^{N-1} f(n) * e^{-2n\pi} e^{-j(2\pi/N)kn}$$

ПОСКОЛЬКУ:  $e^{-2n\pi} = 1$ , то...  $X(k+N) = X(k)$ .

З властивостей симетрії випливає і друга важлива властивість коефіцієнтів Фур'є:  $X(N-n) = X(-n)$  і таким чином, що складові спектру з негативними  $n$  повторюються з періодом  $N$  на інтервалі  $[k-N/2, N-1]$ . Для випадку, коли усі вирізки сигналу – дійсні числа, комплексні коефіцієнти Фур'є з протилежними номерами  $n$  є комплексно-сполученими числами, а спектр амплітуд має осьову симетрію відносно  $n=N/2$ .

#### 4. ДПФ добутку послідовностей

$$y(k) = X_1(k) X_2(k),$$

$$Y(n) = \frac{1}{N} * \sum_{i=0}^{N-1} X_1(i) X_2(n-i).$$

#### 7. Рівність Релея-Парсеваля

$$\sum_{k=0}^{N-1} X^2(k) = \frac{1}{N} * \sum_{i=0}^{N-1} |X(i)|^2.$$

#### 6. Кругова згортка сигналів

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} X_1(i) X_2(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} X_1(i) X_2((k-i) \bmod N).$$

В останній формулі  $(k-i) \bmod$  означає використання залишку від розподілу  $(k-i)$  на  $N$ , про що буде сказано

нижче. Відзначимо, що кругова згортка не еквівалентна лінійної згортки.

### §3. Матриця Френкса

Дискретне перетворення Фур'є являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), за допомогою якого від вектора дискретних відліків аналогового сигналу можливий однозначний перехід до їхнього частотного перетворення. Таке перетворення реалізується множенням квадратної матриці на вектор-стовпець вхідних сигналів:

$$X(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j(2\pi/N)} & e^{-j(4\pi/N)} & e^{-j(6\pi/N)} & \dots & e^{-j(2*1*(N-1)\pi/N)} \\ 1 & e^{-j(4\pi/N)} & e^{-j(8\pi/N)} & e^{-j(12\pi/N)} & \dots & e^{-j(2*2*(N-1)\pi/N)} \\ 1 & e^{-j(6\pi/N)} & e^{-j(12\pi/N)} & e^{-j(18\pi/N)} & \dots & e^{-j(2*3*(N-1)\pi/N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j(2\pi*(N-1)/N)} & e^{-j(4\pi*(N-1)/N)} & \dots & e^{-j(2*(N-1)*(N-1)\pi/N)} & f(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \dots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

Загальна формула, для розрахунку спектра кожної вибірки аналогового сигналу по векторно-матричному перетворенню Л. Френкса [3], має вид:

$$A(m, n) = \exp(-2j\pi * \frac{(m-1)(n-1)}{N}),$$

$$1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N.$$

Таким чином, маючи той самий набір вирізок дискретного сигналу, можна розрахувати або його спектральну функцію, або його ДПФ:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-jk\omega}, \dots (A)$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j\frac{2nk\pi}{N}} \dots (B)$$

Зв'язок між вираженнями (А) і (В) знаходиться через кутову частоту дискретизації і має вид:

$$X(n) = S\left(\frac{2n\pi}{NT}\right) = S\left(\frac{\omega_{dickr} n}{N}\right).$$

#### §4. ШПФ

З розгляду матриці Френкса випливає, що виконання дискретного перетворення Фур'є вимагає  $N*N$  операцій множення і майже стільки ж операцій додавання, що при числі вибірок, наприклад, 1000 складає вже приблизно 2 млн. операцій, що звичайно повинні виконуватись в реальному часі, що на практиці зробити досить важко навіть для сучасних процесорів. Тому для практичних розрахунків користуються швидким дискретним перетворенням Фур'є, алгоритм якого заснований на закономірностях періодичних синус-косинусних функцій.

Принцип ШПФ найпростіше показати на прикладах, використовуючи для демонстраційних цілей матрицю Френкса. Відзначимо, що кожен елемент її крім одиничних елементів першого рядка і першого стовпця, складений з експонент, у показниках яких мається загальна частина – множник  $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , що повертає, Нехай число вибірок аналогового сигналу  $N=8$ :  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(7), \dots$  С обліком прийнятих позначень пряме ДПФ здобуває вид:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) w(k, n).$$

У такому спрощеному виді матриця Френкса для  $N=8$  виглядає в такий спосіб (при розгляді всіх наступних співвідношень особливу увагу потрібно приділяти наявним в них закономірностям !):

$$\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \\ X6 \\ X7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w0 & w0 & w0 & w0 & w0 & w0 & w0 & w0 \\ w0 & w1 & w2 & w3 & w4 & w5 & w6 & w7 \\ w0 & w2 & w4 & w6 & w8 & w10 & w12 & w14 \\ w0 & w3 & w6 & w9 & w12 & w15 & w18 & w21 \\ w0 & w4 & w8 & w12 & w16 & w20 & w24 & w28 \\ w0 & w5 & w10 & w15 & w20 & w25 & w30 & w35 \\ w0 & w6 & w12 & w18 & w24 & w30 & w36 & w42 \\ w0 & w7 & w14 & w21 & w28 & w35 & w42 & w49 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f0 \\ f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \\ f6 \\ f7 \end{pmatrix}$$

Добуток даної матриці на вектор, що представляє собою ряд дискретних відліків сигналу, визначає частотні коефіцієнти розкладання Фур'є.

Візьмемо до уваги лінійну і кругову періодичність і взаємну відповідність  $N \equiv 2\pi$ ,  $N/2 \equiv \pi$ ,  $N/4 \equiv \pi/2$ ,  $N/8 \equiv \pi/4$  і т.д., відкіля випливає періодичність статевого ряду множника, що повертає, в різним кратностях періоду  $N$  (рис.1).

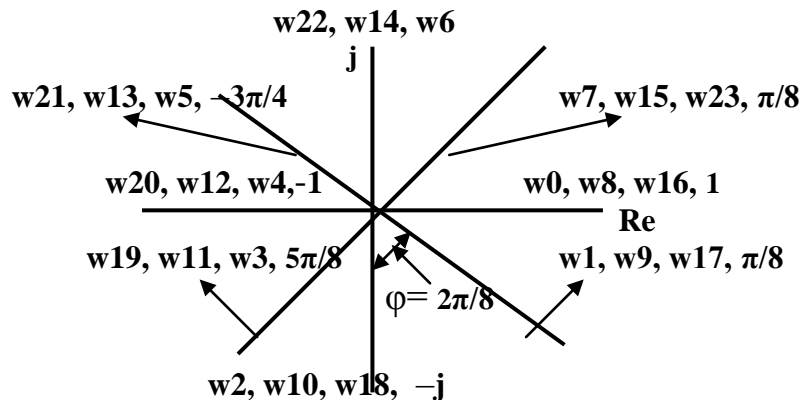


Рис.1. Статевий ряд  $w$

Який же висновок випливає з рис.1? Усі значення  $w$ , починаючи з  $w8$ , рівні тільки відповідному значенню  $w$  від  $w0$  до  $w7$ . Якщо залишок від показника  $w$  "n", поділеного на 8, писати як  $n \bmod 8$ , то значення  $w(n)$  можна представити як

$$w(n) = w(n \bmod 8).$$

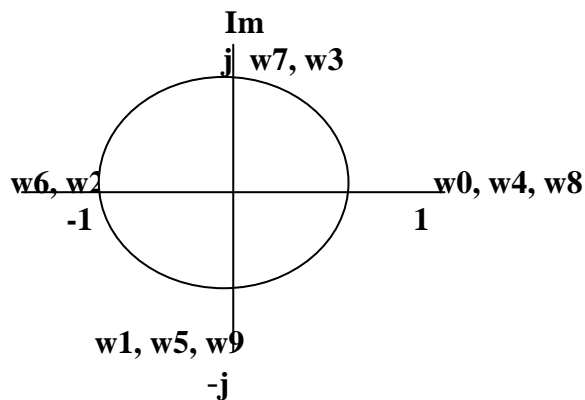
Іншими словами,  $8 \bmod 8 = 0$ ,  $9 \bmod 8 = 1$ ,  $10 \bmod 8 = 2$ ,  $11 \bmod 8 = 3$  і т.д. Тоді стилізована матриця Френкса записується у такий спосіб:

$$\begin{array}{l}
 X0 \\
 X1 \\
 X2 \\
 X3 \\
 X4 \\
 X5 \\
 X6 \\
 X7
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccccc}
 w0 & w0 & w0 & w0 & w0 & w0 & w0 & w0 \\
 w0 & w1 & w2 & w3 & w4 & w5 & w6 & w7 \\
 w0 & w2 & w4 & w6 & w0 & w2 & w4 & w6 \\
 w0 & w3 & w6 & w1 & w4 & w7 & w2 & w5 \\
 w0 & w4 & w0 & w4 & w0 & w4 & w0 & w4 \\
 w0 & w5 & w2 & w7 & w4 & w1 & w6 & w3 \\
 w0 & w6 & w4 & w2 & w0 & w6 & w4 & w2 \\
 w0 & w7 & w6 & w5 & w4 & w3 & w2 & w1
 \end{array}
 *
 \begin{array}{l}
 f0 \\
 f1 \\
 f2 \\
 f3 \\
 f4 \\
 f5 \\
 f6 \\
 f7
 \end{array}$$

**Швидке перетворення Фур'є – це алгоритм ефективного обчислення коефіцієнтів розкладання на підставі закономірностей, схованих у матриці Френкса при наступних зниженнях ступеня  $n$  у два рази, зокрема від  $n=2^7=128$  до  $n=2^6=64$ , від  $n=2^6=64$  до  $n=2^5=32$ , від  $n=2^5=32$  до  $n=2^4=16$ , від  $n=2^4=16$  до  $n=2^3=8$  і від  $n=2^3=8$  до  $n=2^2=4$ , яку можна вважати БАЗОВОЮ. У цьому випадку вибірка складається з чотирьох членів  $f_0, f_1, f_2, f_3$ . Розглянемо особливості ШПФ для цього базового випадку.**

### §5. ШПФ для ряду з 4 членів

Для зазначеного випадку з обліком рис. 2 – статечні ряди  $w$  для  $N=4$  - ДПФ можна виразити у виді добутку матриці Френкса на вектор сигналу в такий спосіб:



**Рис.2. Статечний ряд  $w$  для  $N=4$**

$$(3) \quad \begin{array}{l} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} = \begin{array}{cccc} w0 & w0 & w0 & w0 \\ w0 & w1 & w2 & w3 \\ w0 & w2 & w4 & w6 \\ w0 & w3 & w6 & w9 \end{array} * \begin{array}{l} f0 \\ f1 \\ f2 \\ f3 \end{array}$$

З огляду на структуру і мінус у множнику  $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , що повертає, легко зрозуміти відповідності, що приведені в нижченаведеній матриці Френкса для  $N=4$  (3):

- $n=0$  відповідає куту повороту множника, що повертає  $\varphi=0$  чи в радіанах  $\omega=1$  і  $w0, w4, w8$ ;
- $n=1$  відповідає  $\varphi=2\pi*1/4$ ,  $\omega=j$ ,  $w3, w7$ ;
- $n=2$  відповідає  $\varphi=2\pi*2/4$ ,  $\omega=-1$ ,  $w2, w6$ ;
- $n=3$  відповідає  $\varphi=2\pi*3/4$ ,  $\omega=-j$ ,  $w1, w5, w9$ .

Відповідно до цього матриця Френкса здобуває вид:

$$(4) \quad \begin{array}{l} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{array} * \begin{array}{l} f0 \\ f1 \\ f2 \\ f3 \end{array}$$

Подальші спрощення зводяться до наступного. Матрицю (3) розділимо на 2 матриці, а саме, матрицю, що містить непарні стовпці вихідної матриці, і матрицю, що містить парні стовпці вихідної матриці (вектор вирізок сигналу  $f(k)$  для ілюстрації відповідностей приходить у виді матриці-рядка писати вгорі, що не відповідає правилам векторно-матричних перетворень:

$$(5) \quad \begin{array}{l} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} = \begin{array}{cc} [ f0 & f2 ] \\ \begin{array}{cc} w0 & w0 \\ w0 & w2 \\ w0 & w4 \\ w0 & w6 \end{array} \end{array} + \begin{array}{cc} [ f1 & f3 ] \\ \begin{array}{cc} w0 & w0 \\ w1 & w3 \\ w2 & w6 \\ w3 & w9 \end{array} \end{array}$$

На підставі рівності  $W^{k+1} = W^k W^{-1}$  стає можливим з (5) виконати наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{l} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline [ f0 & f2 ] \\ \hline w0 & w0 \\ \hline w0 & w2 \\ \hline w0 & w4 \\ \hline w0 & w6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{l} [ f1 & f3 ] \\ w0w0 & w0w0 \\ w1w0 & w1w2 \\ w2w0 & w2w4 \\ w3w0 & w3w6 \end{array} = \\
 (6) \quad & \begin{array}{l} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline [ f0 & f2 ] \\ \hline w0 & w0 \\ \hline w0 & w2 \\ \hline w0 & w4 \\ \hline w0 & w6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{l} [ f1 & f3 ] \\ w0 & w0 \\ w1 & w0 \\ w2 & w0 \\ w3 & w0 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline w0 & w0 \\ \hline w0 & w2 \\ \hline w0 & w4 \\ \hline w0 & w6 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

На підставі рис.2 різні ступені множника, що повертає, мають наступні відповідності:

$$w4=w0=1, w6=w2=-1, w2=-w0, w3=w1. \quad (*)$$

Після підстановки цих значень множника, що повертає, у (6) маємо:

$$(7) \quad \begin{array}{l} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline [ f0 & f2 ] \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{l} [ f1 & f3 ] \\ w0 & w0 \\ w1 & w0 \\ -w0 & w0 \\ -w1 & w0 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Для подальшого пояснення алгоритму ШПФ скористаємося методом повної індукції: наступного переходу від ШПФ для N=4 до ШПФ для N=8 і використання наявних при цьому аналогій.

## §6. Операція “метелик” для ШПФ ряду з 4 членів

Розглянемо вираження ДПФ для X(k) при N=4 і першої частини цих виражень поставимо у відповідність операцію “метелик”:

$$X(0) = w0 f(0) + w0 f(1) + w0 f(2) + w0 f(3),$$

$$X(1) = w0 f(0) + w1 f(1) + w2 f(1) + w3 f(3),$$

$$X(2) = w0 f(0) + w2 f(1) + w4 f(2) + w6 f(3),$$

$$X(3) = w0 f(0) + w3 f(1) + w6 f(2) + w9 f(3).$$



Цього ж вираження після підстановки відповідностей множника, що повертає:

$$X(0) = w_0 f(0) + w_0 f(1) + w_0 f(2) + w_0 f(3),$$

$$X(1) = w_0 f(0) + w_1 f(1) - w_0 f(1) - w_1 f(3),$$

$$X(2) = w_0 f(0) - w_0 f(1) + w_0 f(2) - w_0 f(3),$$

$$X(3) = w_0 f(0) - w_1 f(1) - w_0 f(2) - w_1 f(3).$$

Відповідності між елементами парних і непарних стовпців матриці (7) і першими двома складовими останніх рівностей і відповідають першій операції “метелик”:

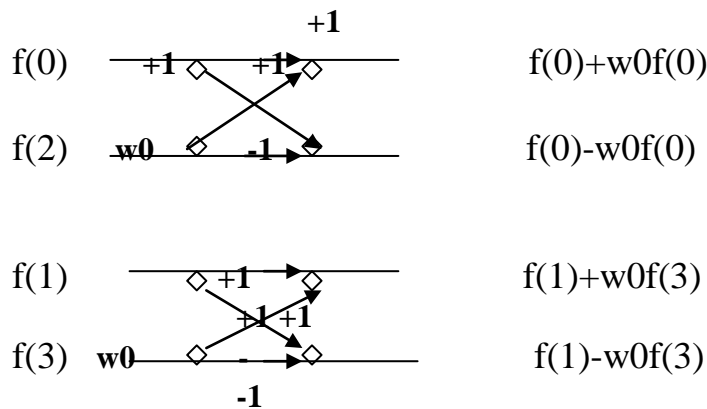


Рис. 3. Перший “метелик” для N=4

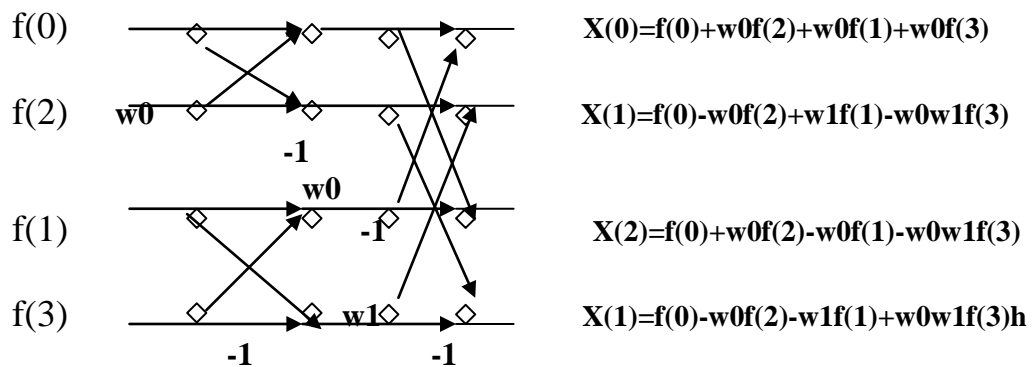


Рис. 4. Другий “метелик” для N=4

Таким чином, ШПФ із ДПФ виходить за рахунок того, що групуються стовпці з парними і непарними показниками ступеня множника, що повертає, приводяться до однакового виду і програмна обробка їх

приводить до однаковому результату. Для ілюстрації спільності методу ШПФ перейдемо до розгляду алгоритму дискретного перетворення Фур'є послідовності з 8 вірізків аналогового сигналу.

### §7. ШПФ ряду з 8 членів

**Загальна формула ШПФ ряду з 8 членів:**

$$X(n) = w_0 f(0) + w_1 kf(1) + w_2 kf(2) + w_3 kf(3) + w_4 kf(4) + w_5 kf(5) + w_6 kf(6) + w_7 kf(7).$$

Приведену в четвертому параграфі матрицю Френкса для  $N=8$  розділимо на дві групи з парними і непарними індексами і виконаємо ті ж перетворення, як і для матриці з  $N=4$ .

$$\begin{array}{l} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \left| \begin{array}{cccccccc} w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \\ w_0 & w_2 & w_4 & w_6 & w_8 & w_{10} & w_{12} & w_{14} \\ w_0 & w_3 & w_6 & w_9 & w_{12} & w_{15} & w_{18} & w_{21} \\ w_0 & w_4 & w_8 & w_{12} & w_{16} & w_{20} & w_{24} & w_{28} \\ w_0 & w_5 & w_{10} & w_{15} & w_{20} & w_{25} & w_{30} & w_{35} \\ w_0 & w_6 & w_{12} & w_{18} & w_{24} & w_{30} & w_{36} & w_{42} \\ w_0 & w_7 & w_{14} & w_{21} & w_{28} & w_{35} & w_{42} & w_{49} \end{array} \right| \begin{array}{l} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{array} *$$

$$\begin{array}{l} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \end{array} \right| + \begin{array}{l} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} f_0 & f_2 & f_4 & f_6 \end{array} \right| + \begin{array}{l} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} f_1 & f_3 & f_5 & f_7 \end{array} \right|$$

$$(8) \quad \begin{array}{c} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \\ X6 \\ X7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} [f0 & f2 & f4 & f6] \\ w0 & w0 & w0 & w0 \\ w0 & w2 & w4 & w6 \\ w0 & w4 & w0 & w4 \\ w0 & w6 & w4 & w2 \\ w0 & w0 & w0 & w0 \\ w0 & w2 & w4 & w6 \\ w0 & w4 & w0 & w4 \\ w0 & w6 & w4 & w2 \end{array} \right| + \begin{array}{c} w0 \\ w1 \\ w2 \\ w3 \\ w4 \\ w5 \\ w6 \\ w7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} [f1 & f3 & f5 & f7] \\ w0 & w0 & w0 & w0 \\ w0 & w2 & w4 & w6 \\ w0 & w4 & w0 & w4 \\ w0 & w6 & w4 & w2 \\ w0 & w0 & w0 & w0 \\ w0 & w2 & w4 & w6 \\ w0 & w4 & w0 & w4 \\ w0 & w6 & w4 & w2 \end{array} \right|$$

**Використовуючи закономірності рис.2, одержуємо рівності:**

$$w0 = 1, w2 = -j, w4 = -w0 = -1, w6 = j, w5 = -w1, w6 = -w2, w7 = -w3.$$

**Після підстановки їх у (8), маємо:**

$$(9) \quad \begin{array}{c} X0 \\ X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \\ X6 \\ X7 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} [f0 & f2 & f4 & f6] \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{array} \right| + \begin{array}{c} w0 \\ w1 \\ w2 \\ w3 \\ -w0 \\ -w1 \\ -w2 \\ -w3 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} [f1 & f3 & f5 & f7] \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{array} \right|$$

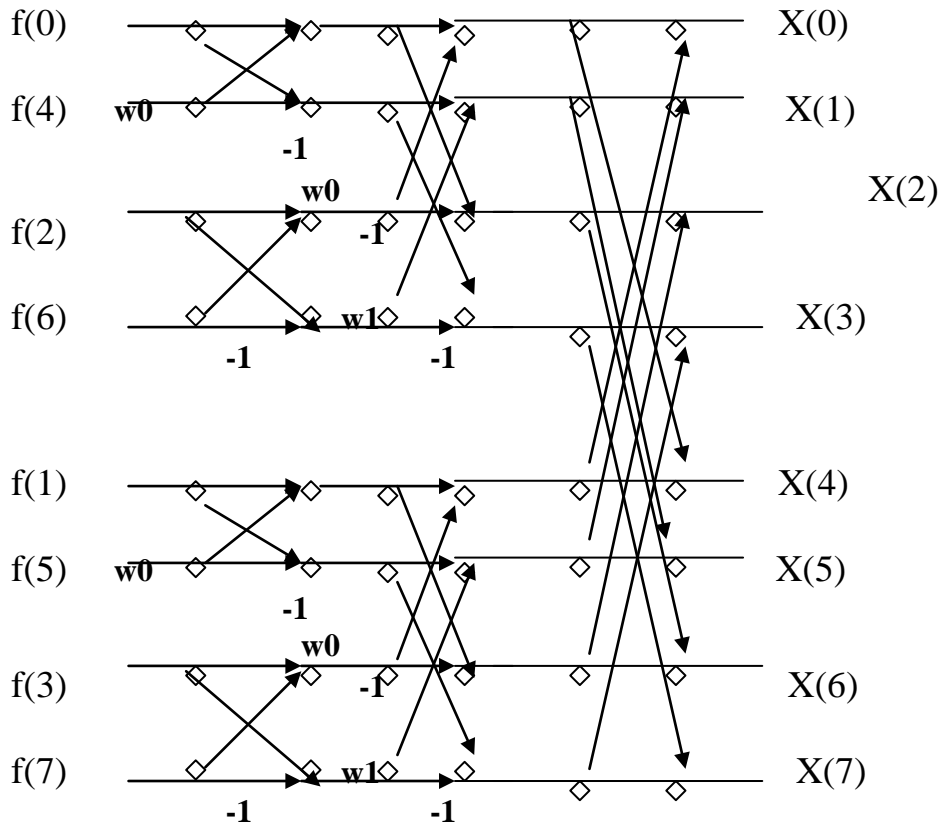


Рис. 5. Третій “метелик” для  $N=8$

Існує декілька алгоритмів різних авторів для розрахунків ШПФ як у часовий так і в частотній областях.

### §8. Перестановка розрядів при обчисленнях “метеликом”

Головним пунктом розрахунків по формулах прямого і зворотного швидкого перетворення Фур'є є метод обчислення “метеликом”. Але попередньо послідовність відліків сигналу повинна бути розбита по парних і непарних номерах, а потім певним чином розташована для розрахунків по програмі “метеликом”. Наприклад, у випадку ряду з восьми вибірок, вони повинні бути розташовані у такий спосіб:  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ ,  $f(5)$ ,  $f(6)$ ,  $f(7)$ . Було доведено, що в двійковому коді це розташування відповідає натуральному ряду

двійкових чисел кратності  $m$ , де  $m = \log_2 N$ ,  $N$  - довжина вибірки. Так для вибірки з восьми значень для  $N=8$  і  $m=3$  зазначена відповідність має вид:  
000-0, 001-1, 010-2, 011-3, 100-4, 101-5, 110-6, 111-7.

### §9. Більш строге обґрунтування ШПФ

Основна ідея ШПФ полягає в наступному. Послідовність  $x(n)$  розбивається на дві  $N/2$ -точкових послідовностей  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$ , для яких знаходяться  $X_1(k)$  і  $X_2(k)$ . Потім за значеннями  $X_1(k)$  і  $X_2(k)$  визначають необхідне  $N$ -точкове ДПФ  $X(k)$ . Якщо остання операція буде виконуватися просто і не зажадає складних обчислень, то для обчислення  $N$ -точкового ДПФ буде потрібно виконати  $(N/2)^2 + (N/2)^2 = N^2/2$  операцій. Тепер якщо продовжити процес розбивки послідовностей  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$  на дві частини і знаходити для кожної з частин свої ДПФ, те можна істотно скоротити кількість операцій. Розглянемо ДПФ послідовності  $x_1(n)$ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \text{ где } W_N = e^{-j2\pi/N}.$$

Розіб'ємо  $x(n)$  на дві частини:  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$ , що містять відповідно парні і непарні члени  $x(n)$ :

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, \dots, (N/2 - 1),$$

$$x_2(n) = x(2n+1), \quad n = 0, 1, \dots, (N/2 - 1).$$

У цьому випадку:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}. \quad (10)$$

Оскільки

$$W_N^2 = e^{(j2\pi/N)2} = e^{j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}, \text{ то}$$

$$X(k) = \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{nk} \right\} + \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{nk} \right\} * W_N^k. \quad (11)$$

Вираження у фігурних дужках являють собою прямі  $N/2$  – точкові ДПФ від послідовностей  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$ . У цьому випадку:

$$X(k) = X_1(k) + X_2(k) * W_N^k, \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1. \quad (12)$$

З формули (12) випливає, що  $N$ -точкове ДПФ  $X(k)$  може бути обчислене через два  $N/2$ -точкових ДПФ  $X1(k)$  і  $X2(k)$ . Відзначимо, що відліки ДПФ для послідовностей  $x1(n)$  і  $x2(n)$  повторюються з періодом  $N/2$ . Отже,

$$X1(k + N/2) = X1(k) \text{ — и — } X2(k + N/2) = X2(k). \quad (13)$$

З огляду на рівність:  $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ , із вираження (13) відразу ж випливає вираження для визначення другої частини послідовності спектральних коефіцієнтів  $X(k)$ :

$$X(k + N/2) = X1(k) - X2(k) * W_N^k. \quad (14)$$

Формули (12) і (14) являють собою базову операцію ШПФ, так називану “метелика” (рис. 6):

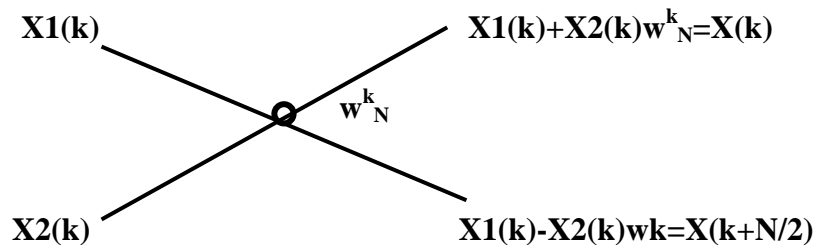


Рис. 6. “Класичний метелик” операції ШПФ

Описаний алгоритм ШПФ називається алгоритмом “із проріджуванням за часом”, тому що тут потрібно перестановка вхідних значень  $x(n)$ . Алгоритм, при реалізації якого потрібно перестановка значень  $X(k)$ , називається алгоритмом “із проріджуванням по частоті”.

### Завдання

1. Законспектувати основні принципи переходу від ДПФ до ШПФ.
2. Записати загальну формулу знаходження коефіцієнтів Фур'є для числа вірізок аналогового сигналу  $N=5, 8, 12, 16, 21$ .
3. Скласти матрицю Френкса для  $N=5$  і  $N=21$ .

**4. Зобразити на круговому графіку значення множника, що повертає, для різних номерів відліків “k” при N=12.**

**У висновках виконати порівняльну оцінку ДПФ і ШПФ за часом виконання прямого і зворотного перетворення Фур'є.**

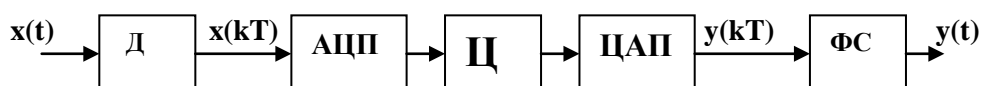
## Тема №11

### КІХ-фільтри

**Ціль.** Вивчення структури і розрахунку параметрів фільтрів з кінцевою імпульсною характеристикою.

### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Логічні поняття “дискретна система” і “дискретний фільтр” абсолютно ідентичні. Розходження полягають лише в тім, що для фільтрів різних типів – нижніх частот ФНЧ, верхніх частот ФВЧ і смугових ПФ – смуга пропущення і затримки конкретизується, задається у вихідних даних. Обробка сигналів і розрахунок фільтрів здійснюються звичайно в цифровій формі, коли кожному відліку ставиться у відповідність двійкове кодове слово  $i$ , таким чином, дії над дискретними відліками замінюються діями над кодовими словами. Дискретний ланцюг стає цифровим ланцюгом  $i$ , у загальному випадку, цифровим фільтром (ЦФ). Переклад дискретних відліків у двійкові кодові слова здійснюється АЦП – аналого-цифровим перетворювачем. На виході ЦФ виробляється зворотна операція (рис.1): у цифро – аналоговому перетворювачі кодові слова перетворюються у відліки дискретного сигналу і після синтезуючого фільтра знову стають аналоговим сигналом.



Д – дискретизатор сигналу,  
АЦП – цифровий-аналого-цифровий  
перетворювач,



ЦФ – цифровий фільтр,  
ЦАП – аналоговий цифро-аналоговий  
перетворювач,  
ФС - синтезатор<sup>^</sup>-фільтр-синтезатор.

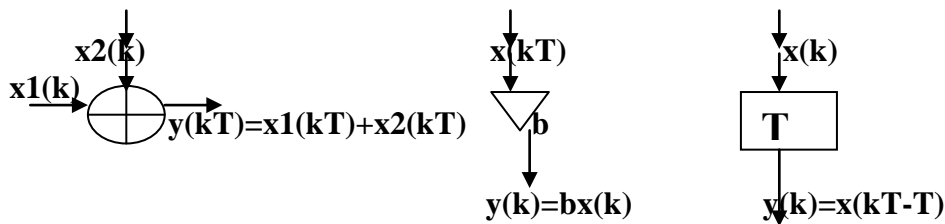
### Рис.1. Обробка дискретних сигналів цифровим фільтром

Дискретний і цифровий ланцюги описуються однаковими вираженнями. Помилки зв'язані звичайно з розмірністю квантування. Однак, збільшуючи розрядність кодових слів, помилки (шуми) квантування можна зменшити до заздалегідь заданої величини.

Розрізняють нерекурсивні і рекурсивні цифрові фільтри. Нерекурсивні ЦФ унаслідок великого числа значень імпульсної характеристики мають велике число конструктивних елементів. Але разом з тим володіють рядом переваг: вони завжди стійкі, дозволяють одержати лінійне фазове зрушення, прості в настроюванні. Тому нерекурсивні цифрові фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою – КІХ-фільтри – розглядаються окремо і розраховуються за окремою методикою.

Найважливішою особливістю лінійних дискретних систем є те, що усі вони можуть бути задані композицією наступних трьох елементів (рис.2):

1. Суматора відліків:  $y(k)=x_1(k)+x_2(k)$ ;
2. Множника на постійний коефіцієнт  $A$ :  
 $y(k)=Ax(k)$ ;
3. Затримки на такт дискретизації:  $y(k)=y(kT-T)$ .



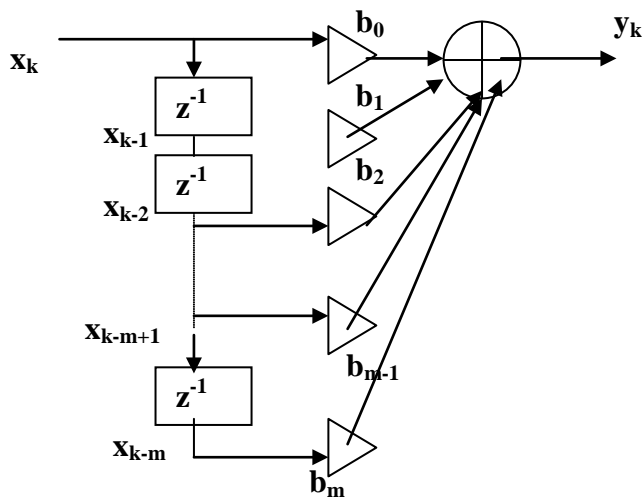
**Рис.2. Основні структурні елементи ЛДС**

### **§1. Нерекурсивні КИХ- фільтри**

**Рівняння фільтрації нерекурсивних фільтрів має вид:**

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i). \quad (1)$$

**Структурна схема нерекурсивних фільтрів показана на рис. 3.**



**Рис.3. Нерекурсивний фільтр**

**Порядком фільтра називається кількість попередніх відліків сигналу, використовуваних для одержання вихідної реакції.**

**Імпульсна характеристика фільтра виходить, якщо в рівняння (1) замість вхідного сигналу  $x(k-i)$  підставити**

дискретний  $\delta$ -імпульс. Тоді на виході виходять значення імпульсної характеристики в точках, де аргумент  $\delta$ -імпульсу дорівнює 0. Результат буде наступний:

$$g(k) = b_k. \quad (2)$$

**Висновок.** Імпульсна характеристика КІХ-фільтра кінцева і дорівнює коефіцієнтам  $b_k$ .

## §2. КІХ- фільтри з лінійною фазою

Нерекурсивний фільтр дозволяє одержати парну чи непарну імпульсну характеристику і, як результат, лінійну ФЧХ при довільній АЧХ, що випливає з теореми про спектр парних і непарних сигналів: спектр фаз парних і непарних сигналів лінійний.

Фільтри з парними імпульсними характеристиками називаються симетричними, а непарними – асиметричними. Кожний із двох типів КІХ-фільтрів має свої особливості.

### §2.1. Симетричні КІХ- фільтри з лінійною фазою

1. Симетричні КІХ-фільтри з непарним  $N$ . На рис. 4 представлена структурна схема фільтра для випадку  $N=5$ .

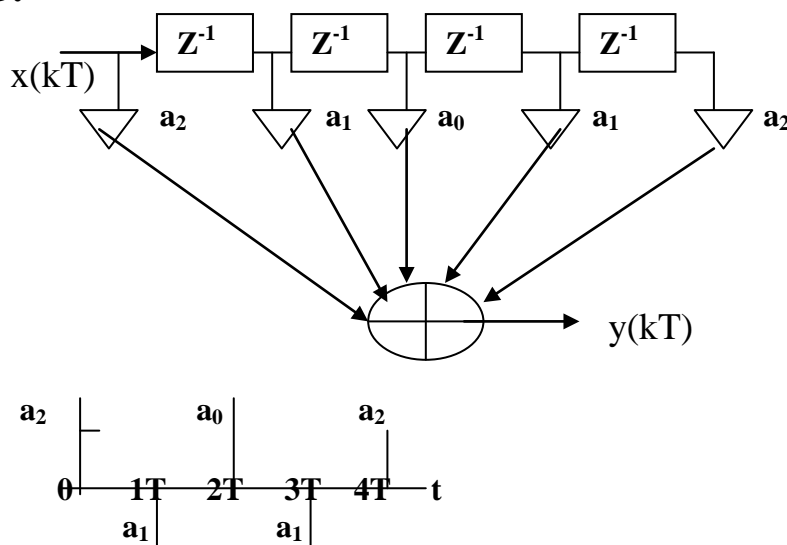


Рис.4. Симетричний КІХ-фільтр з  $N=5$

**Z-передатна функція лінійного дискретного ланцюга з N=5 має вид:**

$$W(Z) = a_2 + a_1 Z^{-1} + a_0 Z^{-2} + a_1 Z^{-3} + a_2 Z^{-4} = \\ = Z^{-2} (a_0 + a_1 (Z + Z^{-1}) + a_2 (Z^2 + Z^{-2})).$$

**Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираження для передатної функції приймає вид:**

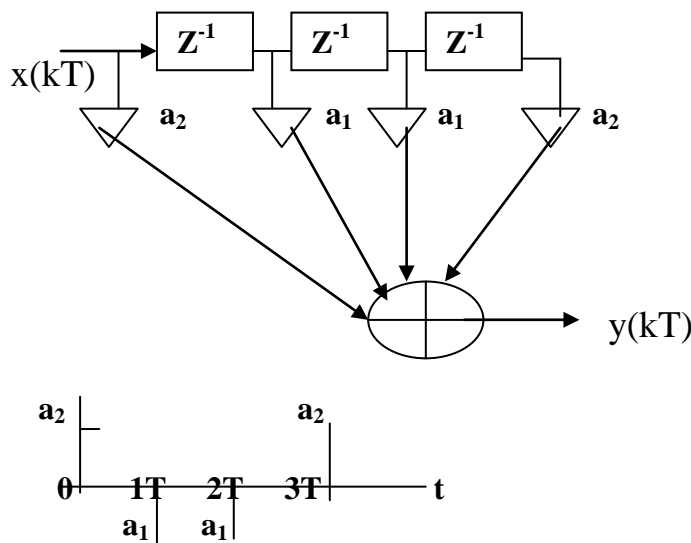
$$W(j\omega) = e^{-j2\omega T} (a_0 + 2a_1 \cos \omega T + 2a_2 \cos 2\omega T).$$

**Формули АЧХ і ФЧХ:**

$$A(\omega) = a_0 + 2a_1 \cos \omega T + 2a_2 \cos 2\omega T, \quad \varphi(\omega) = -2\omega T.$$

**Фазочастотна характеристика строго лінійна.**

**2. Симетричні КІХ-фільтри з парним N. На рис. 5 представлена структурна схема фільтра для випадку N=4.**



**Рис.5. Симетричний КІХ-фільтр із N=4**

**Z-передатна функція лінійного дискретного ланцюга з N=4 має вид:**

$$W(Z) = a_2 + a_1 Z^{-1} + a_1 Z^{-2} + a_2 Z^{-3} = \\ = Z^{-1.5} (a_1 (Z^{0.5} + Z^{-0.5}) + a_2 (Z^{1.5} + Z^{-1.5})).$$

**Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираження для передатної функції приймає вид:**

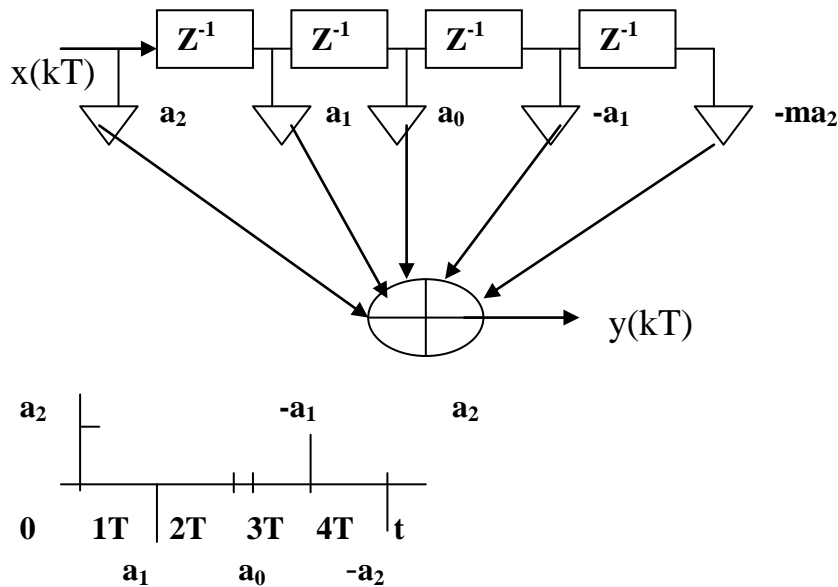
$$W(j\omega) = e^{-j1.5\omega T} (2a_1 \cos 0.5\omega T + 2a_2 \cos 1.5\omega T).$$

**Формули АЧХ і ФЧХ:**

$$A(\omega) = 2a_1 \cos 0.5\omega T + 2a_2 \cos 1.5\omega T, \quad \varphi(\omega) = -1.5\omega T.$$

## §2.2. Асиметричні КІХ- фільтри з лінійною фазою

**1. Асиметричні КІХ-фільтри з непарним N. На рис. 6 представлена структурна схема фільтра для випадку N=5.**



**Рис.6. Асиметричний КІХ-фільтр із N=5**

**Z-передатна функція лінійного дискретного ланцюга з N=5 має вид:**

$$\begin{aligned} W(Z) &= a_2 + a_1 Z^{-1} + 0 Z^{-2} - a_1 Z^{-3} - a_2 Z^{-4} = \\ &= Z^{-2} (a_1 (Z - Z^{-1}) + a_2 (Z^2 - Z^{-2})). \end{aligned}$$

**Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираження для передатної функції приймає вид:**

$$W(j\omega) = e^{-j2\omega T} j(2a_1 \sin \omega T + 2a_2 \sin 2\omega T).$$

**Формули АЧХ і ФЧХ:**

$$A(\omega) = 2a_1 \sin \omega T + 2a_2 \sin 2\omega T, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - 2\omega T.$$

2. Асиметричні КІХ-фільтри з парним N. На рис. 7 представлена структурна схема фільтра для випадку N=4.

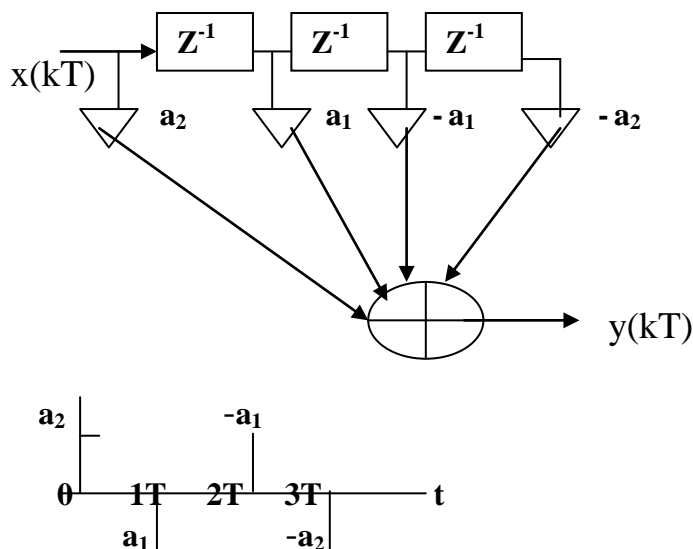


Рис.7. Асиметричний КІХ-фільтр із N=4

Z-передатна функція лінійного дискретного ланцюга з N=4 має вид:

$$W(Z) = a_2 + a_1 Z^{-1} - a_1 Z^{-2} - a_2 Z^{-3} = Z^{-1.5} (a_1 (Z^{0.5} - Z^{-0.5}) + a_2 (Z^{1.5} - Z^{-1.5})).$$

Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираження для передатної функції приймає вид:

$$W(j\omega) = e^{-j1.5\omega T} j(2a_1 \sin 0.5\omega T + 2a_2 \sin 1.5\omega T).$$

**Формули АЧХ і ФЧХ:**

$$A(\omega) = 2a_1 \sin 0.5\omega T + 2a_2 \sin 1.5\omega T, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - 1.5\omega T.$$

### §3. Загальні властивості КІХ- фільтрів з лінійною фазою

Загальні властивості КІХ-фільтрів з лінійною фазою:

#### 1. Симетричні фільтри.

а)  $W(0) \neq 0, \quad \varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega T \quad (1)$

б) Якщо N-непарне, те АЧХ-парна функція:

$$W(\omega) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{0.5N} a_k \cos k\omega T. \quad (2)$$

**Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d) \neq 0$ .**

**в) Якщо N-парне, те АЧХ-непарна функція:**

$$W(\omega) = 2 * \sum_{k=1}^{0.5N} a_k \cos((k-0.5)\omega T). \quad (3)$$

**Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d) = 0$ .**

## **2. Асиметричні фільтри.**

**а)  $W(0) = 0$ , \_\_,  $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} * \omega T$  (4)**

**б) Якщо N-непарне, те АЧХ-непарна функція:**

$$W(\omega) = 2 * \sum_{k=1}^{0.5N-1} a_k \sin k\omega T. \quad (5)$$

**Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d) = 0$ .**

**в) Якщо N-парне, те АЧХ-парна функція:**

$$W(\omega) = 2 * \sum_{k=1}^{0.5N} a_k \sin((k-0.5)\omega T). \quad (6)$$

**Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d) \neq 0$ .**

**Основні висновки. 1. Z-передатна функція КІХ-фільтра описується вираженням:**

$$W(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^{-k}.$$

**(7)**

**2. Імпульсна характеристика КІХ-фільтра:**

$$g(k) = b_k, \quad k=0,1,\dots,n \dots \quad (8)$$

**Приклад 1. Нехай сигнал на виході КІХ-фільтра описується різницеvim рівнянням:**

$$y(kT) = b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T),$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad n = 1.$$

**Z-передатна функція такого КІХ-фільтра має вид:**

$$W(z) = 1 + 2z^{-1}.$$

**Імпульсна характеристика:**

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 2, \quad g(3) = g(4) = \dots = 0.$$

**Нехай вхідний сигнал нашого КІХ-фільтра дорівнює:**

$$x(kT) = 1 \text{ для } k = 0, 1 \text{ и } x(kT) = 0, \text{ для } k \geq 2.$$

**Вихідний сигнал розраховується в такий спосіб:**

$$y(0) = 1 * 1 + 2 * 0 = 1,$$

$$y(1T) = 1 * x(T) + 2 * x(0) = 1 + 2 = 3,$$

$$y(2T) = 1 * x(2T) + 2 * x(T) = 0 + 2 = 2.$$

## §4. Однорідні КІХ-фільтри

Введемо поняття нормованої частоти Котельнікова-Найквіста частоту  $\omega T = 2\pi w$ ,  $w = \omega T / 2\pi$ . Через періодичність частотних характеристик ЛДС нормовану частоту досить розглядати в діапазоні  $w = 0 \dots 0.5$ . Підставимо вираження:  $z = e^{j\omega T} = e^{j2\pi w}$  у формулу розрахунку передатної функції КІХ-фільтра:

$$W(e^{j2\pi w}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} b_k e^{-j2k\pi w} + b_{\frac{N}{2}} * e^{-jN\pi w} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^N b_k e^{-j2k\pi w} = A(w) * e^{j\phi(w)}. \quad (9)$$

Нехай симетричні коефіцієнти рівні між собою:

$$b_k = b_{N-k}, \text{ m.e. } b_0 = b_N, b_1 = b_{N-1}, \dots$$

У цьому випадку ФЧХ, тобто аргумент КЧХ, виходить лінійним:

$$\phi(w) = -N\pi w. \quad (8)$$

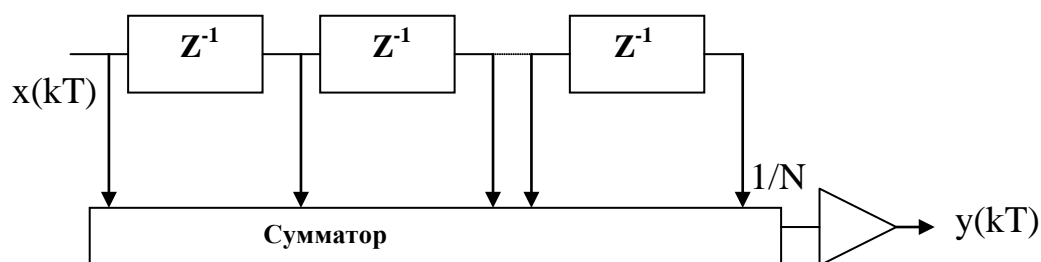
Перейдемо до розгляду особливостей однорідних фільтрів.

Однорідним КІХ-фільтром називається такий нерекурсивний фільтр, у якого всі коефіцієнти рівні між собою  $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1/N \dots$

Тоді передатна функція описується вираженням:

$$W(z) = \frac{1}{N} * \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}. \quad (10)$$

Якщо  $N = 2^p$ , операцію множення на коефіцієнт  $1/N$  можна замінити зрушенням на  $p$  розрядів вправо, і тоді структурна схема однорідного КІХ-фільтра буде такою, як представлена на рис.7:





**Рис.8. Структурна схема однорідного КІХ-фільтра**

**АЧХ однорідного фільтра порядку N виражається формулою:**

$$A(\omega, N) = \left| W(e^{j2\pi\omega}) \right| = \frac{1}{N} * \left| \frac{\sin(N\pi\omega)}{\sin(\pi\omega)} \right|. \quad (11)$$

### **§5. Однорідні КІХ-фільтри як ФНЧ**

**Вимоги до розрахунку фільтра. АЧХ ідеального фільтра в смузі пропускання дорівнює  $A_{ид}=1$ , а в смузі затримки  $A_{ид}=0$ . Іншими словами, у смузі пропускання:**

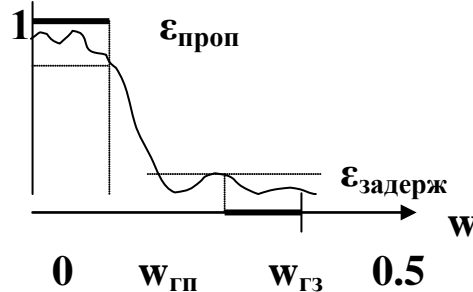
$$A_{ид}=1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_{гп} \quad A_{ид}=1,$$

**у смузі пропускання :  $\omega_{гз} \leq \omega \leq 0.5$   $A_{ид}=0$ ,**

**у перехідній смузі:  $\omega_{гп} \leq \omega \leq \omega_{гз}$   $A_{ид}$  не визначена.**

**Потрібно синтезувати фільтр таким, щоб відхилення АЧХ у смузі пропускання і смузі загасання не перевищували наперед заданих величин  $\epsilon_{проп}$  і  $\epsilon_{задерж}$ .**

**Сказане ілюструє рис. 9.**



**Рис.9. Вимоги до розрахунку ФНЧ**

**Розрахунок фільтра. Єдиним параметром однорідного фільтра є його порядок N. При збільшенні N ширина головного пелюстка зменшується. Оскільки ширина головного пелюстка повинна бути більше смуги пропускання, то з формули (11) випливає, що  $N < 1/\omega_{гп}$ . Але при цьому може не виконуватися вимога по припустимих відхиленнях АЧХ у смузі затримки. Виходом з положення, що створилося, може служити послідовне (каскадне) з'єднання Q однакових**

однорідних фільтрів (рис.10), порядок кожного з яких дорівнює  $N/Q$ . АЧХ такого фільтра визначається формулою:

$$A_p(\omega, N) = \left[ A(\omega, \frac{N}{Q}) \right]^Q. \quad (12)$$

Синтезований по такому принципу однорідний фільтр має більш широкий головний пелюсток і в той же час значно менший рівень бічних пелюстків.

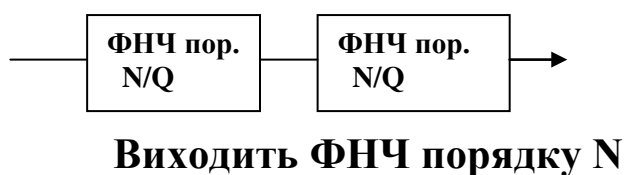


Рис.10. Каскадне з'єднання однорідних фільтрів

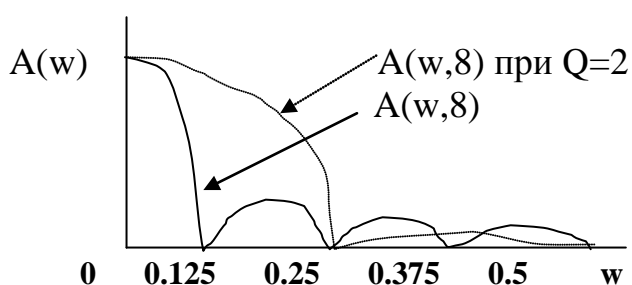


Рис.11. Розширення АЧХ каскадних КІХ-фільтрів

## Тема №12

### Приклади розрахунку КІХ-фільтров

**Ціль.** Освоєння різних способів розрахунку фільтрів з кінцевою імпульсною характеристикою.

#### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Матеріал дійсної теми може використовуватися при проведенні практичних робіт, а також у курсових і самостійних роботах.

**Приклад 1.** Сигнал на виході КІХ-фільтра описується різницевим рівнянням:

$$y(kT) = b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T),$$

$$b_0 = 1, \dots, b_1 = 2, \dots, n = 1.$$

**Z-передатна функція** такого КІХ-фільтра має вид:

$$W(z) = 1 + 2z^{-1}.$$

**Імпульсна характеристика:**

$$g(0) = 1, \dots, g(1) = 2, \dots, g(3) = g(4) = \dots = 0.$$

**Нехай вхідний сигнал** нашого КІХ-фільтра дорівнює:

$$x(kT) = 1 \text{ для } k = 0, 1 \text{ и } x(kT) = 0, \text{ для } k \geq 2.$$

**Вихідний сигнал** розраховується в такий спосіб:

$$y(0) = 1 * 1 + 2 * 0 = 1,$$

$$y(1T) = 1 * x(T) + 2 * x(0) = 1 + 2 = 3,$$

$$y(2T) = 1 * x(2T) + 2 * x(T) = 0 + 2 = 2.$$

**Приклад 2.** Розглядається КІХ-фільтр із симетричними коефіцієнтами і непарним порядком ( $N=3, 5, 7$ ). Зокрема, для  $N=5$  сигнал на виході описується рівнянням:

$$\begin{aligned} y(kT) &= b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T) + b_2 x(kT - 2T) + b_3 x(kT - 3T) + b_4 x(kT - 4T) = \\ &= \sum_{n=0}^4 b_n x(kT - nT). \end{aligned}$$

**У загальному виді** сигнал на виході ЛДС:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} b_n x(kT - nT).$$

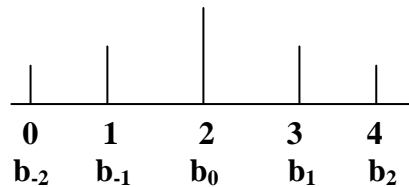
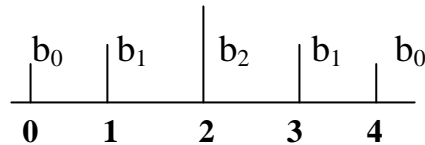
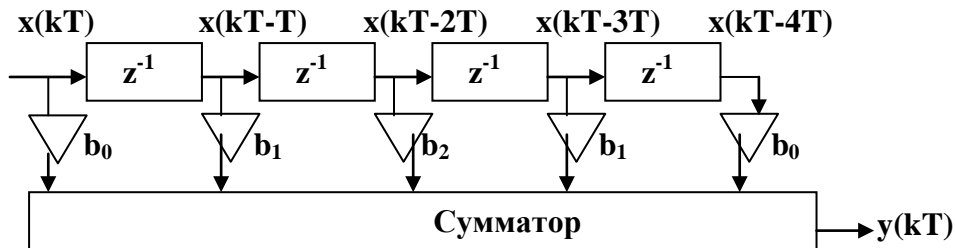
**Передатна функція:**

$$W(z) = \sum_{n=0}^4 b_n z^{-n},$$

**Z-передатна функція:**  $g(kT) = b_n, n = 0, 1, 2, 3, 4.$

**Для розглянутого випадку симетричних коефіцієнтів:**

$$b_0 = b_4, b_1 = b_3, b_2.$$



**Частотна характеристика виходить підстановкою**

$$z = e^{j\omega T}.$$

**У розрахунках використовується нормована частота:**

$$w = \frac{\omega}{2\pi / T} = \frac{\text{Част от а _ сигнала}}{\text{Част от а _ дискрет изации}}.$$

**Для одержання АЧХ перенесемо відліки в негативну область.**

$$A(w, k) = b_0 + \sum_{k=1}^2 b_k e^{-jk2\pi w} + \sum_{k=1}^2 b_k e^{jk2\pi w} = b_0 + \sum_{k=1}^2 b_k (e^{-jk2\pi w} + e^{jk2\pi w}) =$$

$$= b_0 + \sum_{k=1}^2 b_k * 2 \cos(k2\pi w), \quad \text{ФЧХ: } \varphi(w) = -\arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = -k\pi w.$$

**Приклад 3. Оптимізація коефіцієнтів КІХ-фільтра методом найменших квадратів.**

**Завдання.** За критерієм найменших квадратів (G) оптимизировать коефіцієнти однорідного КІХ-фільтра з відомим порядком N.

Критерій найменших квадратів G дає можливість відшукати мінімум квадрата різниці між ідеальною і реальний АЧХ з обліком вагових користувальницьких коефіцієнтів  $q_p$  і  $q_z$ .

Вихідне співвідношення для критерію мінімізації G(C):

$$G(C) = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} (1 - A(w, C))^2 dw + q_z \int_{wz_0}^{wz_1} (0 - A(w, C))^2 dw \Rightarrow \min.$$

У прикладі оптимізуються коефіцієнти однорідного КІХ-фільтра порядку N=5. АЧХ і критерій оптимізації такого фільтра має вид:

$$A(w, C) = \sum_{l=0}^2 C_l \cos(2\pi l w) = C_0 \cos(0 * 2\pi w) + C_1 \cos(1 * 2\pi w) + C_2 \cos(2 * 2\pi w),$$

$$G(C) = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} \left(1 - \sum_{l=0}^2 C_l \cos(2\pi l w)\right)^2 dw + q_z \int_{wz_0}^{wz_1} \left(0 - \sum_{l=0}^2 C_l \cos(2\pi l w)\right)^2 dw.$$

Знайдемо часткові похідні за коефіцієнтами КІХ-фільтра 3 для критерія оптимізації. У нашому випадку:

$$\frac{\partial G(C)}{\partial C_0} = 0 \rightarrow \frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{\partial C_0} = 0 \rightarrow D_{1,0} * C_0 + D_{1,1} * C_1 + D_{1,2} * C_2 = E_0,$$

$$\frac{\partial G(C)}{\partial C_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{\partial C_1} = 0 \rightarrow D_{2,0} * C_0 + D_{2,1} * C_1 + D_{2,2} * C_2 = E_1,$$

$$\frac{\partial G(C)}{\partial C_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{\partial C_2} = 0 \rightarrow D_{3,0} * C_0 + D_{3,1} * C_1 + D_{3,2} * C_2 = E_2.$$

Знайдемо часткову похідну від критерію мінімізації по  $C_0$ :

$$\frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{C_0} = 2 * \left[ q_p \int_{wp_0}^{wp_1} [1 - C_0 \cos(0 * 2\pi w) - C_1 \cos(1 * 2\pi w) - C_2 \cos(2 * 2\pi w)] dw + \right. \\ \left. + \left[ q_z \int_{wz_0}^{wz_1} [C_0 \cos(0 * 2\pi w) - C_1 \cos(1 * 2\pi w) - C_2 \cos(2 * 2\pi w)] dw + \right] = 0.$$

**Аналогічно попередньому знайдемо часткові похідні за коефіцієнтами КІХ-фільтра від АЧХ:**

$$\frac{\partial A(w, C)}{\partial C_0} = \frac{\partial [C_0 * \cos(0 * 2\pi w) + C_1 * \cos(1 * 2\pi w) + C_2 * \cos(2 * 2\pi w)]}{\partial C_0} = \cos(0 * 2\pi w) = 1.$$

$$D_{1,0} = q_p * \int_{wp_0}^{wp_1} C_0 \cos(0 * 2\pi w) dw - q_z * \int_{wz_0}^{wz_1} C_0 \cos(0 * 2\pi w) dw,$$

$$D_{1,1} = q_p * \int_{wp_0}^{wp_1} C_1 \cos(1 * 2\pi w) dw - q_z * \int_{wz_0}^{wz_1} C_1 \cos(1 * 2\pi w) dw,$$

$$D_{1,2} = q_p * \int_{wp_0}^{wp_1} C_2 \cos(2 * 2\pi w) dw - q_z * \int_{wz_0}^{wz_1} C_2 \cos(2 * 2\pi w) dw,$$

$$E_0 = q_p * \int_{wp_0}^{wp_1} C_1 \cos(0 * 2\pi w) dw.$$

**Ті ж самі вираження в загальному виді:**

$$D_{m,i} = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} \cos(i * 2\pi w) * \cos(m * 2\pi w) dw - q_z \int_{wz_0}^{wz_1} \cos(i * 2\pi w) * \cos(m * 2\pi w) dw,$$

$$E_m = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} \cos(m * \pi w) dw,$$

$$\frac{\partial A(w, C)}{\partial C_i} = \cos(i * 2\pi w),$$

$$m = 1, 2, 3; \quad i = 0, 1, 2.$$

**Рішення у векторно-матричному виді:**

$$C = D^{-1} * E.$$

**За аналогією з даним прикладом такі ж результати можна одержати для фільтрів з довільним порядком N.**

**Приклад 4.** Розрахувати однорідний КІХ-фільтр по наступним вихідним даним:

- $w_p=0.08+0.01j$  – гранична нормована частота смуги пропускання;
- $w_z=w_p+0.26+0.01i$  – гранична нормована частота смуги загасання;
- $a_p=-3\text{дБ}$  – максимально припустиме загасання в смузі пропускання;
- $a_z=-(22+i)\text{дБ}$  – максимально припустиме загасання в смузі пропускання.
- $(i+1)$ - число сигналів збудження на вході фільтра.
- $(a=j+1)$ -амплітуда вхідних сигналів.

**Примітка.** У вираженнях  $i$ - передостання цифра номера залікової книжки студента,  $j$ -остання цифра номера залікової книжки.

**Виконання роботи.**

**1.** Визначаємо порядок ланок  $n$ . Порядок ланок  $n$  однорідного КІХ-фільтра і число ланок  $q$  повинні задовольняти нерівності:

$$0.707 \leq \left[ \frac{1}{n} \left| \frac{\sin(n\pi w_p)}{\sin(\pi w_p)} \right| \right]^q. \quad (\text{a})$$

Шляхом розкладання в ряд (а) можна одержати наближене вираження для розрахунку порядку фільтра  $n1$ :

$$n1 = \sqrt{1 + \frac{0.17806}{w_p^2 * q}} + 0.1;$$

Далі робота виконується з застосуванням програми MathCad, для чого необхідно:

- Відкрити файл “Кр1.mcd” і скопіювати його у свій особистий файл (наприклад, “Шматко.mcd”) у форматі програми MathCad.
- Занести в особистий файл свої реквізити:  $i$ - передостання і  $j$ -остання цифра залікової книжки.

- Обчислити  $w_p$ -граничну смугу пропущення і  $w_z$ -граничну смугу загасання.
- Знайти порядок фільтра  $n_1$  і взяти найближче ціле для подальших розрахунків, позначивши його як  $n$ .
- По формулі (а) у діапазоні  $0..0.5$  з інтервалом  $0.02$  обчислити АЧХ однозвенного і двухзвенного однорідного КІХ-фільтра і побудувати їхні графіки як це зроблено в “Кр1.mcd”. Розрахунок і графік АЧХ  $A(w)$  виконаний для однозвенного фільтра порядку  $n$ . Розрахунок і графік АЧХ  $A_1(w)$  виконаний для двухзвенного фільтра порядку  $N=n/2$ .
- Зарисювати і проаналізувати отримані графіки. Перевірити, який фільтр задовольняє поставленій задачі в смузі його пропущення.
- Спуститися нижче по програмі “Кр1.mcd”. Зарисювати і проаналізувати графіки загасання бічних пелюстків у смузі затримки, отримані по формулах:  
 $V(w)=20\log(A(w))$      $V_1(w)=20\log(A_1(w))$  для одне- і двухзвенного фільтра.  
 Указати, який фільтр задовольняє заданим вихідним даним.
- Для обраного однорідного КІХ-фільтра по формулі:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} b_n x(kT - nT).$$

розрахувати  $n_{\max}$  відліків реакції однорідного КІХ-фільтра на виході першої і другої його ланок, якщо число відліків сигналу збудження дорівнює  $i+1$ , і амплітуда окремого відліку  $a=j+1$  (для нашого приклада  $(i+1)=6$  і  $a=(j+1)=5$ ).

Оформити роботу, привести структурну схему одно- і двухланкового фільтрів, сигнали на вході і виході кожної ланки, зробити висновки щодо того, який фільтр задовольняє поставленій задачі в смузі пропущення і затримання.



## Тема №13

### БІХ-фільтри

**Ціль.** Структура і розрахунок параметрів фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою.

#### ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Для рекурсивних фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою – БІХ-фільтрів – рівняння фільтрації містить як вхідні, так і вихідні відліки сигналу збудження, а в схемі присутні елементи зворотного зв'язку (рис.1). Такі фільтри називаються рекурсивними.

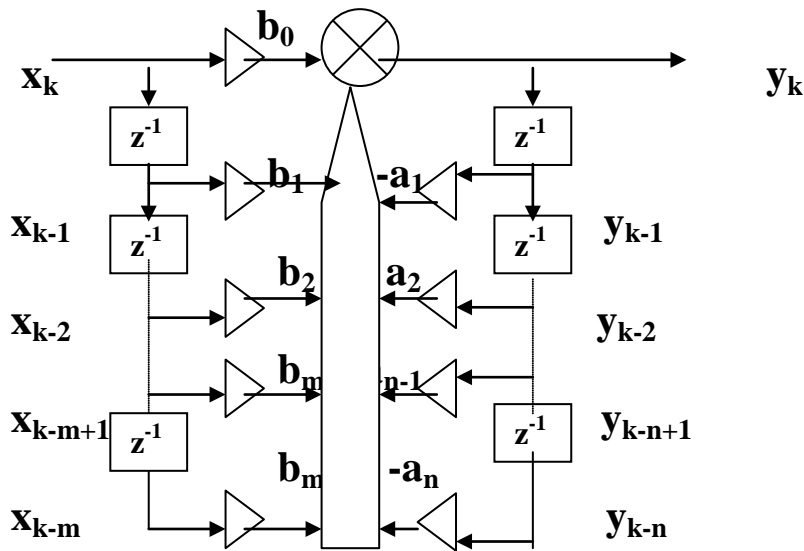


Рис.1. Пряма реалізація БІХ-фільтра

#### §1. Рівняння фільтрації БІХ- фільтру

БІХ-фільтр описується різницеvim рівнянням у рекурсивній формі:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n x(kT - nT) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m y(kT - mT). \quad (1)$$

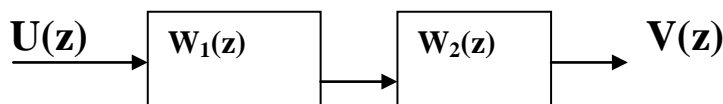
**Z-передатна функція БІХ-фільтрів описується стандартним вираженням:**

$$W(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}}. \quad (2)$$

Оскільки БІХ-фільтри реалізуються або у виді мікросхем, або програмним шляхом на спеціальних процесорах, передатна функція може представлятися по-різному.

Розділимо загальний суматор на два окремих блоки: для рекурсивної і нерекурсивної частини фільтра. У результаті виходять два послідовно з'єднаних фільтри, один із яких є нерекурсивним, а іншої містить тільки рекурсивну частину. Оскільки результат послідовного проходження сигналу через ряд лінійних стаціонарних пристроїв не залежить від послідовності їхнього з'єднання, стає можливим поміняти місцями обидві частини нашого фільтра. Важливо простежити, що в обох ліній затримки подається той самий сигнал, виражений через ті самі відліки. Тому лінії затримки можна об'єднати. У результаті виходить різновид схеми КІХ-фільтра, що називається канонічною. Теоретично обидві форми еквівалентні. Але практично розходження цих форм істотні. У канонічному фільтрі використовується одна лінія затримки, а це зменшує загальне число комірок пам'яті. Але при цьому амплітуди окремих відліків можуть значно перевершувати амплітуду вхідного і вихідного сигналів. Це приводить до необхідності збільшувати розрядність представлення чисел у лінії затримки в порівнянні з розрядністю вхідного і вихідного сигналів. Для прямої форми реалізації КІХ-фільтрів у лініях затримки зберігаються безпосередні відліки вхідного і вихідного сигналів і підвищеної розрядності лінії затримки не потрібно. Єдиним елементом, що вимагає підвищеної

розрядності в даному випадку є суматор і цей факт враховується в архітектурі мікропроцесорів, спеціально призначених для обробки сигналів у реальному часі. Ці розуміння відбиваються на структурній схемі. Представимо БІХ-фільтр, як ЛДС, що складається з двох послідовних ланок (рис.2):



**Рис.2. Різновид представлення КІХ-фільтра**

У цьому випадку справедливі наступні рівності:

$$W(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = W(z)_1 W(z)_2, \text{ ГДЕ}$$

$$W(z)_1 = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}} = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad (3)$$

$$W(z)_2 = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} = \frac{V(z)}{Y(z)}.$$

Перша ланка описується різницевою рівнянням:

$$y(kT) = u(kT) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m y(kT - mT), \quad (4)$$

Друга ланка описується різницевою рівнянням:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n y(kT - nT). \quad (5)$$

При такій формі запису в БІХ-фільтре затримується тільки проміжний сигнал  $y(k)$  і структурну схему можна представити в такий спосіб (рис.4):

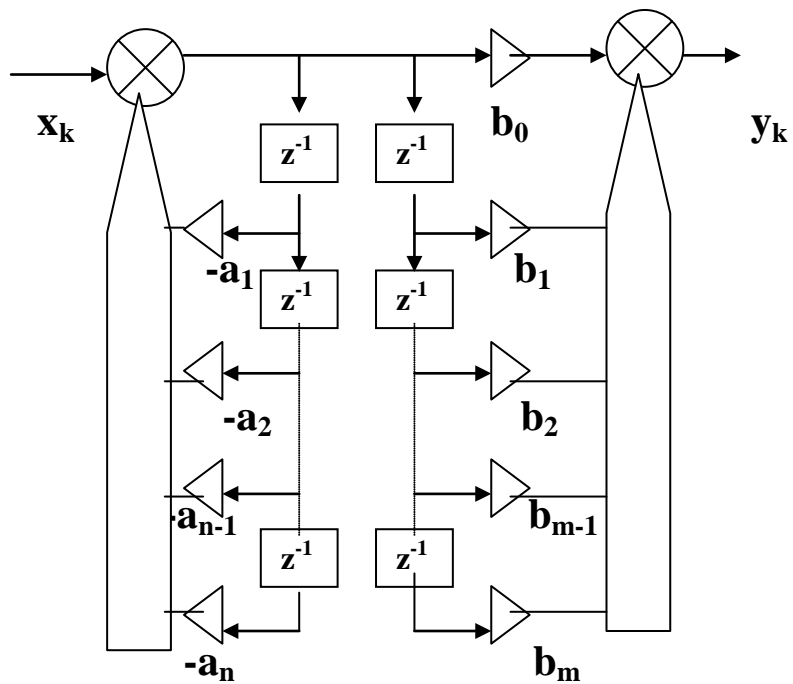


Рис.3. Перехід до канонічної формі БІХ-фільтру

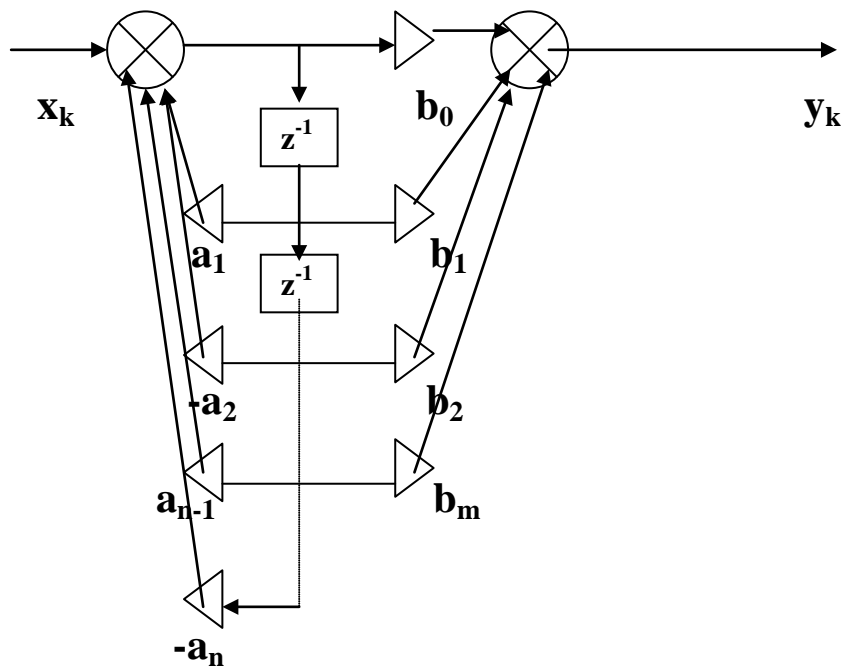


Рис.4. Канонічна реалізація БІХ-фільтра

Приклад. Мається рекурсивний БІХ-фільтр, описуваний рівнянням:

$$v(kT) = u(kT) + av(kT), \quad N = 1, M = 2, b_0 = 1, a_1 = -a.$$

Структурна схема фільтра представлена на рис. 5.

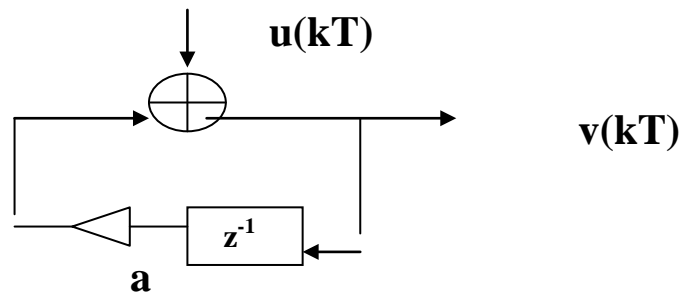


Рис.5. Приклад простого БІХ-фільтру

Z-передатна функція фільтра має вид:

$$W(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}.$$

Знайдемо імпульсну характеристику БІХ-фільтра нашого приклада, подаючи на вхід дискретний  $\delta$ -імпульс:

$$u(kT) = \delta(kT) = \begin{cases} 1 & \text{для } k = 0 \\ 0 & \text{для } k \neq 0 \end{cases}$$

$$g(kT) = \delta(kT) + ag(kT - T),$$

$$k = 0 \text{ _____ } g(0) = 1,$$

$$k = 1 \text{ _____ } g(T) = ag(0) = a,$$

$$k = 2 \text{ _____ } g(2T) = ag(T) = aa = a^2,$$

$$k = 3 \text{ _____ } g(3T) = ag(2T) = a a^2 = a^3,$$

.....

$$k = n \text{ _____ } g(nT) = a^n.$$

З останнього приклада видно, що в міру того, як вихідна лінія затримки заповнюється відліками імпульсної характеристики, складність аналітичних формул швидко зростає. Наявність у схемі зворотних зв'язків приводить до одержання нескінченної імпульсної характеристики. Через зворотні зв'язки робота БІХ-фільтрів може бути хитливою.

## §2. Біквдратний блок

Як правило, реалізація цифрових фільтрів у чи прямій канонічній формі через помилки обчислень, обумовлених кінцевою розрядністю коду, недоцільна. Завжди намагаються реалізувати фільтри з використанням простих ланок другого порядку - біквдратних блоків.

Біквдратний блок є універсальним структурним елементом БІХ-фільтрів, послідовне (каскадне) з'єднання яких дозволяє одержати фільтр будь-якого ступеня складності. Біквдратний блок описується рівнянням:

$$u(kT) = -a_1 v(kT - T) - a_2 v(kT - 2T) + b_0 u(kT) + b_1 u(kT - T) + b_2 u(kT - 2T),$$

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Каскадна схема підключення біквдратних блоків представлена на рис. 6:

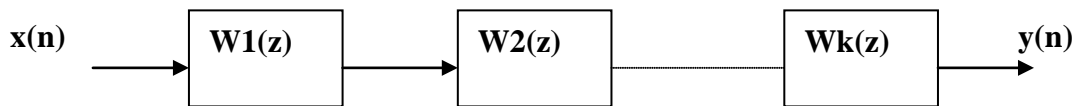
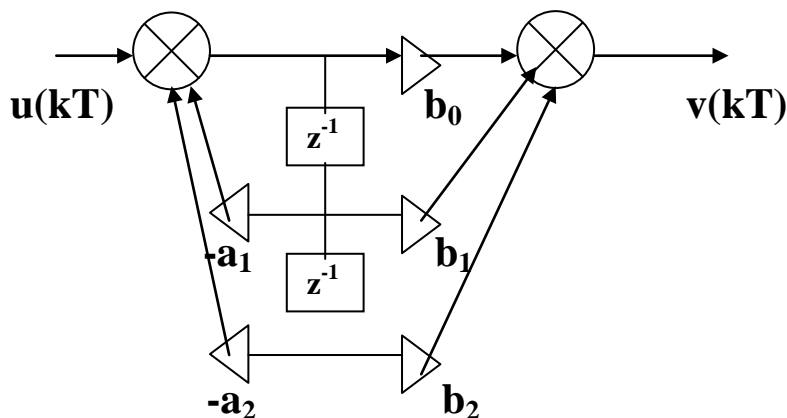


Рис. 6. Каскадна форма реалізації БІХ-фільтра

У цьому випадку передатна функція фільтра:

$$W(z) = \prod_{k=0}^{L-1} W(z)_k.$$

Структурна схема біквдратного блоку видна з рис.7.



**Рис.7. Структурна схема біквдратного блоку**

Біквдратний блок є результатом билинейного  $Z$ -перетворення. Для цього з формули  $Z$ -перетворення виділяють оператор Лапласа “ $p$ ”, а десятковий логарифм розкладають у ряд Тейлора:

$$z = e^{pT},$$

$$p = \frac{1}{T} \ln z,$$

$$\ln z = 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^3 + \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^{2n+1} + \dots \right].$$

У зазначеному розкладанні залишають перший член ряду і шляхом множення чисельника і знаменника на  $z^{-1}$  переходять до негативних ступенів перемінної  $z$ :

$$p = \frac{2}{T} * \frac{z-1}{z+1}, \text{ — при умноженні на } z^{-1}$$

$$p = \frac{2}{T} * \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Уводиться позначення:  $\gamma = 2/T$ , тоді:

$$p = \gamma * \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Відкіля перемінна  $z$  як функція оператора Лапласа має вид

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}.$$

Передатна функція цифрового фільтра  $W(z)$  виходить з передатної функції аналогового фільтра  $G(p)$  заміною:

$$p = \gamma * \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

### §3. Частотна характеристика БІХ-фільтрів

Підставляючи в  $Z$ -передатну функцію множник, що  $z = e^{j\omega T}$ , повертає, одержуємо АЧХ і ФЧХ БІХ-фільтра звичайним образом:

$$W(e^{j\omega T}) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

$$A(\omega) = |W(e^{j\omega T})|, \quad \varphi(\omega) = \arg(W(e^{j\omega T})) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}.$$

**Кругова частота вибирається нормованої:**

$$\omega = \frac{\omega}{2\pi/T} = \frac{\omega T}{2\pi}.$$

**У цьому випадку АЧХ БІХ-фільтрів має вид:**

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} b_m b_n \cos((m-n) * 2\pi\omega)}{\sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} a_k a_l \cos((k-l) * 2\pi\omega)}}.$$

**Для приведенного вище приклада:**

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(2\pi\omega) + a^2}}.$$

**БІХ-фільтри мають нелінійну ФЧХ.**

#### **§4. Розрахунок БІХ-фільтрів**

**БІХ-фільтри розраховуються на підставі аналогових фільтрів-прототипів нижніх частот з частотою зрізу  $\omega_c=1$ . Як фільтри-прототипи можуть використовуватися фільтри Батерворта, Чебишева, еліптичні й ін.**

**Вихідними даними до розрахунку БІХ-фільтрів є:**

- **Смуга пропускання (СП)  $0 \leq \Omega \leq 1$ .**
- **Смуга затримки (СЗ).**
- **Нерівномірність АЧХ у СП у дБ.**
- **Мінімальне загасання в СЗ у дБ.**

**Для аналогових фільтрів парного порядку  $n$ , зокрема, для фільтрів Батерворта передатна функція має вид:**

$$W(s) = \frac{1}{c \prod_{i=1}^{n/2} [s^2 - 2a_i s + a_i^2 + b_i^2]},$$

**тут  $c, a_i, b_i$  - коефіцієнти фільтра-прототипу.**

**Перехід від фільтра-прототипу до цифрового фільтра виконується за допомогою заміни:**



$$s = \gamma \frac{1 - k Z^{-1}}{1 + k Z^{-1}}, \quad \gamma = \frac{\operatorname{ctg}(\pi W_m)_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФНЧ}}{\operatorname{tg}(\pi W_m)_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФВЧ}},$$

$$k = \frac{+1_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФНЧ}}{-1_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФВЧ}},$$

$W_m$  - граница смуги пропущення.

**Приклад. Одержати ФНЧ БХ-фільтр з аналогового ФНЧ із передатною функцією:**

$$W(p) = \frac{1}{p + 0.4}, \quad \gamma = 2.5,$$

$$p = 2.5 \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}},$$

$$W(z) = \frac{1}{2.5 \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} + 0.4} = \frac{1 + Z^{-1}}{2.5(1 - Z^{-1}) + 0.4(1 + Z^{-1})} = \frac{1 + Z^{-1}}{2.9 - 2.1 Z^{-1}}.$$

## Тема №14

### Цифрова корекція каналів

Найбільше повно розроблена і знайшла відображення в літературних джерелах теорія і методика структурного синтезу полиномних частотних коректорів лінійних перекручувань каналів зв'язку [10], що застосовуються для виправлення частотних перекручувань у лінійних ланцюгах. При каскадному підключенні частотного коректора з комплексною частотною характеристикою (КЧХ)  $G(i\omega)$  до лінії зв'язку з КЧХ  $W(i\omega)$  прагнуть домогтися того, щоб результуюча КЧХ “канал + коректор”  $R(i\omega) = W(i\omega) G(i\omega)$  була якнайближче до необхідного КЧХ  $F(i\omega)$ . У полиномних частотних коректорах базисні функції, на які збільшуються коефіцієнти підсилення групового часу частотного запізнювання, вибираються ортонормованими, що відповідають умові:

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \varphi_k(i\omega) * \varphi_\ell(i\omega) d\omega = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell \end{cases}, \text{ де}$$

$$\varphi_k(i \cdot \omega) = e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot T}.$$

Частотні коректори, що використовують ортонормовані базисні функції, називаються

гармонійними, унаслідок того, що вони є періодичними з періодом  $2\Omega$ , де  $\Omega = 2\pi f_{\max}$  - частота дискретизації Котельнікова, що для сигналу  $s(t)$  відповідає подвоєній верхній частоті його спектру  $S(\omega)$ . Інтервал дискретизації Котельнікова  $T$  дорівнює

$$T = \frac{1}{2 \cdot f_{\max}} = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Відомо [12], що при виборі гармонійного коректора середньоквадратичний критерій помилки  $D$ , що намагаються всіляко зменшити і який згідно теореми Релея-Парсеваля, описується вираженням:

$$D^2 = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\Omega}^{\Omega} \left| F(\omega) - \sum_{k=0}^n C_k * \Phi_k(i\omega) \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) - \sum_{k=0}^n C_k * \varphi_k(t) \right|^2 dt,$$

(1)

$C_k$  – коефіцієнти підсилення гармонійного коректора,  $k=0,1,\dots,n\dots$

Якщо максимальна частота в спектрі функцій  $f(t)$  і  $\varphi_k(t)$ ,  $k=0,1,2,\dots,n$ , не перевищує  $\Omega$ , середньоквадратична помилка  $D^2$  на підставі теореми Котельнікова може бути знайдена по відлікам цих функцій, узятими з частотою, що вдвічі перевищує частоту  $\Omega/2\pi$ , тобто:

$$D^2 = T * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| f(mT) - \sum_{k=0}^n C_k * \varphi_k(mT) \right|^2, \quad T = \pi/\Omega. \quad (2)$$

На підставі (2) передатна функція гармонійного коректора

$$G(i\omega) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} * \sum_{k=0}^n C_k e^{-jk\omega T}, -\Omega \leq \omega \leq \Omega., \quad (3)$$

збігається з передатною функцією дискретного фільтра з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтра) (рис. 1) і його параметри в часовій області можуть бути знайдені аналогічно параметрам дискретних фільтрів цього класу [3].

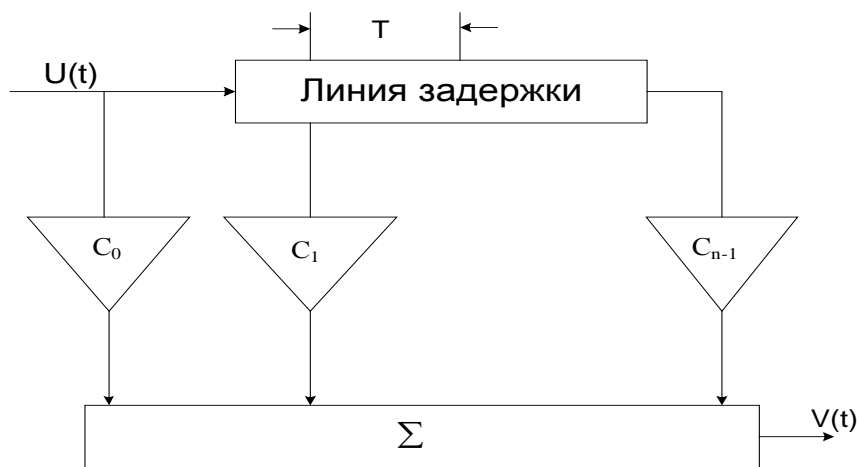


Рис. 1. Структурна схема гармонійного коректора

Задача аналогічна тієї, котру виконує гармонійний коректор, може бути поставлена для дискретного цифрового каналу зв'язку, спрощена структурна якого представлена на рис. 2. У випадку, коли передача здійснюється прямокутними імпульсами, необхідно враховувати, що його частотна характеристика нескінченна. Фільтр нижніх частот (ФНЧ) на передавальному кінці системи залишає головний пелюсток амплітудно-частотної характеристики (АЧХ), забираючи всі бічні. Тому на виході ФНЧ форма прямокутного імпульсу змінюється, він розширюється й у сусідні відлікові моменти часу вже не дорівнює нулю. Це явище зветься межсимвольною інтерференцією сигналу. При проходженні через лінію зв'язку з

нерівномірної АЧХ і нелінійною фазо-частотною характеристикою (ФЧХ) форма імпульсів додатково спотворюється і межсимвольна інтерференція збільшується. Задача цифрового коректора, що як показано вище, являє собою КІХ-фільтр, по можливості позбутися від цього явища.

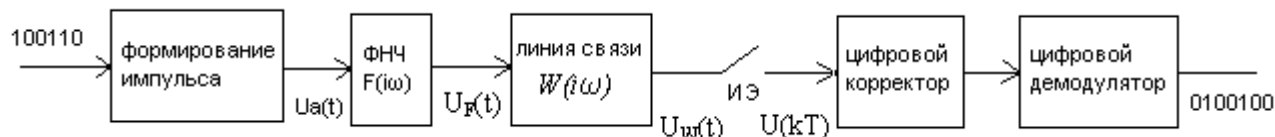
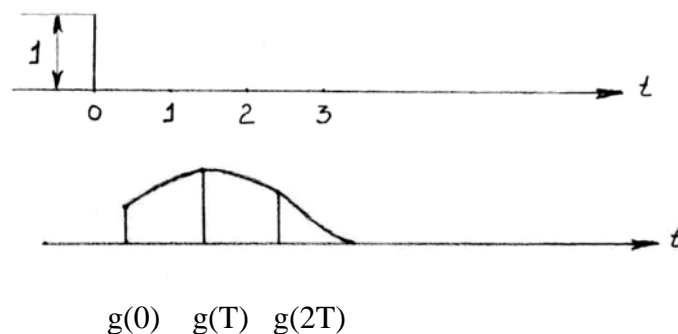


Рис. 2. Спрощена схема системи передачі дискретного зв'язку

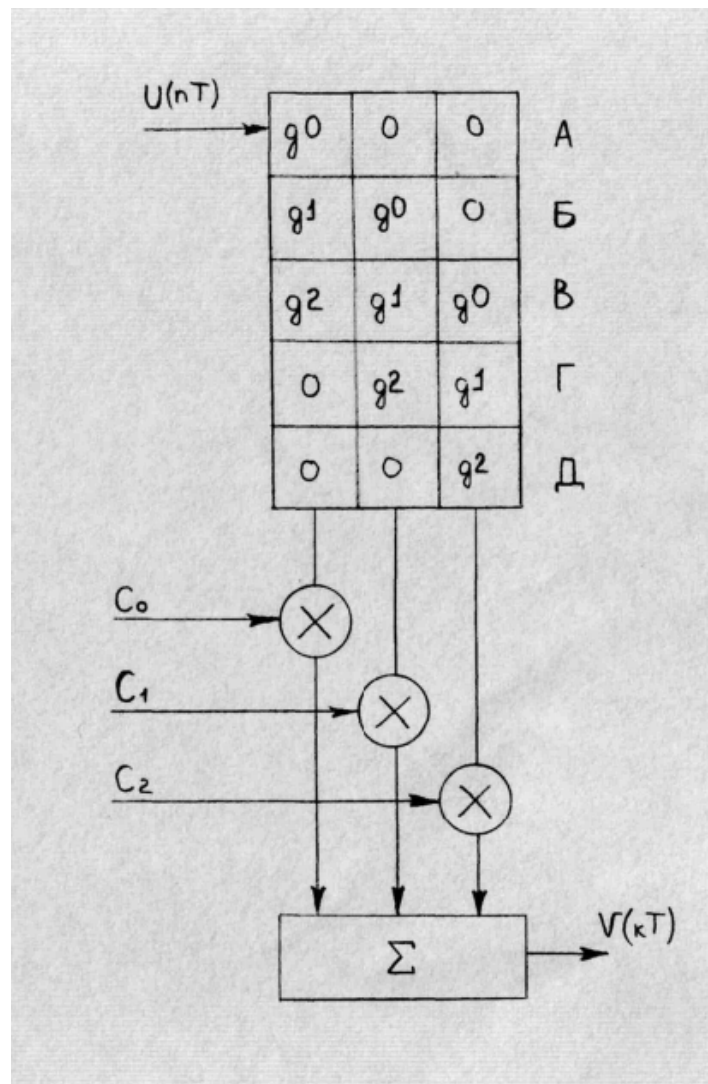
Розрахунок цифрового коректора виробляється в такий спосіб. Подамо на вхід системи передачі сигнал у виді одиниці, оточеної нулями "...00100..."аналог дискретного  $\delta(k)$ -імпульсу. Тоді вхідний сигнал коректора будуть складати відліки імпульсній характеристиці системи "ФНЧ+лінія зв'язку"  $q(t)$  у дискретні моменти, що відповідають інтервалу Котельнікова (рис. 3). Використовуємо як коректора КІХ фільтр порядку  $n = 3$ .



**Рис. 3. Сигнали на вході коректора**

**Позначимо:  $g_0=g(0), g_1=g(T), g_2=g(2T)$ .**

**Представимо динаміку проходження сигналу через коректор як зрушення інформації в трьохланковому зсувному реєстрі.**



**У відлікові моменти часу сигнал на виході цифрового коректора описується наступною системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):**

$$V_A = C_0 \cdot g_0 + 0 + 0$$

$$V_B = C_0 \cdot g_1 + C_1 \cdot g_0 + 0$$

$$V_B = C_0 \cdot g_2 + C_1 \cdot g_0 + C_2 \cdot g_0$$

$$V_G = 0 + C_1 \cdot g_2 + C_2 \cdot g_1$$

$$V_D = 0 + 0 + C_3 \cdot g_2$$

$C_0, C_1, C_2$  – коефіцієнти коректора.

$g_0, g_1, g_2$  – відомі значення вхідного сигналу.

$V_A, V_B, V_B, V_G, V_D$  – бажаний сигнал на виході цифрового коректора.

Потрібно, вирішуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь, знайти коефіцієнти коректора  $Z_0, Z_1, Z_2$ , що забезпечували б необхідні значення вихідного сигналу.

### 1. Перший спосіб рішення задачі

Система рівнянь несовместна, оскільки число  $V_i$  більше числа невідомих  $C_k$ .

Відкинемо  $V_A$  і  $V_D$ , залишивши  $V_B, V_B$  і  $V_G$ . СЛАР прийме вид:

$$\left. \begin{array}{l} V_B = C_0 \cdot g_1 + C_1 \cdot g_0 + 0 \\ V_B = C_0 \cdot g_2 + C_1 \cdot g_1 + C_2 \cdot g_0 \\ V_G = 0 + C_1 \cdot g_2 + C_2 \cdot g_1 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \\ 0 & g_2 & g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

**G**

**C**

Позначимо бажаний вихідний сигнал як вектор

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Представимо СЛАР у векторно-матричній формі

$$G \cdot C = H \rightarrow \underline{G^{-1} \cdot G} \cdot C = G^{-1} \cdot H$$

**H**- одинична матриця

Шуканий вектор коефіцієнтів коректора визначається формулою (5):

$$C = G^{-1} \cdot H \quad (5)$$

## 2. Другий спосіб рішення задачі

Залишимо всі рівняння від А до Д, але замість точної рівності лівих і правих частин зажадаємо мінімуму суми квадратів різниць - нев'язок.

Позначимо:

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \\ 0 & g_2 & g_1 \\ 0 & 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - бажаний вихідний сигнал.}$$

Сума квадратів нев'язок для розглянутого приклада дорівнює:

$$D(C_0, \dots, C_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} G_{i,j} \cdot C_j - H_i \right)^2, \quad m=5, \quad n=3. \quad (6)$$

Диференціюємо (6) по  $C_K$  ( $DO=0, \dots, n-1$ ) і дорівнюємо часткові похідні до 0:

$$\frac{\partial D}{\partial C_K} = \sum_{i=0}^{m-1} 2 \cdot \left( \sum_{j=0}^{n-1} G_{i,j} \cdot C_j - H_i \right) \cdot G_{i,K} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{m-1} G_{i,j} \cdot G_{i,K} \right) \cdot C_j = \sum_{i=0}^{m-1} H_i \cdot G_{i,K} \quad (7)$$



$A_{j,k}$  – елемент матриці  $A$  правої частини (7), що дорівнює  $A=G^T G$ ,

$B_k$  – елемент вектора лівої частини (7)  $B=G^T H$ ,  $G^T$  - матриця, транспонована до  $G$ .

Запишемо систему рівнянь (7) у векторно- матричній формі:

$$AC=B \Rightarrow A^{-1}AC=A^{-1}B, A^{-1} - \text{одинична матриця.}$$

Відкіля шукані коефіцієнти коректора знаходяться як

$$C=A^{-1}B \quad (8)$$

Вираження (8) легко програмується і отримується на математичних системах MathCad і Matlab.

**Висновки. 1.** Цифровий коректор, що представляє собою, як і гармонійний коректор, різновид КІХ-фільтра, дозволяє компенсувати межсимвольніе перекручування і стаціонарні лінійні перекручування в дискретних каналах.

**2.** Вихідними даними до розрахунку цифрового коректора є відліки імпульсної характеристики на інтервалах Котельнікова.

**3.** СЛАР для отримання коефіцієнтів цифрового коректора легко програмується і вирішується у системах MathCad і Matlab.

**4.** Як показують перевірочні розрахунки виправляюча здатність цифрового коректора для зазначених в роботі початкових умов знаходиться у межах 92-97%.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. Бондарев В.Н., Трёстер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. -:Конус, 2001.-398 с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. Спб.: Питер, 2002. – 608 с.
3. Френкс Л. Теория сигналов/Пер. с англ.-М.:Сов. Радио, 1974. – 312 с.
4. Бизин А.Т. Введение в цифровую обработку сигналов.-: Новосибирск, 1998. – 50 с.
5. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьёва Е.Б., Гук И.И. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций.- СПб,: БХВ-Петербург, 2003. -608 с.
6. Ганеев Р.М. Математические модели в задачах обработки сигналов.-М.: Горячая линия – Телеком, 2004. -80с.
7. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet. – М.: Нолидж, 2000. -512с.
8. Айфичер Еммануил, Джервис Барри У. Цифровая обработка сигналов.:Пер. с англ.- М.:”Вильямс”, 2004.- 992 с.
9. Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство/Пер.с яп.:М.:”Додека-XXI”,- 2002.-176 с.
10. Захарченко М.В., Стеклов В.К., Князёва Н.О., Фоміна Г.Т. Автоматизація проектування пристроїв, систем та мереж зв'язку.- К.: Радіоаматор, 1996. -268 с.
11. Харкевич А.А. Спектри и анализ. – М.:ФМ, - 1962.- 236 с.
12. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формули.- М.:Наука, -1966.- 228 с.

13. Закиров З.Г., Надеев А.Ф., Файзуллин Р.Р. Сотовая связь стандарта GSM. – М.: Еко-Трендз, 2004. – 264 с.
14. Надеждин Н.Я. Подробно о сотовых телефонах. – М.: СОЛОН –Пресс, 2004. – 160 с.
15. Конспект лекций профессора А.В. Миленького по цифровой обработке сигналов. – К.: Репродрук, 2006. – 70 с.
16. Селомон Д. Сжатие данных, изображений и звука. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
17. Мартиненко В.С. Операционное исчисление. – К.: из-во Киевского университета., 1968. 197 с.

### ***ЗМІСТ***

<i>Анотація</i> .....	2
1. Тема №1. Математичний апарат цифрової обробки сигналів.....	3
2. Тема №2. Основні типи сигналів.....	10
3. Тема №3. Розкладання періодичних сигналів у ряд Фур'є.....	16
4. Тема №4. Формування імпульсів. Перекручування імпульсів у каналі з перешкодами.....	27
5. Тема №5. Лінійні аналогові системи. Аналогові фільтри-прототипи.....	32
6. Тема №6. Спектр дискретного сигналу. Теорема і формула Котельнікова.....	39
7. Тема №7. Перетворення Лапласа, Фур'є і Z-перетворення.....	45
8. Тема №8. Опис лінійних перетворювачів.....	49
9. Тема №9. Лінійна дискретна і кругова згортка.....	57
10. Тема №10. Швидке перетворення Фур'є.....	63
11. Тема №11. КІХ-фільтри.....	79
12. Тема №12. Приклади розрахунку КІХ-фільтрів.....	90
13. Тема №13. БІХ-фільтри.....	96
14. Тема №14. Цифрова корреція каналів.....	105
<i>Література</i> .....	113