С. П. Вислоух, О. В. Волошко,
Г. С. Тимчик, М. В. Філіппова

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Комп'ютерне моделювання процесів та систем. Чисельні методи

Підручник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 004.94:519.6](075.8)
К63

Гриф надано Вченою радою
КПІ ім. Ігоря Сікорського
(*Протокол № 3 від 15.03.2021 р.*)

Рецензенти:
В. Г. Здоренко, д-р техн. наук, проф.,
лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки,
Київський національний університет технологій та дизайну

В. П. Квасніков, д-р техн. наук, проф., заслуж. метролог України,
Національний авіаційний університет

Відповідальний редактор
В. С. Антонюк, д-р техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

К63 **Комп'ютерне моделювання процесів та систем**. **Чисельні методи** : підручник / С. П. Вислоух, О. В. Волошко, Г. С. Тимчик, М. В. Філіппова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2021. – 228 с.
ISBN 978-966-990-028-9

Розглянуто найбільш поширені чисельні методи, що трапляються в типових інженерних і наукових задачах у галузі комп'ютеризованих систем управління та комп'ютерної інженерії. Подано методологію комп'ютерного моделювання, похибки комп'ютерних обчислень, методи й алгоритми обчислення та наближення функцій, розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь, чисельного інтегрування та диференціювання функцій і вирішення диференціальних рівнянь. Наведено широкий спектр прикладів та задач.

Для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» під час вивчення дисципліни «Комп'ютерне моделювання систем та процесів», може бути використаний під час вивчення дисциплін, які пов'язані з комп'ютерними обчисленнями та обробкою даних, а також для наукової роботи студентів, аспірантів, інженерів і вчених.

УДК 004.94:519.6](075.8)

ISBN 978-966-990-028-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

На сьогодні при проектуванні та дослідженні високоефективних систем і процесів в економіці, техніці, виробництві та екології оперують не з самими об'єктами, а з їх моделями, тобто моделювання виступає і як апарат, і як засіб, за допомогою якого реалізуються поставлені задачі. У широкому сенсі під моделюванням розуміють процес адекватного відображення найбільш суттєвих сторін досліджуваного об'єкта або явища з точністю, яка необхідна для практичних потреб. При цьому моделювання – це процес подання об'єкта дослідження адекватної (подібної) йому моделлю і проведення експериментів з моделлю для отримання інформації про об'єкт дослідження.

Комп'ютерне моделювання є методом розв'язання задач аналізу або синтезу досліджуваної системи, процесу та явища, що базується на використанні обчислювальної техніки. Одним із найбільш ефективних методів створення та дослідження систем є математичне їх моделювання. Сутність комп'ютерного моделювання полягає у визначенні кількісних і якісних результатів з використанням створеної математичної моделі. Така комп'ютерна модель процесу та системи має якомога повніше відображати всі основні фактори й взаємозв'язки, що характеризують реальні ситуації, критерії та обмеження. До того ж модель має бути настільки універсальною, щоб охоплювати якнайширше коло близьких за призначенням об'єктів, та настільки й простою, щоб сприяти виконанню необхідних досліджень із мінімальними витратами.

Найбільш поширеним методом математичного моделювання, є чисельне моделювання. Чисельні методи моделювання базуються не виконанні послідовності дій над числами, що приводить до розв'язування поставленої задачі. При цьому дослідження об'єктів чисельними методами здійснюється шляхом заміни математичних операцій і співвідношень кінцевою послідовністю однотипних дії над числами: заміні інтегралів сумами, похідних – різницевими відношеннями, нескінченних сум – кінцевими тощо. Для цього створюється алгоритм, що дозволяє точно або з заданою похибкою обчислювати значення необхідних величин за допомогою комп'ютерної техніки.

Тому в підручнику розглядаються питання побудови, використання і теоретичного обґрунтування методик наближеного розв'язання різноманітних класів математичних задач чисельними методами, що включають методів ефективного обчислення елементарних функцій, чисельної інтерполяції та апроксимації функцій, розв'язання нелінійних рівнянь, систем лінійних і нелінійних рівнянь, чисельного інтегрування та диференціювання функцій й чисельного розв'язання задачі Коші. Тут враховано характерні особливості чисельних методів моделювання, що дозволяють розв'язати одну і ту ж задачу різними методами з відповідною точністю та можливості застосовувати нові ефективні методи обчислення, які орієнтовні на використання сучасних комп'ютерів.

Підручник призначено для студентів, що навчаються за напрямком підготовки бакалаврів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» при вивченні дисципліни «Комп'ютерне моделювання систем та процесів», тому в кінці кожного розділу наведено приклади практичного застосування чисельного розв'язання задач комп'ютерного моделювання, приведено множину задач для самоконтролю і перелік контрольних запитань.

1. ВСТУП У КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

Комп'ютерне моделювання – один з найпотужніших інструментів пізнання, аналізу та проектування, що мають фахівці відповідальні за розробку й функціонування складних технологій і виробництв. Ідея комп'ютерного моделювання проста й в той самий час інтуїтивно приваблива. Вона дає можливість інженеру (досліднику) експериментувати з об'єктами в тих випадках, коли виконувати це на реальному об'єкті практично неможливо або недоцільно. Сутність методології комп'ютерного моделювання полягає в заміні об'єкта дослідження (процесу, системи, явища) його «образом» – математичною моделлю та в подальшому вивченні даної моделі за допомогою реалізованих на комп'ютерах обчислювально-логічних алгоритмів. Цей метод пізнання, конструювання, проектування поєднує в собі переваги як теорії, так і експерименту. Робота не з самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і без істотних витрат досліджувати його властивості і поведінку в будь-яких можливих ситуаціях. У той же час обчислювальні (імітаційні) експерименти з моделями об'єктів дозволяють детально і глибоко вивчати об'єкти в достатній повноті, що є недоступною чисто теоретичним підходам. В цьому є перевага експерименту з використанням математичної моделі.

Сучасні промислові об'єкти складаються з великої кількості взаємопов'язаних підсистем, між якими існують відносини підпорядкованості у вигляді багаторівневої ієрархічної структури. Перший рівень утворюють типові виробничі процеси і локальні системи автоматичного керування ними. Основу другого рівня ієрархії становлять виробничі цехи та системи автоматизованого керування цехами. Цех – це сукупність окремих технологічних процесів й систем автоматичного контролю і управління ними. Третій, найвищий рівень ієрархічної структури підприємства – це системи організації та оперативного планування і управління всім виробництвом. На цьому рівні виникають завдання ситуаційного аналізу і оптимального управління всім підприємством (сукупністю всіх цехів).

Основою сучасного кібернетичного підходу до вирішення задач в автоматизації та приладобудуванні є системний аналіз, відповідно до якого задачі дослідження, аналізу і розрахунку окремих технологічних процесів, комп'ютерного моделювання та оптимізації складних систем, оптимального проектування технологічних комплексів вирішуються тісному зв'язку один з одним, об'єднані спільною стратегією та підпорядковані єдиній меті – створенню високоефективного виробництва.

Сутність системного аналізу визначається його стратегією, в основі якої покладено загальні принципи, що застосовні до вирішення будь-якої системної задачі. До них можна віднести чітке формулювання мети дослідження, постановку задачі для досягнення заданої мети і визначення критерію ефективності виконання задачі; розробку розгорнутої стратегії дослідження із зазначенням основних етапів і напрямів в розв'язанні таких задач, як: послідовно-паралельне переміщення за всім комплексом взаємопов'язаних етапів і можливих напрямів; організацію послідовних наближень і повторних циклів досліджень на окремих етапах; принцип спадної ієрархії аналізу і висхідній ієрархії синтезу при вирішенні складових приватних завдань тощо.

Центральним поняттям системного аналізу є поняття системи, тобто об'єкта, що взаємодіє із зовнішнім середовищем та має складну внутрішню будову, з великою кількістю складових частин і елементів. Елемент системи – самостійна і умовно неподільна одиниця. Сукупність елементів та зв'язків між ними утворює структуру системи. Елементи взаємодіють між собою і навколишнім середовищем, тобто між ними існує матеріальний, енергетичний та інформаційний зв'язок. Поділ системи на підсистеми дозволяє розкрити ієрархію структури і розглядати систему на різних рівнях її деталізації. Складність системи визначається складністю її структури, кількістю елементів і зв'язків, кількістю рівнів ієрархії, об'ємом інформації, що циркулює в системі. Система характеризується алгоритмом функціонування, що спрямований на досягнення певної мети.

Формалізація системи здійснюється за допомогою математичної моделі, що відображає зв'язок між вихідними змінними системи, параметрами стану і вхідними керуючими і збурюючими впливами. Складна система зазвичай формалізується як детермінованою-стохастична модель. З позицій системного аналізу вирішуються задача комп'ютерного моделювання, оптимізації, управління та оптимального проектування технологічних систем в масштабі цеху, підприємства. Сутність системного підходу полягає в тому, що інформація, що отримується в лабораторіях, на дослідно-промислових установках, послідовно накопичується і узагальнюється в процесі розробки повної математичної моделі системи, яка в подальшому використовується для оптимізації того або іншого виробництва.

Комп’ютерне моделювання – це процес конструювання моделі реального об’єкта (системи, процесу, явища) і постановки обчислювальних експериментів на цій моделі з метою або дослідити поведінку цієї системи, або оцінити різні стратегії (алгоритми), що забезпечують функціонування даної системи. Таким чином, процес комп’ютерного моделювання включає як конструювання моделі, так й її застосування для вирішення поставлених задач аналізу, дослідження, оптимізації або синтезу (проектування) виробничих процесів і обладнання. Всі ці задачі надзвичайно складні та включають в себе майже нескінченну кількість елементів, змінних, параметрів, обмежень тощо. Намагаючись побудувати точну модель, можна спробувати включити всі ці елементи (явища) і витратити багато часу, збираючи дрібні факти, що стосуються будь-якої ситуації, і встановлюючи зв’язки між ними. Подібність моделі з об’єктом, який вона відображає, називається ступенем ізоморфізму. Для того, щоб бути ізоморфною, модель повинна задовольняти двом умовам: має існувати однозначна відповідність між елементами моделі та елементами реального об’єкта; повинні бути збережені точні співвідношення або взаємодії між елементами.

Ступінь ізоморфізму моделі відносна, й більшість моделей скоріше гомоморфні, ніж ізоморфні. Під гомоморфізмом розуміють подібність за формою при розходженні основних структур, причому має місце лише поверхнева подібність між різними групами елементів моделі та об’єкта. Гомоморфні моделі є результатом процесів спрощення та абстракції.

Основою успішної методики комп’ютерного моделювання є ретельне відпрацювання моделей. Зазвичай, розпочав з дуже простої моделі, поступово просуваються до більш досконалої її форми, що відображає складну ситуацію більш точно. Аналогії та асоціації з добре побудованими структурами, мабуть, грають важливу роль у визначенні відправної точки цього процесу вдосконалення та відпрацювання деталей. Цей процес вдосконалення та відпрацювання пов’язаний з врахуванням постійного процесу взаємодії та зворотного зв’язку між реальною ситуацією і моделлю. Між процесом модифікації моделі та процесом обробки даних, що генеруються реальним об’єктом, має місце безперервна взаємодія. Таким чином, моделювання полягає в здатності аналізувати проблему, виділяти з неї шляхом абстракції її істотні риси, обирати й належним чином модифікувати припущення, що характеризують систему, а потім відпрацьовувати і вдосконалювати модель до тих пір, поки вона не стане давати корисні для практики результати.

Розробка та застосування комп'ютерних моделей є більшою мірою мистецтвом, ніж наукою. Отже, як і в інших видах мистецтва, успіх або невдача визначається не стільки методом, скільки тим, як він застосовується. Мистецтво моделювання можуть опанувати ті, хто володіє оригінальним мисленням, винахідливістю, так само як й глибокими знаннями систем і фізичних явищ, які необхідно моделювати.

1.1. Загальні відомості про моделі і комп'ютерне моделювання

Вивчаючи складні об'єкти, процеси, явища, не можна врахувати всі фактори: які виявляються істотними, а якими можна знехтувати. При цьому формується модель об'єкта дослідження. В процесі комп'ютерного моделювання дослідник має справу з трьома об'єктами: системою (реальною, такою, що проектується, та уявною), математичною моделлю (ММ) і програмою, що реалізує алгоритм розв'язання рівнянь моделі. Традиційна схема комп'ютерного моделювання, як єдиного процесу побудови і дослідження моделі, що має відповідну програмну підтримку, може бути представлена в наступному вигляді (рис. 1.1):

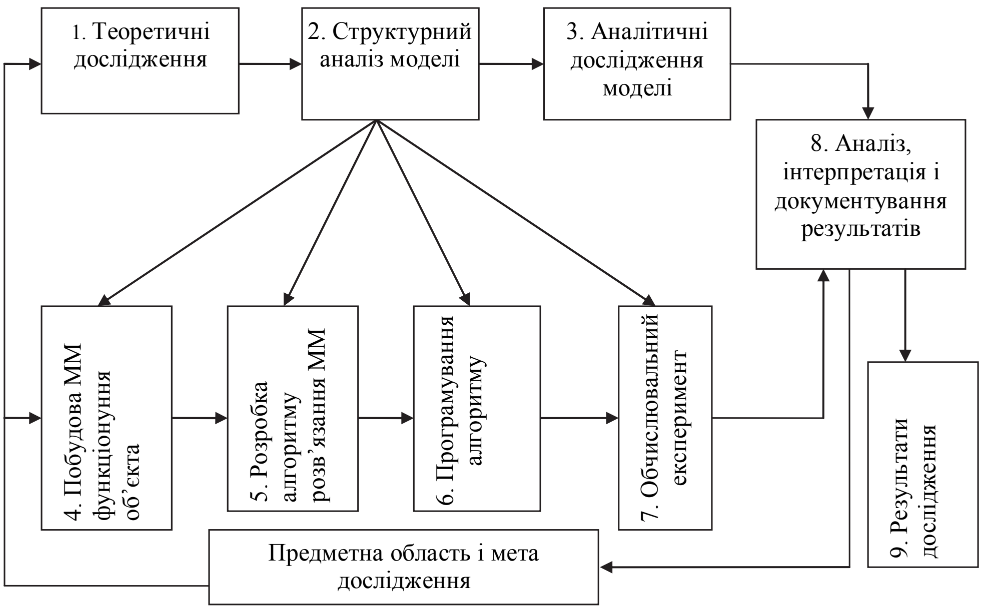


Рис. 1.1. Схема організації процесу комп'ютерного моделювання

Виходячи з того, що комп’ютерне моделювання застосовується для дослідження, оптимізації та проектування реальних об’єктів (процесів, систем), можна виділити наступні етапи цього процесу:

1) визначення об’єкта – встановлення меж, обмежень і вимірювальної ефективності функціонування об’єкта;

2) формалізація об’єкта (побудова моделі) – перехід від реального об’єкта до деякої логічної схеми (абстрагування);

3) підготовка даних – відбір даних, що необхідні для побудови моделі, та подання їх у відповідній формі;

4) розробка моделюючого алгоритму та програмного забезпечення;

5) оцінка адекватності – підвищення до прийнятного рівня ступеня впевненості, за яким можна визначити коректність висновків про реальний об’єкт, які отримані на основі звернення до моделі;

6) стратегічне планування – планування обчислювального експерименту, який повинен дати необхідну інформацію;

7) тактичне планування – визначення способу проведення кожної серії випробувань, що передбачені планом експерименту;

8) проведення експериментів – процес здійснення імітації з метою отримання бажаних даних і аналізу чутливості;

9) інтерпретація – побудова висновків за даними, що отримані шляхом імітації;

10) реалізація – практичне використання моделі та результатів моделювання;

11) документування – реєстрація ходу здійснення процесу і його результатів, а також документування процесу створення і використання моделі.

Перераховані етапи створення та використання моделі визначені з припущенням, що задача може бути вирішена найкращими чином за допомогою комп’ютерного моделювання. Однак, це може бути не найбільш ефективніший спосіб. У випадку, якщо задача може бути зведена до простої моделі та розв’язана аналітично, немає ніякої потреби в комп’ютерному моделюванні й імітації. Треба знаходити всі можливі засоби, які годяться для розв’язання даної конкретної задачі, прагнучи при цьому до оптимального поєднання вартості і бажаних результатів. Перш ніж приступати до оцінки можливостей імітації, треба переконатися, що проста аналітична модель для даного випадку не придатна.

1.2. Методологія комп’ютерного моделювання

У схемі організації процесу комп’ютерного моделювання (імітації), представленій на рис. 1.1, основний ланцюжок (реальний об’єкт (процес, система, явище) – математична модель – моделюючий алгоритм – комп’ютерна програма – обчислювальний експеримент) відповідає традиційній схемі, але на перше місце тепер ставиться поняття тріади: модель – алгоритм – програма (блоки 4, 5, 6), стратегічне і тактичне планування обчислювального експерименту (блок 7), інтерпретація та документування його результатів (блок 8).

На першому етапі побудови математичної моделі обирається (або будується) «еквівалент» об’єкта, що відображає в математичній формі найбільш важливі його властивості – закони, яким він підпорядковується, зв’язки, які властиві складовим його елементам тощо. Математична модель (або її фрагменти) досліджується теоретичними методами, що дозволяє отримати важливі попередні знання про об’єкт.

Другий етап пов’язаний з розробкою методу розрахунку отриманої математичної задачі, розробкою обчислювального або моделюючого алгоритму. Фактично він представляє собою сукупності алгебраїчних формул, за якими ведуться обчислення, й логічних умов, що дозволяють встановити необхідну послідовність застосування цих формул. Обчислювальні алгоритми повинні не спотворювати основні властивості моделі і, отже, початкового об’єкта, бути економічними та адаптованими до особливостей розв’язуваних задач і використовуваних комп’ютерів.

Як правило, для однієї і тієї ж математичної задачі можна запропонувати множину обчислювальних алгоритмів. Однак, потрібна побудова ефективних обчислювальних методів, які дозволяють отримати розв’язання поставленої задачі із заданою точністю за мінімальну кількість дій (арифметичних, логічних), тобто з мінімальними витратами машинного часу. Ці питання дуже серйозні та складають предмет теорії чисельних методів.

Обчислювальний експеримент має “багатоваріантний” характер. Реально, розв’язання будь-якої прикладної задачі залежить від численних вхідних змінних і параметрів. Отримати рішення відповідної математичної задачі у вигляді формули, що містить явну залежність від вхідних змінних і конструктивних параметрів, для реальних задач, не завжди вдається. При проведенні обчислювального експерименту кожен конкретний розрахунок проводиться при фіксованих значеннях змінних і параметрів. Проектуючи оптимальний об’єкт, тобто, визначаючи в просторі змінних і параметрів точку, що відповідає оптимальним умовам, доводиться виконувати велику кількість розрахунків однотипних варіантів задачі, що відрізняються значеннями деяких змінних або параметрів. Тому дуже важливо застосовувати ефективні чисельні методи.

Третій етап – створення програмного забезпечення для реалізації розробленого алгоритму моделювання (створення комп’ютерної моделі). Застосування мов програмування породжує ряд проблем, у тому числі головними є трудомісткість та недостатня гнучкість. В процесі дослідження реальних систем часто доводиться уточнювати моделі, що тягне за собою перепрограмування моделюючого алгоритму. В цьому випадку процес моделювання не буде ефективним, якщо не забезпечити його гнучкості. Тому можна використовувати формальні схеми, що описують класи математичних моделей з певної предметної області, оскільки програмувати тоді потрібно функціонування даної схеми, а не описувані нею часткові моделі.

Створивши тріаду «модель – алгоритм – програма», дослідник отримує універсальний, гнучкий й порівняно недорогий інструмент, який спочатку налагоджується, тестується в «пробних» обчислювальних експериментах. Після того як адекватність тріади початкового об’єкта підтверджена, з моделлю можна проводити різноманітні «досліди», що дають всі необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об’єкта. Процес комп’ютерного моделювання супроводжується покращенням і уточненням, в міру необхідності, всіх ланок тріади.

Обчислювальний експеримент (блок 7) – це проведення розрахунків за допомогою програмного забезпечення і отримання інформації, що цікавить дослідника. Зазвичай, точність цієї інформації визначається достовірністю, передусім моделі, моделюючого алгоритму й розробленого (використаного) програмного забезпечення. Тому в серйозних прикладних дослідженнях повномасштабні розрахунки ніколи не починають виконувати відразу за допомогою щойно створеного програмного забезпечення. Їм завжди передує період проведення тестових розрахунків. Вони необхідні не тільки для того, щоб “налагодити” програму, тобто відшукати й виправити всі помилки та описки, що допущені як при створенні алгоритму, так і при його програмній реалізації. У цих попередніх розрахунках тестується також сама математична модель, з’ясовується її адекватність об’єкта дослідження. Для цього проводиться розрахунок деяких контрольних експериментів, за якими є досить надійні вимірювання. Зіставлення цих даних з результатами розрахунків дозволяє уточнити математичну модель, набути впевненості в правильності прогнозів, які будуть отримані з її допомогою.

Тільки після проведення тривалої копіткої роботи в обчислювальному експерименті настає фаза прогнозу (імітації) – за допомогою комп'ютерної моделі передбачається поведінка об'єкта дослідження в умовах, де натурні експерименти поки не проводилися або де вони взагалі неможливі.

Важливе місце в обчислювальному експерименті займає обробка результатів розрахунків, їх всебічний аналіз й, нарешті, висновки. Ці висновки бувають в основному двох типів: або стає зрозумілою необхідність уточнення моделі, або результати після перевірки передаються замовнику. При оптимізації або проектуванні об'єкта (процесу, системи) через складність та високу розмірність математичної моделі проведення розрахунків за описаною вище схемою може виявитися занадто дорогим. Тоді йдуть на спрощення моделі, на побудову свого роду інженерних методик (формул), що базуються на складних моделях та розрахунки і дають можливість отримати необхідну інформацію більш дешевшим способом. При цьому проводиться величезна попередня робота з аналізу складних моделей, результатом якої і є прості на перший погляд формули.

При масовому використанні методів комп'ютерного моделювання в технічних проектах необхідно домагатися різкого скорочення термінів розробки моделей, що забезпечують різні етапи проектування. Вирішення цієї задачі можливе при відповідному рівні розвитку технології комп'ютерного моделювання.

Технологія комп'ютерного моделювання є основою ціле направленої діяльності, сенс якої полягає в забезпечені можливості ефективного виконання на комп'ютері досліджень функціонування складних систем. З її допомогою організуються дії дослідника на всіх етапах його роботи з моделями, розпочинаючи від вивчення предметної області виділення проблемної ситуації, що моделюється, і закінчуючи побудовою і реалізацією комп'ютерних експериментів для аналізу поведінки системи.

В технології моделювання можна виділити два важливих аспекти:

– методологічну складову технології як науки, що займається виявленням закономірностей, використання яких на практиці дозволяє знаходити найбільш ефективні і економічні прийоми комп’ютерного моделювання об’єктів (процесів, систем);

– прикладні цілі та задачі технології як мистецтва, майстерності, вміння досягати в ході комп’ютерного моделювання складних об’єктів практично корисних результатів.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під поняттям «система»?
2. Чим характеризується складна система?
3. Що таке «модель»?
4. Що розуміють під терміном «моделювання»?
5. Що є теоретичною основою моделювання?
6. Які види моделей використовуються в інженерній практиці?
7. Які види моделювання використовуються при дослідження складних систем?
8. В чому полягає системний підхід при моделюванні складних систем?
9. Які види математичного моделювання процесів і систем використовуються в інженерній практиці?
10. Яка сутність аналітичних методів моделювання?
11. Які особливості чисельних методів моделювання?
12. Які переваги мають методи імітаційного моделювання процесів і систем?
13. В чому полягає сутність комп’ютерного моделювання?
14. Що таке «обчислювальний експеримент»?
15. Які переваги має використання обчислювального експерименту?
16. З яких етапів складається обчислювальний експеримент?

2. ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕННЯ ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

2.1. Класифікація похибок

При вирішенні інженерних завдань на будь-яких обчислювальних пристроях розрахунки, як правило, проводяться над наближеними початковими даними [6, 7, 18, 19, 49]. У таких випадках необхідно вміти грамотно організувати обчислення, знати, які бувають похибки, правильно записувати наближені початкові дані, оцінювати похибки результатів обчислення за відомими похибками компонент, визначати оптимальну кількість знаків в початкових даних, щоб результат обчислень мав наперед задану точність, вибирати найбільш раціональну послідовність обчислень, а також алгоритм обчислень, що є стійким до похибок округлень.

Не маючи достатніх навиків практичних обчислень, можна при розв'язанні задачі отримати результат, що не має нічого спільного з дійсним рішенням задачі.

Наведемо основні джерела похибок наближеного розв'язання прикладних задач [6, 7, 19].

Похибка математичної моделі. Ця похибка пов'язана з фізичними допущеннями, що не контролюється в процесі чисельного рішення задачі, її можна зменшити тільки за рахунок точнішого опису фізичної задачі.

Похибка початкових даних. Значення параметрів, що входять в математичний опис задачі, отримують, зазвичай, в результаті експериментальних досліджень з деякою похибкою.

Похибки математичної моделі та початкових даних є таким, що їх неможливо зменшити. Їх необхідно враховувати при виборі методу розв'язання задачі.

Похибка наближеного методу. При чисельному розв'язанні задачі точна операція, в якому кількість операцій перевищує допустимі границі, замінюється наближеним, що вимагає кінцевої кількості операцій. Наприклад, замінюють інтеграл сумою, функцію – багаточленом або будують нескінченний ітераційний процес й обривають його після кінцевої кількості ітерацій. Цю похибку досліджують при розгляді конкретних чисельних методів.

Обчислювальна похибка виникає в результаті вимушеного округлення чисел, наприклад, кінцевої кількості розрядів комп’ютера.

Похибки округлення відрізняються від інших видів похибок. Похибки внаслідок округлення проміжних результатів можуть накопичуватися, внаслідок чого підсумкова похибка збільшується із зростанням кількості здійснених операцій. З цього випливає, що основним засобом зменшення підсумкової похибки округлення є зменшення кількості обчислювальних операцій.

Для зменшення похибок результату обчислень внаслідок округлення проміжних результатів треба вживати наступних заходів:

– необхідно звести до мінімуму кількість арифметичних дій;

– додавання чисел необхідно виконувати у порядку зростання їх абсолютних величин;

– за можливістю уникати віднімання близьких величин;

– якщо при обчисленнях зустрічаються різниці близьких величин, необхідно спочатку обчислити ці різниці, а лише потім виконати решту операцій.

Наведемо загальні правила дій над наближеними числами і оцінки похибок, що при цьому виникають.

2.2. Абсолютна і відносна похибки

Наближеного числа характеризується поняттями абсолютної і відносної похибок [6, 7, 19].

Абсолютною похибкою наближеного числа a називається величина

$$\Delta = |A - a|, \tag{2.1}$$

де A – точне значення деякої величини, a – одне з його наближених значень.

Абсолютна похибка представляє тільки теоретичний інтерес, оскільки точне значення величини невідоме. Тому на практиці частіше користуються граничною абсолютною похибкою Δa

$$\Delta = |A - a| \le \Delta a\ . \tag{2.2}$$

Ця гранична похибка дозволяє встановити інтервал в якому знаходиться точне значення

$$a - \Delta a \le A \le a + \Delta a\ . \tag{2.3}$$

Часто користуються більш компактним записом

$$A = a \pm \Delta a. \tag{2.4}$$

Основною характеристикою точності приблизного числа є його відносна похибка:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}. \tag{2.5}$$

Оскільки число A невідоме, то, як правило, вважають що:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}. \tag{2.6}$$

Аналогічно з нерівності $\delta \le \delta a$ визначають граничну відносну похибку числа a, вважаючи що:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Величина δa характеризує якість наближення. Це безрозмірна величина, зазвичай її виражають у відсотках.

2.3. Похибки функцій

Нехай задана деяка функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n аргументів $x_1, x_2, ..., x_n$, причому значення кожного з її аргументів визначені з деякими абсолютними похибками $\Delta x_i, i = 1, 2, ..., n$ [6, 7, 19]. Треба визначити похибку даної функції. Передбачимо, що функція безперервно диференційована в області її визначення D. Позначимо величину абсолютної похибки функції через Δy тобто

$$\Delta y = \left| f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) \right|. \tag{2.7}$$

Враховуючи, що величини Δx_i досить малі, абсолютна похибка функції приблизно дорівнює її диференціалу

$$\Delta \mathrm{y} \approx \left| \partial f(x_1, x_2, ..., x_n) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \tag{2.8}$$

З отриманої нерівності визначимо верхню границю для Δy як:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \tag{2.9}$$

де через Δx_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ позначені граничні абсолютні похибки аргументів x_i і через Δy – гранична абсолютна похибка функції.

Оцінка відносної похибки функції визначають шляхом ділення обох частин нерівності (2.8) на $|y|$

$$\delta y \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|y|}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln y\right|\Delta x_i .$$

Тому граничну відносну похибку функції y можна визначити як:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln y\right|\Delta x_i . \qquad (2.10)$$

Застосуємо загальні формули (2.9) і (2.10) до деяких окремих випадків функціональних залежностей.

2.3.1. Похибка алгебраїчної суми аргументів

Нехай $y = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$, де k_i – деякі константи. Тоді, згідно формул (2.8) і (2.9) отримаємо:

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n , \qquad (2.11)$$

$$\delta y \le \max\{\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n\} . \qquad (2.12)$$

Для різниці аргументів $y = k_1 x_1 - k_2 x_2$ аналогічно отримаємо:

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 . \qquad (2.13)$$

При цьому треба відзначити, що якщо числа x_1 і x_2 мало відрізняються один від одного, то гранична похибка різниці може стати досить великою, хоча відносні похибки δx_1 і δx_2 малі. Тут відбувається втрата точності. Тому при практичних обчисленнях формули, в які входить різниця близьких чисел, треба перетворити так, щоб цей недолік було усунено.

2.3.2. Похибка добутку та ділення

Нехай $y = \prod_{i=1}^{n} k_i x_i$, причому числа x_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ додатні. Тоді

$$\ln y = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i .$$

Згідно формули (2.10)

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2 + ... + \delta x_n . \qquad (2.14)$$

Якщо $y = \dfrac{x_1}{x_2}$, то аналогічно

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2 . \qquad (2.15)$$

2.3.3. Похибка степеню та кореня

Нехай $y = x^n$. Тоді

$$\ln y = n \ln x$$

$$\delta y = n \delta x. \qquad (2.16)$$

Якщо $y = \sqrt[n]{x}$, то $\ln y = \frac{1}{n} \ln x$

$$\delta y = \frac{1}{n} \delta x. \qquad (2.17)$$

На основі отриманих формул (2.11) – (2.17) похибку результатів дій над наближеними числами можна відобразити через похибки компонентів за наступними правилами [6, 7, 19]:

– гранична абсолютна похибка алгебраїчної суми дорівнює сумі граничних абсолютних похибок складових;

– гранична відносна похибка суми не перевищує найбільшої з граничних відносних похибок складових;

– гранична відносна похибка добутку і ділення дорівнює сумі граничних відносних похибок компонент;

– гранична відносна похибка n-ї степені наближеного числа в n разів більше граничної відносної похибки даного числа (n може бути як ціле, так і дробове).

В практичних розрахунках з великою кількістю операцій похибка кожної операції зазвичай не визначається. Замість цього, на практиці, використовують прості правила округлення результатів дії над наближеними числами залежно від кількості дійсних значущих цифр або десяткових знаків в початкових даних.

Сформулюємо ці правила [6, 7, 19, 31]:

– при додаванні та відніманні наближених чисел в результаті зберігаємо стільки десяткових знаків, скільки їх в наближеному даному з найменшою кількістю десяткових знаків;

– при множенні та діленні в результаті зберігаємо стільки значущих цифр, скільки їх має наближене дане з найменшою кількістю значущих цифр;

– при зведенні в квадрат або куб і при обчисленні квадратного або кубічного кореня в результаті залишаємо стільки значущих цифр, скільки їх має дане число;

– у всіх проміжних результатах необхідно використовувати на одну цифру більше, ніж рекомендується в попередніх правилах. У остаточному результаті ця додаткова цифра відкидається;

– якщо деякі дані мають більше десяткових знаків (у першому правилі) або більше значущих цифр (у двох наступних правилах), ніж інші, то їх заздалегідь треба округлити, зберігши лише одну зайву цифру;

– якщо початкові дані можна брати з довільною точністю, то для отримання результату з k дійсними цифрами початкові дані треба брати з такою кількістю дійсних цифр, яка дає згідно з першими трьома правилами $k+1$ цифру в результаті.

При дотриманні перерахованих правил заключний результат майже завжди матиме всі правильні цифри.

Розглянемо задачу: визначити припустиму похибку аргументів за заданою граничною похибкою функції. Це задача вирішується однозначно тільки для функції однієї змінної $y = f(x)$. Якщо $f(x)$ – диференційована і $f'(x) \neq 0$, то, згідно з (2.9), при $n = 1$ отримаємо

$$\Delta x = \frac{1}{|f'(x)|} \Delta y. \tag{2.18}$$

У випадку функції декількох змінних треба вводити деякі додаткові обмеження. Можна застосувати, наприклад, принцип їх однакових впливів, тобто вважати, що у формулі (2.9) всі складові однакові. Тоді граничні абсолютні похибки аргументів можуть бути обчислені наступним чином:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta \mathrm{y}}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, \; i = 1,2,...,n. \tag{2.19}$$

Якщо передбачити, що граничні абсолютні похибки всіх аргументів однакові, тобто $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$, то

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}. \tag{2.20}$$

Таким чином встановлено, що за значеннями похибок складових аналітичних залежностей можна визначити їх абсолютну та відносну похибки обчислення функцій.

Приклад. Визначити значення функції $f(x)$ при відомих значеннях аргументу (на відрізку $[a;b]$ з кроком h) та граничні відносну δy й абсолютну похибку Δy функції при заданій відносній похибці δx аргументу.

$$f(x)=e^{-x^2}\cdot(1+3x-x^3),\ \delta x=0{,}03;\ a=0;\ b=2;\ h=0.2.$$

Розв'язок

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}-9x^2e^{-x^2}+2x^4e^{-x^2}+3e^{-x^2}=e^{-x^2}(-2x-9x^2+2x^4+3);$$

$$\Delta x_i=\delta x_i\cdot|x_i|;\qquad \Delta y_i=|f'(x_i)|\,\Delta x_i;\qquad \delta y_i=\frac{\Delta y_i}{|y_i|}.$$

Результати розрахунків представлено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. **Результати обчислення абсолютної та відносної похибок функції $f(x)$**

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	Δx_i	δx_i	Δy_i	δy_i
0	1,0	3	0	0,03	0	0
0,2	1,53	2,155	0,006	0,03	0,13	0,0085
0,4	1,82	0,691	0,012	0,03	0,0083	0,0046
0,6	1,803	-0,824	0,018	0,03	0,015	0,0082
0,8	1,523	-1,867	0,024	0,03	0,045	0,029
1	1,104	-2,207	0,03	0,03	0,066	0,06
1,2	0,68	-1,946	0,036	0,03	0,07	0,103
1,4	0,346	-1,374	0,042	0,03	0,058	0,167
1,6	0,132	-0,783	0,048	0,03	0,038	0,285
1,8	0,022	-0,343	0,054	0,03	0,019	0,833
2	-0,018	-0,092	0,06	0,03	0,0055	-0,3

Відповідь: $\max\Delta x=0{,}06$; $\max\Delta y=0{,}13$; $\max\delta y=0{,}833$.

Приклад. Визначити значення функції $f(x)$ при відомих значеннях аргументу (на відрізку $[a;b]$ з кроком h) та граничні значення відносних похибок функції δy і аргументу δx при заданій абсолютній похибці функції Δy.

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}},\ \Delta y=0{,}06;\ a=1;\ b=2{,}8;\ h=0{,}3$$

Розв'язок.

$$f'(x)=-\frac{1+x^2+x}{\sqrt{1+x^2}e^x(1+x^2)};$$

$$\Delta x_i=\frac{\Delta y}{|f'(x_i)|};\quad \Delta y=|f'(x_i)|\cdot\Delta x_i;\quad \delta y_i=\frac{\Delta y}{|y_i|};\quad \delta x_i=\frac{\Delta x_i}{|x_i|}.$$

Результати розрахунків представлено в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2. **Результати визначення граничних значень відносних похибок аргументу і функції**

x_i	$y_i = f(x_i)$	$f'(x_i)$	Δx_i	δx_i	Δy_i	δy_i
1	0,2601	-0,3902	0,1538	0,1538	0,06	0,2307
1,3	0,1662	-0,2465	0,2434	0,1872	0,06	0,361
1,6	0,107	-0,1551	0,38685	0,2418	0,06	0,5607
1,9	0,0697	-0,0984	0,60975	0,3209	0,06	0,8608
2,2	0,0459	-0,0631	0,9509	0,4322	0,06	1,3072
2,5	0,0305	-0,041	1,4634	0,58536	0,06	1,9672
2,8	0.0205	-0,027	2,22	0,7929	0,06	2,9268

Відповідь: $\max \Delta x = 2{,}22$; $\max \Delta y = 0{,}7929$; $\max \delta y = 2{,}9268$.

Контрольні запитання

1. В чому полягають особливості раціональної організації обчислювального процесу?

2. Які джерела виникнення похибок при наближених обчисленнях на комп'ютері?

3. Які групи похибок відноситься до таких, які неможливо усунути?

4. Які похибки наближених обчислень можна зменшити і яким чином?

5. Які заходи треба вжити для зменшення обчислювальної похибки?

6. Якими видами похибок характеризується точність наближеного числа?

7. Що є основною характеристикою точності наближеного числа і як вона визначається?

8. Як визначаються граничні значення абсолютної та відносної похибок функції?

9. За якими правилами визначається похибка результатів дій над наближеними числами через похибки компонент?

10. Вкажіть основні правила округлення результатів дій над наближеними числами, що дозволяють зменшити вплив округлення на похибку результату обчислень.

11. Наведіть формули визначення граничних значень абсолютних та відносних формул функцій за значеннями похибок аргументів.

Задачі для самоконтролю

1. Визначити максимальне значення відносної похибки функції $f(x)=\dfrac{x^3-0{,}3x}{\sqrt{1+2x}}$ при відомій абсолютній похибці аргументу $\Delta x=0{,}1$ на відрізку $[2{,}05;\,3{,}05]$ з кроком $h=0{,}1$.

2. Визначити максимальне значення відносної похибки функції $f(x)=\dfrac{x^3}{1+0{,}25\sqrt{\mathrm{x}}}$ при відомій відносній похибці аргументу $\delta x=0{,}01$ на відрізку $[1{,}1;\,3{,}1]$ з кроком $h=0{,}2$.

3. Визначити максимальне значення відносної похибки функції $f(x)=\dfrac{x^3+2x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}}$ при відомій абсолютній похибці $\Delta y=0{,}02$, на відрізку $[-0{,}2;\,0{,}8]$ з кроком $h=0{,}1$.

4. Визначити максимальне значення абсолютної похибки функції $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}^{\,x}}$ при відомій відносній похибці $\delta y=0{,}06$ на відрізку $[1;\,3]$ з кроком $h=0{,}3$.

5. Визначити максимальне значення відносної похибки функції $f(x)=e^{-2x}+x^2-1$ при відомій відносній похибці аргументу $\Delta x=0{,}001$ на відрізку $[0{,}25;\,2{,}25]$ з кроком $h=0{,}2$.

6. Визначити максимальне значення відносної похибки функції $f(x)=\sqrt{1+4x}\sin\pi x$ при відомій відносній похибці аргументу $\delta x=0{,}03$ на відрізку $[0{,}1;\,0{,}8]$ з кроком $h=0{,}07$.

7. Визначити максимальне значення відносної похибки функції $f(x)=\dfrac{x^5-2x}{\sqrt{7x+1}}$ при відомій абсолютній похибці $\Delta y=0{,}1$ на відрізку $[0;\,3]$ з кроком $h=0{,}3$.

8. Визначити максимальне значення абсолютної похибки функції $f(x)=\dfrac{x^2}{1+0{,}25\sqrt{x}}$ при відомій відносній похибці $\delta y=0{,}1$ на відрізку $[1{,}1;\,3{,}1]$ з кроком $h=0{,}2$.

3. ОБЧИСЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

При всіх обчисленнях ми маємо справу з елементарними функціями, до яких відносяться степеневі многочлени, алгебраїчні функції, логарифмічні функції, показникові, тригонометричні та зворотні їм функції, а також комбінації з них.

При ручних розрахунках для їх спрощення можна скористатися, табличними значеннями функцій або інтерполяцією.

При комп'ютерних розрахунках, не має можливості зберігати великі масиви інформації у вигляді таблиць. Тому необхідно складати програму, що обчислює елементарну функцію з заданою точністю.

Найбільш часто будь-яка елементарна функція представляється у вигляді ряду. Окремими випадками ряду є степеневий многочлен:

$$f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x \ + a_n . \qquad (3.1)$$

3.1. Схема Горнера

При обчисленнях многочленів необхідно економити не тільки пам'ять комп'ютерних, а й час обчислень. Застосування схеми Горнера при обчисленні многочленів дозволяє значно скоротити кількість виконуваних операцій. При обчисленні многочлена n – тої степені необхідно виконати $n-1+n+n=3n-1$ операцій. Застосування схеми Горнера зводить обчислення многочлена до $2n$ операцій [19].

Згідно з теоремою Безу, що вказує: залишок від ділення многочлена, на двочлен $(x-a)$ дорівнює значенню функції в точці α.

$$f(x):(x-\alpha) = \varphi(x) + f(\alpha), \qquad (3.2)$$

де $\varphi(x)$ – результат ділення; $f(\alpha)$ – залишок від ділення.

$$\begin{aligned} &f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x^n + a_n = \\ &= (b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \ldots b_{n-2} \cdot x \ + b_{n-1})(x-\alpha) + f(\alpha), \\ &f(\alpha) = b_n. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Виконаємо операцію множення і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x. Тоді отримаємо такі рівняння:

$$a_0 = b_0; \ \ a_1 = b_1 - \alpha \cdot b_0; \ \ a_2 = b_2 - \alpha \cdot b_1; \ \ \ldots \ \ a_n = b_n - \alpha \cdot b_{n-1} .$$

Таким чином, при діленні многочлена на двочлен обчислення коефіцієнтів результуючого многочлена можна виконати за такою схемою:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= b_0 \\
b_1 &= a_1 + \alpha \cdot b_0; \\
b_2 &= a_2 + \alpha \cdot b_1; \\
&\dots \\
b_n &= a_n + \alpha \cdot b_{n-1}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Тоді обчислення многочлена в точці α виконується шляхом послідовного виконання операцій множення і ділення:

$$f(\alpha) = (...(((a_0\alpha + a_1)\alpha + a_2)\alpha + a_3)\alpha...)\alpha + a_n. \tag{3.5}$$

Таким чином будь-який многочлен можна представити за схемою Горнера

$$f(x) = (...(((a_0 x + a_1)x + a_2)x + a_3)x...)x + a_n, \tag{3.6}$$

яка дозволяє визначити значення многочлена в будь-якій точці x за меншу кількість арифметичних операцій, що, в свою чергу, знижує обчислювальну похибку.

Приклад. Визначити значення полінома $P_6(x) = 7{,}1x^6 - 2{,}9x^2 - 8x - 3{,}5$ в точці $x = 1{,}36$ за схемою Горнера.

Розв'язок.

$$P_6(x) = 7{,}1x^6 - 2{,}9x^2 + 8x - 3{,}5 = (((((7{,}1x + 0)x + 0)x + 0)x - 2{,}9)x - 8)x - 3{,}5;$$

$$P_6(1{,}36) = (((((7{,}1 \cdot 1{,}36 + 0) \cdot 1{,}36 + 0) \cdot 1{,}36 + 0) \cdot 1{,}36 - 2{,}9) \cdot 1{,}36 - 8) \cdot 1{,}36 -$$
$$- 3{,}5 = 25{,}1816$$

Відповідь. Значення полінома $P_6(x)$ в точці $x = 1{,}36$ $P_6(1{,}36) = 25{,}1816$.

Приклад. Визначити результат ділення многочлена $P_5(x) = x^5 - 3{,}1x^2 + x - 2{,}5$ на двочлен $P_1(x) = x + 5{,}1$ та залишок від ділення, використовуючи схему Горнера.

Розв'язок. Використовуючи формули (3.4) визначимо значення коефіцієнтів b_i результуючого полінома $P_4(x)$ за значеннями коефіцієнтів a_i початкового многочлена $P_5(x)$ при $\alpha = -5{,}1$.

Тоді

$$b_0 = a_0 = 1;$$

$$b_1 = a_1 + \alpha b_0 = 0 + (-5{,}1) \cdot 1 = -5{,}1;$$

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1 = 0 + (-5{,}1) \cdot (-5{,}1) = 26{,}01;$$

$$b_3 = a_3 + \alpha b_2 = 3{,}1 + (-5{,}1) \cdot 26{,}01 = -135{,}751;$$

$$b_4 = a_4 + \alpha b_3 = 1 + (-5{,}1) \cdot (-135{,}751) = 693{,}3301.$$

Залишок від ділення:

$$b_5 = a_5 + \alpha b_4 = -2{,}5 + (-5{,}1) \cdot 693{,}3301 = -3538{,}48351.$$

$$P_5(x) = x^5 - 3{,}1x^2 + x - 2{,}5 = (x + 5{,}1)(x^4 - 5{,}1x^3 + 26{,}01x^2 -$$
$$-135{,}751x + 693{,}3301) - 3538{,}48351.$$

Відповідь. Результат ділення многочлена $P_5(x) = x^5 - 3{,}1x^2 + x - 2{,}5$ на двочлен $P_1(x) = x + 5{,}1$ дорівнює:

$$P_4(x) = x^4 - 5{,}1x^3 + 26{,}01x^2 - 135{,}751x + 693{,}330;$$

а залишок від ділення -3538,48351.

3.2. Обчислення елементарних функцій за допомогою степеневих рядів

Степеневі ряди дозволяють звести задачу обчислення будь-якої функції до обчислення многочлена.

Будь-яку елементарну функцію можна представити у вигляді степеневого ряду, за формулою Тейлора в околі точки a.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad (3.7)$$

Полягаючи, що $a = 0$, тоді отримаємо ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots \quad (3.8)$$

Наведемо часто використовувані елементарні функцій, що представляються за допомогою степеневих рядів:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

$$\text{arctgx} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad |x| \le 1$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Формулу Тейлора для логарифмічної функції можна представити як:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots. \tag{3.9}$$

Цей ряд мало придатний для обчислення елементарних функцій, тому що збігається тільки для значень x в інтервалі $(-1 < x \le 1)$

Тому, для обчислення натурального логарифму $\ln(x)$ використовують наступну формулу [19]:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \right), \tag{3.10}$$

для $|x| < 1$. При цьому вираз $\frac{1+x}{1-x}$ може приймати будь-яке значення. Наприклад, треба визначити $\ln 5$. Для обчислення цього логарифму визначимо значення x як:

$$\frac{1+x}{1-x} = 5; \quad 1 + x = 5 - 5x; \quad x = \frac{2}{3}.$$

Тоді $$\ln 5 = 2\left(\frac{3}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{5} + \ldots \right).$$

Часто для обчислених функцій використовуються біноміальні ряди. Частковим випадком біноміального ряду при натуральному m є біном Ньютона:

$$\begin{aligned}(1 \pm x)^m &= 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ &+ (-1)^n \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!}x^n\end{aligned}, \text{ при } |x| \le 1. \quad (3.11)$$

Перевагою цього ряду є те, що, розпочинаючи з якогось члена ряду, коефіцієнти перетворюються в 0. Біноміальний ряд можна використовувати при зведенні в дробову степінь і визначенні коренів.

При обчисленні елементарних функцій за допомогою степеневих рядів зручно використовувати рекурентні формули, що дозволяє визначати черговий член ряду не безпосередньо, а через раніше визначений член ряду.

При використанні степеневих рядів завжди обмежуються кінцевою кількістю членів ряду, тобто замінюємо функцію частковою сумою ряду. Тому це призводить до появи похибки обчислень.

Якщо члени ряду зменшуються досить швидко, то у випадку знакозмінного ряду похибку легко оцінювати за першим відкинутим членом ряду, оскільки похибка не буде перевищувати значення цього члена.

В інших випадках можна скористатися штучними прийомами, які полягають, наприклад, в представленні відкинутих членів ряду в виді арифметичної прогресії, суму яких легко визначити, або ж використовують інші прийоми для визначення похибки обчислення елементарних функцій.

3.3. Обчислення елементарних функцій за допомогою ланцюгових дробів

Ланцюговим або безперервним дробом називається вираз виду [19]:

$$\cfrac{a_0}{b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}}. \quad (3.12)$$

Цей дріб може бути як кінцевим, так і нескінченим. Числа $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ є частковими чисельниками ланцюгового дробу, а числа $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots, b_n$,– частковими знаменниками цього дробу.

Ланцюговий дріб можна представити в більш компактному вигляді:

$$\frac{a_0}{b_0+}\;\frac{a_1}{b_1+}\;\frac{a_2}{b_2+}\;\frac{a_3}{b_3+\ldots}.$$

Даний дріб можна привести до виду:

$$\frac{1}{\alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\ldots}}}=\frac{1}{\alpha_0+}\frac{1}{\alpha_1+}\frac{1}{\alpha_2+\ldots}. \tag{3.13}$$

Такий ланцюговий дріб є звичайним, а його часткові знаменники α_0, α_1, $\alpha_2,\ldots$ – неповні часткові ланцюгового дробу. Використовують також скорочене позначення звичайного ланцюгового дробу – $[\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots]$.

Якщо все неповні часткові ланцюгового дробу додатні, то для збіжності цього ланцюгового дробу необхідно і достатньо щоб ряд з неповних часткових цього дробу розходився $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots$.

Для перетворення будь-якого степеневого ряду в ланцюговий дріб використовують формулу Ейлера:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\frac{c_0}{1-}\;\frac{c_1x}{c_0+c_1x-}\;\frac{c_0c_2x}{c_1+c_2x-}\ldots\frac{c_{n-2}c_nx}{c_{n-1}+c_nx-\ldots} \tag{3.14}$$

Приведемо найбільш поширені формули обчислення елементарних функцій за допомогою ланцюгових дробів.

$$e^x=\frac{1}{1-}\;\frac{x}{1+}\;\frac{x}{2-}\;\frac{x}{3+}\;\frac{x}{2-}\;\frac{x}{5+}\cdots\frac{x}{2-}\;\frac{x}{2n+1+\cdots}$$

$$e^{-x}=1+\frac{2x}{2-x+}\;\frac{x^2}{6+}\;\frac{x^2}{10+}\;\frac{x^2}{14+}\ldots+\frac{x^2}{2(2n+1)+\cdots}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6+}\;\frac{x^2}{10-}\;\frac{11x^2}{42+}\;\frac{25x^2}{166-\cdots}$$

$$\cos x=\frac{1}{1+}\;\frac{x^2}{2-}\;\frac{5x^2}{6+}\;\frac{3x^2}{50-}\;\frac{313x^2}{126+\cdots} \tag{3.15}$$

$$\mathrm{tg}x=\frac{x}{1-}\;\frac{x^2}{3-}\;\frac{x^2}{5-}\;\frac{x^2}{7-}\ldots-\frac{x^2}{2n-1-\ldots}$$

$$\mathrm{arctg}x=\frac{x}{1+}\;\frac{x^2}{3+}\;\frac{4x^2}{5+}\;\frac{9x^2}{7+}\ldots+\frac{n^2x^2}{2n+1+\ldots}$$

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+}\;\frac{x}{2+}\;\frac{x}{3+}\;\frac{2x}{2+}\;\frac{2x}{5+}\ldots+\frac{nx}{2+}\;\frac{nx}{2n+1+\ldots}$$

Представлення елементарних функцій у вигляді ланцюгових дробів дозволяє спростити обчислення, де всі операції представляються у вигляді арифметичних операцій, а не ітераційних циклів. При цьому легко оцінити похибку обчислення елементарних функцій, яка не перевищує величини часткового чисельника першого відкинутого члена ряду.

Контрольні запитання

1. Які функції відносяться до елементарних?

2. Які переваги має обчислення елементарних функцій за допомогою рядів?

3. Які переваги має використання схеми Горнера при обчисленні степеневих многочленів?

4. Чому дорівнює залишок від ділення многочлена $P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n$ на двочлен $(x - a)$ за схемою Горнера?

5. Навести формули визначення коефіцієнтів результату ділення многочлена $P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n$ на двочлен $(x - a)$ за схемою Горнера.

6. Які переваги має представлення функцій в вигляді степеневих рядів?

7. Навести загальний вигляд формули представлення функції $f(x)$ в вигляді степеневого ряду Тейлора.

8. Який вигляд має формула Маклорена, що представляє функцію $f(x)$ в вигляді степеневого ряду?

9. Як визначити значення функції $\ln(x)$ за допомогою степеневого ряду Тейлора?

10. Який вигляд має біноміальний ряд?

11. Які переваги має використання бінома Ньютона при обчисленні елементарних функцій?

12. Що таке «ланцюговий дріб»?

13. Який вигляд має формула Ейлера перетворення степеневого ряду в ланцюговий дріб?

14. Які переваги має застосування ланцюгових дробів при обчисленні елементарних функцій?

15. Як визначається похибка обчислення елементарних функцій за допомогою степеневих рядів?

16. В якій послідовності виконується обчислення складних функцій за допомогою ланцюгових дробів за формулою Ейлера?

Задачі для самоконтролю

1. Записати многочлен $P_n(x) = x^6 - 1{,}7x^4 - 0{,}21x - 0{,}727$ за схемою Горнера. Визначити значення многочлена в точці $x = 1{,}72$, використовуючи схему Горнера.

2. Записати многочлен $P_n(x) = x^7 - 1{,}5x^2 - 5{,}2x + 6{,}5$ за схемою Горнера. Визначити значення многочлена в точці $x = 1{,}15$, використовуючи схему Горнера.

3. Визначити результат ділення многочлена $P_n(x) = x^5 + 4{,}7x^4 + 2x^2 + 2{,}1$ на двочлен $(x - 2{,}5)$ та залишок від цього ділення, використовуючи схему Горнера.

4. Визначити результат ділення многочлена $P_n(x) = x^6 - 2{,}1x^4 + 0{,}9x^3 - 7$ на двочлен $(x - 1{,}3)$ та залишок від цього ділення, використовуючи схему Горнера.

5. Визначити значення функції $y = e^x$ в точці $x = 1{,}35$, використовуючи формулу Тейлора в околі точки $a = 0$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

6. Визначити значення функції $y = \sin(x)$ в точці $x = 37{,}2^0$, використовуючи формулу Тейлора в околі точки $a = 0$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

7. Визначити значення функції $y = \cos(x)$ в точці $x = 62^0$, використовуючи формулу Тейлора в околі точки $a = 0$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

8. Визначити значення функції $y = tg(x)$ в точці $x = 12^0$, використовуючи формулу Тейлора в околі точки $a = 0$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

9. Розкладенням функції $y = \dfrac{1}{1+x}$ в ряд Тейлора в околі точки $a = 0$ визначити її наближене значення в точці $x = 2{,}3$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

10. Розкладенням функції $y = \dfrac{1}{1-x}$ в ряд Тейлора в околі точки $a = 0$ визначити її наближене значення в точці $x = -2{,}4$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

11. Розкладенням функції $y = \sqrt{1+x^2}$ в ряд Тейлора в околі точки $a = 0$ визначити її наближене значення в точці $x = 2{,}2$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

12. Розкладенням функції $y = \sqrt{1-x^2}$ в ряд Тейлора в околі точки $a = 0$ визначити її наближене значення в точці $x = 0{,}4$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

13. Визначити значення функції $y = \ln(x)$ в точці $x = 7{,}2$, використовуючи формулу Тейлора в околі точки $a = 0$, при цьому обмежитись шістьма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

14. Визначити значення функції $y = e^x$ в точці $x = 1{,}25$, використовуючи формулу ланцюгового дробу, при цьому обмежитись чотирма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

15. Визначити значення функції $y = \sin(x)$ в точці $x = 37{,}2^0$, використовуючи формулу ланцюгового дробу, при цьому обмежитись чотирма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

16. Визначити значення функції $y = \cos(x)$ в точці $x = 62^0$, використовуючи формулу ланцюгового дробу, при цьому обмежитись чотирма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

17. Визначити значення функції $y = tg(x)$ в точці $x = 12^0$, використовуючи формулу ланцюгового дробу, при цьому обмежитись чотирма членами ряду. Визначити похибку обчислень.

18. Надати визначення функції $y = f(x)$ довільного виду в будь-якій точці x за допомогою ланцюгового дробу з використанням формули Ейлера.

4. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Постановка задачі

Задача розв'язання нелінійних рівнянь часто використовується в інженерній практиці. Розв'язання нелінійних рівнянь тобто визначити значення кореня рівняння можливо лише в деяких часткових випадках. При цьому, навіть в цих випадках, формули знаходження коренів будуть настільки громіздкими, що ними трудно користуватися. Тому при розв'язанні рівнянь широко використовують методи, що дозволяють отримати наближене рішення з будь-якою заданою точністю.

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \tag{4.1}$$

де $f(x)$ – алгебраїчна або трансцендентна функція з однією невідомою. Якщо $f(x^*) = 0$, то x^* має назву корінь рівняння (4.1) або нуль функції $f(x)$. Будемо вважати, що рівняння (4.1) має лише ізольовані корені, тобто для кожного кореня існує окіл, що не містить інших коренів рівняння.

Геометрично розв'язання задачі (4.1) полягає в знаходженні точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox.

Методи розв'язання нелінійних рівнянь поділяється на прямі (точні) і наближені (ітераційні). Перші дозволяють знайти рішення безпосередньо за допомогою формул і завжди забезпечують отримання точного результату. Але їх застосовують лише для обмеженого виду рівнянь, тому на практиці широко використовують методи другого типу – ітераційні. В них реалізується багаторазове циклічне застосування деякої формули до досягнення результату з заданою точністю. Отриманий результат завжди буде наближеним, хоча може бути як завгодно близьким до точного. Крім того, рівняння містить коефіцієнти, що отримані з деякою похибкою, тому точне визначення коренів рівняння втрачає сенс.

На практиці використовують два типи ітераційних методів:

– метод звуження інтервалу, що містить корінь, (метод половинного поділу, метод послідовного випадкового поділу, сканування з деяким кроком тощо). Тут використовується тільки знак функції $f(x)$, а не її значення. Ці методи прості в використанні, але мають малу швидкість збіжності;

– методи апроксимації, в яких функція $f(x)$ представляється більш простою функцією $y = \varphi(x)$, для якої визначається корінь (наприклад, методи хорд, Ньютона тощо). Вони використовують значення функції $y = f(x)$, тому мають кращу збіжність.

В загальному випадку задача знаходження наближених значень дійсних коренів рівняння (4.1) складається з двох етапів.

Перший етап – це відокремлення (ізоляція) коренів тобто знаходження відрізка, що належить області існування функції $y = f(x)$, на якому розташований один і тільки один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Другий – уточнення значення кореня до отримання рішення з заданою точністю за допомогою одного з ітераційних методів.

4.1. Методи відокремлення коренів рівняння

Умова відокремлення кореня. Процес відокремлення коренів рівняння (4.1) заснований на теоремі Больцано-Коші: якщо безперервна функція $f(x)$ приймає на кінцях відрізка $[a; b]$ значення різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, то всередині цього відрізка міститься принаймні один корінь. Геометрично це означає, що графік функції $y = f(x)$ в точках a і b знаходиться за різними сторонами від вісі Ox й, відповідно, на відрізку $[a; b]$ обов'язково повинен перетинати вісь Ox. Але ця умова не завжди гарантує наявність єдиного кореня.

Для існування єдиного кореня на $[a; b]$ необхідне виконання додаткової умови: на цьому відрізку функція $f(x)$ монотонна, тобто похідна $f'(x)$ не змінює знак на $[a; b]$.

Вказані умови є достатніми для існування єдиного кореня рівняння (4.1). Таким чином, задача відокремлення рівняння $f(x) = 0$ полягає в визначенні відрізка $[a; b]$, на якому виконані такі три умови:

– $f(a)f(b) < 0$;

– $f'(x)$ не змінює знак для $x \in [a; b]$, тобто функція $f(x)$ є монотонною. Математично ця умова представляється як $f'(a)f'(b) > 0$;

– $f''(x)$ не змінює знак для $x \in [a; b]$. Третя умова означає, що перша похідна функції $f'(x)$ є монотонною, і її графік або випуклий, або вигнутий на відрізку $[a; b]$ та $f''(a)f''(b) > 0$.

Відокремлення кореня можна виконувати як аналітично, так і графічно.

Графічний метод відокремлення кореня. Графічно корені рівняння $f(x) = 0$ можна відокремити, якщо побудувати графік функції $y = f(x)$ і приблизно визначити точки її перетину з віссю Ox. Але задача побудови графіка не завжди є простою. Зазвичай рівняння $f(x) = 0$

замінюють еквівалентним рівнянням $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Тут $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Функції $y_1 = \varphi_1(x)$ і $y_2 = \varphi_2(x)$ підбирають так, щоб побудувати їх графіки було простіше, ніж графік функції $y = f(x)$. Абсциси точок перетину графіків $y_1 = \varphi_1(x)$ і $y_2 = \varphi_2(x)$ є коренями рівняння $f(x) = 0$.

Приклад. Визначити корені рівняння: $f(x) = x \ln x = 1$. Представимо дане рівняння як $\ln x = 1/x$. Тоді точка перетину рівнянь $y = \ln x$ та $y = 1/x$ буде рішенням початкового рівняння. Графічне розв'язання цього рівняння показано на рисунку 4.1.

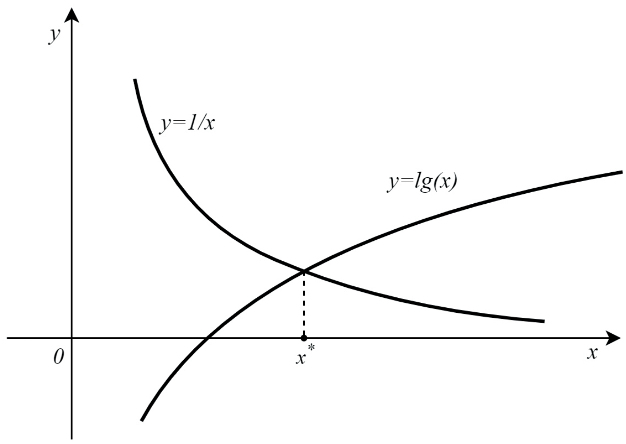


Рис. 4.1. Графічне розв'язання рівняння $x \ln x = 1$

Відповідь. Рішенням (коренем) рівняння $x \ln x = 1$ є $x^* = 1{,}7632$

Приклад. Визначити корені рівняння: $e^x + x^2 = 2$. Графічне розв'язання цього рівняння показано на рисунку 4.2.

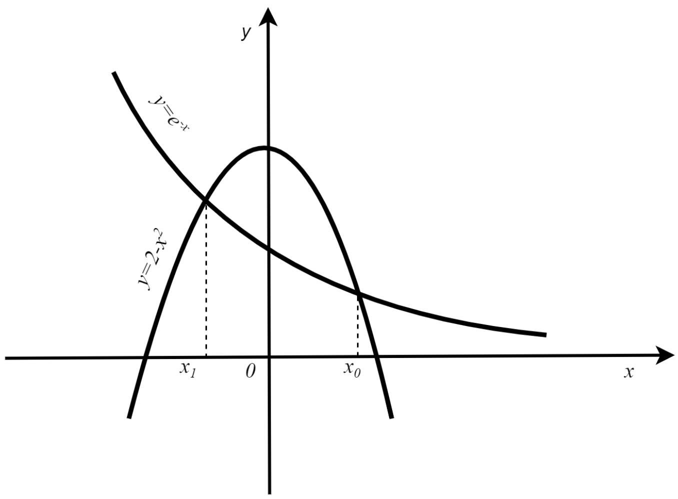


Рис. 4.2. Графічне розв'язання рівняння $e^x + x^2 = 2$

Відповідь. Рішеннями (коренями) рівняння $e^x + x^2 = 2$ є $x_1^* = -1{,}316$ та $x_2^* = 0{,}537$.

Метод проб. Цей метод полягає в тому, що довільно вибирають точку $x = a$ із області визначення функції, визначають знак $f(a)$, а потім підбирають точку b так, щоб значення функції $f(b)$ мало знак, що протилежний знаку $f(a)$. Далі визначають знак $f'(x)$ всередині відрізка $[a;b]$. Якщо $f'(x)$ не змінює знак на $[a;b]$, то виконують аналогічну перевірку збереження одного знаку для другої похідної функції $f''(x)$ на цьому відрізку. При виконанні трьох необхідних та достатніх умов існуванні одного і тільки одного кореня на відрізку $[a;b]$ задача відокремлення розв'язана. Інакше цей відрізок звужують, взявши точку c, що знаходиться посередині відрізка $[a;b]$. Визначають знак $f(c)$ і в якості нового відрізка розглядають або $[a;c]$ (якщо $f(a)f(c) < 0$), або $[c;b]$ (якщо $f(c)f(b) < 0$). Позначивши новий відрізок через $[a_1;b_1]$, повторюють ті самі дії, що на початковому відрізку $[a;b]$, до тих пір, доки не буде знайдено відрізок $[a_n;b_n]$ де знаходиться один корінь.

Метод сканування. Сутність методу полягає в тому, що шляхом аналізу знаку функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ з кроком h (в точках a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h,...,b = a+nh$) та знаходження часткового відрізка, в якому функція $f(x)$ змінює знак на протилежний. Для отриманого часткового відрізка виконують перевірку достатніх умов існування одного й тільки одного кореня на цьому відрізу. Якщо функція $f(x)$ та її похідна в точках визначеного відрізка є монотонними, то задача відокремлення кореня розв'язана, інакше – виконують звуження цього часткового інтервалу до забезпечення достатніх умов існування кореня на відрізу.

Даний метод є простий для реалізації на комп'ютері, а швидкість знаходження необхідного інтервалу суттєво залежить від обраного кроку сканування h.

Приклад. Для рівняння $y = f(x) = x^5 + 18x^3 - 34 = 0$ на інтервалі $[-5;\ 5]$ визначити частковий інтервал, що містить один найменший по модулю корінь рівняння методом сканування.

Розв'язок. Визначення часткового інтервалу, в якому існує корінь рівняння, тобто виконується необхідна умова його існування $f(a)f(b) < 0$. Для цього обчислюється знак функції $y = f(x)$ на інтервалі $[-5;\ 5]$ методом сканування з кроком $h = 1$.

Результати визначення часткового інтервалу, де функція $y = f(x)$ змінює на протилежний, наведено в таблиці.

x_i	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
Sign(y)	–	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+

Із таблиці видно, що на частковому інтервалі $[1;2]$ функція $y = f(x)$ змінює знак, тобто виконується необхідна умова $f(1)f(2) < 0$. Для виконання достатніх умов існування коренів $f'(a)f'(b) > 0$ та $f''(a)f''(b) > 0$ скануємо функцію $y = f(x)$ на інтервалі [1; 2] з кроком $h = 0.2$.

Результати сканування функції на отриманому частковому інтервалі та визначення часткового під інтервалу, де функція і її перша похідна будуть монотонними, наведено в таблицях.

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Sign(y)	–15	–0,408	20,77	50,21	89,87	142

x_i	y_i'	y_i''
1,2	88,128	164,2
1,4	125,05	206,08

Відповідь. Таким чином встановлено, що $f'(1{,}2)f'(1{,}4) > 0$ та $f''(1{,}2)f''(1{,}4) > 0$. Тобто на частковому інтервалі $[1{,}2;1{,}4]$ виконуються необхідні і достатні умови існування кореня і отже тут існує один і тільки один корінь рівняння $y = f(x) = x^5 + 18x^3 - 34 = 0$.

4.2. Методи уточнення кореня рівняння

4.2.1. Метод половинного поділу (метод бісекції)

Даний метод реалізує простий і алгоритм уточнення коренів рівняння $f(x) = 0$.

Нехай функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$ і функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ є монотонними. Потрібно знайти наближене значення кореня рівняння (3.1), що належить відрізку $[a;b]$, з точністю ε.

У методі половинного поділу відрізок $[a;b]$ поділяється навпіл. Якщо $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, то вважаємо, що рішенням задачі є $x^* = \dfrac{a+b}{2}$. В іншому випадку позначимо через $[a_1, b_1]$ ту частину поділеного навпіл початкового відрізка $[a, b]$, на кінцях якого функція приймає значення різних знаків. Для отриманого відрізка перевіряється раніш наведена умова. Процес послідовного поділу продовжується до тих пір, поки не буде виконуватися одна з умов:

1) $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$, де n – кількість поділів відрізків навпіл. Тоді $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$;

2) при деякому n довжина відрізка, що містить корінь, стане менше заданої точності розв’язання задачі ε, тобто $[a_n; b_n] < \varepsilon$, тоді

$$x^* = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Кількість ітерацій, що необхідна для досягнення точності ε, можна оцінити заздалегідь: при $\frac{a+b}{2^n}$, звідси $n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2^{\varepsilon}}\right)}{\ln 2}$. Даний метод є стійким до похибок округлення, але його збіжність буде повільною. При збільшенні точності значно зростає обсяг обчислювальної роботи. Даний метод на практиці часто використовують для грубого (попереднього) визначення початкового наближення до кореня, а потім застосовують ітераційний метод, що швидше збігається.

Графічне представлення процесу уточнення кореня рівняння методом половинного поділу показано на рисунку 4.3.

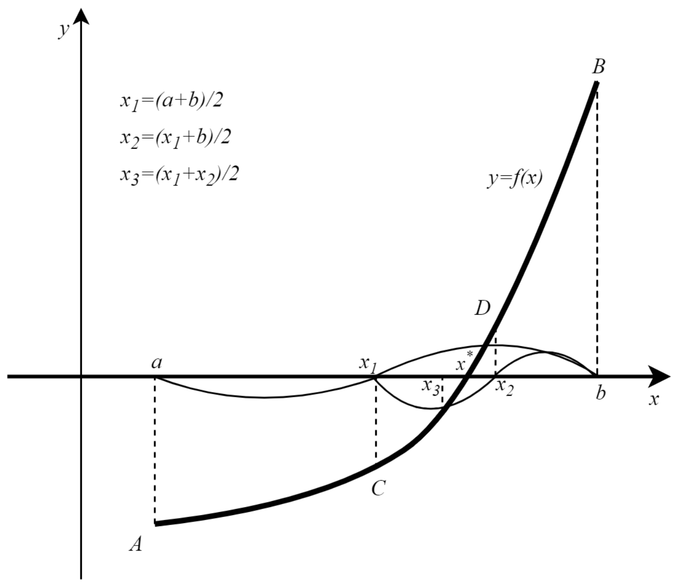


Рис. 4.3. Графічне представлення методу половинного поділу

4.2.2. Метод простих ітерацій або метод послідовних наближень

Цей метод є одним з найбільш загальних методів уточнення коренів рівняння (4.1) [6, 19].

Представимо рівняння $f(x)=0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x=\varphi(x). \tag{4.2}$$

Це можна зробити багатьма способами, поклавши, наприклад,

$$\varphi(x)=x+g(x)\cdot f(x),$$

де $g(x)$ – довільна безперервна знакопостійна функція. Виберемо деяке нульове наближення $x_0 \in [a;b]$ кореня рівняння (4.2) і підставимо його в праву частину. Отримаємо $x_1=\varphi(x_0)$. Подальші наближення обчислимо за формулами:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ (n=1,2,...). \tag{4.3}$$

Якщо отримана послідовність $\{x_n\}$ збігається, тобто існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}=x^*$, то переходячи до границі в (4.3), отримаємо для безперервної функції

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_n),\ \text{або}\ x^*=\varphi(x^*).$$

Таким чином, границя x^* є коренем рівняння (4.2).

Умови збіжності ітераційного процесу (4.3) отримаємо з принципу стислих відображень.

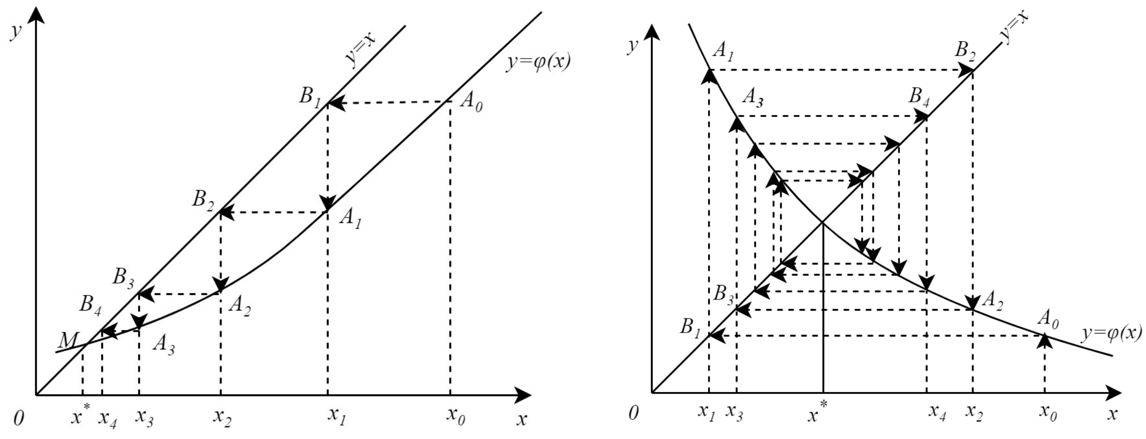
Нехай функція $\varphi(x)$ диференційована на $[a;b]$, причому всі її значення належать відрізку $[a;b]$.

Тоді, якщо виконана умова

$$|\varphi'(x)|\le g<1 \text{ для всіх } x_0 \in [a;b], \tag{4.4}$$

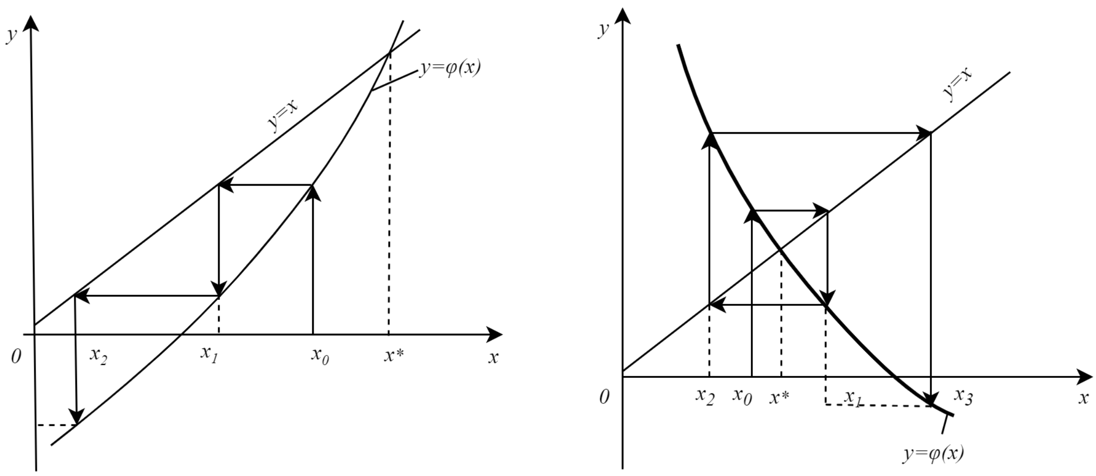
то відображення буде стискаючим і ітераційний процес (4.3) збігається до єдиного кореня рівняння (4.2) на відрізку $[a;b]$ незалежно від вибору початкового наближення $x_0 \in [a;b]$ [6].

Таким чином, ітераційний процес буде збіжним, якщо виконується умова (4.4). На рисунках 4.4 та 4.5 наведено геометричну інтерпретацію збіжності (рис. 4.4а, 4.4б) та розбіжності ітераційного процесу (рис. 4.5а, 4.5б).



а) при $\varphi'(x) < 1$ б) при $\varphi'(x) > -1$

Рис. 4.4. Геометрична інтерпретація збіжності методу простих ітерацій



а) при $\varphi'(x) > 1$ б) при $\varphi'(x) < -1$

Рис. 4.5. Геометрична інтерпретація розбіжності методу простих ітерацій

На практиці ітераційну функцію $\varphi(x)$ часто представляють у вигляді $\varphi(x) = x + mf'(x)$ [2]. При цьому виконання умови (4.4) збіжності ітераційного процесу забезпечується вибором постійного числа m, що задовольняє нерівності:

$$|\varphi'(x)| = |1 + mf'(x)| < 1 .$$

Приклад. Виконати уточнення кореня рівняння $y = f(x) = x^5 + 18x^3 - 34 = 0$ на інтервалі $[1,2; 1,4]$ методом простих ітерацій до виконання умови $|x_n - x_{n-1}| < 0,001$.

Розв'язок. Перейдемо від рівняння $f(x)=0$ до еквівалентного рівняння $x=\varphi(x)$, де $\varphi(x)=x+mf'(x)$. Із умови збіжності ітераційного процесу $|\varphi'(x)|=|1+mf'(x)|<1$ отримаємо $-1<1+mf'(x)<1$; $-2<mf'(x)<0$; $f'(x)=5x^4+54x^2$; $-2<m(5x^4+54x^2)<0$. Тоді при $x_0=1{,}2$ маємо $-0{,}02269<m<0$.

Нехай $m=-0{,}02$. Тоді згідно з формулою

$$x_{k+1}=x_k+mf(x_k),\ k=0,1,2,\dots$$

отримуємо уточнення кореня рівняння, розпочинаючи з точки $x_0=1{,}2$, що належить інтервалу дослідження $[1{,}2;1{,}4]$.

$x_1=x_0+mf(x_0)=1{,}2+(-0{,}02)\cdot(-0{,}40768)=1{,}2081536$;

$x_2=x_1+mf(x_1)=1{,}2081536+(-0{,}02)\cdot 0{,}31635=1{,}201827$;

$x_3=x_2+mf(x_2)=1{,}201827+(-0{,}02)\cdot(-0{,}2464)=1{,}206755$;

$x_4=x_3+mf(x_3)=1{,}206755+(-0{,}02)\cdot 0{,}19138=1{,}20293$;

$x_5=x_4+mf(x_4)=1{,}20293+(-0{,}02)\cdot(0{,}14876)=1{,}2059$;

$x_6=x_5+mf(x_5)=1{,}2059.+(-0{,}02)\cdot 0{,}11514=1{,}2036$;

$x_7=x_6+mf(x_6)=1{,}2036+(-0{,}02)\cdot(-0{,}08935)=1{,}20554$;

$x_8=x_7+mf(x_7)=1{,}20554+(-0{,}02)\cdot 0{,}07=1{,}204$;

$x_9=x_8+mf(x_8)=1{,}204+(-0{,}02)\cdot(-0{,}0539)=1{,}20508$;

$x_{10}=x_9+mf(x_9)=1{,}20508+(-0{,}02)\cdot 0{,}0421=1{,}20424$;

$x_{11}=x_{10}+mf(x_{10})=1{,}20424+(0{,}02)\cdot(-0{,}03254)=1{,}2049$;

$x_{12}=x_{11}+mf(x_{11})=1{,}2049+(-0{,}02)\cdot 0{,}026=1{,}2044$;

$x_{13}=x_{12}+mf(x_{12})=1{,}2044+(-0{,}02)\cdot(-0{,}018)=1{,}20476$;

$x_{14}=x_{13}+mf(x_{13})=1{,}20476+(-0{,}02)\cdot 0{,}01367=1{,}2045$;

$x_{15}=x_{14}+mf(x_{14})=1{,}2045+(-0{,}02)\cdot(-0{,}009)=1{,}20468$;

$x_{16}=x_{15}+mf(x_{15})=1{,}20468+(-0{,}02)\cdot 0{,}00656=1{,}2046$;

$x_{17}=x_{16}+mf(x_{16})=1{,}2046+(-0{,}02)\cdot(-0{,}00055)=1{,}20461$.

Відповідь. Отже $|x_{17}-x_{16}|=0{,}00001<0{,}001$, то коренем рівняння є $x^*=1{,}2046$. При цьому абсолютна похибка Δx уточнення кореня дорівнює $f(1{,}20461)=0{,}00055$.

Метод Ньютона або **метод дотичних**. Даний метод є найбільш часто вживаним методом уточнення коренів, що придатний для розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь [6, 19].

Нехай в рівнянні $f(x)=0$ функція $f(x)$ двічі безперервно диференційована на відрізку $[a;b]$, що містить шуканий відокремлений корінь x^*, причому похідні відрізняються від нуля. Функція $f(x)$ знакопостійна і початкове наближення кореня x_0 належить відрізку $[a;b]$. Геометрично це означає, що графік функції $y=f(x)$ в будь-якій точці відрізка $[a;b]$ має дотичну і не має на відрізку екстремумів і точок перегину.

Виберемо на кривій довільну точку $M_0(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in [a;b]$ і проведемо дотичну до кривої в цій точці. Рівняння дотичної має такий вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Знайдемо точку x_1 перетину дотичній з віссю абсцис. З огляду на то, що тут $y=0$, отримаємо $-f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x_1 - x_0)$, звідси маємо перше наближення кореня:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{4.5}$$

Через точку $M_1(x_1, f(x_1))$ знову проведемо дотичну до кривої, отримана точка перетину якої з віссю Ox дасть нам друге наближення кореня і так далі.

Продовживши описаний процес побудови дотичних і обчислення точок їх перетину з віссю Ox, отримаємо формулу ітераційного методу Ньютона:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.6}$$

Геометрично метод Ньютона означає заміну дуги кривої на кожній ітерації дотичною до неї в точці $M_k(x_k, f(x_k))$.

Метод можна розглядати як окремий випадок методу простих ітерацій (4.3) для функції $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$ тоді $\varphi'(x) = f(x)\cdot f''(x)/(f'(x))^2$. Оскільки $\varphi'(x^*) = 0$, то внаслідок безперервності $\varphi'(x)$ поблизу кореня x^* виконується умова збіжності ітераційного процесу (4.6).

Тоді $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ є рівнянням дотичної в точці $A(a, f(a))$, а $y - f(b) = f'(b)\cdot(x - b)$ – в точці $B(b, f(b))$. З врахуванням того, що в точці перетину дотичної з віссю Ox $y=0$ значення абсциси визначаються за формулами: $b_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$ та $a_1 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

Точку перетину дотичної з віссю Ox, що буде наступним наближенням кореня рівняння $f(x)=0$, зручно визначати за такими ітераційними формулами:

$$1) \text{ при } y'y''>0,\; b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}, \quad n=1,2,3,\dots;$$

$$2) \text{ при } y'y''<0,\; a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}, \quad n=1,2,3,\dots . \tag{4.7}$$

Процес уточнення кореня за методом Ньютона продовжують до тих пір, доки оцінка отриманого наближення не стане задовольняти заданій точності ε, тобто коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями b_{n-1} і b_n (або a_{n-1} і a_n, відповідно) менше ε:

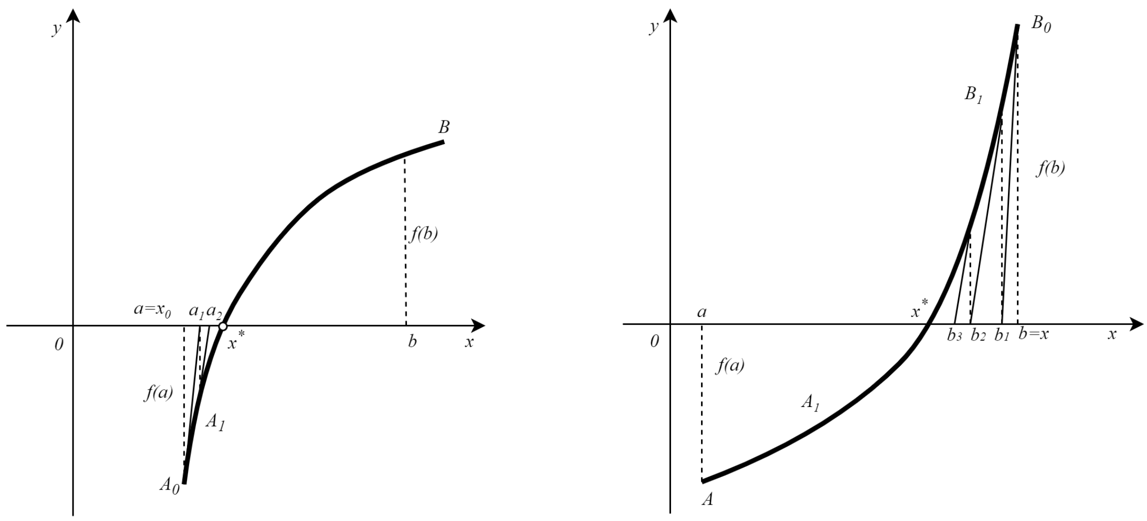
$$|b_n - b_{n-1}| < \varepsilon \text{ при } y'y''>0$$

$$\text{або } |a_n - a_{n-1}| < \varepsilon \text{ при } y'y''<0.$$

Визначена величина b_n або a_n, відповідно, приймається за наближене значення кореня, тобто $x^* \approx b_n$ при $y'y''>0$ та $x^* \approx a_n$ при $y'y''<0$.

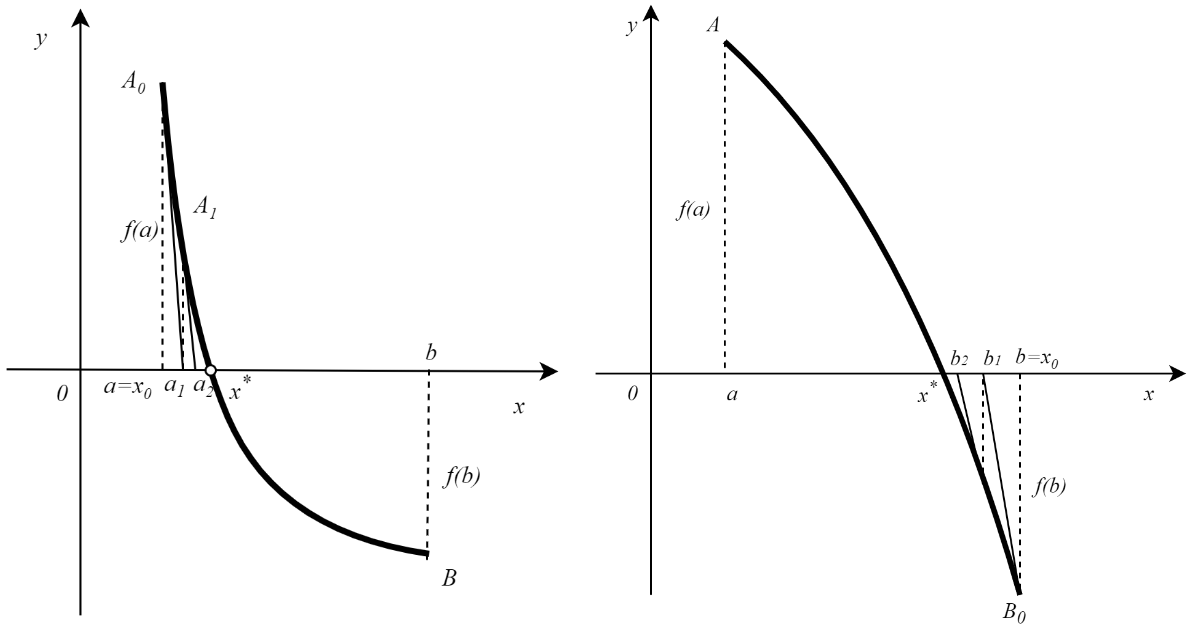
На основі теорії наближених обчислень встановлено, що збіжність ітераційного процесу уточнення коренів рівняння (4.1) за методом Ньютона є квадратичною.

Графічну ілюстрацію методу Ньютона для різних видів функції $y=f(x)$ наведено на рисунках 4.6.



а) при $\begin{matrix} f'(x)>0 \\ f''(x)<0 \end{matrix}$ б) при $\begin{matrix} f'(x)>0 \\ f''(x)>0 \end{matrix}$

Рис. 4.6. Геометрична інтерпретація уточнення коренів рівняння $y=f(x)$ за методом Ньютона



в) при $\begin{matrix} f'(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{matrix}$ г) при $\begin{matrix} f'(x) < 0 \\ f''(x) < 0 \end{matrix}$

Рис. 4.6. Геометрична інтерпретація уточнення коренів рівняння $y = f(x)$ за методом Ньютона (закінчення рис. 4.6)

Приклад. Виконати уточнення кореня рівняння $y = f(x) = x^5 + 18x^3 - 34 = 0$ на інтервалі $[1{,}2; 1{,}4]$ методом Ньютона.

Розв'язок. Для вибору формули для організації ітераційного процесу за методом Ньютона визначаємо знак добутку першої та другої похідних функції $f(x)$ в точці x_0, що належить інтервалу $[1{,}2; 1{,}4]$.

Нехай початкова точка $x_0 = 1{,}2$. Визначено, що $y'(x_0) = 88{,}128$, а $y''(x_0) = 206{,}08$.

Таким чином встановлено, що $f'(x) f''(x) > 0$ і тому для уточнення кореня даного рівняння необхідно використовувати формулу

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}, \; n = 1, 2, 3, ...$$

Тоді

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = 1{,}4 - \frac{1{,}4^5 + 1{,}8 \cdot 1{,}4^3 - 3{,}4}{5 \cdot 1{,}4^4 + 5{,}4 \cdot 1{,}4^2} = 1{,}2339;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}2339 - \frac{1{,}2339^5 + 1{,}8 \cdot 1{,}2339^3 - 3{,}4}{5 \cdot 1{,}2339^4 + 5{,}4 \cdot 1{,}2339^2} = 1{,}20538;$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 1{,}20538 - \frac{1{,}20538^5 + 1{,}8 \cdot 1{,}20538^3 - 3{,}4}{5 \cdot 1{,}20538^4 + 5{,}4 \cdot 1{,}20538^2} = 1{,}20461;$$

$$b_4 = b_3 - \frac{f(b_3)}{f'(b_3)} = 1{,}20461 - \frac{1{,}20461^5 + 1{,}8 \cdot 1{,}20461^3 - 3{,}4}{5 \cdot 1{,}20461^4 + 5{,}4 \cdot 1{,}20461^2} = 1{,}20461;$$

$$b_5 = b_4 - \frac{f(b_4)}{f'(b_4)} = 1{,}20461 - \frac{1{,}20461^5 + 1{,}8 \cdot 1{,}20461^3 - 3{,}4}{5 \cdot 1{,}20461^4 + 5{,}4 \cdot 1{,}20461^2} = 1{,}20461.$$

Відповідь. Оскільки $b_5 = b_4 = 1{,}20461$ вважаємо, що коренем рівняння є $x^* = 1{,}20461$. При цьому абсолютна похибка Δx уточнення кореня дорівнює $f(1{,}20461) = 0{,}0003376$.

Модифікований метод Ньютона. Розрахунки за методом Ньютона можна спростити, якщо зафіксувати значення похідної у знаменнику формули (4.6), наприклад, вважати, що $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ [19].

Таке спрощення обчислень приводить до так званого модифікованого методу Ньютона. Можна показати збіжність та вивести оцінки похибок модифікованого методу Ньютона при умовах теореми про збіжність методу Ньютона (4.6). Це спрощення розрахункових формул призводить до лінійної збіжності модифікованого методу Ньютона. Геометрично модифікований метод Ньютона відповідає знаходженню точок x_i перетину осі абсцис і ліній, що паралельні дотичній до кривої функції $f(x)$ у точці (x_0, y_0) (рис. 4.7).

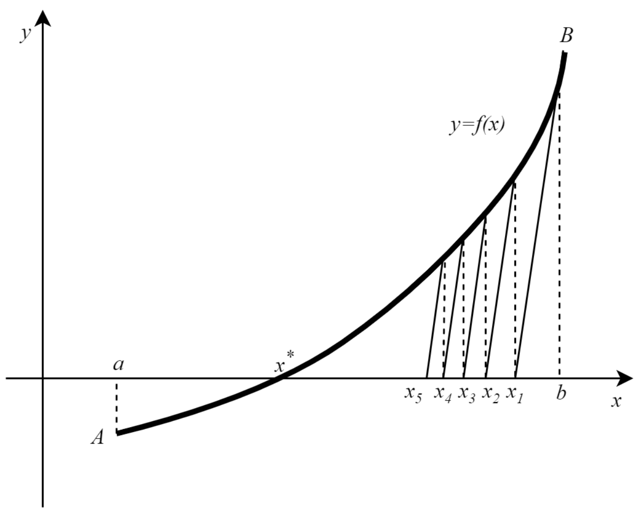


Рис. 4.7. Геометричне представлення модифікованого методу Ньютона

Метод січних. Цей метод також є іншою модифікацією методу Ньютона. Метод січних використовується, якщо обчислення похідної функції $f(x)$ якими-небудь причинами утруднено. Тоді похідна $f'(x)$ замінюється розділеною різницею, що визначена за двома останніми ітераціями [6]:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Підставивши вираз $f'(x_n)$ в (4.6), отримаємо ітераційну формулу за методом січних:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (4.8)$$

Для початку процесу обчислень необхідно задати x_0 та x_1 і на кожному кроці методу січних частина кривої замінюється січною, що проходить через точки з абсцисами x_n та x_{n-1} (рис.4.8).

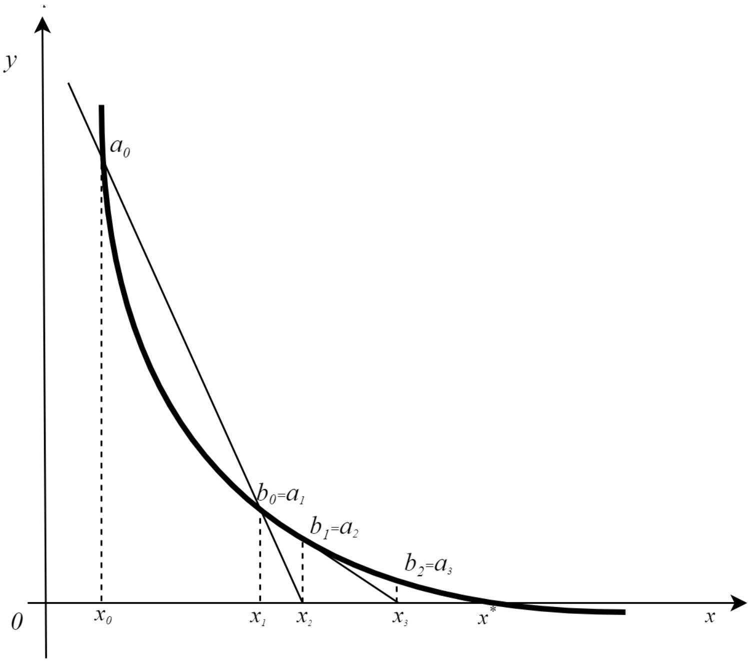


Рис. 4.8. Геометричне представлення методу січних

Установлено, що якщо x^* є корінь рівняння $f(x) = 0$, а $f'(x^*) \neq 0$ $f''(x^*) \neq 0$ і $f'(x)$ – безперервна функція, то існує така околиця точки x^* і x_0 та x_1 – різні точки цієї околиці, то метод січних збігається до x^*.

Такий ітераційний процес повторюється до отримання значення кореня з заданою точністю.

Метод хорд. Даний метод зручно використовувати, якщо обчислення похідної функції $f(x)$ за деякими причинами викликає труднощі. Тут похідна функції $f(x)$ замінюється першою розділеною різницею, що знайдена за двома останніми ітераціями.

Ідея методу полягає в тому, що на відрізку $[a;b]$ будується хорда AB, що стягує кінці дуги графіку функції $y=f(x)$, і, як наближене значення кореня x_0, вибирається значення c, яке є абсцисою точки перетину цієї хорди з віссю Ox. Для визначення c використовується рівняння хорди як прямої, що проходить через дві точки $A(a;f(a))$ і $B(b;f(b))$:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

При $y=0,\ x=c$, отримаємо

$$c=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \text{ при } y'y''>0 \text{ та } a_1=c,$$

$$\text{або } c=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)} \text{ при } y'y''<0 \text{ та } b_1=c.$$

Надалі повторюють цю процедуру на новому відрізку $[a_1;b]$ або $[a;b_1]$, відокремлюючи корінь за ітераційними формулами:

$$a_n=a_{n-1}-\frac{f(a_{n-1})(b-a_{n-1})}{f(b)-f(a_{n-1})} \text{ при } y'y''>0,$$

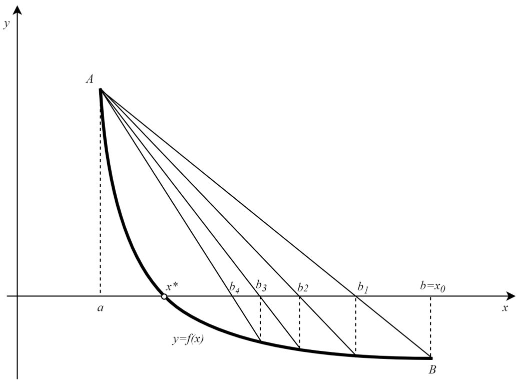
$$\text{або } b_n=b_{n-1}-\frac{f(a)(b_{n-1}-a)}{f(b_{n-1})-f(a)} \text{ при } y'y''<0 \quad n=1,2,3,\dots . \tag{4.9}$$

Процес уточнення кореня закінчується тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданій точності ε тобто, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями a_{n-1} і a_n (або b_{n-1} і b_n відповідно) стане менше ε:

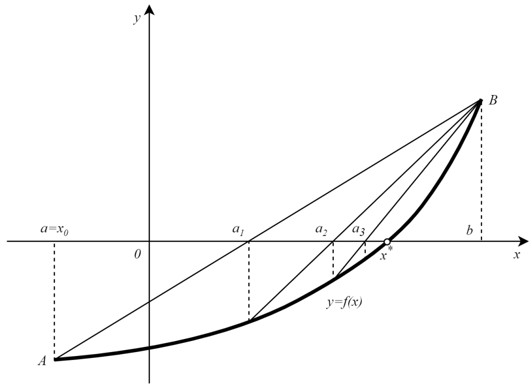
$$|a_n-a_{n-1}|<\varepsilon \text{ при } y'y''>0,$$

$$\text{або } |b_n-b_{n-1}|<\varepsilon \text{ при } y'y''<0.$$

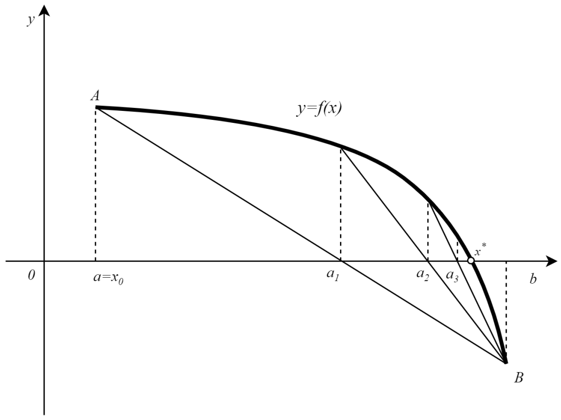
Визначена величина a_n або b_n відповідно приймається за наближене значення кореня, тобто $x^*\approx a_n$ при $y'y''>0$ та $x^*\approx b_n$ при $y'y''<0$ (рис. 4.9).



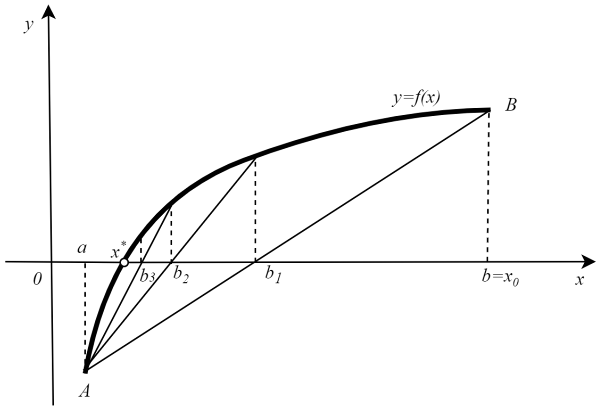
а) при $\begin{matrix} f(a)((b) < 0 \\ f'(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \\ f'(x)f''(x) < 0 \end{matrix}$



б) при $\begin{matrix} f(a)(b) < 0 \\ f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \\ f'(x)f''(x) > 0 \end{matrix}$



в) при $\begin{matrix} f(a)f(b) < 0 \\ f'(x) < 0 \\ f''(x) < 0 \\ f'(x)f''(x) > 0 \end{matrix}$



г) при $\begin{matrix} f(a)((b) < 0 \\ f'(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \\ f'(x)f''(x) < 0 \end{matrix}$

Рис. 4.9. Геометричне представлення методу хорд

Методи хорд і січних збігаються повільніше методу Ньютона, проте на кожній ітерації вимагають обчислення тільки значень функції в двох точках.

Приклад. Виконати уточнення кореня рівняння $y = f(x) = x^5 + 18x^3 - 34 = 0$ на інтервалі $[1{,}2; 1{,}4]$ методом хорд.

Розв’язок. Для вибору формули для організації ітераційного процесу за методом хорд визначаємо знак добутку першої та другої похідних функції $f(x)$ в точці x_0, що належить інтервалу дослідження.

Нехай початкова точка $x_0 = 1{,}2$. Визначено, що $y'(x_0) = 88{,}128$, а $y''(x_0) = 206{,}08$.

Встановлено, що $f'(x)f''(x) > 0$ і для уточнення кореня даного рівняння необхідно використовувати формулу $a_n = a_{n-1} - \dfrac{f(a_{n-1})(b - a_{n-1})}{f(b\ ) - f(a_{n-1})}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Тоді

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)(b - a_0)}{f(b) - f(a_0)} = 1{,}2 - \frac{(-0{,}40768)\cdot(1{,}4 - 1{,}2)}{20{,}77024 - (-0{,}40768)} = 1{,}20385\,;$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b - a_1)}{f(b) - f(a_1)} = 1{,}20385 - \frac{(-0{,}06717)\cdot(1{,}4 - 1{,}20385)}{20{,}77024 - (-0{,}06717)} = 1{,}20448\,;$$

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)(b - a_2)}{f(b) - f(a_2)} = 1{,}20448 - \frac{(-0{,}011216)\cdot(1{,}4 - 1{,}20448)}{20{,}77024 - (-0{,}011216)} = 1{,}20459\,;$$

$$a_4 = a_3 - \frac{f(a_3)(b - a_3)}{f(b) - f(a_3)} = 1{,}20459 - \frac{(-0{,}000144)\cdot(1{,}4 - 1{,}20459)}{20{,}77024 - (-0{,}00144)} = 1{,}2046\,;$$

$$a_5 = a_4 - \frac{f(a_4)(b - a_4)}{f(b) - f(a_4)} = 1{,}2046 - \frac{(-0{,}0005512)\cdot(1{,}4 - 1{,}2046)}{20{,}77024 - (-0{,}0005512)} = 1{,}20461\,;$$

$$a_6 = a_5 - \frac{f(a_5)(b - a_5)}{f(b) - f(a_5)} = 1{,}20461 - \frac{0{,}0003376\cdot(1{,}4 - 1{,}20461)}{20{,}77024 - 0{,}0003376} = 1{,}20461\,.$$

Відповідь. Встановлено, що $a_6 = a_5 = 1{,}20461$. Тоді вважаємо, що коренем рівняння є $x^* = 1{,}20461$. Похибка обчислення кореня рівняння $y = f(x) = x^5 + 18x^3 - 34 = 0$ дорівнює $f(1{,}20461) = 0{,}0003376$.

Комбінований метод. Ідея методу полягає в одночасному використанні методів хорд і дотичних. Це дозволяє значно зменшити кількість ітерацій при визначенні наближеного значення кореня рівняння $f(x) = 0$.

Згідно з цим методом послідовно визначаються точки перетину хорди, що стягує кривої на кінцях відрізку з віссю Ox та точки перетину дотичної, що проведена до кінця кривої $f(x)$, з віссю Ox (рис. 4.10).

Отже, комбінуючи ці два методи і визначаючи значення a_n і b_n, згідно формул (4.7) і (4.9), послідовно на кожному кроці звужуємо з двох сторін відрізок, всередині якого знаходиться корінь x^*. Тобто:

$$a_n < x_n < b_n \text{ при } y'y'' > 0\,,$$

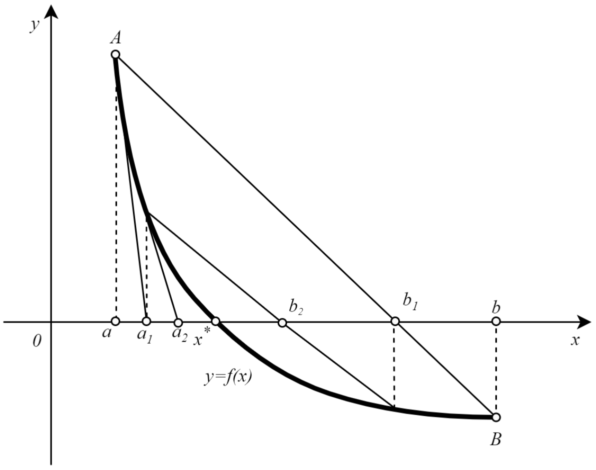
$$b_n > x_n > a_n \text{ при } y'y'' < 0\,.$$

Процес уточнення кореня виконують до тих пір, доки не буде досягнуто умови $|b_n - a_n| < \varepsilon|$, де ε – задана точність наближення.

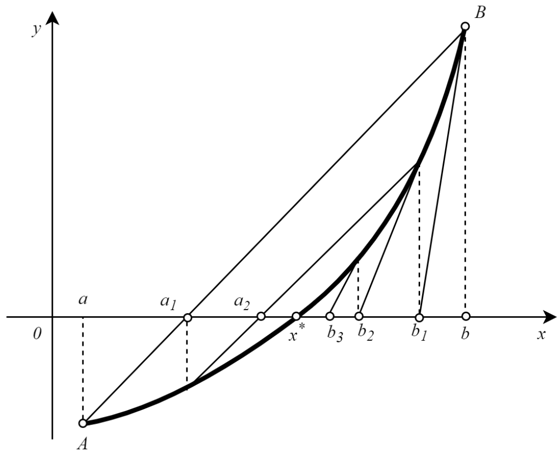
За наближене значення кореня рівняння (3.1) зазвичай беруть точку, що належить середині відрізка, тобто

$$\bar{x} = \frac{a_n + b_n}{2}, \text{ так що } \quad |x^* - \bar{x}| \le |b_n - a_n| < \varepsilon .$$

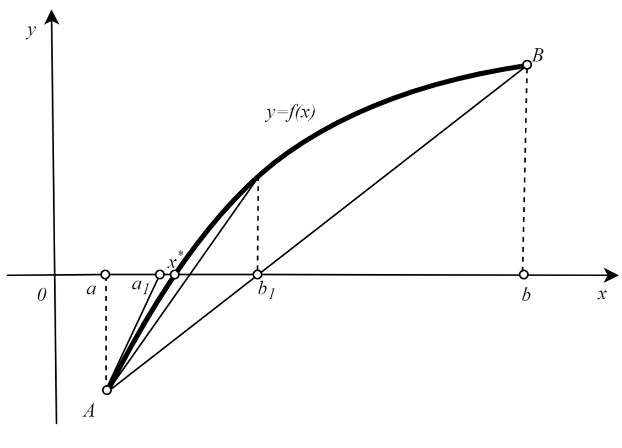
На рисунках 4.10 представлено геометричну інтерпретацію комбінованого методу уточнення коренів рівняння.



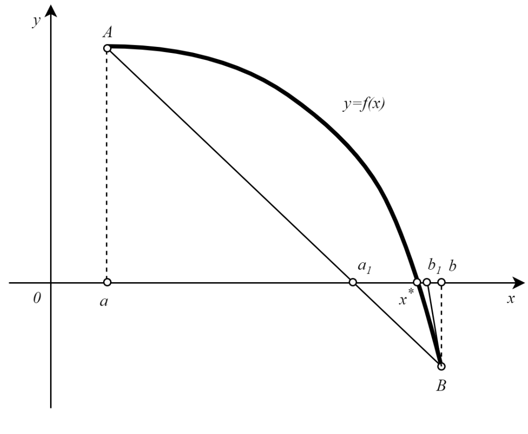
а) при $\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{array}$



б) при $\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{array}$



в) при $\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}$



г) при $\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ f''(x) < 0 \end{array}$

Рис. 4.10. Геометричне представлення комбінованого методу уточнення коренів рівняння

Приклад. Визначити додатній корінь рівняння $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$ з точністю 0,0002 шляхом його уточнення комбінованим методом.

Розв'язок. За методом сканування встановлено, що на інтервалі $[1; 1{,}1]$ виконуються необхідні і достатні умови існування єдиного кореня даного рівняння. На цьому інтервалі і $f(1{,}1) > 0$. Для даного рівняння маємо: $f'(x) = 5x^4 - 1$ і $f''(x) = 20x^3$. На інтервалі дослідження $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$, тобто знаки похідних зберігаються.

Використовуємо для уточнення кореня на інтервалі $[1; 1{,}1]$ комбінований метод. Ввважаємо, що $a_0 = 1$, $b_0 = 1{,}1$. Тоді

$$f(a_0) = f(1) = -2; \quad f(b_0) = f(1{,}1) = 0{,}3105; \quad f'(b_0) = f(1{,}1) = 6{,}3205.$$

Внаслідок того, що $f'(x)f''(x) > 0$, використовуємо такі ітераційні формули:

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)(b - a_0)}{f(b) - f(a_0)} = 1 - \frac{(-0{,}2)(0{,}1)}{0{,}51051} \approx 1{,}039;$$

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = 1{,}1 - \frac{0{,}3105}{6{,}3205} \approx 1{,}051.$$

Після першої ітерації отримаємо інтервал дослідження $[1{,}039; 1{,}051]$.

Перевіряємо умову завершення процесу уточнення кореня рівняння. Через те, що $b_1 - a_1 = 1{,}051 - 1{,}039 = 0{,}012 > 0{,}0002$, задана точність не досягнута. Тому виконуємо наступний етап уточнення.

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 1{,}- \frac{(-0{,}0282)(0{,}012)}{0{,}0595} \approx 1{,}04469;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}051 - \frac{0{,}0313}{5{,}1005} \approx 1{,}04487.$$

В результаті виконаних обчислень встановлено, що $b_2 - a_2 = 1{,}04487 - 1{,}04469 = 0{,}00018 > 0{,}0002$. Це означає, що задана точність уточнення кореня отримана і можна вважати $x^* \approx (1{,}04469 + 1{,}104487)/2 \approx 1{,}045$.

Відповідь. Найменшим додатнім коренем рівняння $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$ є $x^* \approx 1{,}045$. Абсолютною похибкою розв'язання даного рівняння є $f(x^*) \approx f(1{,}045) = 0{,}00118$.

Контрольні запитання

1. Як формулюється задача розв’язання нелінійного рівняння $f(x)=0$?

2. В чому полягає геометричний зміст знаходження коренів рівняння $f(x)=0$?

3. Які методи використовуються для розв’язання нелінійних рівнянь?

4. В чому полягає необхідність чисельного розв’язання нелінійних рівнянь?

5. Яка сутність методів чисельного розв’язання нелінійних рівнянь?

6. З яких етапів складається чисельне розв’язання нелінійних рівнянь?

7. Що є необхідною умовою існування кореня на відрізку?

8. Які умови існування кореня на відрізку є необхідні і достатні, який їх геометричний зміст?

9. Які методи відокремлення коренів використовують при розв’язанні нелінійних рівнянь, їх переваги та недоліки?

10. Як поділяються методи уточнення коренів, що використовуються при розв’язанні нелінійних рівнянь?

11. В чому полягає сутність методу розв’язання нелінійного рівняння методом ділення навпіл? Які переваги і недоліки цього метода?

12. Які особливості уточнення кореня рівняння за методом хорд, його переваги і недоліки?

13. Яка сутність методу дотичних (методу Ньютона) уточнення кореня нелінійного рівняння? Які переваги і недоліки цього методу?

14. Які особливості використання модифікованого методу Ньютона?

15. Метод січних уточнення коренів нелінійного рівняння, які переваги та недоліки його використання?

16. Які переваги має використання комбінованого методу уточнення коренів нелінійного рівняння?

17. В чому полягає сутність послідовних наближень до кореня нелінійного рівняння за методом простих ітерацій, його переваги і недоліки?

18. Що є умовою збіжності уточнення коренів рівняння за методом простих ітерацій і яким чином це досягається?

19. Як досягнути збіжності методу простих ітерацій?

Задачі для самоконтролю

1. Визначити на відрізку $[-5; 5]$ часткові відрізки, на яких існують один і тільки один корінь рівняння $x^5 + 5x + 1 = 0$ (виконати відокремлення коренів рівняння) половинного поділу.

2. Визначити на відрізку $[-5; 5]$ часткові відрізки, на яких існують один і тільки один корінь рівняння $x^3 + x - 3 = 0$ (виконати відокремлення коренів рівняння) методом сканування.

3. Визначити на відрізку $[-5; 5]$ часткові відрізки, на яких існують один і тільки один корінь рівняння $(x-2)^2 - e^x = 0$ (виконати відокремлення коренів рівняння) половинного поділу.

4. Визначити на відрізку $[-5; 5]$ часткові відрізки, на яких існують один і тільки один корінь рівняння $e^{-x} - x = 0$ (виконати відокремлення коренів рівняння) методом сканування.

5. Визначити на відрізку $[-5; 5]$ часткові відрізки, на яких існують один і тільки один корінь рівняння $x^3 + x - 3 = 0$ (виконати відокремлення коренів рівняння) графічним методом.

6. Визначити на відрізку $[-5; 5]$ часткові відрізки, на яких існують один і тільки один корінь рівняння $e^x + x = 0$ (виконати відокремлення коренів рівняння) графічним методом.

7. Визначити корінь рівняння $x^5 + 5x + 1 = 0$ на відрізку $[-0{,}2; 0]$ методом хорд. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

8. Визначити корінь рівняння $e^x + 2\sin x = 0$ на відрізку $[-1; 0]$ методом Ньютона (дотичних). При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

9. Визначити корінь рівняння $x + \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$ на відрізку $[-1; 0]$ комбінованим методом. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

10. Визначити корінь рівняння $x^3 - x^2 - 2 = 0$ на відрізку $[1; 2]$ методом січних. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

11. Визначити корінь рівняння $2x^3 + 2x - 1 = 0$ на відрізку $[0; 1]$ модифікованим методом Ньютона. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

12. Визначити корінь рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ на відрізку $[-2; -1]$ методом простих ітерацій. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

13. Визначити корінь рівняння $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$ на відрізку $[-1; 0]$ методом хорд. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

14. Визначити корінь рівняння $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ на відрізку $[-3; -2,2]$ методом Ньютона (дотичних). При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

15. Визначити корінь рівняння $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ на відрізку $[-1; 0]$ комбінованим методом. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

16. Визначити корінь рівняння $x^3 + x - 3 = 0$ на відрізку $[1; 2]$ методом січних. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

17. Визначити корінь рівняння $e^x + x = 0$ на відрізку $[-1; 0]$ модифікованим методом Ньютона. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

18. Визначити корінь рівняння $e^{-x} - \ln x + 0$ на відрізку $[1; 2]$ методом простих ітерацій. При уточненні значення кореня виконати не менше 6 ітерацій. Визначити похибку обчислення кореня.

5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) є однією з найбільш поширених задач інженерної практики. Джерелами СЛАР можуть бути різницева апроксимація диференціальних і інтегральних рівнянь, локальна лінеаризація систем нелінійних рівнянь, побудова поліномів та кривих іншого спеціального вигляду за наданою інформацією тощо.

Система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (5.1)$$

або у векторній формі $AX = B$,

де $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця розмірності $n \times n$;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_{n,} \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик вільних членів системи рівнянь;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик невідомих чисел, які необхідно визначити.

Рішенням системи є будь-яка група чисел, яка, при підставленні в систему (5.1) замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, перетворює всі рівняння на тотожності.

Для того, щоб система мала єдиний розв'язок, її n рівнянь мають бути лінійно незалежними. Необхідною і достатньою умовою для цього є умова нерівності нулю визначника матриці A, тобто $\det A \neq 0$.

Якщо матриця A системи не вироджена, то система (5.1) має єдине розв'язання, який може бути визначений за методом Крамера.

Метод Крамера (**визначників метод**) полягає в обчисленні визначника $\det A$ матриці A, а також визначників $\det A_k$ матриць A_k, $k = 1, 2, ..., n$. Матриці A_k отримують з матриці A шляхом заміни k-го стовпчика матриці A на стовпчик B.

Якщо $\det A \neq 0$, то система має розв’язання $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що визначається за формулою:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \ k = 1, 2, ..., n.$$

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

$$\begin{cases} 7{,}8x_1 + 3{,}3x_2 - 3{,}2x_3 = 4{,}5 \\ 2{,}5x_1 - 7{,}8x_2 + 3{,}3x_3 = 7{,}1 \\ 6{,}5x_1 - 7{,}1x_2 + 9{,}8x_3 = 6{,}1 \end{cases}.$$

Розв’язок. $A = \begin{pmatrix} 7{,}8 & 3{,}3 & -3{,}2 \\ 2{,}5 & -7{,}8 & 3{,}3 \\ 6{,}5 & -7{,}1 & 9{,}8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 7{,}1 \\ 6{,}1 \end{pmatrix}$; $\det A = -527{,}983$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4{,}5 & 3{,}3 & -3{,}2 \\ 7{,}1 & -7{,}8 & 3{,}3 \\ 6{,}1 & -7{,}1 & 9{,}8 \end{pmatrix}; \ A_2 = \begin{pmatrix} 7{,}8 & 4{,}5 & -3{,}2 \\ 2{,}5 & 7{,}1 & 3{,}3 \\ 6{,}5 & 6{,}1 & 9{,}8 \end{pmatrix}; \ A_3 = \begin{pmatrix} 7{,}8 & 3{,}3 & 4{,}5 \\ 2{,}5 & -7{,}8 & 7{,}1 \\ 6{,}5 & -7{,}1 & 6{,}1 \end{pmatrix};$$

$\det A_1 = -392{,}674,$ $\det A_2 = 470{,}865,$ $\det A_3 = 272{,}319$.

Відповідь: $x_1 = 0{,}7423,$ $x_2 = -0{,}89,$ $x_3 = -0{,}5148$.

Перевірка:
$$\begin{cases} 7{,}8 \cdot (0{,}7423) + 3{,}3 \cdot (-0{,}89) - 3{,}2 \cdot (-0{,}5148) = 4{,}5003 \approx 4{,}5 \\ 2{,}5 \cdot (0{,}7423) - 7{,}8 \cdot (-0{,}89) + 3{,}3 \cdot (-0{,}5248) = 7{,}099 \approx 7{,}1 \\ 6{,}5 \cdot (0{,}7423) - 7{,}1 \cdot (-0{,}89) + 9{,}8 \cdot (-0{,}5148) = 6{,}099 \approx 6{,}1 \end{cases}.$$

Абсолютні похибки обчислення системи рівнянь: $\Delta x_1 = |4{,}5 - 4{,}5003| = 0{,}0003$; $\Delta x_2 = |7{,}1 - 7{,}099| = 0{,}001$; $\Delta x_3 = |6{,}1 - 6{,}099| = 0{,}001$. Отримані похибки викликані обчислювальною похибкою.

Проте застосування методу Крамера для розв’язання системи (5.1) в випадку великих n $(n \geq 5)$ недоцільно, оскільки це пов’язано з виконанням занадто великої кількості арифметичних операцій і значним накопиченням похибок округлення.

На практиці для розв’язання СЛАР використовують наступні методи:

– прямі (точні);

– наближені (ітераційні).

До точних методів відносять методи, що дозволяють знайти рішення СЛАР за допомогою кінцевої кількості елементарних арифметичних операцій. Кількість необхідних для розв'язання СЛАР операцій залежить від вибраної схеми обчислення та порядку системи рівнянь n. До таких методів розв'язання СЛАР належать методи Гаусса, Жордана–Гаусса, оптимального виключення, LU- розкладання (схема Холецького) тощо. Отримати практично точний результат цими методами не вдається. Це викликано наявністю похибок округлення при виконанні арифметичних операцій внаслідок обмеженості розрядної сітки комп'ютера. При цьому похибки розв'язання задач точними методами можуть бути досить значними. Тобто основним недоліком точних методів є накопичення похибок округлення.

Розв'язання СЛАР ітераційними методами отримують шляхом послідовних наближень до точного рішення, що виконуються за рекурентними формулами. Кількість виконуваних арифметичних операцій залежить від вибраної схеми обчислень, розмірності системи рівнянь та необхідної точності результатів обчислень. До ітераційних методів розв'язання СЛАР відносять методи простих ітерації та метод Зейделя.

5.1. Точні методи розв'язання СЛАР

Метод Гаусса та його модифікації є найбільш розповсюдженими з точних методів розв'язання системи рівнянь (5.1). Даний метод використовують для знаходження розв'язку невеликих та помірно великих (до $n = 200$) СЛАР з заповненими матрицями A, тобто матрицями, що містять мало нульових елементів.

Ідея методу Гаусса полягає в перетворенні початкової системи до еквівалентної їй системи з вилученням частини невідомих та приведенням системи до верхньої трикутної матриці (прямий хід) [6]. З перетвореної таким чином системи невідомі визначаються послідовними підстановками, розпочинаючи з останнього її рівняння (зворотний хід). Алгоритм Гаусса складається з виконання однотипних операцій, які легко програмуються на комп'ютері. Проте точність результату і час, що витрачається для його отримання, багато в чому залежить від організації обчислень. Існує багато реалізацій схеми Гаусса, що мають ті або інші переваги. Відомі схеми із заздалегідь заданим порядком виключення невідомих. Це схема єдиного ділення та схема з вибором головного елемента, в яких порядок виключення вибирається за ходом цього процесу.

Схема єдиного ділення. Розглянемо розширену матрицю A системи рівнянь, в якій $a_{i,\,n+1} = b_i$, $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Вважаємо, що $a_{11} \neq 0$ (a_{11}– головний елемент), ділимо перше рівняння системи (5.1) на a_{11}

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + ... + a_{in}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)},$$

де $$a_{1i}^{(1)} = \frac{a_{1i}}{a_{11}},\ i = 2,3,...,n+1.$$

Надалі виключаються x_1 з інших рівнянь системи, віднімаючи з i-го рівняння перше, що помножене на відповідний коефіцієнт a_{i1}. В результаті цього отримуємо перетворені рівняння такого виду:

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j = a_{\mathrm{i},n+1}^{(1)},\ i = 2, 3, ..., n, \tag{5.2}$$

де $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_{1j}{}^{(1)}$, $j = 2, 3, ..., n+1$.

Таким чином, невідоме x_1 буде виключеним з усіх рівнянь, окрім першого. Надалі, вважаючи, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$, ділимо друге рівняння на $a_{22}^{(1)}$ і виключаємо невідоме x_2 з усіх рівнянь, розпочинаючи з третього, й так далі до тих пір, доки не розглянуто всі рівняння системи. Після таких перетворень отримаємо систему з верхньою трикутною матрицею:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + ... + a_{1,n-1}^{(1)} x_{n-1} + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + ... + a_{2,n-1}^{(2)} x_{n-1} + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2,n+1}^{(2)} \\ ... \\ x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)} \\ x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \end{array} \right| . \tag{5.3}$$

Наведений прямий хід методу Гаусса реалізовується у тому випадку, якщо головні елементи $a_{kk}^{(k-1)} (k = 1, 2, ..., n)$ не дорівнюють нулю.

Зворотний хід методу Гаусса полягає в знаходженні невідомих x_i з перетвореної системи (5.3). Значення x_n визначається з останнього рівняння, невідома x_{n-1} – з $(n-1)$-го рівняння і так далі:

$$x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j (k = n-1, n-2, ..., 1). \tag{5.4}$$

При обчисленнях за даним методом кількість операцій множення і ділення при розв'язанні СЛАР визначається за формулою:

$$N = \frac{2n^3 + 9n^2 + n}{6}.$$

При великих значеннях n в процесі розв'язання системи доцільно виконувати контроль обчислень [6]. Для цього використовуються контрольні суми

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}, \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.5}$$

що дорівнюють сумам елементів рядків матриці, включаючи й вільні члени.

Якщо над контрольними сумами в кожному рядку системи проводити такі самі перетворення, що й над іншими елементами цього рядка, то за відсутності похибок в обчисленнях контрольні суми мають дорівнювати сумам елементів відповідних перетворень рядків розширеної матриці системи.

Схема Холецького. При великих значеннях n зручно виконувати гауссові виключення за схемою Холецького, що дозволить спростити процес обчислень [6, 19]. За даною схемою розширена матриця A коефіцієнтів системи представляється у вигляді добутку двох трикутних матриць

$$A = L \cdot U, \tag{5.6}$$

де L (від low – нижній) – нижня трикутна матриця, а U (від up – верхній) – верхня трикутна матриця з одиничними діагональними елементами. Тоді

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & l_{nn} \end{pmatrix},$$

та

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & ... & u_{1n} \\ 0 & 1 & ... & u_{2n} \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

і рівняння (5.6) набуває виду:

$$L \cdot U \cdot X = B .$$

Позначимо $U \cdot X = Y$. Тоді отримуємо систему $L \cdot Y = B$, розв'язання якої, тобто визначення вектора Y, є досить простою задачею і не потребує додаткових перетворень.

Алгоритм обчислень за такою схемою називають LU – розкладанням матриці A коефіцієнтів.

Елементи l_{ij}, u_{ij} і вектор-стовпець Y обчислюються за формулами [6]:

$$l_{\mathrm{i}1} = a_{i1}, (i = 1, 2, ..., n); \tag{5.7}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, (j = 2, 3, ..., n), \; y_1 = \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}}; \tag{5.8}$$

$$l_{\mathrm{ij}} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} j_{ik} u_{kj} \;\; (i \geq j > 1); \tag{5.9}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}), \;\; (1 < i < j); \tag{5.10}$$

$$y_j = \frac{1}{l_{ii}} (a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k), \;\; (1 < i \leq n) . \tag{5.11}$$

Перетворена розширена матриця системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} & y_1 \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & ... & u_{2n} & y_2 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & ... & u_{3n} & y_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & l_{nn} & y_n \end{pmatrix} . \tag{5.12}$$

Заповнення матриці (5.12) елементами виконується в такій послідовності:

– виписуємо елементи l_{i1} 1-го стовпця (5.7);

– обчислюємо елементи u_{1j} і y_1 1-го рядка (формули (5.8));

– обчислюємо елементи l_{i2} 2-го стовпця (формули (5.9));

– обчислюємо елементи u_{2j} і y_2 2-го рядка (формули (5.10) і (5.11)) і так далі та заповнюємо всю розширену матрицю в послідовності стовпець-рядок.

Надане LU – розкладання дозволяє представити систему (5.1) у вигляді $LUX = B$, а вектор X визначити шляхом послідовного розв'язання системи:

$$LY = B, \quad UX = Y.$$

Прямий хід полягає в розв'язанні системи $L \cdot Y = B$, тобто в заповненні матриці (5.12) та отриманні елементів матриці U і вектору Y. При зворотному ході вектор X визначається з системи:

$$\begin{cases} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + ... + u_{1n}x_n = y_1 \\ \quad x_2 + u_{23}x_3 + ... + u_{2n}x_n = y_2 \\ \quad\quad ... \\ \quad\quad x_n = y_n \end{cases}. \tag{5.13}$$

Значення x_i обчислюються за формулами:

$$x_n = y_n,$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k, \ (i < n). \tag{5.14}$$

Обчислення за формулами (5.7) – (5.11) і (5.14) легко реалізуються на комп'ютері.

Схема з вибором головного елемента. Якщо серед головних елементів $a_{kk}^{(k-1)}$ виявиться елемент, що близький до нуля, то ділення рівняння на нього призводить до великих за модулем перетворених коефіцієнтів. У зворотному ході методу Гаусса на ці коефіцієнти треба множити неточні значення невідомих, що може привести до зростання похибки й втрати точності. Тому для уникнення істотного впливу обчислювальної похибки, застосовують метод Гаусса з вибором головного елементу. Згідно з цим методом в якості провідного елементу на k-му кроці вибирають найбільший за модулем елемент в k-му стовпці і перестановкою рядків переносять його на головну діагональ. Після цього відповідне йому значення x_k виключають з усіх рівнянь, серед коефіцієнтів яких ще не вибиралися головні елементи.

Метод Гаусса з вибором головного елементу простий та чисельно стійкий для добре обумовлених лінійних систем.

Приклад. Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 5{,}7x_1 + 3{,}3x_2 + 13x_3 = 2{,}1 \\ 3{,}5x_1 + 4{,}7x_2 + 2{,}1x_3 = 1{,}7 \\ 4{,}1x_1 + 5{,}8x_2 + 11{,}7x_3 = 0{,}8 \end{cases}.$$

Розв’язок. Послідовно гауссівськими перетвореннями приводимо розширену матрицю коефіцієнтів системи до виду з верхньою трикутною матрицею, тобто виконуємо прямий методу Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5{,}7 & 3{,}3 & 1{,}3 & 2{,}1 \\ 3{,}5 & 4{,}7 & 2{,}1 & 1{,}7 \\ 4{,}1 & 5{,}8 & 11{,}7 & 0{,}8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}57895 & 0{,}22807 & 0{,}36842 \\ 0 & -2{,}673675 & -1{,}301755 & -0{,}41053 \\ 0 & -3{,}426305 & -10{,}76491 & 0{,}710522 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}57895 & 0{,}22807 & 0{,}36842 \\ 0 & 1 & 0{,}486879 & 0{,}153545 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}135941 \end{array}\right).$$

Надалі, згідно з алгоритмом методу, здійснюється зворотний хід з визначенням вектор-стовпця невідомих системи, розпочинаючи з останнього рівняння:

$$x_3 = -0{,}135941;$$

$$\begin{array}{c} x_2 + 0{,}486879x_3 = 0{,}153545 \\ x_2 = 0{,}21973 \end{array};$$

$$\begin{array}{c} x_1 + 0{,}57895x_2 + 0{,}22807x_3 = 0{,}36842; \\ x_1 = 0{,}27221. \end{array}$$

Відповідь. $x_1 = 0{,}27221; x_2 = 0{,}21973; x_3 = -0{,}135941.$

Перевірка: $\begin{cases} 5{,}7 \cdot 0{,}27221 + 3{,}3 \cdot 0{,}21973 + 13 \cdot (-0{,}135941) = 2{,}0999827 \approx 2{,}1 \\ 3{,}5 \cdot 0{,}27221 + 4{,}7 \cdot 0{,}21973 + 2{,}1 \cdot (-0{,}135941) = 1{,}6999899 \approx 1{,}7 \\ 4{,}1 \cdot 0{,}27221 + 5{,}8 \cdot 0{,}21973 + 11{,}7 \cdot (-0{,}135941) = 0{,}7999853 \approx 0{,}8 \end{cases}$

Абсолютні похибки обчислення системи рівнянь:

$$\Delta x_1 = |2{,}1 - 2{,}0999827| = 0{,}0000173;$$

$$\Delta x_2 = |1{,}7 - 1{,}6999899| = 0{,}0000001;$$

$$\Delta x_3 = |0{,}8 - 0{,}7999853| = 0{,}0000147.$$

Схема Жордана-Гаусса або **метод повного виключення** полягає в одночасному виключенні будь-якої змінної з усіх рівнянь системи, окрім одного, тобто шляхом гауссівських перетворень із матриці A коефіцієнтів системи отриманні одиничної матриці E. Цю схему зручно реалізувати при комп’ютерному моделюванні, вона є ефективною, оскільки така схема обчислень не вимагає виконання зворотного ходу [6].

На першому кроці цього методу обирається головний елемент $a_{11} \neq 0$ (перестановкою рівнянь системи можна досягнути того, що a_{11} буде найбільшим за модулем коефіцієнтом при x_1). Поділимо перше рівняння системи на a_{11}, в усіх інших рівняннях виключимо x_1, тобто зведемо розширену матрицю системи до виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{array}\right),$$

де

$$a_{1\mathrm{j}}^{(1)} = a_{1j} / a_{11}, a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1\mathrm{j}}^{(1)} a_{i1},$$

$j = 2,3,...n+1;\ i = 2,3,...,n$.

На другому кроці виберемо провідний елемент $a_{22}^{(1)}$ (можна зробити перестановку рядків $2,...,n$ так, щоб він був найбільшим за модулем). Розділимо друге рівняння на $a_{22}^{(1)}$, виключимо x_2 з усіх рівнянь, окрім другого:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & a_{1,n+1}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & a_{n,n+1}^{(2)} \end{array}\right),$$

де $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)},\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} \cdot a_{i2}^{(2)},\ i = 1,3,...,n;\ j = 3,...,n+1$.

Після n кроків отримаємо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right)$$

та чисельні значення невідомих

$$x_i = a_{i,n+1}^{n},\ i = 1,2,...,n.$$

Контроль обчислень за методом Жордана–Гаусса можна здійснити, використовуючи контрольні суми, аналогічно контролю в схемі єдиного ділення.

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана–Гаусса з вибором головного елемента.

$$\begin{cases} 5,7x_1 + 3,3x_2 + 13x_3 = 2,1 \\ 3,5x_1 + 4,7x_2 + 2,1x_3 = 1,7 \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 + 11,7x_3 = 0,8 \end{cases}$$

Розв’язок. Послідовними гауссівськими перетвореннями приводимо розширену матрицю коефіцієнтів при невідомих системи до одиничної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5,7 & 3,3 & 1,3 & 2,1 \\ 3,5 & 4,7 & 2,1 & 1,7 \\ 4,1 & 5,8 & 11,7 & 0,8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,57895 & 0,22807 & 0.36842 \\ 0 & -2,673675 & -1,301755 & -0,41053 \\ 0 & -3,426305 & -10,76491 & 0,710522 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,57895 & 0,22807 & 0.36842 \\ 0 & -3,426305 & -10,76491 & 0,710522 \\ 0 & -2.673675 & 1,301755 & -0,41053 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,57895 & 0,22807 & 0,36842 \\ 0 & 1 & 3,14184 & -0,207373 \\ 0 & -2,673675 & -1,301755 & -0,41053 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1.5909 & 0,48848 \\ 0 & 1 & 3,14184 & -0,207373 \\ 0 & 0 & 7,0985 & -0,96498 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,27221 \\ 0 & 1 & 0 & 0,219732 \\ 0 & 0 & 1 & -0,135941 \end{array}\right).$$

Тоді отриманий вектор-стовбець вільних членів буде рішенням системи рівнянь.

Відповідь. $x_1 = 0{,}27221$, $x_2 = 0{,}219732$, $x_3 = -0{,}135941$.

Перевірка:

$$\begin{cases} 5,7 \cdot 0,27221 + 3,3 \cdot 0,219732 + 13 \cdot (-0,135941) = 2,0999893 \approx 2,1 \\ 3,5 \cdot 0,27221 + 4,7 \cdot 0,219732 + 2,1 \cdot (-0,135941) = 1,6999993 \approx 1,7 \\ 4,1 \cdot 0,27221 + 5,8 \cdot 0,219732 + 11,7 \cdot (-0,135941) = 0,7999969 \approx 0,8 \end{cases}.$$

Метод оптимального виключення є подібним методу Жордана–Гаусса. Даний метод, як і метод Жордана–Гаусса, не передбачає виконання прямого та зворотного ходів методу Гаусса. Основною відмінністю методу оптимального виключення від методів Гаусса та Жордана–Гаусса є вибір дільника поточного рядка розширеної матриці. У методі оптимального виключення дільник – це максимальний за модулем елемент рядка матриці A (окрім елемента вектор-стовпця вільних членів). Метод передбачає процедуру виключення коефіцієнтів при визначеній змінній на кожному кроці наскрізно в решті рядків системи рівнянь. Завдяки спеціальному вибору дільника поточного рядка методи оптимального виключення та Жордана–Гаусса зменшується вплив похибок заокруглення на кінцевий результат обчислень. Крім того, метод оптимального виключення під час обчислень не вимагає при обчисленнях зберігання всієї матриці в оперативній пам'яті.

Алгоритм методу оптимального виключення складається з таких процедур: вибір головного елемента в поточному рядку; нормування елементів розширеної матриці в поточному рядку; виключення коефіцієнтів при поточній невідомій в наступному рядку та в попередніх рядках системи рівнянь [33].

Таким чином розв'язання СЛАР за методом оптимального виключення виконується в такій послідовності:

1) вибирається перший рядок системи рівнянь, $i=1$;

2) визначається головний елемент в i–му рядку матриці A, тобто коефіцієнт a_{ij} при невідомій x_j, що є найбільшим за модулем;

3) виконується нормування коефіцієнтів розширеного рядка матриці шляхом їх ділення на a_{ij}, при цьому поточним буде j-ий стовпчик;

4) здійснюється процедура гауссівського виключення коефіцієнтів в інших рядках системи при невідомій x_j;

5) виконується перехід на інший рядок системи рівнянь, $i=i+1$;

6) якщо $i \le n$, то здійснюється дії гауссівського виключення для всіх рядків системи рівнянь (повторення пунктів 2–5), інакше виконується процедура сортування результатів обчислення за значеннями номера стовпчика матриці A (номера ведучого стовпчика).

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом оптимального виключення:

$$\begin{cases} 3,8x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5 \\ 0,5x_1 + 0,84x_2 + 1,7x_3 = 0 \\ 1,6x_1 + 2,8x_2 - 4,5x_3 = 4,3 \end{cases}$$

Розв’язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,6579 & 0,9437 & 1,7105 \\ 0,5 & 0,84 & 1,7 & 0 \\ 1,6 & 2,8 & -4,5 & 4,3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,658 & 0,974 & 1,7105 \\ 0 & -2,338 & -2,426 & 1,7105 \\ 0 & -2,033 & 3,7865 & -0,9775 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,596 & 0 & 2,3923 \\ 0 & -0,964 & 1 & -0,705 \\ 0 & 1,501 & 0 & -0,447 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,596 & 0 & 2,3923 \\ 0 & -0,964 & 1 & -0,705 \\ 0 & 1 & 0 & -0,292 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1,92 \\ -0,421 \\ -0,292 \end{array}$$

Відповідь. $x_1 = 1{,}92,\quad x_2 = -0{,}421,\quad x_3 = -0{,}292$.

$$\text{\textit{Перевірка}}: \begin{cases} 3,8 \cdot 1,92 - 2,5 \cdot (-0,421) + 3,7 \cdot (-0,292) = 6,505 \approx 6,5 \\ 0,5 \cdot 1,92 + 0,84 \cdot (-0,421) + 1,7 \cdot (-0,292) = 0,0074 \approx 0 \\ 1,6 \cdot 1,92 + 2,8 \cdot (-0,421) - 4,5 \cdot (-0,292) = 4,31 \approx 4,3 \end{cases}$$

Абсолютні похибки розв’язання системи рівнянь: $\Delta x_1 = |6{,}5 - 6{,}505| = 0{,}05$; $\Delta x_2 = |0 - (-0{,}0074)| = 0{,}0074$; $\Delta x_3 = |4{,}31 - 4.3| = 0{,}01$, що викликані обчислювальною похибкою.

5.2. Обчислення визначника та оберненої матриці методом гауссівських виключень

При розв’язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гаусса в прямому ході над елементами матриці A виконуються перетворення, які не змінюють визначника матриці, окрім операції ділення на провідний елемент. Якщо в прямому ході рядки матриці не переставляються, то знак визначника не змінюється. Таким чином, визначник не виродженої матриці системи дорівнює добутку провідних елементів в прямому ході виключення Гаусса

$$\Delta = \det A = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \ldots a_{nn}^{(n-1)}. \tag{5.15}$$

Для його обчислення здійснюється прямий хід Гаусса, як і при розв’язанні системи, тільки без перетворень вектору B [6, 19].

Якщо при приведенні початкової матриці до діагонального виду застосовується метод виключення з вибором головного елементу з перестановкою рядків і стовпців, то в формулу (5.15) необхідно додати множник $(-1)^k$, де k – кількість перестановок рядків і стовпців:

$$\Delta = \det A = (-1)^{\mathrm{k}} a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} ... a_{nn}^{(n-1)}.$$

Приклад. Виконати обчислення визначника матриці [19]

$$A = \begin{vmatrix} 7,4 & 2,2 & -3,1 & 0,7 \\ 1,6 & 4,8 & -8,5 & 4.5 \\ 4,7 & 7,0 & -6,0 & 6,6 \\ 5,9 & 2,7 & 4,9 & -5,3 \end{vmatrix}$$ шляхом гауссівських виключень.

Розв'язок. Послідовно виконуючи гауссівські виключення елементів початкової матриці A приводимо її до виду з верхню трикутною матрицею.

$$\begin{vmatrix} 7,4 & 2,2 & -3,1 & 0,7 \\ 1,6 & 4,8 & -8,5 & 4,5 \\ 4,7 & 7,0 & -6,0 & 6,6 \\ 5,9 & 2,7 & 4,9 & -5,3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7,4 & 2,2 & -3,1 & 0,7 \\ & 4,32434 & -7,82974 & 4,34866 \\ & & 6,11331 & 0,5212 \\ & & & -7,58393 \end{vmatrix}.$$

Тоді шляхом добутку ведучих (діагональних) елементів отриманої матриці отримує значення визначника матриці A:

$$\Delta = \det A = 7,4 \cdot 4,32434 \cdot 6,11331 \cdot (-7,58393) = -1483,61867.$$

Відповідь. Визначник матриці A дорівнює: $\det A = -1483,61867$.

Всі обчислювальні схеми гауссівського виключення дозволяють здійснювати одночасне розв'язання систем лінійних рівнянь з різними правими частинами: $AX = B^{(k)}$, $B^{(k)} = 1, 2, ..., m.$ При цьому кількість обчислень збільшується тільки на перетворення нових стовпців правих частин, що дає значну економію часу розрахунків.

Наведені можливості гауссівського виключення модна використати для отримання матриці, що буде оберненої до початкової матриці. Зокрема, якщо замість стовпців правої частини системи рівнянь обирати стовпці одиничної матриці порядку n: $E^{(k)} = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, тобто одиниця знаходиться на k – му місці, а інші елементи – нулі, при $k = 1,\ 2,\ .,\ n$, то розв'язання системи $AX = E^{(k)}$ буде k – м стовпцем оберненої матриці A^{-1}.

Таким чином, для обчислення оберненої матриці необхідно розв'язати одночасно n систем рівнянь з n невідомими. Для цього до матриці A справа дописується одинична матриця E розмірності $(n \times n)$ виконуються послідовні виключення невідомих в правій частині розширеної матриці

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

і після n кроків отримаємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{array}\right).$$

Права частина отриманої розширеної матриці є елементами матриці, що буде оберненою до початкової матриці

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{n} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Приклад. Шляхом гауссівських виключень знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці A [19]

$$A = \begin{vmatrix} 1{,}8 & -3{,}8 & 0{,}7 & -3{,}7 \\ 0{,}7 & 2{,}1 & -2{,}6 & -2{,}8 \\ 7{,}3 & 8{,}1 & 1{,}7 & -4{,}9 \\ 1{,}9 & -4{,}3 & -4{,}9 & -4{,}7 \end{vmatrix}.$$

Розв’язок. Створюється розширена матриця розмірності (5×10) шляхом дописування справа до матриці A одиничної матриці E. В результаті цієї дії отримуємо:

$$A_1(5\times10) = \begin{vmatrix} 1{,}8 & -3{,}8 & 0{,}7 & -3{,}7 \\ 0{,}7 & 2{,}1 & -2{,}6 & -2{,}8 \\ 7{,}3 & 8{,}1 & 1{,}7 & -4{,}9 \\ 1{,}9 & -4{,}3 & -4{,}9 & -4{,}7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Надалі виконуються послідовні виключення елементів в правій частині розширеної матриці до отримання на місці елементів початкової матриці A одиничної матриці E. Тоді отримуємо:

$$A_2(5\times10)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-0{,}21121&-0{,}46003&0{,}16284&0{,}26956\\-0{,}03533&0{,}16873&0{,}01573&-0{,}08920\\0{,}23030&0{,}04607&-0{,}00944&-0{,}19885\\-0{,}29316&-0{,}38837&0{,}06128&0{,}18513\end{vmatrix}.$$

Відповідь. В результаті застосування гауссівських виключень отримаємо обернено матицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{vmatrix}-0{,}21121&-0{,}46003&0{,}16284&0{,}26956\\-0{,}03533&0{,}16873&0{,}01573&-0{,}08920\\0{,}23030&0{,}04607&-0{,}00944&-0{,}19885\\-0{,}29316&-0{,}38837&0{,}06128&0{,}18513\end{vmatrix}.$$

Перевірка:

$$A\times A^{-1}=\begin{vmatrix}1{,}8&-3{,}8&0{,}7&-3{,}7\\0{,}7&2{,}1&-2{,}6&-2{,}8\\7{,}3&8{,}1&1{,}7&-4{,}9\\1{,}9&-4{,}3&-4{,}9&-4{,}7\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}-0{,}21121&-0{,}46003&0{,}16284&0{,}26956\\-0{,}03533&0{,}16873&0{,}01573&-0{,}08920\\0{,}23030&0{,}04607&-0{,}00944&-0{,}19885\\-0{,}29316&-0{,}38837&0{,}06128&0{,}18513\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0{,}99997&0{,}00000&-0{,}00001&0{,}00000\\-0{,}00025&0{,}99997&-0{,}00002&-0{,}00039\\-0{,}00808&-0{,}01017&0{,}99982&0{,}00009\\0{,}00000&0{,}00000&0{,}00000&1{,}00048\end{vmatrix}\approx\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}.$$

5.3. Метод прогону

Більшість інженерних задач зводиться до розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких матриці коефіцієнтів при невідомих мають багато нульових елементів, а нульові елементи розташовані за спеціальною структурою, наприклад, це стрічкові, квазітрикутні тощо матриці [6].

Задачі побудови інтерполяційних сплайнів, різницеві методи розв’язання крайових задач для диференціальних рівнянь зводяться до розв’язання системи алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею A. У матриці A всі елементи, що не лежать на головній діагоналі і двох сусідніх паралельних діагоналях, дорівнюють нулю. Такі системи можна записати

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i,\ 1 \le i \le n,\ a_1 = 0, c_n = 0. \tag{5.17}$$

Вибір найбільшого елементу при виключенні невідомих методом Гаусса в таких системах виконувати не можна, оскільки перестановка рядків руйнує структуру матриці. Найчастіше розв’язання систем з трьохдіагональною матрицею застосовують метод прогону, який є частковим випадком методу Гаусса.

Прямий хід методу прогону полягає у виключенні елементів, в системі (5.17). Оскільки $a_1 = 0$, то перше рівняння системи прийме вид

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1.$$

Виразимо x_1 через x_2: $x_1 = -\dfrac{c_1}{b_1} x_2 + \dfrac{d_1}{b_1}$ і підставимо в друге рівняння системи. Отримаємо рівняння, що пов’язує x_2 і x_3 і т. д.

Нехай вже отримано співвідношення

$$x_i = k_i x_{i+1} + \varphi_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{5.18}$$

Зменшимо в (5.18) індекс на одиницю і підставимо значення x_{i-1} в i - те рівняння системи (5.17):

$$a_i k_{i-1} x_i + a_i \varphi_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i.$$

Звідси

$$x_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i k_{i-1}} x_{i+1} + \frac{-a_i \varphi_{i-1} + d_i}{b_i + a_i k_{i-1}}.$$

Порівнюючи цей вираз з (5.18), отримаємо рекурентні формули для обчислення k_i і φ_i в прямому ході:

$$k_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i k_{i-1}};\ \varphi_i = \frac{-a_i \varphi_{i-1} + d_i}{b_i + a_i k_{i-1}}. \tag{5.19}$$

Враховуючи, що $a_1 = c_n = 0$, вважаємо $k_0 = \varphi_0 = x_{n+1} = 0$. Зворотний хід здійснюється згідно з (5.18).

Майже в усіх задачах, що призводять до розв’язання системи (5.17) з трьохдіагональною матрицею, забезпечується умова переваги діагональних елементів

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|.$$

Це забезпечує існування єдиного розв'язання і досить добру стійкість методу прогону відносно похибок округлення.

5.4. Ітераційні методи розв'язання СЛАР

Ітераційні методи рішення системи (5.1) базуються на виборі деякого початкового наближення $X^{(0)}$ з подальшим його уточненням за рекурентними формулами до отримання наближення $X^{(k)}$ із заданою точністю. Процес ітерацій легко реалізується на комп'ютері. Він самовиправляємий, тобто окремі похибки в обчисленнях деякого наближення не відбиваються на заключному результаті рішення.

Збіжність ітераційного процесу можна довести на основі із загального принципу стислих відображень [6].

Принцип стислих відображень. Множина X називається *метричним простором*, якщо кожній парі елементів x і $y \in X$ поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число $\rho(x, y)$ (відстань), що задовольняє наступним аксіомам [2]:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, якщо $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для будь-яких елементів $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Елементи метричного простору називаються *точками.*

Елемент $X^{(0)}$ метричного простору X називається границею послідовності $\{X^{(k)}\}$ точок $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, ..., X^{(k)}$, що належать X, якщо послідовність відстаней $\rho(X^{(0)}, X^{(k)})$ збігається до нуля при $k \to \infty$ тобто

$$\lim_{k \to \infty} \rho(X^{(0)}, X^{(k)}) = 0.$$

Послідовність $\{X^{(k)}\}$ на множині може бути збіжною або розбіжною в залежності від вибору метрики $\rho(x, y)$. Послідовність $\{X^{(k)}\}$ називається *фундаментальною*, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер

$N(\varepsilon)$, що $\rho(X^{(k)}, X^{(m)}) < \varepsilon$ при k, $m > N(\varepsilon)$. Якщо в метричному просторі X кожна фундаментальна послідовність збігається до деякої межі, що є елементом цього ж простору, то простір називається *повним*.

Нехай X і Y – дві довільні множини. Якщо кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність один і тільки один елемент $y \in X$, то говорять, що на X задано відображення (оператор) A множини X в Y і записують $Y = AX$.

Відображення A метричного простору X в себе називається таким, *що стискає* або *стискуванням*, якщо існує таке число $0 < a < 1$, що для будь-яких двох точок $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(\mathrm{x}, \mathrm{y}). \qquad (5.20)$$

Точка x називається *нерухомою точкою відображення* A, якщо $AX = X$. Для рівнянь виду $AX = X$ має місце *теорема про нерухому точку* (або *принцип стислих відображень*), що сформульована польським математиком С. Банахом. Ця теорема вказує, що будь-яке стискаюче відображення, що визначене в повному метричному просторі X, має одну і тільки одну нерухому точку X^*. Послідовність $\{X^{(k)}\}$, що визначена рівнянням

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)}, k = 0,1,2,\dots,$$

збігається до точки X^* при будь-якому виборі початкового наближення $X^{(0)} \in X$. При цьому має місце оцінка

$$\rho(X^*, X^{(k)}) \le \frac{\alpha^k}{1+\alpha}\rho(X^{(0)}, X^{(1)}).$$

Метод простих ітерацій (метод Якобі). Перетворимо початкову систему алгебраїчних рівнянь $AX = B$ до виду [6, 19]

$$X = BX + C. \qquad (5.21)$$

Припустимо, що вибрано початкове наближення $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots, x_n^{(0)})$ до точного розв’язання X. Зазвичай вважають $X^{(0)} = C$. Визначимо послідовні наближення за методом простих ітерацій

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + C,\ k = 1, 2, \dots \qquad (5.22)$$

Ітераційний процес (5.22) називається таким, що *збігається* до розв'язання X системи (5.21), якщо при будь-якому виборі початкового наближення $X^{(0)}$ виконана умова

$$\lim_{k\to\infty}\left\|X^{(k)}-X\right\|=0.$$

Визначимо умови збіжності методу простих ітерацій. Віднімаючи (5.21) від (5.22), отримаємо

$$X^{(k)}-X=B(X^{(k-1)}-X). \tag{5.23}$$

З цієї рекурентної формули виходить

$$X^{(k)}-X=B(X^{(k-1)}-X)=B^2(X^{(k-2)}-X)=...=B^k(X^{(0)}-X).$$

Таким чином, вектор $X^{(k)}\to X$ при $k\to\infty$ тоді і тільки тоді, якщо степінь матриці B^k наближається до нульової матриці θ при $k\to\infty$.

Відомо, що для будь-якої квадратної матриці B матриця $B^k\to\theta$ при $k\to\infty$ тоді і тільки тоді, коли всі її власні числа за модулем менше одиниці. З цього твердження виходить необхідна і достатня умова збіжності методу простих ітерацій, згідно з якою метод збігається при будь-якому початковому наближенні $X^{(0)}$ до розв'язання X тоді і тільки тоді, якщо всі власні числа матриці B за модулем менше одиниці.

Для оцінювання збіжності методу простих ітерацій обчислюють норми матриці коефіцієнтів B системи (5.21).

Найбільшого поширення набули такі способи оцінювання норм:

$$\text{I норма: } \|B\|_1=\max_{1\le i\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|;$$

$$\text{II норма: } \|B\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|;$$

$$E\text{-норма (Евклідова): } \|B\|_E=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2)^{1/2}.$$

Сформулюємо достатні умови збіжності: метод простих ітерацій (5.22) збігається до рішення системи (5.21), якщо будь-яка погоджена норма матриці менше одиниці:

$$\|B\|\le 1. \tag{5.24}$$

Якщо обрати в просторі R^n норму вектора $\|X\|$ та ввести метрику $\rho(x,y)=\|x-y\|,$ то відображення (5.21) буде стискуванням, якщо будь-яка погоджена норма матриці B менше одиниці, тобто умова (5.24) виходить з принципу стислих відображень.

Достатні умови збіжності методу простих ітерацій (5.22) можна представити так:

$$\|B\|_1 = \max_{1\le i\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right| < 1,$$

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right| < 1, \tag{5.25}$$

$$\|B\|_E = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2)^{1/2} < 1.$$

Якщо початкову систему алгебраїчних рівнянь $AX = B$ привести до виду:

$$x_i = -\sum_{j=1, j\ne i}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j + \frac{b_i}{a_{ii}},\quad a_{ii}\ne 0,\quad i=1,2,...,n,$$

то за наявності в матриці A діагональної переваги

$$\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1, j\ne i}^{n}\left|a_{ij}\right|,\ i=1,2,...,n, \tag{5.26}$$

виконується умова збіжності методу простих ітерацій, оскільки $\|B\|_\infty < 1$ Для похибки методу простих ітерацій згідно (5.25) отримаємо оцінку

$$\left\|X - X^{(k)}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|. \tag{5.27}$$

Метод збігається із швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $\|B\|$.

Для досягнення заданої точності ε тобто виконання нерівностей,

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon, i=1,2,...,n,$$

ітерації, зазвичай, продовжують до тих пір, доки не будуть виконуватись умови

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \frac{1-\|B\|}{\|B\|}\varepsilon,\ i=1,2,...,n. \tag{5.28}$$

Для оцінювання швидкості збіжності ітераційних методів вводиться поняття порядку методу. Вважають, що метод має p-й порядок, якщо існують $C_1 > 0$ і $C_2 < \infty$ такі, що

$$\rho(X^{(k+1)}, X) \le C_2(\rho(X^{(k)}, X))^{\rho},$$

за умови $\rho(X^{(k)}, X) \le C_1$ При малих значеннях C_1 ітераційний процес збігається тим швидше, чим більше ρ. Зокрема, метод простих ітерацій має перший порядок, а метод Ньютона, що розглядається нижче – другий порядок.

Метод Зейделя. В ітераційному методі Зейделя послідовно уточнюються компоненти рішення системи (5.21) таким чином: при обчисленні $(k+1)$- го наближеного значення x_i при $i > 1$ використовуються вже визначені раніше ($k+1$) - ті наближення невідомих x_1, x_2, ..., x_{i-1} і (k) - ті наближення невідомих x_i, x_{i+1}, ..., x_n [6, 19].

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_1 + b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{(k+1)} = c_1 + b_{i1}x_1^{(k+1)} + \ldots + b_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + b_{ii}x_i^{(k)} + \ldots + b_{in}x_n^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_n + b_{n1}x_1^{(k+1)} + \ldots + b_{ni}x_i^{(k+1)} + \ldots + b_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_{nn}x_n^{(k)}, k = 0,1,2,\ldots. \end{cases} \qquad (5.29)$$

Представимо систему (5.29) в матричній формі:

$$X^{(k+1)} = C + B_1X^{(k+1)} + B_2X^{(k)},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5.30)$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots. & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B_1 + B_2 = B.$$

Метод Зейделя (5.30) еквівалентний методу простих ітерацій для системи

$$X = C_1 + B_3X,$$

де $B_3 = (E - B_1)^{-1}B_2$, $C_1 = (E - B_1)^{-1}C$.

Тому умови збіжності процесу ітерації легко переформулювати для даного випадку: метод Зейделя збігається, якщо норма матриці B_3 менше одиниці. Області збіжності методів простих ітерацій і Зейделя не співпадають, не перетинаються. Так, при виконанні умови (5.24) метод Зейделя збігається. Зазвичай метод Зейделя дає більшу швидку збіжність, ніж метод простих ітерацій, хоча це буває не завжди.

В практичних обчисленнях ітераційний процес завершують, якщо два послідовних наближення відрізняються менше наперед заданого ε в сенсі вибраної норми:

$$\left\| X^{(k)} - X^{(k+1)} \right\| < \varepsilon . \tag{5.31}$$

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом простих ітерацій. Для цього виконати шість ітерацій.

$$\begin{cases} 5,7x_1 + 3,3x_2 + 13x_3 = 2,1 \\ 3,5x_1 + 4,7x_2 + 2,1x_3 = 1,7 \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 + 11,7x_3 = 0,8 \end{cases}$$

Розв’язок. Умовою збіжності ітераційного процесу методу простих ітерації є виконання умови: $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|.$

Перевіримо умови збіжності для заданої системи рівнянь.

В першому та третьому рівнянні системи умова збіжності виконуються $5,7 > 3,3 + 1,3;\ 11,7 > 4,1 + 5,8.$

Приведемо початкову систем рівнянь до виду, що забезпечує збіжність методу простих ітерацій:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5,7 & 3,3 & 1,3 & 2,1 \\ 3,5 & 4,7 & 2,1 & 1,7 \\ 4,1 & 5,8 & 11,7 & 0,8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5,7 & 3,3 & 1,3 & 2,1 \\ 17,5 & 23,5 & 10,5 & 8,5 \\ 4,1 & 5,8 & 11,7 & 0,8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5,7 & 3,3 & 1,3 & 2,1 \\ 13,4 & 17,7 & -1,2 & 7,7 \\ 4,1 & 5,8 & 11,7 & 0,8 \end{array}\right).$$

В даному випадку умова збіжності виконується $17,7 > 13,4 + 1,2$. Тоді отримаємо сукупність розрахункових формул:

$$x_1^i = \frac{2,1 - 3,3x_2^{i-1} - 1,3x_3^{i-1}}{5,7};$$

$$x_2^i = \frac{7,7 - 13,45x_1^{i-1} + 1,2x_3^{i-1}}{17,7};$$

$$x_3^i = \frac{0,8 - 4,1x_1^{i-1} - 5,8x_2^{i-1}}{11,7}., \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Результати розрахунків за номером ітерації при початковому значенні $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$ за 6 ітерацій наведено в таблиці 5.1.

$$x_1^1 = \frac{2,1}{5,7} = 0,36842;$$

$$x_2^1 = \frac{7,7}{17,7} = 0,435;$$

$$x_3^1 = \frac{0,8}{11,7} = 0,068376;$$

$$X^1 = (0,36842; 0,435; 0,068376);$$

$$x_1^2 = \frac{2,1 - 3,3 \cdot 0,435 - 1,3 \cdot 0,068376}{5,7} = 0,101;$$

$$x_2^2 = \frac{7,7 - 13,4 \cdot 0,36842 + 1,2 \cdot 0,068376}{17,7} = 0,16075;$$

$$x_3^2 = \frac{0,8 - 4,1 \cdot 0,36842 - 5,8 \cdot 0,435}{11,7} = -0,27637;$$

$$X^2 = (0,101; 0,16075; -0,27637);$$

$$x_1^3 = \frac{2,1 - 3,3 \cdot 0,16075 - 1,3 \cdot (-0,27637)}{5,7} = 0,3384;$$

$$x_2^3 = \frac{7,7 - 13,4 \cdot 0,101 + 1,2 \cdot (-0,27637)}{17,7} = 0,3398;$$

$$x_3^3 = \frac{0,8 - 4,1 \cdot 0,101 - 5,8 \cdot 0,16075}{11,7} == -0,0467;$$

$$X^3 = (0,3384; 0,3398; -0,0467);$$

$$x_1^4 = \frac{2,1 - 3,3 \cdot 0,3398 - 1,3 \cdot (-0,0467)}{5,7} = 0,18235;$$

$$x_2^4 = \frac{7,7 - 13,4 \cdot 0,3384 + 1,2 \cdot (-0,0467)}{17,7} = 0,17567;$$

$$x_3^4 = \frac{0,8 - 4,1 \cdot 0,3384 - 5,8 \cdot 0,3398}{11,7} = -0,2187;$$

$$X^4 = (0,18235; 0,17567; -0,2187);$$

$$x_1^5 = \frac{2{,}1 - 3{,}3 \cdot 0{,}17567 - 1{,}3 \cdot (-0{,}2187)}{5{,}7} = 0{,}3166;$$

$$x_2^5 = \frac{7{,}7 - 13{,}4 \cdot 0{,}18235 - 1{,}2 \cdot (-0{,}2187)}{11{,}7} = 0{,}28215;$$

$$x_3^5 = \frac{0{,}8 - 4{,}1 \cdot 0{,}18235 - 5{,}8 \cdot 0{,}17567}{11{,}7} = -0{,}0826;$$

$$X^5 = (0{,}3166;\ 0{,}28215; -0{,}0826);$$

$$x_1^6 = \frac{2{,}1 - 3{,}3 \cdot 0{,}28215 - 1{,}3 \cdot (-0{,}0826)}{5{,}7} = 0{,}2239;$$

$$x_2^6 = \frac{7{,}7 - 13{,}4 \cdot 0{,}3166 + 1{,}2 \cdot (-0{,}0826)}{11{,}7} = 0{,}1897;$$

$$x_3^5 = \frac{0{,}8 - 4{,}1 \cdot 0{,}3166 - 5{,}8 \cdot 0{,}28215}{11{,}7} = -0{,}18244;$$

$$X^6 = (0{,}2239;\ 0{,}1897; -0{,}18244).$$

Результати розрахунків за 6 ітерацій обчислення наведено в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1. **Результати наближеного розв’язання СЛАР за ітераціями обчислень**

Номер ітерації	1	2	3	4	5	6
x_1^i	0,36842	0,101	0,3384	0,18235	0,3166	0,2239
x_2^i	0,435	0,16075	0,3398	0,17567	0,28215	0,1897
x_3^i	0,068376	-0,27637	-0,0467	-0,2187	-0,0826	-0,18244

Відповідь. За 6 ітерацій отримано наближене розв’язання системи рівнянь : $x_1 = 0{,}2239;$ $x_2 = 0{,}1897;$ $x_3 = -0{,}18244.$

Контрольні запитання

1. Які методи використовуються для розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

2. Які методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь належать до точних?

3. У чому сутність методу Крамера? Його переваги та недоліки.

4. В чому полягає метод Гаусса розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

5. Алгоритм методу Гаусса зі схемою єдиного ділення.

6. В чому сутність схеми Гаусса з вибором головного елемента?

7. В чому полягає використання схеми Холецького для розв'язання СЛАР?.

8. В чому полягає метод повного виключення (схема Жордана-Гаусса)?

9. Які переваги використання методу оптимального виключення?

10. Як виконується обчислення оберненої матриці методом виключення Гаусса?.

11. Як обчислити визначник матриці методом виключення Гаусса?

12. В чому сутність методу прогону і коли цей метод доцільно використовувати?

13. Які ітераційні методи використовуються для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь? Їх суть.

14. У чому полягає метод простих ітерацій (метод Якобі)?

15. Яка умова збіжності методу простих ітерацій?

16. Як досягти умови збіжності методу простих ітерацій?

17. У чому полягає суть методу Зейделя?

18. Які переваги використання наближених методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

19. Як обчислити визначник матриці за допомогою гауссівських виключень?

20. В чому полягає обчислення оберненої матриці гауссівськими виключеннями?

Задачі для самоконтролю

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 4{,}8x_1 - 1{,}2x_2 + 2{,}4x_3 = 5{,}1 \\ 2{,}7x_2 + 9{,}8x_2 + 3{,}1x_3 = 10{,}2 \\ 0{,}8x_1 - 0{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 4{,}7 \end{cases}$$

методом Крамера. Визначити похибку обчислень.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 4{,}5x_1 + 2{,}0x_2 - 3{,}7x_3 = 4{,}0 \\ 2{,}1x_1 + 8{,}0x_2 + 5{,}8x_3 = -3{,}0 \\ x_1 + 1{,}1x_2 - 2{,}5x_3 = 5{,}0 \end{cases}$$

методом Крамера. Визначити похибку обчислень.

3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 6{,}2x_1 + 1{,}3x_2 - 0{,}7x_3 = 2{,}3 \\ 0{,}4x_1 + 5{,}7x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 3{,}4x_3 = 1{,}0 \end{cases}$$

методом Гаусса. Визначити похибку обчислень.

4. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5{,}3x_1 - 0{,}7x_2 + 1{,}1x_3 = 5{,}0 \\ 1{,}2x_1 + 6{,}1x_2 - 1{,}3x_3 = 6{,}0 \\ 2{,}1x_1 - 1{,}4x_2 + 9{,}7x_3 = 10, \end{cases}$$

методом Гаусса. Визначити похибку обчислень.

5. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 7{,}1x_1 + 6{,}8x_2 + 6{,}1x_3 = 7{,}0 \\ 5{,}0x_1 + 9{,}8x_2 + 5{,}3x_3 = 6{,}1 \\ 8{,}2x_1 + 7{,}8x_2 + 8{,}1x_3 = 5{,}8 \end{cases}$$

методом Гаусса з вибором головного елемента. Визначити похибку обчислень.

6. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 2{,}2x_2 + 3x_3 = 1{,}8 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}9x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}8 \\ 4{,}2x_1 + 3{,}9x_2 - 3{,}1x_3 = 5{,}1 \end{cases}$$

методом Гаусса з вибором головного елемента. Визначити похибку обчислень.

7. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}2x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 = 1{,}7 \\ 1{,}3x_1 + 5{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 7{,}8 \\ 0{,}8x_1 + 4{,}1x_2 + 9{,}1x_3 = 5{,}4 \end{cases}$$

за схемою Холецького. Визначити похибку обчислень.

8. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5{,}8x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}1x_3 = 6{,}4 \\ 0{,}2x_1 + 6{,}4x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}1 \\ 0{,}8x_1 - 0{,}4x_2 + 2{,}7x_3 = 3{,}2 \end{cases}$$

за схемою Холецького. Визначити похибку обчислень.

9. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 4{,}7x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}7 \\ 2{,}1x_1 + 3{,}4x_2 + 1{,}8x_3 = 1{,}1 \\ 4{,}2x_1 - 1{,}7x_2 + 9{,}3x_3 = 2{,}8 \end{cases}$$

методом Жордана-Гаусса. Визначити похибку обчислень.

10. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 2{,}3x_3 = 4{,}8 \\ -2{,}1x_1 + 3{,}9x_2 - 5{,}8x_3 = 3{,}3 \\ 1{,}8x_1 + 1{,}1x_2 - 2{,}1x_3 = 5{,}8 \end{cases}$$

методом Жордана -Гаусса. Визначити похибку обчислень.

11. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3{,}1x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}2 \\ 1{,}9x_1 + 3{,}1x_2 + 2{,}1x_3 = 2{,}1 \\ 7{,}5x_1 + 3{,}8x_2 + 9{,}8x_3 = 5{,}6 \end{cases}$$

методом Жордана – Гаусса з вибором головного елемента. Визначити похибку обчислень.

12. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5{,}8x_1 + 3{,}3x_2 - 3{,}2x_3 = 4{,}5 \\ 2{,}5x_1 - 7{,}8x_2 + 3{,}3x_3 = 7{,}1 \\ 6{,}5x_1 - 7{,}1x_2 + 9{,}8x_3 = 6{,}1 \end{cases}$$

методом Жордана – Гаусса з вибором головного елемента. Визначити похибку обчислень.

13. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 2{,}2x_2 + 3x_3 = 1{,}8 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}9x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}8 \\ 4{,}2x_1 + 3{,}9x_2 - 3{,}1x_3 = 5{,}1 \end{cases}$$

методом оптимального виключення. Визначити похибку обчислень.

14. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}8x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 6{,}5 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}84x_2 + 1{,}7x_3 = 1{,}1 \\ 1{,}6x_1 + 2{,}3x_2 - 4{,}5x_3 = 4{,}3 \end{cases}$$

методом оптимального виключення. Визначити похибку обчислень.

15. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}8x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 6{,}5 \\ 0{,}5x_1 + 3{,}8x_2 + 1{,}7x_3 = -2{,}3 \\ 1{,}6x_1 + 2{,}3x_2 - 4{,}5x_3 = 4{,}3 \end{cases}$$

методом простих ітерацій. Забезпечити збіжність процесу обчислень. Виконати не менше шести операцій. Визначити похибку обчислень.

16. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -6{,}7x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}7x_3 = 8{,}1 \\ 1{,}3x_1 + 5{,}7x_2 + 1{,}3x_3 = 5{,}1 \\ 3{,}5x_1 + 4{,}1x_2 - 5{,}8x_3 = 6{,}1 \end{cases}$$

методом простих ітерацій. Забезпечити збіжність процесу обчислень. Виконати не менше шести ітерацій. Визначити похибку обчислень.

17. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5{,}8x_1 - 1{,}5x_2 + 3{,}3x_3 = 4{,}2 \\ 1{,}2x_1 + 2{,}4x_2 + 2{,}7x_3 = 2{,}1 \\ 1{,}6x_1 + 2{,}1x_2 - 3{,}9x_3 = 3{,}3 \end{cases}$$

методом Зейделя. Забезпечити збіжність процесу обчислень. Виконати не менше шести операцій. Визначити похибку обчислень.

18. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1{,}2x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 6{,}5 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}84x_2 + 1{,}7x_3 = 0{,}7 \\ 1{,}9x_1 + 2{,}3x_2 - 4{,}5x_3 = 4{,}3 \end{cases}$$

методом Зейделя. Забезпечити збіжність процесу обчислень. Виконати не менше шести операцій. Визначити похибку обчислень.

6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему n нелінійних рівнянь

$$f_i(x_1, x_2, x_3, ... x_n) = 0, \ (i = 1, 2, 3, ..., n), \tag{6.1}$$

де $f_i(x)$ – деякі алгебраїчні або трансцендентні функції.

Позначимо $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ і $F = (f_1, f_2, f_3, ..., f_n)$ та запишемо систему (6.1) в векторній формі

$$F(X) = 0. \tag{6.2}$$

Розв'язання системи (6.2) є більш складною задачею, ніж розв'язання одного рівняння. Такі системи розв'язують виключно ітераційними методами. Загальним для випадку системи (6.2) є метод послідовних наближень (простих ітерацій) та метод Ньютона (Ньютона-Рафсона) [6, 7,19].

6.1. Розв'язання систем нелінійних рівнянь методом простих ітерацій

Замінимо нелінійну систему (6.2) еквівалентною системою спеціального вигляду

$$X = \Phi(X), \tag{6.3}$$

де $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n)$.

Припустимо, що система (6.3) має в обмеженій опуклій замкнутій області D n – вимірного простору X єдине розв'язання $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, а компоненти x_i^0 вектора $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ є числами, що відповідно близькі до x_i^*, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Визначатимемо наступні наближення до точного розв'язання за допомогою методу простих ітерацій (послідовних наближень) за формулами:

$$X^{k+1} = \Phi(X^k), \tag{6.4}$$

або в координатній формі

$$x_i^{k+1} = \varphi_i(x_1^k, x_2^k, .., x_n^k), \ (i = 1, 2, ..., n), (k = 0, 1, 2, ...).$$

Нехай $\rho(X^1, X^2) = \left\| X^1 - X^2 \right\|$ відстань між елементами X^1 і X^2 в просторі X, де в якості норми вектору можна вибрати будь-яку канонічну норму.

За принципом стислих відображень система рівнянь (6.3) має єдине рішення $X^* \in D,$ що може бути визначене методом ітерацій (6.4) при будь-якому виборі початкового наближення $X^0 \in D,$ якщо усі послідовні наближення $X^k \in D$, $(k = 1, 2, ...,)$ і відображення $\Phi(X)$ є стискаючими в D.

Вкажемо достатні ознаки збіжності методу ітерацій, що є зручними в практичних обчисленнях [6].

Припустимо, що в деякій опуклій замкнутій області D функції $\varphi_i(x)$ мають безперервні часткові похідні $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ і в області D система (6.3) має єдине розв’язання X^*. Нехай для будь-якого початкового наближення $X^0 \in D$ усі подальші наближення $X^k \in D$. Тоді згідно з принципом стислих відображень метод послідовних наближень (6.4) збігається до розв’язання X^* системи (6.3), якщо будь-яка погоджена норма матриці Якобі

$$J(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

буде менше одиниці.

На практиці зручніше розглядати матрицю M з елементами

$$M_{ij} = \max{}_D \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|,$$

норма якої характеризує норму $J(X)$.

Відображення (6.3) буде стискаючим в D, якщо для будь-якої погодженої норми матриці виконується умова:

$$\|M\| < 1. \tag{6.6}$$

Близькість вектора X^k до розв’язання X^* характеризуватимемо однією з норм $\|X\|_\infty, \|X\|_1$ або $\|X\|_E$.

Враховуючи (6.6), для збіжності методу ітерацій (6.4) достатньо виконання однієї з умов [6]:

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} = q_i < 1,$$

$$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m} M_{ij} = q_j < 1, \tag{6.7}$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}^2\right)^{1/2} = q < 1.$$

Якщо $\|M\| \le \frac{1}{2}$, то для визначення розв'язання системи (6.3) з точністю ε ітераційний процес (6.4) продовжуємо до виконання умови

$$\left\|X^k - X^{k-1}\right\| \le \varepsilon .$$

Якщо $\frac{1}{2} < \|M\| < 1$ то рішення буде визначено з точністю ε, якщо для кожної координати будуть виконуватись нерівності (6.7).

Збіжність ітераційного процесу методу простих ітерацій є лінійною.

Наведемо методику розв'язання системи двох нелінійних рівнянь методом простих ітерацій [6, 19].

Нехай для системи двох рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

треба знайти дійсні рішення із заданою точністю ε.

Якщо на площині просто побудувати графіки функцій $f_1(x, y) = 0$ і $f_2(x, y) = 0$, то можна оцінити кількість коренів системи (6.8) і їх наближені значення як координати точок перетину графіків.

Перетворимо систему (6.8) до виду, що є зручним для застосування методу простих ітерацій :

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases}. \tag{6.9}$$

В методі простих ітерацій скористаємося модифікацією Зейделя, тобто побудуємо ітераційний процес за формулами:

$$\begin{cases} x^{k+1} = \varphi_1(x^k, y^k), \\ y^{k+1} = \varphi_2(x^{k+1}, y^k), \quad (k = 0, 1, 2, ...) \end{cases}. \tag{6.10}$$

Нехай в області $D = \{(x; y), a \le x \le b; c \le y \le d\}$ знаходиться єдине рішення $x = x^*$, $y = y^*$, системи (6.9). Тоді достатні умови збіжності випадку будуть сформульовані таким чином.

Якщо:

– функції і $\varphi_1(x, y)$ і $\varphi_2(x, y)$ визначені і безперервно диференційовані в D;

– початкове наближення $(x^0; y^0)$ і усі подальші наближення $(x^k; y^k), (k = 1, 2, ...)$ належать D;

– в D виконуються нерівності

$$\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1 \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1 \end{array}, \tag{6.11}$$

або

$$\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1 \\ \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1 \end{array}, \tag{6.12}$$

або

$$\sqrt{\sum_{i-1}^{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)^2\right)} \le q < 1 \tag{6.13}$$

то ітераційний процес (6.10) збігається до розв’язання системи $(x^*; y^*)$. Похибка k - го наближення визначається як:

$$\rho(x^k, x^*) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x^k, x^{k-1}), \tag{6.14}$$

де $\alpha = \max\{q_1; q_2\}$ в (6.11), (6.12) або $\alpha = q$ в (6.13).

Якщо в якості відстані обрати норму Евкліда (6.13), то оцінку (6.14) можна записати в такому вигляді:

$$\sqrt{(x^k - x^*)^2 + (y^k - y^*)^2} \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{(x^k - x^{k-1})^2 + (y^k - y^{k-1})^2}\,. \qquad (6.15)$$

Вибір ітераційних функцій $\varphi_1(x,y)$ та $\varphi_2(x,y)$ в системі (6.9), що забезпечує виконання достатніх умов збіжності ітераційного процесу (6.11) - (6.13), є трудомістким процесом. Цей вибір можна здійснити за допомогою наступного прийому. Вважаємо, що [6]:

$$\varphi_1(x,y) = x + \alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y);$$

$$\varphi_1(x,y) = y + \gamma f_1(x,y) + \delta f_2(x,y), \alpha\delta \ne \beta\gamma\,. \qquad (6.16)$$

Коефіцієнти α, β, γ та δ визначаємо як наближене розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 1+\alpha\dfrac{\partial f_1(x^0,y^0)}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial f_2(x^0,y^0)}{\partial x} = 0 \\ \alpha\dfrac{\partial f_1(x^0,y^0)}{\partial y} + \beta\dfrac{\partial f_2(x^0,y^0)}{\partial y} = 0 \\ \gamma\dfrac{\partial f_1(x^0,y^0)}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial f_2(x^0,y^0)}{\partial x} = 0 \\ 1+\gamma\dfrac{\partial f_1(x^0,y^0)}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial f_2(x^0,y^0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (6.17)$$

Якщо часткові похідні функцій $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ не сильно змінюються в околі точки (x^0, y^0), то при такому виборі ітераційних функцій умови (6.11) – (6.13) виконуються.

Приклад. Розв'язати систему нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^y - x^2 + 1 = 0 \\ x + tgy = 0 \end{cases}$ при таких початкових умовах: $x_0 = 1;\ y_0 = -0{,}5$ методом простих ітерацій.

Розв'язок. Представимо початкову систему рівнянь як:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x,y) \\ y = \varphi_2(x,y) \end{cases},$$

де
$$\varphi_1(x,y) = x + \alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y);$$

$$\varphi_2(x,y) = y + \gamma f_1(x,y) + \delta f_2(x,y), \alpha\delta \ne \beta\gamma\,.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = e^y; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Тоді, згідно з (6.17), для отримання коефіцієнтів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ розв’язується система рівнянь:

$$\begin{cases} 1+\alpha\cdot(-2x)+\beta\cdot 1=0 \\ 1+\gamma\cdot e^{y}+\delta\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y}=0 \\ \alpha\cdot e^{y}+\beta\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y}=0 \\ \gamma\cdot(-2x)+\delta\cdot 1=0 \end{cases}$$

В початковій точці $x_0=1,\ y_0=-0{,}5$ отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів

$$\begin{cases} 1-2\alpha+\beta=0 \\ 1+0{,}6065\gamma+1{,}2984\delta=0 \\ 0{,}6065\alpha+1{,}2984\beta=0 \\ -2\gamma+\delta=0 \end{cases}$$

Звідси $\alpha=0{,}4053$; $\beta=-0{,}1894$; $\gamma=-0{,}3121$; $\delta=-0{,}6243$; $\alpha\cdot\delta\neq\gamma\cdot\beta$.

З урахуванням цього маємо таку систему рівнянь для визначення чергового наближення до розв’язання початкової системи:

$$\begin{cases} x_i=x_{i-1}+0{,}4053(e^{y}-x^2+1)-0{,}1894(x+tgy) \\ y_i=y_{i-1}-0{,}3121(e^{y}-x^2+1)-0{,}6243(x+tgy) \end{cases}.$$

Результати розв’язання системи нелінійних рівнянь методом простих ітерацій на кожній ітерації при початковій умові $x_0=1$ та $y_0=-0{,}5$ наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1. **Результати розв’язання системи нелінійних рівнянь методом простих ітерації за ітераціями обчислень**

Номер ітерації	1	2	3	4	5	6
x_i	1,1599	1,2313	1,1641	1.206	1,182	1,1956
y_i	-0,9725	-0,7909	-0,9088	-0,8493	-0,8842	-0,8654

Продовження таблиці 6.1

Номер ітерації	7	8	…	16	17	18
x_i	1,188	1,923	…	1,19081	1,19079	1,1908
y_i	-0,8760	-0,8701	…	-0,87225	-0,87228	-0,87226

Відповідь. Наближене розв’язання системи нелінійних рівнянь: $x=1{,}1908,\ y=-0{,}87226$.

Перевірка. $\begin{cases} e^{-0,87226} - (1,1908)^2 + 1 = 1,14786 \cdot 10^{-6} \\ 1,1908 + tg(-0,87226) = 2,5242 \cdot 10^{-5} \end{cases}.$

Таким чином, похибка обчислення системи рівнянь складає: $\Delta_1 = 1,14786 \cdot 10^{-6}$, $\Delta_2 = 2,5242 \cdot 10^{-5}$.

6.2. Розв'язання систем нелінійних рівнянь методом Ньютона

Якщо в системі нелінійних рівнянь $F(X) = 0$ існують часткові похідні функції f_i по змінних x_j, то для її розв'язання можна застосовувати метод Ньютона [6, 19].

Позначимо через

$$J(X) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, ..., n),$$

матрицю Якобі системи (6.2). Виберемо нульове наближення X^0 в досить близькій околі розв'язання X^*. Виконаємо лінеаризацію вектор-функції $F(X)$ шляхом розкладання її в ряд Тейлора та обмежуємось лише членами нульової і першої степені. Тоді на k-му кроці $(k+1)$-те наближення буде розв'язанням рівняння

$$f(X^k) + J(X^k)(X^{k+1} - X^k) = 0, \quad (k = 0, 1, 2,...). \tag{6.18}$$

Зокрема, якщо існує матриця $J^{-1}(X^k)$, що є оберненою матриці Якобі, то ітераційний процес Ньютона (6.18) можна записати у такому вигляді:

$$X^{k+1} = X^k - J^{-1}(X^k)\ f(X^k), \quad (k = 0, 1, 2, ...). \tag{6.19}$$

Формула (6.19) узагальнює формулу Ньютона (4.6) для одного рівняння.

Якщо другі часткові похідні функції $F(X)$ безперервні поблизу X^* і $\det J(X) \neq 0$ в околі розв'язання системи, а початкове наближення X^0 близьке до її розв'язання, то метод Ньютона збігається, причому збіжність буде квадратичною.

Зважаючи на велику кількість обчислень при оберненні матриці Якобі на кожному кроці використовують модифікований метод Ньютона, у відповідності з яким матрицю, що є оберненою до матриці Якобі, визначають на першому кроці $J^{-1}(X^0)$. Тоді ітераційний процес розв’язання системи нелінійних рівнянь реалізується за наступною схемою:

$$X^{k+1} = X^k - J^{-1}(X^0) f(X^k),\ (k = 0, 1, 2, ...). \tag{6.20}$$

При цьому збіжність модифікованого методу Ньютона буде лінійною.

Розглянемо наближене розв’язання системи двох нелінійних рівнянь методом Ньютона [6]

$$\begin{cases} u(x, y) = 0 \\ \upsilon(x, y) = 0 \end{cases}, \tag{6.21}$$

де функції $u(x, y)$ і $\upsilon(x, y)$ – безперервно диференційовані в області D, що містить єдине рішення $x = x^*,\ y = y^*$. Виберемо в області D початкове наближення x_0 і y_0 й визначаємо послідовні наближення до розв’язання системи нелінійних рівнянь x^* і y^* згідно з методом Ньютона (6.19):

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \frac{\Delta_x^k}{\Delta^k} \\ y^{k+1} &= y^k - \frac{\Delta_y^k}{\Delta^k} \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, ...), \tag{6.22}$$

де Δ^k, Δ_x^k, Δ_y^k – визначники матиць Якобі на k-тій ітерації обчислень, що визначаються за формулами:

$$\Delta^k = \det(J(x^k, y^k)) = \begin{vmatrix} u'_x(x^k, y^k) & u'_y(x^k, y^k) \\ \upsilon'_x(x^k, y^k) & \upsilon'_y(x^k, y^k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x^k = \begin{vmatrix} u(x^k, y^k) & u'_y(x^k, y^k) \\ \upsilon(x^k, y^k) & \upsilon'_y(x^k, y^k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_y^k = \begin{vmatrix} u'_x(x^k, y^k) & u(x^k, y^k) \\ \upsilon'_x(x^k, y^k) & \upsilon(x^k, y^k) \end{vmatrix},$$

$$k = 0, 1, 2, ...$$

В якості критерію закінчення ітераційного процесу (6.22) використовують умову

$$\rho_k = \frac{1}{|\Delta^k|} \sqrt{(\Delta_x^k)^2 + (\Delta_y^k)^2} < \varepsilon, \tag{6.23}$$

де ρ_k – евклідова відстань між двома послідовними наближеннями; ε – задана точність розв’язання системи рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему нелінійних рівнянь $\begin{cases} \sin x + \sin y - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + y = 0 \end{cases}$ при таких початкових умовах: $x_0 = 2{,}5$; $y_0 = 3$ методом Ньютона.

Розв'язок. Представимо надану систему рівнянь як:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin x = \sin y - 1 \\ v(x, y) = x^2 - y^2 + y. \end{cases}$$

Визначимо часткові похідні функцій системи рівнянь $u(x, y)$ та $\upsilon(x, y)$ по кожній змінній та відповідні визначники матриць Якобі.

Тоді

$$u'_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x;$$

$$u'_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y;$$

$$v'_x(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} = 2x;$$

$$v'_y(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 1.$$

З урахуванням отриманих часткових похідних якобіани на k-тій ітерації матимуть такий вигляд:

$$\Delta^k = \begin{vmatrix} u'_x(x^k, y^k) & u'_y(x^k, y^k) \\ \upsilon'_x(x^k, y^k) & \upsilon'_x(x^k, y^k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x^{\mathrm{k}} & \cos y^k \\ 2x^k & -2y^k + 1 \end{vmatrix} = (-2y^k + 1)\cos x^k - 2x^k \cos y^k;$$

$$\Delta_x^k = \begin{vmatrix} u(x^k, y^k) & u'_y(x^k, y^k) \\ \upsilon(x^k, y^k) & \upsilon'_x(x^k, y^k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x^k + \sin y^k - 1 & \cos y^k \\ (x^k)^2 - (y^k)^2 + y^k & 2y^k + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2y^k + 1)(\sin x^k + \sin y^k - 1) - \cos((x^k)^2 - (y^k)^2 + y^k);$$

$$\Delta_y^k = \begin{vmatrix} u'_x(x^k, y^k) & u(x^k, y^k) \\ \upsilon'_x(x^k, y^k) & \upsilon(x^k, y^k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x^k & \sin x^k + \sin y^k - 1 \\ 2x^k & (x^k)^2 - (y^k)^2 + y^k \end{vmatrix} =$$

$$= \cos((x^k)^2 - (y^k)^2 + y^k) - 2x^k(\sin x^k + \sin y^k - 1).$$

Процес наближення розв'язання системи рівнянь від його початкового значення виконувалось згідно з (6.22).

Результати розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона при початковій умові $x_0 = 2{,}5$ та $y_0 = 3$ на кожній ітерації наведено в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2. **Результати розв’язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона за ітераціями обчислень**

Номер ітерації k	1	2	3	4
Δ^{k-1}	8,8557	7,754	7,694	7,6937
Δ_x^{k-1}	1,5495	0,0668	0,00026	0,000032
Δ_y^{k-1}	1,1017	0,0412	0,00023	-0,000003
x^k	2,327	2,3184	2,31837	2,31837
y^k	2,877	2,8717	2,87167	2,87167

Відповідь. Після чотирьох ітерацій отримано наближене розв’язання системи: $x^* = 2{,}31837,\ y^* = 2{,}87167$.

Перевірка.
$$\begin{aligned} f_1(x^*, y^*) &= \sin x^* + \sin y^* - 1 = -2{,}52\cdot 10^{-6} \\ f_2(x^*, y^*) &= (x^*)^2 - (y^*)^2 + y^* = 2{,}087\cdot 10^{-5} \end{aligned}.$$

Таким чином, абсолютна похибка розв’язання системи нелінійних рівнянь складає: $\Delta x = 2{,}52\cdot 10^{-6};\quad \Delta y = 2{,}087\cdot 10^{-5}$.

Контрольні запитання

1. У чому полягає необхідність розв’язання систем нелінійних рівнянь чисельними методами?
2. Які методи використовуються для розв’язання систем нелінійних рівнянь?
3. Яка сутність методу простих ітерацій?
4. Які умови збіжності методу простих ітерацій?
5. Як досягнути умови збіжності методу простих ітерацій для заданої системи нелінійних рівнянь?
6. У чому сутність методу Ньютона?
7. Що являє собою матриця Якобі?
8. Яка умова збіжності методу Ньютона?
9. У чому полягає модифікований метод Ньютона? Його переваги та недоліки.

Задачі для самоконтролю

1. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^y - e^x + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$ методом простих ітерацій при такій початковій умові $x_0 = 2,\ y_0 = 2.$ При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

2. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^x - e^y + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$ модифікованим методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = 0,\ y_0 = 2$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

3. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^y - x^2 + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$ методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = 0,\ y_0 = 2$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

4. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^x - e^x + 1 = 0 \\ x^3 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$ методом простих ітерацій при такій початковій умові $x_0 = -1,\ y_0 = 1$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

5. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^y + e^x - 1 = 0 \\ x^3 - y^3 + 1 = 0 \end{cases}$ модифікованим методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = -1,\ y_0 = -0{,}5$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

6. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^y - e^x + 1 = 0 \\ x^3 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$ методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = 0{,}5,\ y_0 = 1$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

7. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} yx^2 - 1 = 0 \\ x - e^y + 1 = 0 \end{cases}$ методом простих ітерацій при такій початковій умові $x_0 = 1{,}5\ \ y_0 = 0{,}5$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

8. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^x - e^y - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$ модифікованим методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = 1,\ y_0 = 0{,}5$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

9. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} e^x - e^y - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$ методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = 1,\ y_0 = -1$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

10. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} \sin x + \sin y - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ методом простих ітерацій при такій початковій умові $x_0 = 1,\ y_0 = 0$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

11. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} \sin x - \sin y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$ модифікованим методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = -1,\ y_0 = 0$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

12. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} \sin x + \sin y - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 + y = 0 \end{cases}$ методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = 0,\ y_0 = 1$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

13. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} xy^2 - 1 = 0 \\ y + e^x = 0 \end{cases}$ методом простих ітерацій при такій початковій умові $x_0 = -0{,}5;\ y_0 = -1{,}5$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

14. Визначити розв’язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} x^2 y - 1 = 0 \\ x - e^{-y} = 0 \end{cases}$ модифікованим методом Ньютона при такій початковій умові

$x_0 = 1{,}5,\ \ y_0 = 0{,}5$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

15. Визначити розв'язання системи нелінійних рівнянь $\begin{cases} xy^2 + 1 = 0 \\ y - e^{-y} = 0 \end{cases}$ методом Ньютона при такій початковій умові $x_0 = -0{,}5,\ \ y_0 = 1{,}5$. При виконанні обчислень виконати 6 ітерацій. Визначити похибку обчислень.

7. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

7.1. Постановка задачі наближення функцій

Задача наближення (апроксимації) полягає в заміні функціональної залежності, заданої на множині $X \subseteq R$ у вигляді таблиці, графіку, складної формули або в неявному виді, більш простою функцією, що є близькою до початкової.

Якщо X складається з дискретної множини точок $x_0, x_1, .., x_m$, то наближення називається *точковим*, а якщо це відрізок $[a; b]$, то наближення називається *інтегральним*.

Нехай функція $f(x)$ апроксимується на множині X функцією $\varphi(x)$, що є зручнішою для обчислень й ближчою в деякому розумінні до $f(x)$. Якість апроксимації, тобто близькість двох функцій, можна оцінювати по-різному залежно від фізичного змісту розв'язуваної задачі. Відповідно до цього в теорії наближень розглядаються різні функціональні простори з введеною в них метрикою, що дозволяє оцінити відстань між функціями $\rho(f; \varphi)$.

Якщо розглядати лінійний простір дійсних функцій, що задані на множині X, то система його лінійно незалежних елементів називається *системою лінійно незалежних* на X *функцій*.

Нехай $f(x)$ є елементом лінійного нормованого простору L. Виберемо в L систему $n+1$ лінійно незалежних функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ і створимо лінійну їх комбінацію

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x),$$

з постійними коефіцієнтами $c_i, (i = 0, 1, ..., n)$. Функція $\varphi(x)$ – це *узагальнений многочлен порядку* n. Зокрема, якщо $\varphi_i(x) = x^i, (i = 0, 1, ..., n)$ то

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n,$$

є алгебраїчним многочленом порядку n.

Якщо вибрати $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x, ...,$ $\varphi_{2n-1}(x) = \cos nx,$ $\varphi_{2n}(x) = \sin nx$, то функція

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

називається *тригонометричним многочленом* порядку n.

Будемо апроксимувати функцію $f(x)$ узагальненим многочленом n-го порядку $\varphi(x)$. Параметри $c_i, (i = 0, 1, ..., n)$ узагальненого апроксимуючого многочлена

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x),$$

визначаються з умови мінімуму відстані $\rho(f, \varphi) = \|f - \varphi\|$ в метриці просторі L.

Якщо функція $f(x)$, що задана у $n+1$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, на відрізку $[a; b]$, і досить проста для обчислень функція $\varphi_i(x)$, що наближає її, співпадає з $f(x)$ в цих точках, а в інших точках відрізку $[a; b]$ приблизно представляє $f(x)$, то таке наближення називається *інтерполяцією*.

Розглянемо методи інтерполяції алгебраїчними многочленами і сплайнами, а також точкову і інтегральну середню квадратичну апроксимацію функцій алгебраїчними, ортогональними, у тому числі тригонометричними многочленами за методом найменших квадратів. Відповідні обчислення легко реалізуються при комп'ютерному моделюванні процесів і систем.

7.2. Поліноміальна інтерполяція

Нехай на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями в $(n+1)$ точці, а саме:

$$\begin{aligned}
a = x_0 &\to y_0 = f(x_0); \\
x_1 &\to y_1 = f(x_1); \\
x_2 &\to y_2 = f(x_2); \\
&\dots \\
b = x_n &\to y_n = f(x_n).
\end{aligned}$$

Треба побудувати функцію $\varphi(x)$, яка називається інтерполяційною і яка співпадає в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, що називаються вузлами інтерполяції, зі значенням функції $f(x)$.

Таблиця значень функції $f(x)$ може бути інтерпольована нескінченною множиною різних функцій, тому треба мати деякий критерій вибору. Багато інтерполюючих функцій будуються як лінійні комбінації деяких елементарних функцій. Лінійні комбінації одночленів $\{x^k\}_0^n$ призводять до алгебраїчних поліномів, лінійні комбінації тригонометричних функцій $\{\cos kx, \sin kx\}_0^n$ призводять до тригонометричних поліномів тощо.

Розглянемо інтерполяцію алгебраїчними поліномами. В численних додатках апарату інтерполяції в основному доводиться вирішувати дві задачі:

– знайти аналітичний вираз для функції $y = f(x)$, що задана таблицею, графіком або у вигляді складної для використання формули;

– визначити значення функції в точках, що не співпадають з вузлами інтерполяції, за допомогою порівняно нескладного алгоритму.

Інтерполяційні поліноми знаходять також широке застосування в чисельному диференціюванні і інтегруванні та при розв'язанні диференціальних рівнянь.

7.2.1. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Нехай функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$ своїми значеннями в $(n+1)$ точці. Виберемо в якості інтерполяційної функції $\varphi(x)$ поліном $P_n(x)$ степені n, значення якого співпадають зі значеннями функції $f(x)$ у вузлах інтерполяції, тобто

$$\begin{aligned} &P_n(x_0) = y_0 = f(x_0); \\ &P_n(x_1) = y_1 = f(x_1); \\ &P_n(x_2) = y_2 = f(x_2); \\ &\qquad\ldots \\ &P_n(x_n) = y_n = f(x_n). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Геометрично це задача побудови параболи n-го порядку $y = P_n(x)$, що перетинається з графіком функції $y = f(x)$ в $(n+1)$-ій наперед заданій точці (рис. 7.1).

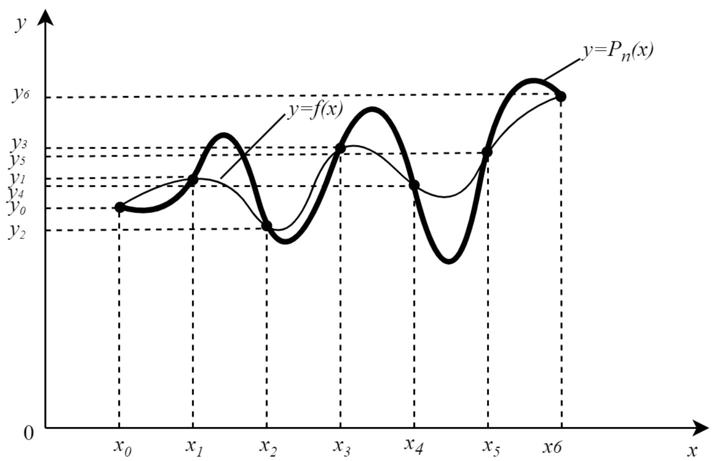


Рис. 7.1. Геометрична інтерпретація інтерполяційної формули Лагранжа

Покажемо, що така задача побудови многочлена $y = P_n(x)$ має єдине рішення.

Нехай

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n .$$

Коефіцієнти $a_i, (i = 0, 1, 2, ..., n)$ можна визначити з системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n = y_1, \\ .... \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n = y_n. \end{cases} \tag{7.2}$$

Визначник цієї системи називається визначником Вандермонда. Якщо вузли інтерполяції не співпадають, то визначник матриці коефіцієнтів системи не дорівнює нулю $(\Delta \neq 0)$, тобто система (7.2) має єдине розв'язання [6].

Тоді для побудови полінома $P_n(x)$ використовують коефіцієнти Лагранжа $L_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., n$ степені n, що мають таку властивість:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, \text{якщо} \quad i = j \\ 0, \text{якщо} \quad i \neq j \end{cases}. \tag{7.3}$$

Коефіцієнт $L_i(x)$ є многочленом степені n, що перетворюється на нуль в точках $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ і дорівнює одиниці в точці x_i, вважаючи що

$$L_i(x) = A(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) .$$

При $x = x_i$ маємо рівняння:

$$1 = A(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n) .$$

Визначивши значення A, отримаємо формулу коефіцієнта Лагранжа [2]:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}. \tag{7.4}$$

Поліном $y_i L_i(x)$ набуває значення y_i в точці x_i і дорівнює нулю в усіх точках $x_j (j \neq i)$.

Позначимо добуток різниць в вузлах інтерполяції як:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) .$$

Тоді похідна цього добутку буде мати такий вигляд:

$$\omega_n'(x_{\mathrm{i}}) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n).$$

Тому вираз (7.4) можна записати таким чином:

$$L_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}.$$

Лагранжеві коефіцієнти $L_i(x)$ називають ще множниками впливу відповідних вузлів інтерполяції.

Інтерполяційний поліном Лагранжа степені n представляється формулою

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i = L_0(x) y_0 + L_1(x_1) y_1 + ... + L_n(x) y_n = \\
&= \frac{(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{i-1})(x - x_i)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_1)...(x_0 - x_{i-1})(x_0 - x_i\ )...(x_0 - x_n)} y_0 + \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_{i-1})(x - x_i)...(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_3)...(x_2 - x_{i-1})(x_1 - x_i\ )...(x_1 - x_n)} y_1 + \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_i)...(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)...(x_2 - x_{i-1})(x_2 - x_i)...(x_2 - x_n)} y_2 + ... + \\
&+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_i)...(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{i-1})(x_n - x_i)...(x_n - x_{n-1})} y_n.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Або в загальному вигляді многочлен Лагранжа можна записати як:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x)}, \tag{7.6}$$

або
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} f(x_i).$$

Кількість арифметичних операцій для обчислення значення полінома в точці x пропорційне n^2.

Треба відзначити, що інтерполяційний поліном Лагранжа зручно застосовувати в тих випадках, коли виконується багаторазова інтерполяція за одними і тими же вузлами (нехай навіть для різних функцій). Для цих вузлів можна заздалегідь визначити коефіцієнти Лагранжа $L_i(x)$, оскільки вони не залежать від функції $y = f(x)$.

Але, якщо для покращення наближення функції поліномом Лагранжа треба збільшити кількість вузлів інтерполяції (навіть на одиницю), коефіцієнти Лагранжа перераховуються заново. В цьому випадку доцільно використовувати інтерполяційні поліноми Ньютона.

Розглянемо часткові випадки многочлена Лагранжа.

Нехай функція $f(x)$ представлена в двох вузлах x_0 і x_1 своїми значеннями $y_0 = f(x_0)$ та $y_1 = f(x_1)$. Тоді інтерполяційний поліном Лагранжа матиме такий вигляд:

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_1(x) y_i = L_1(x) y_0 + L_1(x) y_1 = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_0.$$

Якщо функція $f(x)$ представлена в трьох точках x_0, x_1 і x_2 своїми значеннями $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ та $y_2 = f(x_2)$. Тоді

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_1(x) y_i = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) =$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2.$$

Якщо не виникає потреба отримати загальний вираз поліному Лагранжа, а тільки обчислювати його значення для конкретних x, то зручно користуватися інтерполяційною схемою Ейткена [6, 8].

Згідно з цією схемою обчислюємо вираз

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ \mathrm{y}_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0},$$

що є лінійним інтерполяційним поліномом для вузлів x_0 і x_1. Для іншої пари сусідніх вузлів x_1 і x_2 визначимо відповідно

$$L_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1},$$

тощо для будь-якої пари вузлів інтерполяції.

Вираз

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0},$$

є квадратичним многочленом, що інтерполює значення y_0, y_1, y_2, відповідно в вузлах x_0, x_1, x_2. Додаючи послідовно нові вузли інтерполяції, в загальному випадку отримаємо вираз

$$L_{0123\ldots n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012\ldots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0},$$

який буде інтерполяційним многочленом Лагранжа, що набуває в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ відповідно значення $y_0, y_1, ..., y_n$. Обчислення значень цього поліному в точці x за схемою Ейткена зручно проводити, записуючи проміжні результати в таблиці, що представлена як таблиця 7.1.

Таблиця 7.1. **Результати обчислення значення многочлена Лагранжа в точці x за схемою Ейткена**

x_i	y_i	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$	$L_{i-3,\,i-2,\,,i-1,\,i}$	$L_{i-4,\,i-3,\,i-2,i-1,\,i}$
x_0	y_0				
x_1	y_1	L_{01}			
x_2	y_2	L_{12}	L_{012}		
x_3	y_3	L_{23}	L_{123}	L_{0123}	
x_4	y_4	L_{34}	L_{234}	L_{1234}	L_{01234}

Описаний рекурентний процес інтерполяції не вимагає апріорного вказання степені інтерполяційного полінома. Нові вузли інтерполяції підключаються в процеси обчислень, які зазвичай виконуються до тих пір, поки послідовні значення $L_{0123\ldots n}(x)$ і $L_{0123\ldots n,n+1}(x)$ не співпадуть в межах заданої точності.

Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені один від одного, тобто $x_{i+1} - x_i = h = const, (i = 0, 1, 2, ..., n-1)$, то, ввівши змінну $t = (x - x_0)/h$, коефіцієнти Лагранжа можна записати у вигляді

$$L_i(t) = (-1)^{n-1} C_n^i \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{(t-i)n!}, \tag{7.7}$$

тобто отримати наступний вираз для інтерполяційного полінома Лагранжа з рівновіддаленими вузлами

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t) = \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-1} \frac{c_n^i}{t-i} y_i \,, \tag{7.8}$$

де коефіцієнти $L_i(t)$ не залежать від вибору кроку h і від функції $f(x)$. Для них створені спеціальні таблиці, що спрощують обчислення полінома Лагранжа.

Визначимо оцінку похибки інтерполяційного полінома Лагранжа [19]. Нехай функція $f(x)$ має $(n+1)$ безперервну похідну для усіх $x \in [x_0; x_n]$. Тоді залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x), \tag{7.9}$$

де ξ – внутрішня точка мінімального відрізку, що містить вузли інтерполяції $x_0, x_1, ..., x_n$ і точку x.

Похибка інтерполяції залежить від вибору вузлів x_i, точки x і властивостей функції $f(x)$. Відомо, що величина $\sup|\omega_n(x)|$ буде найменшою, якщо в якості вузлів інтерполяції $x \in [a; b]$ вибрати корені поліномів Чебишева, $T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\arccos x]$ для $|x| \le 1$, що визначаються за формулами

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi \quad (i = 0,1,...,n-1).$$

Але такий вибір вузлів рідко застосовується в практичних задачах, оскільки при цьому значно ускладнюється інтерполяція, а перевага в точності – невелика.

На визначення інтерполяційного многочлена в точці x найбільший вплив мають найближчі до точки x вузли інтерполяції. Такі вузли позначимо через x_0 і x_1. Потім поступово додаємо сусідні вузли справа і ліворуч, щоб вони симетрично розташовувалися відносно точки x.

Похибка інтерполяції буде меншою, якщо точка x розташована ближче до середини відрізку $[x_0; x_n]$ і може бути значною, якщо проводити екстраполяцію, тобто вибирати значення x поза відрізком $[x_0; x_n]$.

Приклад. Виконати наближення функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в 5 точках в вигляді таблиці 7.2, за допомогою інтерполяційного поліному Лагранжа.

Таблиця 7.2. **Значення функції $f(x)$ в п'яти точках**

x	1,8	2,85	3,9	4,95	6
y	0,4	-1,1	0,7	-0,5	0,3

Визначити загальний вигляд поліному та його значення в точці $x = 2{,}33$.

Розв'язок. Інтерполяційна формула Лагранжа для функції $f(x)$, що представлена в 5 точках x_0, x_1, x_2, x_3 і x_4 своїми значеннями $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ та $y_4 = f(x_4)$ має такий вигляд:

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{4} L_i(x) y_i = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3 + L_4(x)y_4 =$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} +$$

$$+ y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$

Після підставлення значення вузлів інтерполяції та функції $f(x)$ в цих вузлах отримаємо загальний вигляд інтерполяційної формули Лагранжа

$$P_4(x) = 0{,}387356 \cdot x^4 - 6{,}136335 \cdot x^3 + 34{,}65741 \cdot x^2 - 81{,}8482 \cdot x + 67{,}157578.$$

Перевірка. Для перевірки отриманої інтерполяційної формули Лагранжа визначимо значення полінома в вузлі $x_3 = 4{,}95$.

$$P_4(4{,}95) = 0{,}387356 \cdot 4{,}95^4 - 6{,}136335 \cdot 4{,}95^3 + 34{,}65741 \cdot 4{,}95^2 -$$
$$- 81{,}8482 \cdot 4{,}95 + 67{,}157578 = -0{,}4896 \approx -0{,}5.$$

Таким чином, значення функції $f(x)$ і інтерполяційного полінома $P_4(x)$ в вузлі інтерполяції майже співпадають. Похибка обчислення $\Delta f = \left| -0{,}5 + 04896 \right| = 0{,}014.$

Відповідь. Інтерполяційна формула, що отримана методом Лагранжа і яка наближує задану таблицею функцію $f(x)$, має такий вигляд:

$$P_4(x) = 0{,}387356 \cdot x^4 - 6{,}136335 \cdot x^3 + 34{,}65741 \cdot x^2 - 81{,}8482 \cdot x + 67{,}157578.$$

Наближене значення функції $f(x)$ в точці $x = 2{,}33$ дорівнює $P_4(x)$, тобто $f(2{,}33) \approx P_4(2{,}33) = -1{,}60018$.

7.2.2. Інтерполяційні поліноми Ньютона

Приведемо формування інтерполяційного полінома $P_n(x)$, що дозволяє виконувати уточнення результатів інтерполяції послідовним збільшенням нових вузлів. При цьому використовуються розділені і кінцеві різниці функцій, що є зручним апаратом при роботі з таблично заданими функціями.

Формули Ньютона при рівновіддалених вузлах інтерполяції. Нехай функція $f(x)$ задана своїми значеннями в $n+1$ точці $x_0, x_1, ..., x_n$, що є вузлами інтерполяції $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$,

Вважаємо, що точки $x_0, x_1, ..., x_n$ є рівновіддаленими з кроком h $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$. Тоді $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nx_0.$

При побудові інтерполяційних формул Ньютона при наявності рівновіддалених точок використовуються кінцеві різниці.

Кінцевими різницями першого порядку є:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1;$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2;$$
$$\ldots$$
$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Кінцеві різниці другого порядку визначаються як:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0;$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1;$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2;$$
$$\ldots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$$

Кінцеві різниці k-го порядку визначаються через різниці $(k-1)$-го порядку за формулами:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0;$$
$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1;$$
$$\Delta^k y_2 = \Delta^{k-1} y_3 - \Delta^{k-1} y_2;$$
$$\ldots$$
$$\Delta^k y_{n-k} = \Delta^{k-1} y_{n-\mathrm{k}+1} - \Delta^{k-1} y_{n-k}.$$

Кінцеві різниці прийнято записувати в вигляді таблиці 7.3.

Наведені кінцеві різниці використовуються в інтерполяційних формулах Ньютона та при чисельному диференціюванні функцій.

Таблиця 7.3. **Загальний вигляд значень кінцевих різниць для функції** $y = f(x)$

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	…	$\Delta^n y_i$
y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	…	$\Delta^n y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	…	
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	…	
y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	…	
y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_4$	…	
…	…	…	…	...	
y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$			
y_{n-1}	Δy_{n-1}				
y_n					

Перша інтерполяційна формула Ньютона. Нехай функція $f(x)$ задана своїми значеннями в $n+1$ точці $x_0,\ x_1, ..., x_n$, що є рівновіддаленими вузлами інтерполяції

$$x_0, x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h,\ ...,\ x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh;$$

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n).$$

Розглянемо многочлен степені n, що записаний в такому вигляді:

$$P_n(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + q_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + q_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}).$$

Прирівнюючи значення многочлена $P_n(x)$ та наданої функції $f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, отримуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона при рівновіддалених вузлах інтерполяції, яка має такий вигляд:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ &+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{k-1}) + ... + \\ &+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Формула Ньютона (7.10) є многочленом степені n. На відміну від многочлена Лагранжа степені його членів постійно зростають, розпочинаючи від нульової до n-ої. Тому додавання нового вузла інтерполяції додає тільки нову складову в (7.10), але не змінює всіх попередніх. Перевагою многочлена Ньютона перед многочленом Лагранжа полягає ще в тому, що в формулі (7.10) знаменники коефіцієнтів містять $k!$. Ці числа зі збільшенням k швидко зростають, й відповідно, коефіцієнти зменшуються і при обчисленні, розпочинаючи з деякого номера, іншими членами (більш високих степенів) можна знехтувати. Тоді як у многочлена Лагранжа, де в ньому всі члени рівноправні, однакової степені n при будь-яких обчисленнях мають бути враховані.

При використанні в формулі (7.10) виразу

$$t = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{та}$$

$$x - x_0 = th,\ x - x_1 = x - x_0 - h = th - h = (t-1)h,\ x - x_2 = \\ = (t-2)h, \ldots, x - x_{n-2} = (t-(n-1))h,$$

формула Ньютона отримає такий вигляд:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^k y_0}{k!} t(t-1)\ldots(t-(k-1)) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\ldots(t-(n-1)). \tag{7.11}$$

Вважаючи $n = 1$ в (7.11), отримаємо лінійну інтерполяцію

$$P_1(x) = P_1(x_0 + th) = y_0 + \Delta y_0 t,$$

при $n = 2$ – квадратичну

$$P_2(x) = P_2(x_0 + th) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta y_0}{2!} t(t-1).$$

З урахуванням того, що вузли інтерполяції рівновіддалені, похибка першої інтерполяційної формули Ньютона визначається як:

$$|R_n(x)| = |R_n(x_0 + th)| \le h^{n+1} \frac{|t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

де $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|,\ a \le x \le b.$

Якщо значення похідної $f^{(n+1)}(x)$ невідоме, а є додатковий вузол інтерполяції x_{n+1}, то для оцінки $R_n(x)$ користуються формулою:

$$R_n(x) \approx |R_n(x_0 + th)| \le \frac{|t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)|}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0,\ t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Формули (7.10) і (7.11) називають інтерполяційними формулами для інтерполяції вперед, тому що вони отриманні з використанням значень функції і її різниць, розпочинаючи з початкового вузла інтерполяції x_0. Її зазвичай використовують для інтерполяції в точках x, що близькі до початку інтервалу інтерполяції (до вузла інтерполяції x_0). Тут похибка інтерполяції буде меншою.

Друга формула інтерполяції Ньютона. Цю формулу доцільно використовують для інтерполяції функції $f(x)$ в точках, що є близькими до вузла інтерполяції x_n.

Для її отримання представимо поліном $P_n(x)$ в такому вигляді:

$$P_n(x) = q_0 + q_1(x - x_n) + q_2(x - x_n)(x - x_{n\text{-}1}) + \ldots + q_n(x - x_n)(x - x_{n\text{-}1})\ldots(x - x_1).$$

Прирівнюючи значення многочлена $P_n(x)$ і початкової функції $f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, отримуємо другу інтерполяційну формулу Ньютона при рівновіддалених вузлах інтерполяції, як має такий вигляд:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n\text{-}1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n\text{-}1}) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}(x - x_n)(x - x_{n\text{-}1})\ldots(x - x_{n\text{-}(k\text{-}1)}) + \ldots + \qquad (7.12)$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n\text{-}1})\ldots(x - x_1).$$

На рисунку 7.2 наведено геометричну ілюстрацію інтерполяційних многочленів Ньютона.

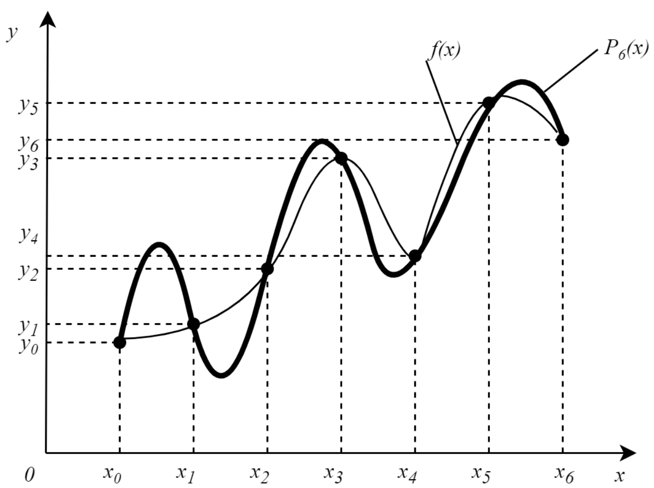


Рис. 7.2. Графічне представлення інтерполяційних многочленів Ньютона

Якщо ввести нову змінну $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, то отримаємо інший вигляд другої інтерполяційної формули Ньютона, яка має назву формули Ньютона інтерполяції назад:

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = \mathrm{y_n} + \Delta \mathrm{y}_{n-1} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!} t(t+1)\ldots(t+(k-1)) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1)\ldots(t+(n-1)). \tag{7.13}$$

Похибку інтерполяції за другою інтерполяційної формули Ньютона визначають як:

$$|R_n(x)| = |R_n(x_n + th)| \le h^{n+1} \frac{|t(t+1)(t+2)\ldots(t+n)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

де $M_{n+1} = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|,\ a \le x \le b$.

Використовуючи кінцеві різниці при додатковому вузлі інтерполяції похибку інтерполяції функцій за допомогою другої формули Ньютона можна визначити як:

$$R_n(x) \approx |R_n(x_n + th)| \le \frac{|t(t+1)(t+2)\ldots(t+n)|}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0 .$$

Приклад. Виконати наближення функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в п'яти рівновіддалених точках на інтервалі $[1{,}8; 6{,}0]$, використовуючи першу інтерполяційну формулу Ньютона:

$$y_0 = 0{,}4;\ y_1 = -1{,}1;\ y_2 = 0{,}7;\ y_3 = -0{,}5;\ y_4 = 0{,}3.$$

Визначити загальний вигляд поліному та його значення в точці $x = 2{,}33$.

Розв'язок. Визначимо крок h зміни аргументу x

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{6 - 1{,}8}{4} = 1{,}05 .$$

Значення кінцевих різниць представимо в вигляді таблиці 7.4.

Таблиця 7.4. **Значення кінцевих різниць для функції** $y = f(x)$

Номер точки	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1,8	0,4	-1,5	3,3	-6,3	11,3
1	2,85	-1,1	1,8	-3	5	
2	3,9	0,7	-1,2	2		
3	4,95	-0,5	0,8			
4	6	0,3				

З врахуванням значень кінцевих різниць на основі залежності (7.10) отримуємо *першу інтерполяційну формулу Ньютона*:

$$P_4(x) = 0{,}4 - \frac{1{,}5}{1{,}05}(x-1{,}8) + \frac{3{,}3}{2\cdot 1{,}05^2}(x-1{,}8)(x-2{,}85) -$$

$$-\frac{6{,}3}{6\cdot 1{,}05^3}(x-1{,}8)(x-2{,}85)(x-3{,}9) -$$

$$-\frac{11{,}3}{241{,}05^4}(x-1{,}8)(x-2{,}85)(x-3{,}9)(x-4{,}95 =$$

$$= 0{,}387356x^4 - 6{,}136335x^3 + 34{,}65741x^2 - 81{,}8482x + 67{,}157578.$$

Відповідь. Інформаційна формула, що наближає задана таблицею функцію $f(x)$, має такий вигляд:

$$P_4(x) = 0{,}387356x^4 - 6{,}136335x^3 + 34{,}65741x^2 - 81{,}8482x + 67{,}157578.$$

Виконаємо перевірку отриманої формули у вузлі інтерполяції $x_1 = 2{,}85$.

$$P(2{,}85) = 0{,}387356\cdot 2{,}85^4 - 6{,}136335\cdot 2{,}85^3 + 34{,}65741\cdot 2{,}85^2 - 81{,}8482\cdot 2{,}85 +$$
$$+ 67{,}157578 = -1{,}09995 \approx f(\mathrm{y}_1) = -1{,}1.$$

Визначмо значення функції $f(x)$ в точці $x = 2{,}33$ за допомогою отриманої інтерполяційної формули Ньютона.

$$f(2{,}33) \approx P_4(2{,}33) = -1{,}60116.$$

Приклад. Виконати наближення функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в п'яти рівновіддалених точках на інтервалі $[1{,}0; 5{,}6]$, використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона:

$$y_0 = 4{,}6;\ \ y_1 = 10{,}2;\ y_2 = 3{,}5;\ \ y_3 = 4{,}7;\ y_4 = 2.1.$$

Визначити загальний вигляд поліному та його значення в точці $x = 4{,}82$.

Розв'язок. Внаслідок того, що точка x знаходиться в кінці інтервалу інтерполювання, для визначення функції $f(x)$ в цій точці треба використовувати другу інтерполяційну формулу Ньютона.

Визначимо крок зміни аргументу x в заданому інтервалі

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5{,}6-1}{4} = 1{,}15.$$

В інтерполяційній формулі Ньютона використовуємо кінцеві різниці.

Значення кінцевих різниць представимо в вигляді таблиці 7.5.

Таблиця 7.5 **Значення кінцевих різниць для функції** $f(x)$

Номер точки	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1	4,6	5,6	-7,3	5,2	1,9
1	2,15	10,2	-1.7	-2,1	3,3	
2	3,3	8,5	-3,8	1,2		
3	4,45	4,7	-2,6			
4	5,6	2,1				

З врахуванням значень кінцевих різниць на основі залежності (7.12) отримуємо *другу інтерполяційну формулу Ньютона*, яка для початкових даної задачі має такий вигляд:

$$P_4(x) = y_4 + \frac{\Delta y_3}{h}(x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_2}{2h^2}(x - x_4)(x - x_3) + \frac{\Delta^3 y}{6h^3}(x - x_4)(x - x_3)(x - x_2) +$$

$$+\frac{\Delta^4 y_0}{24h^4}(x - x_4)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

Тоді

$$P_4(x) = 2{,}1 - \frac{2{,}6}{1{,}15}(x - 5{,}6) + \frac{1{,}2}{2\cdot 1{,}15^2}(x - 5{,}6)(x - 4{,}45) + \frac{53{,}3}{6\cdot 1{,}15^3}(x - 5{,}6)(x - 4{,}45)(x - 3{,}3) -$$

$$-\frac{1{,}9}{24\cdot 1{,}15^4}(x - 5{,}6)(x - 4{,}45)(x - 3{,}3)(x - 2{,}15) = -0{,}0445x^4 + 1{,}06322x^3 - 8{,}3x^2 +$$

$$+23{,}56007x - 11{,}67557.$$

Відповідь. Інформаційна формула, що наближає задана таблицею функцію $f(x)$, має такий вигляд:

$$P_4(x) = -0{,}0445x^4 + 1{,}06322x^3 - 8{,}3x^2 + 23{,}56007x - 11{,}67557.$$

Виконаємо перевірку отриманої формули у вузлі інтерполяції $x_1 = 4{,}82$.

Підставивши значення $x = 4{,}82$ в отриманий поліном

$$P_4(4{,}82) = -0{,}0445\cdot(4{,}82)^4 + 1{,}06322\cdot(4{,}482)^3 - 8{,}3\cdot(4{,}82)^2 +$$
$$+ 23{,}56007\cdot(4{,}82) - 11{,}67557 = 4{,}09653.$$

Тоді $f(4{,}82) \approx P_4(4{,}82) = 4{,}09653$.

Виконаємо перевірку отриманої формули у вузлі інтерполяції $x_0 = 1$.

$$P(1) = -0{,}0445\cdot 1^4 + 1{,}06322\cdot 1^3 - 8{,}3\cdot 1^2 + 23{,}56007\cdot x - 11{,}67557 = 4{,}600322.$$

$$P(1) = 4{,}600322 \approx f(1) = 4{,}6.$$

Формули Ньютона при нерівновіддалених вузлах інтерполювання. Нехай функція $f(x)$ задана в вузлах інтерполяції $x_0, x_1, ..., x_n$ своїми значеннями $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$. Будемо вважати, що серед точок $x_\text{i}, i = 0, 1, 2, ..., n$ немає таких, що співпадають.

Тоді функцію $f(x)$ можна представити різницевим аналогом формули Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + (x + x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)}{2!} f''(x_0) + ...,$$

використовуючи розділені різниці.

Розділеними різницями першого порядку називаються величини, що визначають середню швидкість зміни функції та обчислюються за формулами [6, 44]:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, ...,$$

$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

В загальному вигляді $f(x_i, x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad i, j = 0,1,2,...,n, \quad i \neq j.$

За цими розділеними різницями першого порядку, що створені за сусідніми вузлами, можна побудувати розділені різниці другого порядку

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, ...,$$

$$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}.$$

Аналогічно визначаються розділені різниці більш високого порядку.

Тоді розділена різниця $(k+1)$–го порядку обчислюється за різницями $f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}), f(x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k+1})$ як:

$$f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k+1}) - f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}.$$

Результати обчислень розділених різниць зручно представляти в вигляді таблиці. Так в таблиці 7.6 приведено розділені різниці функції, що задана своїми значеннями в п'яти нерівновіддалених вузлах інтерполяції, які розташовані за зростанням їх значень.

Таблиця 7.6. **Загальний вигляд значень розділених різниць для функції** $y = f(x)$

x_i	$y=f(x_i)$	$f(x_i, x_j)$	$f(x_i, x_j, x_k)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m)$
x_0	$y=f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_1	$y=f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_2	$y=f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		
x_3	$y=f(x_3)$	$f(x_3, x_4)$			
x_4	$y=f(x_4)$				

Відзначимо наступні основні властивості розділених різниць [6].

1. Якщо функція $f(x)$ n разів безперервно диференційована, то виконується співвідношення

$$f(x_0;x_1;...;x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi), \text{ де } x_0 < \xi < x_n.$$

2. Розділені різниці k-го порядку є симетричними функціями своїх аргументів і представляються через функції $f(x)$ в вузлах:

$$f(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{l \neq i \\ l=j}}^{j+k} (x_i - x_l)}. \qquad (7.14)$$

Цю формулу можна доказати методом індукції. Для цього використовується частковий випадок формули (7.14):

$$f(x_0, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{n} (x_i - x_l)} = \qquad (7.15)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Першою інтерполяційною формулою Ньютона при нерівновіддалених вузлах є многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots x_n), \qquad (7.16)$$

де $f(x_0,x_1), f(x_0,x_1,x_2)\ldots f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ – розділені різниці першого, другого, третього і так далі n-го порядку.

Наведену формулу називають ще інтерполяційною формулою Ньютона інтерполювання вперед.

Покажемо, що многочлен $P_n(x)$ співпадає з многочленом Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq k}(x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq k}(x_k - x_j)} f(x_k).$$

Розглянемо разом з $P_n(x)$ многочлени $P_0(x) = f(x_0)$, $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ і представимо $P_n(x)$ в вигляді

$$P_n(x) = P_0(x) + \sum_{j=1}^{n} (P_j(x) - P_{j-1}(x)). \qquad (7.17)$$

Із умови інтерполювання отримаємо, що $P_{j-1}(x) = P_j(x_k) = f(x_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, j-1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді різниця $P_j(x) - P_{j-1}(x)$ представляє собою алгебраїчний многочлен степені j, який перетворюється в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$, тобто

$$P_j(x) - P_{j-1}(x) = A_j (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1}), \qquad (7.18)$$

де A_j деякий коефіцієнт, що визначається із умови

$$P_j(x_j) - P_{j-1}(x_j) = A_j (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1}).$$

Звідси, враховуючи умову, що $P_j(x_j) = f(x_j)$, отримуємо

$$A_j = \frac{f(x_j) - P_{j-1}(x_j)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})}. \qquad (7.19)$$

Якщо підставимо в формулі (7.19) значення складової $P_{j-1}(x_j)$ як

$$P_{j-1}(x_j) = \sum_{k=0}^{j-1} f(x_k) \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{k-1})(x_j - x_{k+1})\ldots(x_j - x_{j-1})}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_{j-1})},$$

отримаємо

$$A_j = \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)...(x_j - x_{j-1})} -$$

$$-\sum_{k=0}^{j-1} \frac{f(x_k)}{(x_j - x_k)} \cdot \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_{j-1})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \cdot \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_{j-1})}.$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (7.15), видно, що A_j співпадає з розділеною різницею j-го порядку:

$$A_j = f(x_0, x_1, \ldots, x_j).$$

Звідси, та враховуючи вирази (7.17) і (7.18), отримаємо інтерполяційну формулу Ньютона

$$\begin{gathered} P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + ... \\ ... + (x - x_0)\,(x - x_1)...(x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, ... x_n). \end{gathered} \tag{7.20}$$

При отриманні даної формули не передбачалось, що вузли $x_0, x_1, ..., x_n$. розташовані в якомусь визначеному порядку. Тому роль точки x_0 в формулі може зіграти будь-яка із точок $x_0, x_1, ..., x_n$. Відповідну множину інтерполяційних формул Ньютона модна отримати із (7.20) шляхом перенумерації вузлів. Наприклад, той самий многочлен $P_n(x)$ можна представити в вигляді:

$$\begin{gathered} P_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)\, f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)\,(x - x_{n-1})\, f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + ... \\ ... + (x - x_n)\,(x - x_{n-1})..(x - x_1)\, f(x_n, x_{n-1}, ... x_0). \end{gathered} \tag{7.21}$$

Якщо $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, то формулу (7.20) називають **першою інтерполяційною формулою Ньютона** або **формулою інтерполювання вперед**, а формулу (7.21) – **другою інтерполяційною формулою Ньютона** або **формулою інтерполювання назад**.

Наведені інтерполяційні формули Ньютона відрізняються від формул Лагранжа тільки формою запису. Похибки їх використання цих формул представляються в вигляді:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega(x),$$

$$\omega(x) = (x - x_0)...(x - x_n).$$

Дана формула встановлює зв’язок розділеної різниці порядку $n+1$ і $(n+1)$-ої похідної функції $f(x)$.

В іншому вигляді похибку інтерполяційних формул можна представити як

$$f(x) - P_n(x) = \omega(x) f(x, x_0, x_1, ..., x_n),$$

$$f(x, x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)...(x_0-x_n)} +$$

$$+ ... + \frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)...(x_n-x_{n-1})},$$

що мають порядок $n+1$.

Звідси

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} +$$

$$+ ... + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})} +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) f(x, x_0, x_1 ..., x_n) =$$

$$= P_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) f(x, x_1, x_2 ... x_n).$$

Приклад. Виконати наближення функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в п’яти точках на інтервалі $[a; b]$

x	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
y	1,81	1,64	1,55	1,79	2,06

використовуючи першу інтерполяційну формулу Ньютона.

Визначити загальний вигляд поліному Ньютона. Обчислити наближене значення функції $f(x)$ в точці $x = 0{,}25$ за допомогою інтерполяційного поліному.

Розв’язок. Для отримання інтерполяційних формул необхідно визначити розділені різниці згідно наведених вище формул. Розділені різниці зручно представити в вигляді таблиці 7.7.

Таблиця 7.7. **Розділені різниці для функції $f(x)$**

x_i	$y=f(x_i)$	$f(x_i, x_j)$	$f(x_i, x_j, x_k)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l, x_n)$
0,2	1,81	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
0,3	1,64	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
0,5	1,55	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		
0,7	1,79	$f(x_3, x_4)$			
0,9	2,06				

Тоді з врахуванням наданих початкових даних отримаємо такі значення розділених різниць.

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1{,}64-1{,}81}{0{,}3-0{,}2}=1{,}7;$$

$$f(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1{,}55-1{,}64}{0{,}5-0{,}3}=-0{,}45;$$

$$f(x_2;x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{1{,}79-1{,}55}{0{,}7-0{,}5}=1{,}2;$$

$$f(x_3;x_4)=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=\frac{2{,}06-1{,}79}{0{,}9-0{,}7}=1{,}35;$$

$$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}=\frac{-0{,}45-(-1{,}7)}{0{,}5-0{,}2}=4{,}167;$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{1{,}2-(-0{,}45)}{0{,}7-0{,}3}=4{,}125;$$

$$f(x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_3,x_4)-f(x_2,x_3)}{x_4-x_2}=\frac{1{,}35-1{,}2}{0{,}9-0{,}5}=0{,}375;$$

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=\frac{4{,}125-4{,}167}{0{,}7-0{,}2}=-0{,}084;$$

$$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_1}=\frac{0{,}375-4{,}125}{0{,}9-0{,}3}=-6{,}25;$$

$$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_0}=\frac{-6.25-(-0{,}084)}{0{,}9-0{,}2}=-8{,}809,$$

що надано в таблиці 7.8.

Таблиця 7.8. **Значення розділених різниць для функції** $f(x)$

x_i	$y=f(x_i)$	$f(x_i, x_j)$	$f(x_i, x_j, x_k)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l, x_n)$
0,2	1,81	-1,7	4,167	-0,084	-8,809
0,3	1,64	-0,45	4,125	-6,25	
0,5	1,55	1,2	0,375		
0,7	1,79	1,35			
0,9	2,06				

Перша інтерполяційна формула Ньютона для інтерполяції заданої таблицею функції $f(x)$ матиме такий вигляд:

$$P_4(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,f(x_0, x_1) + (x - x_0)\,(x - x_{1)}\,)\,f(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+(x - x_0)\,(x - x_1)(x - x_2)\,f(x_0, x_1, x_2 x_3) +$$
$$+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\,f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4).$$

З врахуванням розділених різниць отримаємо таку інтерполяційну формулу інтерполяції вперед:

$$P_4(x) = 1{,}81 + (-1{,}7)(x - 0{,}2) + 4{,}167(x - 0{,}2)(x - 0{,}3) + (-0{,}084) +$$
$$+ (x - 0{,}2)(x - 0{,}3)(x - 0{,}5) + + (-8{,}809)(x - 0{,}2)(x - 0{,}3)(x - 0{,}5)(x - 0{,}7) =$$
$$= -8{,}809x^4 + 14{,}891x^3 - 4{,}646x^2 - 1{,}634x + 2{,}218.$$

Відповідь. Інформаційна формула Ньютона, що наближає задана таблицею функцію $f(x)$, має такий вигляд:

$$P_4(x) = -8{,}809x^4 + 14{,}891x^3 - 4{,}646x^2 - 1{,}634x + 2{,}218.$$

Тоді наближене значення функції $f(x)$ в точці $x = 0{,}25$ буде дорівнювати:

$$f(x) \approx P_4(0{,}25) = -8{,}809 \cdot 0{,}25^4 + 14{,}891 \cdot 0{,}25^3 - 4{,}646 \cdot 0{,}25^2 -$$
$$-1{,}634 \cdot 0{,}25 + 2{,}218 = 1{,}7174.$$

Виконаємо перевірку інтерполяційної формули Ньютона шляхом його обчислення в вузлі інтерполяції $x = 0{,}5$:

$$P_4(x_2) = P_4(0{,}5) = -8{,}809 \cdot 0{,}5^4 + 14{,}891 \cdot 0{,}5^3 - 4{,}646 \cdot 0{,}5^2 -$$
$$-1{,}634 \cdot 0{,}5 + 2{,}218 = 1{,}55031$$

Таким чином, $P_4(0{,}5) = 1{,}55031 \approx f(x_2) = 1{,}5.$

Приклад. Виконати наближення функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в п’яти точках на інтервалі $[a; b]$

x	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
y	1,4	1,2	1,1	1,6	2,0

використовуючи другу інтерполяційну формулу Ньютона.

Визначити загальний вигляд поліному Ньютона. Обчислити наближене значення функції $f(x)$ в точці $x = 0{,}55$ за допомогою інтерполяційного поліному.

Розв'язок. Для отримання інтерполяційної формули Ньютон визначимо розділені різниці згідно наведених вище формул. Розділені різниці представимо в вигляді таблиці 7.9.

Таблиця 7.9. **Значення розділених таблиці для функції** $f(x)$

x_i	$y=f(x_i)$	$f(x_i, x_j)$	$f(x_i, x_j, x_k)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l)$	$f(x_i, x_j, x_k, x_l, x_n)$
0,2	1,4	-2	5	16,6675	-70,83167
0,3	1,2	-1	11,667	-85,834	
0,4	1,1	2,5	-1,25		
0,6	1,6	2			
0,8	2,0				

Друга інтерполяційна формула Ньютона для розв'язання даної задачі представляється як:

$$P_4(x) = f(x_4)+(x-x_4)f(x_3,x_4)+ (x-x_4)(x-x_3)f(x_2,x_3,x_4)+$$
$$+(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)f(x_1,x_2,x_3x_4)+$$
$$+(x_0,x_1,x_2,x_3x_4)(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1).$$

Тоді, з врахуванням розділених різниць отримаємо:

$$P_4(x) = 2+2(x-0{,}8) + (-1{,}25)(x-0{,}8)(x-0{,}6) +$$
$$+ (-85{,}834)(x-0{,}8)(x-0{,}6)(x-0{,}4)+$$
$$+(-70{,}83167)(x-0{,}8)(x-0{,}6)(x-0{,}4)(x-0{,}3)=$$
$$=-70{,}8317x^4+122{,}9125x^3-66{,}663x^2+2{,}5818x+0{,}68.$$

Відповідь. Друга інформаційна формула Ньютона, що наближає задана таблицею функцію $f(x)$, має такий вигляд:

$$P_4(x) = -70{,}8317x^4+122{,}9125x^3-66{,}663x^2++2{,}5818x+0{,}68.$$

Наближене значення функції $f(x)$ в точці $x=0{,}55$ буде дорівнювати:

$$f(0{,}55)\approx P_4(0{,}55) = (-70{,}8317)(0{,}55)^4+(122{,}9125)(0{,}55)^3-$$
$$-66{,}663(0{,}55)^2+2{,}5818(0{,}55)+0{,}68=1{,}40246.$$

Виконаємо перевірку інтерполяційної формули Ньютона шляхом його обчислення в вузлі інтерполяції $x=0{,}6$:

$$P_4(0{,}6) = (-70{,}8317)(0{,}6)^4+(122{,}9125)(0{,}6)^3-66{,}663(0{,}6)^2+$$
$$+2{,}5818(0{,}6)+0{,}68=1{,}59971.$$

Таким чином $P_4(0{,}6) = 1{,}59971 \approx f(x_3) = 1{,}6.$

7.3. Інтерполяція сплайнами

Якщо функція $f(x)$ задана своїми значеннями в $(n+1)$-й точці, то її можна апроксимувати інтерполяційними поліномами Лагранжа і Ньютона. Але при використанні великої кількості вузлів виникає осциляція многочлена $P_n(x)$ між вузлами, оскільки він має точки максимуму і мінімуму в дійсних нулях похідної. Усунути це можна зменшенням степені полінома, інтерполюючи тільки частину точок. Тоді для усієї множини точок отримують складену криву, яка безперервна на усьому інтервалі, але у вузлах "склеювання" окремих кривих її похідні будуть розривні. Похибка такого наближення може виявитися значною. Крім того, це неприйнятне в тих практично важливих задачах, коли гладкість апроксимуючої функції має істотне значення.

Останнім часом в теорії апроксимації широке застосування отримали сплайни, що дозволяють в деякій мірі усунути недоліки класичних методів наближень [5, 6, 44, 48].

Слово «сплайн» (англ. Spline) означає гнучку лінійку, використовувану для проведення гладеньких кривих через задані точки площини [44].

Гладкість і гнучкість сплайнів обумовлює їх різноманітне застосування при моделюванні процесів і систем, в конструюванні кривих і поверхонь, в обробці і представленні геометричної інформації, а також в самій математиці – в теорії апроксимації, при чисельній інтегруванні і диференціюванні, чисельному розв'язанні диференціальних і інтегральних рівнянь. Апарат сплайнів має ряд виняткових переваг, передусім простій реалізації при комп'ютерному моделюванні. При обчисленні параметрів інтерполяційного сплайну, в відмінності від інтерполяційних поліномів, потрібно розв'язання системи алгебраїчних рівнянь з трьох діагональною матрицею. Сплайни забезпечують високу точність апроксимації одночасно і функції, і її похідних. У ряді важливих випадків вони дозволяють отримати наближення з мінімально можливою похибкою на цьому класі функцій в порівнянні з іншими методами. Треба зазначити також стійкість відносно локальних збуджень сплайну, представленого у вигляді лінійної комбінації базисних сплайнів: незначна зміна значень функції в одному або декількох вузлах інтерполяції мало позначається на його значеннях на деякому відстані від цих точок. Сплайни можна застосовувати для наближення таких функцій, міра гладкості міра гладкості яких неоднакова на різних ділянках апроксимуючого відрізку. І, нарешті, до переваг сплайнів слід віднести їх просте узагальнення на багатовимірні випадки.

В загальному випадку сплайн є функцією, що «склеєна» з узагальнених поліномів таким чином, що в точках «склеювання» значення поліномів і значення їх похідних до деякого порядку співпадають. Найбільш простими є кусково-поліноміальні сплайни, для яких в якості базисних функцій використовують алгебраїчні поліноми.

На сьогодні існують кілька видів сплайн-функцій. Розглянемо окремий випадок, що найбільш поширений в обчислювальній практиці, коли сплайн визначається за допомогою многочленів третьої степені (кубічний сплайн).

Наведемо основи побудови кубічного сплайну [44].

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ у вузлах $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ своїми значеннями $f(x_i) = y_i$, $(i = 0, 1, ..., n)$.

Функція $S_3(x)$ називається кубічним сплайном, що інтерполює функцію $f(x)$ у вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$, якщо:

– на кожному з відрізків $[x_1; x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ вона є многочленом не вище за третьої степені, тобто $S_3(x) \in P_3(x)$;

– $S_3(x)$ безперервна на $[a;b]$ разом зі своїми похідними до другого порядку включно, тобто $S_3(x) \in C^2[a;b]$;

– у вузлах сітки функції $S_3(x)$ задовольняють умовам інтерполяції

$$S_3(x_i) = f(x_i),\ (i = 0, 1, ..., n).$$

Доведемо існування й єдинність сплайну, що визначений вказаними умовами. Наведений нижче доказ містить також спосіб побудови сплайну.

Скористаємося кусково-поліноміальним представленням кубічного сплайну на кожному із відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$

$$S_3(x_i) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + d_i \frac{(x - x_i)^3}{6}, \tag{7.22}$$

де a_i, b_i, c_i, d_i – коефіцієнти, що підлягають визначенню. Пояснимо зміст введених коефіцієнтів.

Із (7.22) маємо:

$$S_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2,$$

$$S_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i), \qquad S_i'''(x) = d_i.$$

Тому в точці x_i $a_i = S_i(x_i), \quad b_i = S_i'(x_i), \quad c_i = S_i''(x_i), \quad d_i = S_i'''(x_i).$

З умов інтерполювання $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ отримаємо, що

$$a_i = f(x_i), \ i = 1, 2, ..., n.$$

Встановимо, що $a_0 = f(x_0)$.

Вимоги безперервності функції $S(x)$ призводять до виконання умов:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_i), \ i = 1, 2, ..., n-1.$$

Звідси, враховуючи вирази для функції $S_i(x)$, отримуємо кожного із $i = 1, 2, ..., n-1$ рівнянь

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3.$$

Позначивши $h_i = x_i - x_{i-1}$, перепишемо ці рівняння у такому виді

$$hb_i - \frac{h_i^2}{2}c_i + \frac{h_i^3}{6}d_i = f_i - f_{i-1}, \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{7.23}$$

Умови безперервності першої похідної

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i), \quad i = 1, 2, .., n-1,$$

призводять до рівнянь

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2}h_i^2 = b_i - b_{i-1}, \qquad i = 2, 3, ..., n. \tag{7.24}$$

З умови безперервності другої похідної отримуємо рівняння

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \qquad i = 2, 3, ..., n. \tag{7.25}$$

Об’єднуючи рівняння (7.23) – (7.25), отримаємо систему ($3n$-2) рівнянь відносно $3n$ невідомих $b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, ..., n$. Два рівняння, що ще необхідні для розв’язання системи, отримують, задаючи ті або інші граничні умови для $S(x)$. Нехай, наприклад, функція $f(x)$ задовольняє умовам $f'''(a) = f'''(b) = 0$. Тоді природно вимагати, щоб $S''(a) = S''(b) = 0$. Звідси отримуємо $S_1''(x_0) = 0, \ S_n''(x_n) = 0$, тобто

$$c_1 - d_1 h = 0, ..., c_n = 0.$$

Видно, що умова $c_1 - d_1 h = 0$ співпадає з рівнянням (7.25) при $i = 1$, якщо покласти $c_0 = 0$. Таким чином, приходимо до замкнутої системи рівнянь для визначення коефіцієнтів кубічного сплайну.

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, \qquad i = 1, 2, ..., n, \qquad c_0 = c_N = 0, \tag{7.26}$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, \qquad i = 2, 3, ..., n, \tag{7.27}$$

$$h b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, \qquad i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{7.28}$$

Переконаємося в тому, що ця система має єдине рішення. Виключимо з рівнянь (7.26)–(7.28) змінні $b_i, d_i,\ i = 1, 2, ..., n-1$ і отримаємо систему, що містить тільки $c_i \quad i = 1, 2, ..., n-1$. Для цього розглянемо два сусідні рівняння (7.28):

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}},$$

і віднімемо друге рівняння з першого. Тоді отримаємо

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}.$$

Підставляючи знайдене вираження для $b_i - b_{i-1}$ в праву частину рівняння (7.27), отримаємо

$$h_i c_i + h_{i-1} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{3} d_{i-1} - \frac{2h_i^2}{3} d_i = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \tag{7.29}$$

Далі, з рівняння (7.26) отримуємо

$$h_i^2 d_i = h_i (c_i - c_{i-1}), \qquad h_{i-1}^2 d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

і, підставляючи ці вирази в (7.29), приходимо до рівняння

$$h_{i-1} c_{i-2} + 2(h_{i-1} + h_i) c_{i-1} + h_i c_i = 6\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right).$$

Остаточно для визначення коефіцієнтів c_i отримуємо систему рівнянь

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \tag{7.30}$$

$$i = 1, 2, ..., n-1, \ c_0 = c_N = 0.$$

Внаслідок діагонального представлення система (7.30) має єдине рішення. Оскільки матриця трьохдіагональна, рішення легко знайти методом прогону, який в даному випадку буде стійким. За знайденими коефіцієнтами c_i коефіцієнти b_i і d_i визначаються за допомогою формул:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{7.31}$$

Таким чином доведено, що існує єдиний кубічний сплайн, який визначено за наданими раніш трьома умовами до кубічних сплайнів і граничними умовами

$$S''(a) \ - S''(b) = 0\,.$$

Визначимо оцінку похибки інтерполяції сплайнами

$$\left|f(x) - S_h(x)\right| \le \frac{1}{2}\left\|f^{||}(x) - S_h^{||}(x)\right\| c(\omega_h)\frac{h^2}{4} \le \frac{M_4 h^4}{8}\,,$$

де $M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right|$, $x \in [a; b]$.

Геометричне представлення кусково-поліноміальної інтерполяції а вигляді сплайн-функцій представлено на рисунку 7.3.

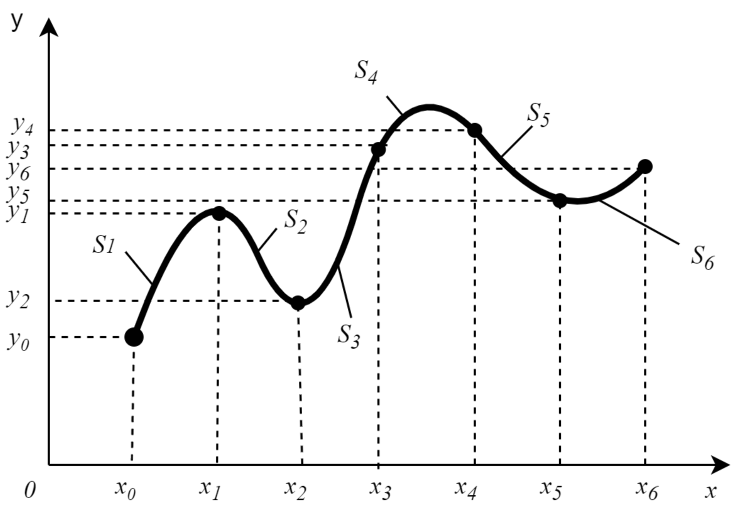


Рис.7.3. Геометричне представлення сплайн-функцій

Приклад. Виконати наближення функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в $(n+1)$ точці на інтервалі $[a; b]$, за допомогою кубічних сплайн-функцій.

x	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
y	1,81	1,64	1,55	1,79	2,06

Визначити загальний вигляд сплайн-функції та її значення в точці $x = 0{,}25$.

Розв'язок. Кусково-інтерполяційна функція буде представлена в вигляді чотирьох кубічних поліномів як:

$$S_i(x) = a_i + b_i\{x - x_i) + \frac{c_i(x-x_i)^2}{2} + \frac{d_i(x-x_i)^3}{6}; \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$a_i = y_i; \quad a_1 = y_1 = 1{,}64; \; a_2 = y_2 = 1{,}55; \; a_3 = y_3 = 1{,}79; \quad a_4 = y_4 = 2{,}06;$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad x_{i-1} \le x \le x_i; \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Для визначення коефіцієнтів c_1, c_2 і c_3 розв'яжемо систему рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \; i = 1, 2, 3; c_0 = c_4 = 0.$$

$$\begin{cases} h_1 c_0 + 2(h_1 + h_2)c_1 + h_2 c_2 = 6\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1}\right) \\ h_2 c_1 + 2(h_2 + h_3)c_2 + h_3 c_3 = 6\left(\dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2}\right) \\ h_3 c_2 + 2(h_3 + h_4)c_3 + h_4 c_4 = 6\left(\dfrac{y_4 - y_3}{h_4} - \dfrac{y_3 - y_2}{h_3}\right) \end{cases}.$$

Після визначення часткових інтервалів при побудові сплайн-функцій та підставлення їх значень в систему рівнянь отримуємо:

$$\begin{cases} 2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2)c_1 + 0{,}2c_2 = 6\left(\dfrac{1{,}55 - 1{,}64}{0{,}2} - \dfrac{1{,}64 - 1{,}81}{0{,}1}\right) \\ 0{,}2c_1 + 2 \cdot (0{,}2 + 0{,}2)c_2 + 0{,}2c_3 = 6\left(\dfrac{1{,}79 - 1{,}55}{0{,}2} - \dfrac{1{,}55 - 1{,}64}{0{,}2}\right) \\ 0{,}2c_2 + 2 \cdot (0{,}2 + 0{,}2)c_3 = 6\left(\dfrac{2{,}06 - 1{,}79}{0{,}2} - \dfrac{1{,}79 - 1{,}55}{0{,}2}\right) \end{cases}.$$

Тоді

$$\begin{cases} 0{,}6c_1 + 0{,}2c_2 = 7{,}5 \\ 0{,}2c_1 + 0{,}8c_2 + 0{,}2c_3 = 9{,}9 \\ 0{,}2c_2 + 0{,}8c_3 = 0{,}9 \end{cases}.$$

При розв'язані даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь визначено:

$$c_1 = 9; \quad c_2 = 10{,}5; \quad c_3 = -1{,}5.$$

Коефіцієнти d_i та b_i, $i = 1, 2, 3, 4$ визначаються як:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}c_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тоді

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{h_1} = \frac{9 - 0}{0{,}1} = 90; \qquad d_3 = \frac{c_3 - c_2}{h_3} = \frac{-1{,}5 - 10{,}5}{0{,}2} = -60;$$

$$d_2 = \frac{c_2 - c_1}{h_2} = \frac{10{,}5 - 9}{0{,}2} = 7{,}5; \qquad d_4 = \frac{c_4 - c_3}{h_4} = \frac{0 + 1{,}5}{0{,}2} = 7{,}5;$$

$$b_1 = \frac{h_1}{2}c_1 - \frac{h_1^2}{6}d_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_1} = \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}9 - \frac{0{,}1^2}{6} \cdot 90 + \frac{1{,}64 - 1{,}81}{0{,}1} = -1{,}4;$$

$$b_2 = \frac{h_2}{2}c_2 - \frac{h_2^2}{6}d_2 + \frac{y_2 - y_1}{h_2} = \frac{0{,}2}{2} \cdot 10{,}5 - \frac{0{,}2^2}{6} \cdot 7{,}5 + \frac{1{,}55 - 1{,}64}{0{,}2} = 0{,}55;$$

$$b_3 = \frac{h_3}{2}c_3 - \frac{h_3^2}{6}d_3 + \frac{y_3 - y_2}{h_3} = \frac{0{,}2}{2} \cdot (-1{,}5) - \frac{0{,}2^2}{6} \cdot (-60) + \frac{1{,}79 - 1{,}55}{0{,}2} = 1{,}45;$$

$$b_4 = \frac{h_4}{2}c_4 - \frac{h_4^2}{6}d_4 + \frac{y_4 - y_3}{h_4} = -\frac{0{,}2^2}{6} \cdot 7{,}5 + \frac{2{,}06 - 1{,}79}{0{,}2} = 1{,}3.$$

Таким чином отримано такі значення коефіцієнтів сплайн-функцій:

$$c_1 = 9; \quad c_2 = 10{,}5; \quad c_3 = 1{,}5;$$

$$d_1 = 90; \quad d_2 = 7{,}5; \quad d_3 = 60; \quad d_4 = 7{,}5;$$

$$b_1 = 1{,}4; \quad b_2 = 0{,}55; \quad b_3 = 1{,}45; \quad b_4 = 1{,}3.$$

З врахуванням визначених коефіцієнтів сплайн-функції на кожному частковому інтервалі будуть мати такий вигляд:

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1\frac{(x - x_1)^2}{2} + d_1\frac{(x - x_1)^3}{6} = 1{,}64 + (-1{,}4) \cdot (x - 0{,}3) +$$

$$+ 9\frac{(x - 0{,}3)^2}{2} + 90\frac{(x - 0{,}3)^3}{6} = 15x^3 - 9x^2 - 0{,}05x + 2{,}06;$$

$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2 \frac{(x - x_2)^2}{2} + d_2 \frac{(x - x_2)^3}{6} = 1{,}55 + 0{,}55 \cdot (x - 0{,}5) +$$

$$+10{,}5 \cdot \frac{(x - 0{,}5)^2}{2} + (-7{,}5) \cdot \frac{(x - 0{,}5)^3}{6} = 1{,}25x^3 + 3{,}375x^2 - 3{,}7625x + 2{,}43125;$$

$$S_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3 \frac{(x - x_3)^2}{2} + d_3 \frac{(x - x_3)^3}{6} = 1{,}79 + 1{,}45 \cdot (x - 0{,}7 +$$

$$+(-1{,}5) \cdot \frac{(x - 0{,}7)^2}{2} + (-60) \cdot \frac{(x - 0{,}7)^3}{6} = -10x^3 + 20{,}255x^2 - 12{,}2x + 3{,}8375;$$

$$S_4(x) = a_4 + b_4(x - x_4) + c_4 \frac{(x - x_4)^2}{2} + d_4 \frac{(x - x_4)^3}{6} =$$

$$= 2{,}06 + 1{,}3 \cdot (x - 0{,}9) + 0 \cdot \frac{(x - 0{,}9)^2}{2} + 7{,}5 \frac{(x - 0{,}9)^3}{6} =$$

$$= 1{,}25x^3 - 3{,}375x^2 + 4{,}3375x - 0{,}02125.$$

Відповідь. Функцію $f(x)$ можна інтерполювати такими сплайн-функціями:

$$S_1(x) = 15x^3 - 9x^2 - 0{,}05x + 2{,}06;$$

$$S_2(x) = 1{,}25x^3 + 3{,}375x^2 - 3{,}7625x + 2{,}43125;$$

$$S_3(x) = -10x^3 + 20{,}255x^2 - 12{,}2x + 3{,}8375;$$

$$S_4(x) = 1{,}25x^3 - 3{,}375x^2 + 4{,}3375x - 0{,}02125.$$

Перевірка: $S_1(2{,}3) = S_2(2{,}3) = 1{,}82$; $\quad S_2(2{,}4) = S_3(2{,}4) = 1{,}64$.

Точка $x = 0{,}25$ відповідає частковому інтервалу $[0{,}2; 0{,}3]$. Тому для визначення значення функції $f(x)$ в даній точці треба використовувати сплайн-фукцію $S_1\,(x)$. Тоді

$$f(0{,}25) \approx S_1(0{,}25) = 15 \cdot 0{,}25^3 - 9 \cdot 0{,}25^2 - 0{,}05 \cdot 0{,}25 + 2{,}06 = 1{,}719375.$$

7.4. Обернена інтерполяція

В попередніх підрозділах розглядались задачі інтерполяції, тобто знаходження значення функції в точках, що не співпадають з вузлами інтерполяції.

Інколи виникає потреба розв’язати зворотну (обернену) задачу, яка формулюється наступним чином: за таблицею значень функції визначити значення аргументу x, якому відповідає дане значення функції, що відсутнє в таблиці початкових даних.

Задачу оберненої інтерполяції можна легко повернути, якщо вважати значення функції аргументом, а значення аргументу – функцією. Така заміна місцями функцій і аргументів призводить до того, що вузли нової інтерполяції будуть нерівновіддаленими. Тому для реалізації оберненої інтерполяції можна використовувати формули Лагранжа, інтерполяційні формули Ньютона при нерівновіддалених вузлах або сплайн-функції.

Приклад. Нехай функція $y = f(x)$ таблицею своїх значень в п’яти точках

x_i	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1
$f(x_i)$	0,2160494	0,2129001	0,2098875	0,2070019	0,2042345

Визначити, якому аргументу відповідає значення функції 0,2116793.

Розв’язок. Значення функції знаходиться між значення аргументу 3,8 та 3,9. Тому задачу знаходження аргументу можна вважати задачею інтерполяції таблично заданої функції зі змінним (нерівновіддаленим) кроком, в якій поміняли місцями функцію і аргумент

x_i'	0,2129001	0,2098875	0,2070019
$y_i = f(x_i')$	3,8	3,9	4,0

Тоді для інтерполяції функції можна використовувати інтерполяційні многочлени Лагранжа, Ньютона при нерівновіддалених вузлах та сплайн-функції. Для розв’язання даної задачі використовуємо формулу Лагранжа. Тоді

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 =$$

$$=\frac{(0{,}2116793-0{,}2098875)(0{,}2116793-0{,}2070019)}{(0{,}2129001-0{,}2098875)(0{,}2129001-0{,}2070019)}3{,}8+$$
$$=\frac{(0{,}2116793-0{,}2129001)(0{,}2116793-0{,}2070019)}{(0{,}2098875-0{,}2129001)(0{,}2098875-0{,}2070019)}3{,}9+$$

$$=\frac{(0{,}2116793-0{,}2129001)(0{,}2116793-0{,}2098875)}{(0{,}2070019-0{,}2129001)(0{,}2070019-0{,}20998875)}4{,}0=3{,}84.$$

Відповідь. Функція $f(x)=0{,}2116793$ відповідає значенню аргументу $x=3{,}84$.

7.5. Екстраполяція

Інтерполяційні формули можуть бути використані і для знаходження значень функції, що відповідають значенням аргументу, що знаходяться за межами таблиці початкових даних, тобто за межами границь інтерполяції, а саме розв'язання задачі екстраполяції.

Використання інтерполяційних формул для екстраполяції не відрізняється від розглянутих раніш прикладів. Природною відмінністю є те, що для інтерполяції за першою інтерполяційної формулою Ньютона значення параметра t є додатнім, а при екстраполяції – від'ємним. Для другої інтерполяційної формули Ньютона – зворотне. При інтерполяції t є від'ємним, а при екстраполяції – додатнім.

Таким чином, перша інтерполяційна формула Ньютона використовується для інтерполяції вперед, а в екстраполяції – назад, а друга – для інтерполяції – назад і в екстраполяції – вперед.

Екстраполяція за другою інтерполяційною формулою Ньютона виконується аналогічно .

Відносно інтерполяційних формул Лагранжа, то для обчислення значення функції при будь-яких x (тобто використання інтерполяційних формул для екстраполяції) достатньо тільки підставити в формулу Ньютона відповідне значення аргументу.

Треба відзначити, що використання екстраполяції призводить до більших похибок обчислення, ніж при інтерполяції, та і межі її застосування є обмеженими.

Приклад. За значенням функції $y=\sin x$ в межах від $x=15^0$ до $x=55^0$ з кроком $h=5^0$, що надані в таблиці, визначити $\sin 14^0$ та $\sin 56^0$ [19].

x	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428	0,7071	0,7660	0,8192

Розв'язок: Для визначення значень функції $y=\sin x$ у вказаних точках застосовуємо екстраполяційні формули Ньютона.

Для цього отримання відповідних екстраполяційних формул визначимо кінцеві різниці, які наведено в таблиці 7.10. При цьому обмежуємось різницями третього порядку тому, що різниці практично не змінюються.

Для визначення $\sin 14^0$ використовуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона тобто формулу Ньютона екстраполяції назад.

Таблиця 7.10. **Значення кінцевих різниць для функції** $y=\sin x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
15	0,2588	0,0832	-0,0026	0,0006	0,0000
20	0,3420	0,0806	-0,0032	0,0006	0,0000
25	0,4226	0,0771	-0,0038	0,0006	0,0000
30	0,5000	0,0736	-0,0044	0,0006	0,0001
35	0,5736	0,0692	-0,0049	0,0005	-0,0002
40	0,6428	0,0643	-0,0054	0,0003	
45	0,7071	0,0589	-0,0057		
50	0,7660	0,0532			
55	0,8192				

Для визначення $\sin 14^0$ вважаємо, що $x_0=\sin 15^0$ і $x=\sin 14^0$ при $h=5^0$, тоді

$$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{14^0-15^0}{5^0}=-0{,}2.$$

Згідно з (7.11) отримуємо

$$P_8(14^0)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}t+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1)+\frac{\Delta^3 y_0}{3!}t(t-1)(t-2)=$$

$$=0{,}2588+(-0{,}2)\cdot 0{,}0832+\frac{(-0{,}2)(-1{,}2)}{2!}(-0{,}0026)+$$

$$+\frac{(-0{,}2)(-1{,}2)(-2{,}2)}{3!}(-0{,}0006)+\frac{(-0{,}2)(-1{,}2)(-2{,}2)(-3{,}2)}{4!}(0{,}0000)=0{,}2419.$$

Таким чином $f(14^0)\approx P(14^0)=0{,}2419$.

Для визначення $\sin 56^0$ використовуємо другу інтерполяційну формулу Ньютона тобто формулу Ньютона екстраполяції вперед.

Для визначення $\sin 56^0$ вважаємо, що $x_n = \sin 55^0$ і $x = \sin 56^0$ при $h = 5^0$, тоді

$$t = \frac{56^0 - 55^0}{5^0} = 0{,}2.$$

Згідно з (7.13) отримуємо

$$P_8(56) = y_8 + \frac{\Delta y_7}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_6}{2!}t(t+1) + +\frac{\Delta^3 y_5}{3!}t(t+1)(t+2) +$$

$$+\frac{\Delta^4 y_4}{4!}t(t+1)(t+2)(t+3) = 0{,}8192 + 0{,}2\cdot 0{,}0532 + \frac{0{,}2\cdot 1{,}2}{2!}(-0{,}0057) +$$

$$+\frac{0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 2{,}2}{3!}(-0{,}0003) + \frac{0{,}2\cdot 1{,}2\cdot 2{,}2\cdot 3{,}2}{4!}(-0{,}0002) = 0{,}8291.$$

Звідси $f(56^0) \approx P(56^0) = 0{,}8291$.

Відповідь: Використовуючи екстраполяційні формули Ньютона отримано значення функції $y = \sin x$ за межами її початкового визначення: $f(14^0) \approx P(14^0) = 0{,}2419$; $f(56^0) \approx P(56^0) = 0{,}8291$.

7.6. Апроксимація функцій методом найменших квадратів

Відомо, що при інтерполюванні представленою таблицею функції $y = f(x)$ поліномом $\varphi(x)$, необхідно щоб $f(x)$ та $\varphi(x)$ співпадали в табличних точках (вузлах інтерполювання). Причому, якщо функція $f(x)$ задана в $(n+1)$ - й точці $x_0, x_1, ..., x_n$, то існує єдиний поліном степені m, такий що $\varphi(x_i) = f(x_i)$ для $i = 1, 2, ..., n$.

Але в деяких випадках виконання цієї умови утруднено або навіть зайве. Так, за великої кількості вузлів інтерполювання отримуємо поліном високої степені, що збільшує похибку обчислення. Крім того, табличні дані можуть бути отримані вимірюванням і мають похибки, а інтерполяційний поліном включає всі ці похибки. Зменшити похибку обчислень можна шляхом апроксимації функцій, коли графік полінома не обов'язково співпадає з початковою функцією, а проходить близько від неї. При цьому степінь полінома буде невисокий від 1 до 4 , який менше за n.

Нехай функція $f(x)$ задана в n точках $x_0, x_1, ..., x_n$ своїми значеннями $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),..., y_n = f(x_n)$.

При апроксимації функцій за методом найменших квадратів визначають таку функцію $\varphi(x)$, для якої величина розбіжності $\rho(f;\varphi)$ була мінімальною. Вид цієї функції залежить від початкових значень функції $f(x)$ і її вибирають із класу елементарних функцій.

Нехай функція $f(x)$ апроксимується на множині X функцією $\varphi(x)$, яка є більш просторовою для обчислень та ближчою в деякому розумінні до $f(x)$. Точність апроксимації, тобто близькість двох функцій, можна оцінювати по-різному, залежно від фізичного змісту розв'язувальної задачі. Відповідно до цього в теорії наближень розглядаються різні функціональні простори з введеною в них метрикою, що дозволяє оцінити відстань між функціями $\rho(f;\varphi)$.

Якщо розглядати лінійний простір дійсних функцій, що задані на множині X, то множини його лінійно незалежних елементів є системою лінійно незалежних на X функцій.

Нехай $f(x)$ є елементом лінійного нормованого простору L. Виберемо в L систему $m+1$ лінійно незалежних функцій $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ ...,\varphi_m(x)$, і створимо лінійну комбінацію

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x),$$

з постійними коефіцієнтами c_j, $(j=0,1,2,...,m)$.

Функція $\varphi(x)$ називається узагальненим многочленом порядку m. Зокрема, якщо $\varphi_j(x)=x^j$, $(j=0,1,2,...,m)$, то

$$\varphi(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_mx^m,$$

є алгебраїчним многочленом порядку m.

Якщо вибрати

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=\cos x,\ \varphi_2(x)=\sin x,...\ \varphi_{2m-1}=\cos mx, \varphi_{2m}=\sin mx,$$

то функція $\varphi(x)=\dfrac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+...+a_m\cos mx+b_m\sin mx$ є тригонометричним многочленом порядку m.

Будемо апроксимувати функцію $f(x)$ узагальненим многочленом $\varphi(x)$ порядку m. Параметри $c_j,\ (j=0,1,2,\ldots,m)$ узагальненого апроксимуючого многочлена

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x),$$

визначаються з умови мінімуму відстані $\rho(f;\varphi)=\|f-\varphi\|$ в метриці просторі L.

Функція $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x)$, що забезпечує мінімум квадрата відстані $\rho(f;\varphi)=\|f-\varphi\|_X=\left(\sum_{i=0}^{m}\rho_i\left[f(x_i)-\varphi(x_i)\right]^2\right)^{1/2}$, називається точковим зваженим середнім квадратичним наближенням функції $f(x)$.

У інтегральному наближенні базисні функції $\varphi_{\mathrm{j}}(x)$ $(j=0,1,2,...,m)$ передбачаються лінійно незалежними на $[a;b]$, а в точковому – на множині точок $\{x_j\}_0^m$, при цьому $m\le n$.

Нехай функція $f(x)$ задана в $n+1$ в точках $x_0,x_1,\ldots,x_n$ відрізку $[a;b]$ своїми значеннями $y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ ...,\ y_n=f(x_n)$. Треба отримати апроксимуючу функцію $\varphi(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+...+c_m\varphi_m(x)$

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x).$$

Якщо вважати, що функції $\varphi_j(x),\ (j=0,1,2,...,m)$ степеневі функції, то апроксимуюча $f(x)=P_m(x)$ буде поліномом

$$P_m(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_mx^m. \tag{7.32}$$

Для визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома $c_0,c_1,c_2,...,c_m$, найбільш ефективним є використання методу найменших квадратів.

Суть методу найменших квадратів полягає в тому, що визначають відхилення

$$e_i=y_i-P_m(x_i),\ i=1,2,3,...,n,$$

в кожній точці реального значення від того, що отримано за допомогою полінома $P_m(x_i)$. Далі отримують суму квадратичних відхилень

$$E = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2 . \quad (7.33)$$

Визначають коефіцієнти шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dc_0} = 0; \\ \dfrac{dE}{dc_1} = 0; \\ \dots \\ \dfrac{dE}{dc_m} = 0. \end{cases} . \quad (7.34)$$

Згідно з методом найменших квадратів коефіцієнти апроксимуючого полінома відповідають мінімуму квадрату відхилень значень реальної функції та апроксимуючої функції в заданих точках x_i , $i = 1, 2, ..., n$.

Розглянемо часткові випадки.

Нехай функція $f(x)$ задана в $n+1$ в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ відрізку $[a;b]$ своїми значеннями $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),...,\ y_n = f(x_n)$. Треба визначити значення коефіцієнтів прямої як апроксимуючого полінома першої степені

$$P_1(x_1) = c_0 + c_1 x_1,\ i = 0,1,2,...,n.$$

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома $P_1(x)$ матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} c_0(n+1) + c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ c_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i \end{cases} .$$

Нехай апроксимуюча функція для початкової функції $f(x)$ представляється поліномом

$$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 .$$

Тоді система рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома $P_2(x)$ за методом найменших квадратів представляється наступним чином:

$$\begin{cases} c_0(n+1) + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i + c_2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ c_0\sum_{i=0}^{n} x_i + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_2\sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ c_0\sum_{i=0}^{n} x_i + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_2\sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}.$$

Таким чином можна визначити коефіцієнти апроксимуючого полінома будь-якої m–тої степені $P_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_mx^m$, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0(n+1) + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i + c_2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + ... + c_m\sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ c_0\sum_{i=0}^{n} x_i + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + c_2\sum_{i=0}^{n} x_i^3 + ... + c_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \quad ... \\ c_0\sum_{i=0}^{n} x^m{}_i + c_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + c_2\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2} + ... + c_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m \end{cases}.$$

Доведено, що дана система має єдиний розв'язок, отже задача апроксимації за методом найменших квадратів теж має єдиний розв'язок.

Геометричну інтерпретацію наближення функції $f(x)$ апроксимуючим поліномом приведено на рисунку 7.4.

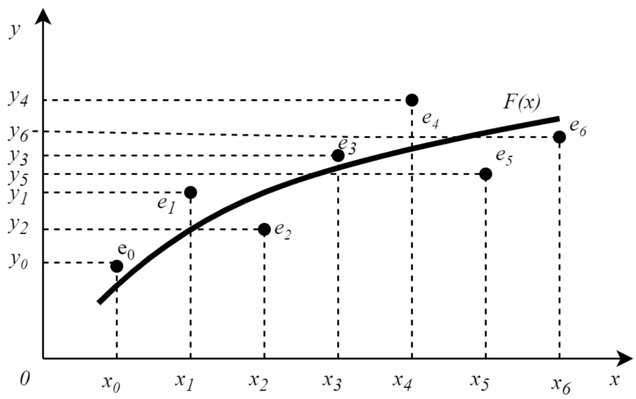


Рис. 7.4. Геометричне представлення апроксимації функції $f(x)$

Апроксимуюча функція не обов'язково має бути алгебраїчним многочленом (поліномом будь-якої степені). Нехай $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ – задані функції однієї змінної, а $w_0, w_1, w_2, ..., w_m$ – задані додатні числа (ваги). Тоді загальна постановка задачі апроксимації за методом найменших квадратів полягає в тому , щоб знайти числа $c_0, c_1, c_2, ..., c_m$, що мінімізують функцію

$$\begin{gathered}E(c_0, c_1, c_2, ..., c_m) = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \\ = \sum_{i=0}^{n} (y_i - (c_0 w_0 \varphi_0(x_i) + c_1 w_1 \varphi_1(x_i) + ... + c_m w_m \varphi_m(x_i)))^2\end{gathered}. \quad (7.35)$$

Якщо ваги $w_0 = w_1 = ... = w_m = 1$, а $\varphi_j(x) = x^j$, то отримуємо попередню постановку задачі (7.32).

Окрім степеневої, інколи, використовують такі базисні функції: $\varphi(x) = \sin(\pi x), \varphi(x) = e^x, \varphi(x) = \ln(x), \varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ тощо.

Ваги $w_0, w_1, w_2, ..., w_m$ використовують для надання більшої або меншої важливості складовим функціям апроксимації.

Для функції (7.35), як і раніше, можна побудувати нормальні рівняння. Часткові похідні для цієї функції мають такий вигляд:

$$\frac{dE}{dc_j} = 2\sum_{i=1}^{n} w_j \varphi_j(x_i)(c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + ... + c_m\varphi_m(x_i) - y_i). \quad (7.36)$$

Прирівнявши ці часткові похідні нулю і об’єднавши коефіцієнти при c_j отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів поліному:

$$\begin{cases} c_0 \sum\limits_{i=0}^{n} w_0 \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} w_1 \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) + ... + \\ \quad + c_m \sum\limits_{i=0}^{n} w_m \varphi_m(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} w_0 \varphi_0(x_i) y_i \\ c_0 \sum\limits_{i=0}^{n} w_0 \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} w_1 \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) + ... + \\ \quad + c_m \sum\limits_{i=0}^{n} w_m \varphi_m(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} w_1 \varphi_1(x_i) y_i \\ \qquad ... \\ c_0 \sum\limits_{i=0}^{n} w_0 \varphi_0(x_i)\varphi_m(x_i) + c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} w_1 \varphi_1(x_i)\varphi_m(x_i) + ... + \\ \quad + c_m \sum\limits_{i=0}^{n} w_m \varphi_m(x_i)\varphi_m(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} w_m \varphi_m(x_i) y_i \end{cases} \quad (7.3)$$

За деяких умов, що накладаються на вузли x_i та функції $\varphi_j(x)$, система має єдиний розв'язок. Але при $m \geq 5$ система нормальних рівнянь погано обумовлена, тому цей метод використовують лише при малих значеннях m. При більших значеннях m той самий поліном середньоквадратичної апроксимації можна отримати за допомогою ортогональних поліномів.

Приклад. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в 7 точках:

x	-1,2	-1,4	-1,6	-1,7	-1,8	-1,9	-2	-2,2
y	1,8	1,7	1,4	1,6	1,9	2	2,1	1,9

Визначити методом найменших квадратів коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ наступного виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2;$$
$$\varphi_3(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^3;$$
$$\varphi_4(x) = C_0 + C_1 x + C_2 e^x.$$

Встановити, яка із функцій $\varphi_i(x)$ найкраще апроксимує функцію $f(x)$, що задана в вигляді таблиці.

Розв'язок. Для визначення коефіцієнтів C_0 та C_1 рівняння $\varphi_1(x)$ за методом найменших квадратів треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_0(n+1) + C_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ C_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + C_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i \end{cases}$$

При $n = 7$ та наданих в умові задачі початкових даних та проміжних результатів обчислення, що представлено в таблиці 7.11, отримаємо:

$$\begin{cases} 8C_0 - 13{,}8C_1 = 14{,}4 \\ -13{,}8C_0 + 24{,}54C_1 = -25{,}1 \end{cases}.$$

Тоді $C_1 = -0{,}3537, \quad C_0 = 1{,}1899$.

Таким чином, $\varphi_1(x) = 1{,}1899 - 0{,}3537x$.

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів $C_0, C_1,$ та C_2 рівняння $\varphi_2(x)$ за методом найменших квадратів має такий вигляд:

$$\begin{cases} C_0(n+1) + C_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + C_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ C_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + C_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + C_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i \\ C_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + C_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + C_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{cases} .$$

Після підставлення початкових даних та результатів обчислення із таблиці 7.4 отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8C_0 - 13{,}8C_1 + 24{,}54C_2 = 14{,}4 \\ -13{,}8C_0 + 24{,}54C_1 - 44{,}82C_2 = -25{,}1 \\ 24{,}54C_0 - 44{,}82C_1 + 83{,}782C_2 = 45{,}104 \end{cases} .$$

Після розв'язання цієї системи рівнянь отримуємо $C_0 = 2{,}9782; C_1 = 1{,}83$ та $C_2 = 0{,}645$.

Звідси маємо $\varphi_2(x) = 2{,}9782 + 1{,}83x + 0{,}645x^2$.

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів C_0, C_1, та C_2 рівняння $\varphi_3(x)$ за методом найменших квадратів має такий вигляд:

$$\begin{cases} C_0(n+1) + C_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + C_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \\ C_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + C_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + C_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i \\ C_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + C_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4 + C_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^6 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^3 \end{cases} .$$

Після підставлення початкових даних та проміжних результатів обчислення із таблиці 7.4 отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8C_0 - 13{,}8C_1 - 44{,}82C_2 = 14{,}4 \\ -13{,}8C_0 - 44{,}82C_1 + 83{,}782C_2 = -25{,}1 \\ -44{,}82C_0 + 8{,}782C_1 - 159{,}747C_2 = -83{,}2 \end{cases} .$$

Після розв'язання цієї системи рівнянь отримуємо $C_0 = 1{,}8423;\ C_1 = 0{,}004374$ та $C_2 = 0{,}006212$.

Тоді $\varphi_3(x) = 1{,}8423 + 0{,}004374x + 0{,}006212x^3$.

Система рівнянь для визначення коефіцієнтів C_0, C_1, та C_2 рівняння $\varphi_4(x)$ за методом найменших квадратів має такий вигляд:

$$\begin{cases} C_0(n+1) + C_1\sum_{i=0}^{n} x_i + C_2\sum_{i=0}^{n} e_i^{x_i} = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ C_0\sum_{i=0}^{n} x_i + C_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + C_2\sum_{i=0}^{n} x_i e_i^{x_i} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ C_0\sum_{i=0}^{n} e_i^{x_i} + C_1\sum_{i=0}^{n} x_i e_i^{x_i} + C_2\sum_{i=0}^{n} e_i^{2x_i} = \sum_{i=0}^{n} y_i e_i^{x_i} \end{cases}.$$

Після підставлення початкових даних та результатів проміжних розрахунків (таблиця 7.4) отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8C_0 - 13{,}8C_1 + 1{,}494C_2 = 14{,}4 \\ -13{,}8C_0 + 24{,}54C_1 - 2{,}4365C_2 = -25{,}1 \\ 1{,}494C_0 - 2{,}4365C_1 + 0{,}306C_2 = 2{,}6444 \end{cases}.$$

Після розв'язання цієї системи рівнянь будемо мати $C_0 = -30{,}56;\ C_1 = -12{,}1092$ та $C_2 = 61{,}4307$. Звідси

$$\varphi_4(x) = -30{,}56 - 12{,}1092x + 61{,}4307e^x.$$

При розв'язанні задачі апроксимації функцій за методом найменших квадратів проміжні результати обчислень зручно оформляти в вигляді таблиці, елементи якої використовуються при визначенні коефіцієнтів апроксимуючих функцій $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x)$ (при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь) та виборі функції, що найкраще апроксимує задану функцію $y = f(x)$.

Відповідь. За методом найменших квадратів отримано такі апроксимуючі функції:

$$\varphi_1(x) = 1{,}1899 - 0{,}3537x;$$

$$\varphi_2(x) = 2{,}9782 + 1{,}83x + 0{,}645x^2;$$

$$\varphi_3(x) = 1{,}8423 + 0{,}004374x + 0{,}006212x^3;$$

$$\varphi_4(x) = -30{,}56 - 12{,}1092x + 61{,}4307e^x.$$

Порівняння отриманих формул $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x)$ за критерієм мінімуму $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi_k(x_{\text{i}}))^2$, $k = 1{,}2{,}3{,}4$ дозволило встановити, що функція $\varphi_2(x) = 2{,}9782 + 1{,}83x + 0{,}645x^2$ найкраще апроксимує початкову функцію $f(x)$, яка представлена в табличному вигляді.

Таблиця 7.11. **Початкові дані та проміжні результати розрахунків за методом найменших квадратів**

№	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_i^5	e^{x_i}	e^{2x_i}	$x_i e^{x_i}$	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$	$y_i x_i^3$	$y_i e^{x_i}$	$\varphi_1(x_i)$	$\varphi_2(x_i)$
1	-1,2	1,8	1,44	-1,728	2,074	-2,488	0,3012	0,0907	-0,3614	-2,16	2,592	-3,11	0,5422	1,61434	1,711
2	-1,4	1,7	1,96	-2,744	3,8416	-5,378	0,2466	0,0608	-0,3452	-2,38	3,332	-4,66648	0,4192	1,6851	1,6804
3	-1,6	1,4	2,56	-4,096	6,554	-10,486	0,202	0,0408	-0,3232	-2,24	3,584	-5,7344	0,2828	1,7558	1,7014
4	-1,7	1,6	2,89	-4,913	8,352	-14,199	0,1827	0,0334	-0,3106	-2,72	4,624	-7,86	0,2923	1,7912	1,73125
5	-1,8	1,9	3,24	-5,832	10,498	-18,896	0,11653	0,0273	-0,2975	-3,42	6,156	-11,08	0,3141	1,8266	1,774
6	-1,9	2	3,61	-6,859	13,032	-24,76	0,1496	0,0223	-0,2842	-3,8	7,22	-13,718	0,2992	1,86193	1,8297
7	-2	2,1	4	-8	16	-32	0,1353	0,0183	-0,2706	-4,2	8,4	-16,8	0,2841	1,8973	1,8982
8	-2,2	1,9	4,84	-10,648	23,43	-51,54	0,1108	0,0123	-0,2438	-4,18	9,196	-20,231	0,2105	1,968	2,074
$\sum$	-13,8	14,4	24,54	-44,82	83,782	-159,747	1,494	0,306	-2,4365	-25,1	45,104	-83,2	2,6444	-	-

Продовження табл. 7.11.

№	x_i	y_i	$\varphi_3(x_i)$	$\varphi_4(x_i)$	$y_i-\varphi_1(x_i)$	$y_i-\varphi_2(x_i)$	$y_i-\varphi_3(x_i)$	$y_i-\varphi_4(x_i)$	$(y_i-\varphi_1(x_i))^2$	$(y_i-\varphi_2(x_i))^2$	$(y_i-\varphi_3(x_i))^2$	$(y_i-\varphi_4(x_i))^2$
1	-1,2	1,8	1,8263	2,4736	0,18566	0,089	0,0263	0,6736	0,0345	0,007921	0,000691	0,4537
2	-1,4	1,7	1,8191	1,5415	0,0149	0,0196	0,1191	0,1585	0,000222	0,000384	0,01418	0,0251
3	-1,6	1,4	1,80986	1,21736	0,3558	0,3014	0,40986	0,18284	0,1266	0,0908	0,168	0,0334
4	-1,7	1,6	1,8043	1,248	0,1912	0,13125	0,2043	0,352	0,03656	0,01723	0,04174	0,124
5	-1,8	1,9	1,7982	1,391	0,0734	0,126	0,1018	0,509	0,005388	0,01588	0,01036	0,259
6	-1,9	2	1,7914	1,6356	0,13807	0,1703	0,2086	0,3644	0,01906	0,029	0,0435	0,1328
7	-2	2,1	1,7839	1,9721	0,2027	0,2018	0,3161	0,1279	0,04109	0,0407	0,1	0,0164
8	-2,2	1,9	1,7665	2,887	0,068	0,174	0,1335	0,987	0,004624	0,03028	0,0178	0,9741
$\sum$	-	-	-	-	-	-	-	-	0,26804	0,2322	0,3963	2,0185

Контрольні запитання

1. Як формулюється задача інтерполяції?

2. В чому полягає алгебраїчна інтерполяція?

3. Дайте визначення вузлів інтерполяції та інтерполюючої функції.

4. Яке геометричне розуміння інтерполяції?

5. У чому полягає поліноміальна інтерполяція?

6. Який вигляд має інтерполяційний многочлен Лагранжа?

7. Як визначаються коефіцієнти Лагранжа, який вигляд вони мають та їх властивості?

8. Яке значення має залишковий член полінома Лагранжа.

9. Як визначити точність інтерполяції функції поліномом Лагранжа?

10. Які переваги та недоліки інтерполяції функції поліномом Лагранжа?

11. В яких випадках слід використовувати поліном Лагранжа?

12. Що таке "кінцеві різниці"? Як обчислюються кінцеві різниці?

13. Які властивості мають кінцеві різниці? Де вони використовуються?

14. Який вигляд має перша інтерполяційна формула Ньютона при рівновіддалених вузлах інтерполяції?

15. Як представляється друга інтерполяційна формула Ньютона?

16. Що означає інтерполяція "вперед" та інтерполяція "назад"?

17. Як оцінити похибку інтерполяції формулами Ньютона?

18. Які переваги та недоліки інтерполяції функцій поліномами Ньютона?

18. Що таке екстраполяція?

19. Як виконується обернена інтерполяція?

20. Що таке сплайн?

21. Які переваги має інтерполяція функцій сплайнами?

22. Як будується кубічний сплайн?

23. Методи обчислення коефіцієнтів кубічного сплайну.

24. Як оцінити похибку інтерполяції функції кубічним сплайном?

25. Що таке розділені різниці?

26. Як обчислюються розділені різниці?

27. Який вигляд має перша інтерполяційна формула Ньютона при нерівновіддалених вузлах?

28. Як представляється друга інтерполяційна формула Ньютона при нерівновіддалених вузлах?

29. Чому дорівнюють похибки інтерполяції функцій формулами Ньютона при нерівновіддалених вузлах?

30. Як визначається середнє квадратичне наближення функцій?

31. У чому геометричне розуміння згладжування функцій?

32. Яка сутність методу найменших квадратів?

33. Як обчислюються коефіцієнти апроксимуючих функцій?

34. Як реалізується апроксимація функцій ортогональними многочленами?

35. Як визначити похибку апроксимації функцій?

Задачі для самоконтролю

1. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд першої інтерполяційної формули Ньютона для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в п'яти рівновіддалених вузлах на інтервалі $[0{,}8; 4{,}4]$: $y_0 = -14{,}7$; $y_1 = -8{,}2$; $y_2 = -5{,}3$; $y_3 = -1{,}4$; $y_4 = -7{,}5$. Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x_0 = 0{,}93$.

2. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд першої інтерполяційної формули Ньютона для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в п'яти рівновіддалених вузлах на інтервалі $[0{,}2; 4{,}8]$: $y_0 = -0{,}8$; $y_1 = -1{,}7$; $y_2 = -3{,}8$; $y_3 = -0{,}2$; $y_4 = -3{,}0$. Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 0{,}41$.

3. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд другої інтерполяційної формули Ньютона для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в п'яти рівновіддалених вузлах на інтервалі $[1{,}0; 5{,}6]$: $y_0 = 4{,}6$; $y_1 = 10{,}2$; $y_2 = 8{,}5$; $y_3 = 4{,}7$; $y_4 = 2{,}1$. Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 4{,}82$.

4. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд другої інтерполяційної формули Ньютона для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в п'яти рівновіддалених вузлах на інтервалі $[2{,}2; 6{,}4]$: $y_0 = -5{,}6$; $y_1 = -3{,}2$; $y_2 = -1{,}5$; $y_3 = -4{,}5$; $y_4 = -7{,}0$. Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 5{,}41$.

5. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд інтерполяційного поліному Лагранжа для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в семи вузлах інтерполяції:

x	-1,5	-1,3	-1,0	-0,5	-0,2	-0,1	0,2
y	1,6	1,3	1,2	1,4	1,7	1,9	1,95

Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = -1{,}2$.

6. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд інтерполяційного поліному Лагранжа для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в семи вузлах інтерполяції:

x	1,3	1,5	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2
y	0,81	0,64	0,57	0,82	0,99	1,02	1,17

Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 1{,}43$.

7. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд першої інтерполяційної формули Ньютона для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в семи вузлах інтерполяції:

x	1,1	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3	0,2
y	2,1	2,8	3,3	2,5	2,0	1,8	1,7

Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 0{,}83$.

8. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд другої інтерполяційної формули Ньютона для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в семи вузлах інтерполяції:

x	1,2	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,0
y	2,1	2,0	1,9	2,5	2,7	2,9	2,8

Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 1{,}84$.

9. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд кубічних сплайнів для функції $y = f(x)$ що задана своїми значеннями в семи вузлах інтерполяції:

x	2,2	2,0	1,8	1,7	1,5	1,3	1,2
y	1,33	1,48	1,5	1,28	1,05	0,98	0,64

Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 1{,}95$.

10. Визначити коефіцієнти та загальний вигляд кубічних сплайнів для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в семи вузлах інтерполяції:

x	-2,1	-1,2	0,54	1,0	1,5	1,6	1,7
y	1,2	1,4	1,7	1,4	1,2	1,0	0,3

Обчислити значення отриманого поліному в наданій точці $x = 1{,}54$.

11. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,2	1,4
y	1,81	1,64	1,55	1,79	2,06	2,15	2,33	2,56

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2.$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує задану таблицею функцію $f(x)$.

12. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	2,2	2,0	1,8	1,7	1,5	1,3	1,2	1,0
y	1,33	1,48	1,5	1,28	1,05	0,98	0,64	0,33

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 x^2.$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує задану таблицею функцію $f(x)$.

13. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	-1,2	-1,4	-1,6	-1,7	-1,8	-1,9	-2,0	-2 2
y	1,8	1,7	1,4	1,6	1,9	2,0	2,1	1,9

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 x + C_2 e^x.$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує задану таблицею функцію $f(x)$.

14. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8
y	4,7	3,8	3,5	3,9	4,0	4,2	4,7	4,9

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 \ln x$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує таблицею задану функцію $f(x)$.

15. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,2	1,4
y	1,81	1,64	1,55	1,79	2,06	2,15	2,33	2,56

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 \sin x$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує таблицею задану функцію $f(x)$.

16. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	2,2	2,1	2,0	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
y	1,3	1,7	1,9	2,5	3,7	4,1	5,8	7,5

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x^2;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 e^x.$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує таблично задану функцію $f(x)$.

17. Для функції $y = f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1
y	1,48	1,55	1,69	1,3	1,0	0,9	0,7	0,4

Визначити коефіцієнти апроксимуючих функцій $\varphi(x)$ методом найменших квадратів такого виду:

$$\varphi_1(x) = C_0 + C_1 x^2;$$
$$\varphi_2(x) = C_0 + C_1 \frac{1}{x}.$$

Встановити, яка із функцій $\varphi(x)$ найкраще апроксимує таблицею задану функцію $f(x)$.

8. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ І ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

8.1. Чисельне диференціювання функцій за допомогою інтерполяційних поліномів

Чисельне диференціювання застосовується при вирішенні задач, в яких потрібно знайти похідну деякого порядку функції, що задана таблично або у вигляді складного аналітичного виразу.

Нехай функція $f(x)$ задана значеннями $y_i = f(x_i)$ в n + 1-й точці x_i, $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ відрізка $[a; b]$. Загальний метод одержання формул чисельного диференціювання полягає в апроксимації табличних значень функції будь-яким інтерполяційним многочленом $P_n(x)$ [6, 19]. Шукані значення похідних функції в будь-якій точці відрізка $[a; b]$ наближено представляються через відповідні значення похідних цього многочлена:

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x), 0 \le k \le n, x \in [a; b]. \tag{8.1}$$

Якщо відома похибка інтерполяційної формули

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|,$$

то похибки похідних визначаються як:

$$\left|R_n^{(k)}(x)\right| = \left|f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)\right|,\ 0 \le k \le n. \tag{8.2}$$

Розглянемо окремі випадки формул чисельного диференціювання, в яких функція $f(x)$ наближається інтерполяційними поліномами Ньютона та Лагранжа.

Використання інтерполяційних формул Ньютона.

Нехай функція $f(x)$, задана на відрізку $[a; b]$ таблицею значень в рівно розташованих точках x_i, $i = (0, 1, 2, ..., n)$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, апроксимується інтерполяційним поліномом Ньютона для інтерполяції вперед (7.11) [6, 19]:

$$\begin{gathered}f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,\end{gathered} \tag{8.3}$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Послідовно диференціюючи многочлен (8.3) по змінній x і враховуючи, що

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{df(x)}{dt} \cdot \frac{1}{h},$$

отримаємо формули для наближеного обчислення похідних функції: $f(x)$

$$\begin{gathered}
f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \right. \\
\left. + \frac{5t^4-40t^3-18t^2+22t-6}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right]; \\
f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!}\Delta^4 y_0 + \right. \\
\left. + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right]; \\
f'''(x) \approx \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 + \frac{24t-36}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{60t^2-240t+210}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right]; \\
f^{IV}(x) \approx \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0 + \frac{120t-240}{5!}\Delta^5 y_0 + \ldots\right].
\end{gathered} \tag{8.4}$$

Формули (8.4) зручно застосовувати, якщо точка x розташована ближче до лівого кінця відрізка диференціювання $[a; b]$. Для обчислення значення похідної в точці, що знаходься ближче до правого кінця відрізка $[a; b]$, можна скористатися інтерполяційним поліномом Ньютона для інтерполяції назад (7.13):

$$\begin{gathered}
f(x) \approx y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\
+ \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,
\end{gathered} \tag{8.5}$$

де $t = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Диференціюючи (8.5), отримаємо формули для наближеного обчислення похідних функції [6]:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots \right];$$
$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{n-2} + (t+1)\Delta^3 y_{n-3} + \frac{12t^2+36t+22}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{20t^3+120t^2+210t+100}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots \right]; \qquad (8.6)$$
$$f'''(x) \approx \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_{n-3} + \frac{24t+36}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{60t^2+240t+210}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots \right];$$
$$f^{IV}(x) \approx \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_{n-4} + \frac{120t+240}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots \right].$$

Якщо потрібно обчислити похідні в вузлах інтерполяції x_i, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, то формули (8.4) і (8.6) спрощуються. Оскільки будь-яку точку можна прийняти за початкову, то, поклавши в (8.4) $x = x_0, (t = 0)$, отримаємо формули для обчислення значень похідних [6]:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \ldots \right];$$
$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots \right]; \qquad (8.7)$$
$$f'''(x_0) \approx \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{6}\Delta^5 y_0 - \ldots \right];$$
$$f^{IV}(x_0) \approx \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0 + 2\Delta^5 y_0 + \ldots \right] \; і \;\; т.д.$$

При $x = x_n$ формула першої похідної буде мати вигляд:

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots \right] \quad \text{тощо.} \qquad (8.8)$$

Для визначення похибки чисельного диференціювання за допомогою інтерполяційних формул Ньютона обмежимось різницями до k-го порядку, що має такий його залишковий член:

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) = h^{k+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi), \qquad (8.9)$$

де ξ деяке число, що розташоване між вузлами інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_n$ і x.

Після диференціювання (8.9) по x і при $x = x_0$, тобто $t = 0$, отримаємо похибку для першої похідної функції [6, 19]

$$\left|R_k(x_0)\right| = \left|(-1)^k \frac{h^k}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)\right|. \tag{8.10}$$

Для практичного використання формула (8.10) при визначенні похибки чисельного диференціювання мало придатна, тому що зазвичай не відома похідна $f^{(k+1)}(x)$. Тому при невеликих k можна наближено замінити її похідну виразом через кінцеві різниці і представити похибку чисельного диференціювання у вигляді:

$$\left|R_k(x_0)\right| = \left|\frac{(-1)^k}{h} \frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}\right|. \tag{8.11}$$

Аналогічно визначають оцінки похибки для похідних вищих порядків.

Треба врахувати, що мінімальна кількість вузлів, що необхідна для обчислення k-ої похідної, дорівнює $k+1$. При використанні більшої кількості вузлів отримують формули вищого порядку точності.

Приклад. Визначити наближене значення похідних $f'(x)$ та $f''(x)$ функції $f(x) = e^{-x^3}$ в вузлі інтерполяції, що задана таблицею значень с кроком $h = 0{,}1$.

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	0,99	0,9608	0,9139	0,8524	0,7788

Розв'язок. Для обчислення похідних згідно з (8.7) складемо таблицю 8.1 кінцевих різниць.

Таблиця 8.1. **Значення кінцевих різниць функції $f(x)$ з кроком 0,1**

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1	-0,01	-0,0192	0,0025	-0,0004	0,0008
0,1	0,99	-0,0292	-0,0167	0,0021	0,0004	
0,2	0,9608	-0,0469	-0,0146	0,0025		
0,3	0,9139	-0,0615	-0,0121			
0,4	0,8524	-0,0736				
0,5	0,7788					

Вважаючи, що $x = x_0$ та використовуючи формулу (8.7) і обмежуючись різницями четвертого порядку, отримуємо:

$$f'(0) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 + ...] = \frac{1}{0{,}1}[-0{,}01 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0192 +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot 0{,}0025 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}0004] = 0{,}0083;$$

$$f''(0) \approx \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + ...] = \frac{1}{0{,}01}[-0{,}0192 -$$

$$-0{,}0025 - \frac{11}{12}\cdot 0{,}0004] = -2{,}206.$$

Відповідь: $f'(0) \approx 0{,}0083;\quad f''(0) \approx -2{,}206.$

Точні значення похідних відповідно дорівнюють:

$$f'(0) = -2x \cdot e^{-x^2}\Big|_{x=0} = 0; \quad f''(0) = (4x^2 - 2)\cdot e^{-x^2}\Big|_{x=0} = -2.$$

Визначимо похибку обчислення похідних через кінцеві різниці п’ятого порядку:

$$|R_4'(0)| \approx \frac{1}{5h}|\Delta^5 y_0| = \frac{1}{5\cdot 0{,}1}\cdot 0{,}0008 = 0{,}0016,$$

$$|R_4''(0)| \approx \frac{5}{6h^2}|\Delta^5 y_0| = \frac{5}{6\cdot 0{,}1^2}\cdot 0{,}0008 = 0{,}0667.$$

Треба зазначити, що зі збільшенням порядку похідної точність формул чисельного диференціювання різко падає. На практиці їх застосовують для обчислення похідних не вище другого порядку.

Застосування інтерполяційного полінома Лагранжа. Функцію $f(x)$, що задана на відрізку $[a;b]$ значеннями $y_i = f(x_i)$ в рівновіддалених точках $x_i = (i = 0, 1, \ldots, n)$ $\quad h = (x_{i+1} - x_i)$, замінимо наближено інтерполяційним поліномом Лагранжа [6]:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-1)!}\frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}y \tag{8.12}$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Якщо продиференціювати цю формулу по x, отримуємо такий вигляд першої похідної:

$$.f'(x) \approx \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-1}y_i}{i!(n-i)!}\frac{d}{dt}\left[\frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}\right]. \tag{8.13}$$

З врахуванням виразу похибки інтерполяційної формули Лагранжа

$$R_n(x) = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+i)!}\omega_n(x)\right| \tag{8.14}$$

та після її диференціювання отримаємо оцінку похибки для похідної функції в вузлах інтерполяції

$$R_n(x_i) = \left|(-1)^{n-i}h^n\frac{i!(n-i)!}{(n+i)!}f^{(n+1)}(\xi)\right|, \tag{8.15}$$

де $\xi \in [a;b]$.

У формулі (8.13) похідна функції виражається не через кінцеві різниці, а через її значення в вузлах інтерполяції. Наведемо часткові випадки, що дозволяють обчислювати похідні функції і їх похибки в вузлах при фіксованому n [6].

При $n = 2$ (значення функції задані в трьох точках) отримаємо значення перших похідних:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi), \\ f'(x_1) &= \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \\ f'(x_2) &= \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi), \end{aligned} \tag{8.16}$$

і других похідних:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - hf'''(\xi), \\ f''(x_1) &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}f'''(\xi), \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + hf'''(\xi). \end{aligned} \tag{8.17}$$

При використання чотирьох вузлів інтерполяції $(n=3)$ отримаємо такі вирази для визначення перших похідних:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi),\\
f'(x_1) &= \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi),\\
f'(x_2) &= \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi),\\
f'(x_3) &= \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi),
\end{aligned}
\tag{8.18}
$$

і других похідних:

$$
\begin{aligned}
f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12} h^2 f^{IV}(\xi),\\
f''(x_1) &= \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi),\\
f''(x_2) &= \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi),\\
f''(x_3) &= \frac{1}{h^2}(-0y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12} h^2 f^{IV}(\xi).
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

На практиці найбільш застосовні наступні формули чисельного диференціювання для будь-якого внутрішнього вузла x_i:

$$
f_1'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi),
\tag{8.20}
$$

$$
f_2'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),
\tag{8.21}
$$

$$
f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi),
\tag{8.22}
$$

які можуть бути отримані з (8.13), (8.16), (8.17) і (8.19).

Треба відзначити, що зі зменшенням кроку h для досить гладенької функції величина залишкового члена в формулах диференціювання, тобто похибка методу, зменшується. При цьому значення похідних більш точні в вузлах, що розташовані посередині рівномірно сітки. Обчислювальна похибка, що викликана неточним завданням значень функції y_i, а також помилками, що виникають при обчисленні кінцевих різниць, збільшується при зменшенні h і зростанні порядку похідної [6].

Як видно з (8.20) – (8.22), при малих значення h функції в сусідніх вузлах майже однакові, тому при обчисленні їх різниці зникають значущі цифри. Ділення на h^k, якщо h мало, може призвести до великої абсолютної похибки в значеннях k-ої похідної. Таким чином, задача апроксимації похідних є за своєю природою нестійкою.

Якщо функція задана в вузлах з абсолютно похибкою ε то для конкретної формули чисельного диференціювання можна приблизно вказати оптимальний крок h диференціювання. Наприклад, визначимо похибку методу для (8.21)

$$\left|R'(x_i)\right| = \frac{h^2}{6} M_3, \quad \text{де } M_3 = \max_{x_{i-1}<x<x_{i+1}} \left|f'''(x)\right|,$$

і помилку, що викликана похибкою вихідних даних $\dfrac{2\varepsilon}{2h} = \dfrac{\varepsilon}{h}$.

Сумарна похибка (без врахування похибок округлення)

$$\frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h}, \tag{8.23}$$

приймає мінімальне значення при $h = \sqrt[3]{\dfrac{3\varepsilon}{M_3}}$.

Виконавши аналогічні викладки для (8.23), отримаємо такий вираз для оптимального кроку:

$$h = 2\sqrt[4]{\frac{4\varepsilon}{M_4}}, \tag{8.24}$$

де $M_4 = \max\limits_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}} \left|f^{IV}(x)\right|$.

Формули (8.23) і (8.24) можна застосовувати в тому випадку, якщо відомі оцінки відповідних похідних.

Оцінку похибки формули чисельного диференціювання можна визначати за правилом Рунге, якщо залишковий член формули має структуру

$$R_{(x)}^{(k)} = f^{(k)}(x) - P_n^k(x,h) = \varphi(x) h^p + O(h^{p+1}), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8.25}$$

Обчислимо похідну за вказаною формулою на рівномірній сітці вузлів спочатку з кроком h, а потім з кроком rh.

Ураховуючи те, що

$$f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x, rh) = \varphi(x)(rh)^p + O((rh)^{p+1}),$$
$$O(h^{p+1}) \approx O((rh)^{p+1}),$$

отримаємо наступну оцінку похибки

$$R^{(k)}(x) \approx \phi(x)h^p = \frac{P_n^{(k)}(x,h) - P_n^{(k)}(x,rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1}). \qquad (8.26)$$

Тоді початкову формулу чисельного диференціювання k-го порядку можна уточнити, вважаючи

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x,h) + \frac{P_n^{(k)}(x,h) - P_n^{(k)}(x,rh)}{r^p - 1}, \; k = 1, 2, ... \qquad (8.27)$$

Приклад. Визначити значення першої та другої похідних функції $f(x)$ в точці $x = 0{,}75$ на інтервалі [0,7; 1,1] шляхом представлення функції $f(x) = th(x)$ в 6 точках інтервалу з кроком $h = 005$, використовуючи інтерполяційні формули Ньютона і Лагранжа. Визначити похибки обчислень похідних порівнюючи результати чисельного і аналітичного диференціювання функції.

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0{,}75 - 0{,}7}{0{,}05} = 1.$$

Розв'язок. Для обчислення похідних $f'(x)$ та $f''(x)$ за допомогою інтерполяційних формул Ньютона визначимо кінцеві різниці, значення яких представлено в таблиці 8.2.

Таблиця 8.2. **Розрахункові значення кінцевих різниць функції $f(x)$ з кроком 0,05**

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
0,7	0,6044	0,0307	-0,0018	$-1\cdot10^{-16}$	-0,0001	0,0004	-0,009
0,75	0,6351	0,0289	-0,0018	-0,0001	0,0003	-0,0005	
0,8	0,6640	0,0271	-0,0019	0,0002	-0,0002		
0,85	0,6911	0,0252	-0,0017	10^{-16}			
0,9	0,7163	0,0235	-0,0017				
0,95	0,7398	0,0218					
1	0,7616						

При використанні першої інтерполяційної формули Ньютона визначимо $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0{,}75 - 0{,}7}{0{,}05} = 1$.

Тоді, вважаючи, що $x = x_0$ та використовуючи формулу (8.4) і обмежуючись різницями четвертого порядку, отримуємо:

$$f(x) \approx y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\Delta^3 y_0 - \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\Delta^4 y_0 + \\ + \frac{5t^4 - 40t^3 + 105t^2 - 100t + 24}{5!}\Delta^5 y_0 + \\ + \frac{6t^5 - 75t^4 + 340t^3 - 675t^2 + 548t - 120}{5!}\Delta^6 y_0];$$

$$f'(0{,}75) \approx \frac{1}{0{,}05}\Bigg[0{,}0807 + \frac{2\cdot 1 - 1}{2}(-0{,}0018) + \frac{3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 2}{2\cdot 3}(-1\cdot 10^{-16}) - \\ - \frac{4\cdot 1^3 - 18\cdot 1^2 + 22\cdot 1 - 6}{2\cdot 3\cdot 4}(-0{,}0001) + \\ + \frac{5\cdot 1^4 - 40\cdot 1^3 + 105\cdot 1^2 - 100\cdot 1 + 24}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 0{,}0004 + \\ + \frac{6\cdot 1^5 - 75\cdot 1^4 + 340\cdot 1^3 - 675\cdot 1^2 + 548\cdot 1 - 120}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot(-0{,}0009)\Bigg] = 0{,}594833,$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\Bigg[\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \\ + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{120}\Delta^5 y_0 + \frac{30t^4 - 300t^3 + 1020t^2 - 1350t + 548}{720}\Delta^6 y_0\Bigg],$$

$$f''(0{,}75) = \frac{1}{0{,}05^2}\Bigg[-0{,}0018 + (1-1)\cdot(-1\cdot 10^{-16}) + \frac{6\cdot 1^2 - 18\cdot 1 + 11}{12}(-0{,}0001) + \\ + \frac{20\cdot 1^3 + 20\cdot 1^2 + 210\cdot 1 - 100}{120}0{,}00047 + \\ + \frac{30\cdot 1^4 - 300\cdot 1^3 + 1020\cdot 1^2 - 1350\cdot 1 + 548}{720}(-0{,}0009)\Bigg] = -0{,}6773.$$

Відповідно, при використанні другої інтерполяційної формули Ньютона (8.6) маємо:

$$t = \frac{x - x_6}{h} = \frac{0{,}75 - 1}{0{,}05} = -5\,.$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_5 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_4 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\Delta^3 y_3 - \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\Delta^4 y_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5t^4 - 40t^3 + 105t^2 - 100t + 24}{5!}\Delta^5 y_1 + \frac{6t^5 - 75t^4 + 340t^3 - 675t^2 + 548t - 120}{5!}\Delta^6 y_0 \right];$$

$$f'(0{,}75) \approx \frac{1}{0{,}05}\left[0{,}0218 + \frac{2\cdot(-5)-1}{2}(-0{,}0017) + \frac{3\cdot(-5)^2 - 6\cdot(-5)+2}{2\cdot 3}(10^{-16}) - \right.$$

$$- \frac{4\cdot(-5)^3 - 18\cdot(-5)^2 + 22\cdot(-5) - 6}{2\cdot 3\cdot 4}(-0{,}0002) +$$

$$\frac{5\cdot 1^4 - 40\cdot(-5)^3 + 105\cdot(-5)^2 - 100\cdot(-5) + 24}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot(-0{,}0005) +$$

$$\left. + \frac{6\cdot(-5)^5 - 75\cdot(-5)^4 + 340\cdot(-5)^3 - 675\cdot(-5)^2 + 548\cdot(-5) - 120}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot(-0{,}0009)\right] = 0{,}59483.$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_4 + (t-1)\Delta^3 y_3 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12}\Delta^4 y_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{120}\Delta^5 y_1 + \frac{30t^4 - 300t^3 + 1020t^2 - 1350t + 548}{720}\Delta^6 y_0 \right]$$

$$f''(0{,}75) = \frac{1}{0{,}05^2}\left[-0{,}0017 + (-5+1)\cdot 10^{-16} + \frac{12\cdot(-5)^2 + 36\cdot(-5) + 22}{12}(-0{,}0002) + \right.$$

$$+ \frac{20\cdot(-5)^3 + 120\cdot(-5)^2 + 210\cdot(-5) - 100}{120}\cdot(-0{,}0005) +$$

$$\left. + \frac{30\cdot(-5)^4 - 300\cdot(-5)^3 + 1020\cdot(-5)^2 - 1350\cdot(-5) + 548}{720}(-0{,}0009)\right] = -0{,}67733.$$

Для визначення похідних використовуємо формули Лагранжа (8.20) – (8.22). Тоді

$$f_1'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \Rightarrow f_1'(0{,}75) = \frac{0{,}6351 - 0{,}6044}{0{,}05} = 0{,}614,$$

$$f_2'(x_i)=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\Rightarrow f_2'(0{,}75)=\frac{0{,}6640-0{,}6044}{2\cdot 0{,}05}=0{,}596,$$

$$f''(x_i)=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}\Rightarrow f''(0{,}075)=\frac{0{,}6640-2\cdot 0{,}6351+0{,}6040}{0{,}05^2}=-0{,}72.$$

Визначаємо першу та другу похідну аналітичним методом:

$$f(x)=th(x);\quad f'(x)=(th(x))'=sh^2(x);\quad f''(x)=-2sh^2(x)th(x)$$

$$f'(0{,}75)=sh^2(0{,}75)=0{,}59658;\; f''(0{,}75)=-2sh^2(0{,}75)th(0{,}75)=-0{,}75781.$$

Відповідь. Отримано такі наближені значення похідних функції та похибок обчислення шляхом використання:

– першої інтерполяційної формули Ньютона:

$$f'(0{,}75)\approx 0{,}594833;$$

$$\Delta=\left|f'(0{,}75)-f_a'(0{,}75)\right|=\left|0{,}594833-0{,}59658\right|=0{,}001747\,;$$

$$\delta=\frac{\Delta}{f_a'(0{,}75)}=\frac{0{,}001747}{0{,}59658}=0{,}002928\,;$$

$$f''(0{,}75)\approx -0{,}6773;$$

$$\Delta=\left|f''(0{,}75)-f_a''(0{,}75)\right|=\left|-0{,}6773+0{,}75781\right|=0{,}08051\,;$$

$$\delta=\frac{\Delta}{f_a''(0{,}75)}=\frac{0{,}08051}{0{,}75781}=0{,}10629\,;$$

– другої інтерполяційної формули Ньютона

$$f'(0{,}75)\approx 0{,}594833;$$

$$\Delta=\left|f'(0{,}75)-f_a'(0{,}75)\right|=\left|0{,}594833-0{,}59658\right|=0{,}001747\,;$$

$$\delta=\frac{\Delta}{f_a'(0{,}75)}=\frac{0{,}001747}{0{,}59658}=0{,}002928\,;$$

$$f''(0{,}75)\approx -0{,}6773;$$

$$\Delta=\left|f''(0{,}75)-f_a''(0{,}75)\right|=\left|-0{,}6773+0{,}75781\right|=0{,}08051\,;$$

$$\delta=\frac{\Delta}{f_a''(0{,}75)}=\frac{0{,}08051}{0{,}75781}=0{,}10629\,;$$

– формул Лагранжа :

а) $f'(0{,}75) \approx 0{,}614; \quad \Delta = \left|f_1'(0{,}75) - f_a'(0{,}75)\right| = \left|0{,}614 - 0{,}59658\right| = 0{,}01742$;

$$\delta = \frac{\Delta}{f_a'(0{,}75)} = \frac{0{,}01742}{0{,}59658} = 0{,}00292;$$

б) $f'(0{,}75) \approx 0{,}596; \quad \Delta = \left|f_2'(0{,}75) - f_a'(0{,}75)\right| = \left|0{,}596 - 0{,}59658\right| = 0{,}00058$;

$$\delta = \frac{\Delta}{f_a'(0{,}75)} = \frac{0{,}00058}{0{,}59658} = 0{,}000972.$$

$f''(0{,}75) \approx -0{,}72; \quad \Delta = \left|f''(0{,}75) - f_a''(0{,}75)\right| = \left|-0{,}72 + 0{,}75781\right| = 0{,}03781$;

$$\delta = \frac{\Delta}{f_a''(0{,}75)} = \frac{0{,}03781}{0{,}75781} = 0{,}04989.$$

Приклад. Визначити значення першої та другої похідних функції $y = f(x) = x^3 + \dfrac{8}{\sqrt{1+x^2}}$ в точці $x = 0{,}9$, використовуючи інтерполяційні формули Ньютона і Лагранжа. Порівняти результати чисельного і аналітичного диференціювання функції.

Розв'язок. Для визначення похідних поділимо інтервал дослідження функції $f(x)$ $[0; 1{,}7]$, що включає точку x, на 5 рівних частини з кроком $h = \dfrac{(b-a)}{5} = \dfrac{1{,}7-0}{5} = 0{,}34.$

Таким чином представимо функцію $f(x)$ як:

x_i	0	0,34	0,68	1,02	1,36	1,70
$f(x_i)$	8	6,593	4,8898	3,602	3,175	3,869

Для застосування інтерполяційних формул Ньютона для обчислення похідних згідно з (8.4) і (8.6) визначимо кінцеві різниці функції з кроком h. Значення кінцевих різниць представимо в таблиці 8.3.

Таблиця 8.3. **Розрахункові значення кінцевих різниць функції $f(x)$ з кроком 0,34**

x_i	$f(x_i)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	8	-1,407	-0,2962	0,7116	-0,2662	0,081
0,34	6,593	-1,7032	0,4154	0,4454	-0,1852	
0,68	4,8898	-1,2878	0,8608	0,2602		
1,02	3,602	-0,427	1,121			
1,36	3,175	0,694				
1,7	3,869					

Обчислюємо похідні функції за допомогою першої інтерполяційної формулу Ньютона (8.4). Тоді при

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,9 - 0}{0,34} = 2,647,$$

отримаємо:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{4!}\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{5t^4 - 40t^3 - 18t^2 + 22t - 6}{5!}\Delta^5 y_0\right];$$

$$f'(0,9) \approx \frac{1}{0,34}\left[-1,407 + \frac{2 \cdot 2,647 - 1}{2}(-0,2962) + \right.$$
$$+ \frac{3 \cdot (2,647)^2 - 6 \cdot (2,647) + 2}{3!}(0,7116) +$$
$$+ \frac{4 \cdot (2,647)^3 - 18 \cdot (2,647)^2 + 22 \cdot (2,647) - 6}{4!}(-0,2662) +$$
$$\left. + \frac{5 \cdot (2,647)^4 - 40 \cdot (2,647)^3 - 18 \cdot (2,647)^2 + 22 \cdot (2,647) - 6}{5!}(0,081)\right] = -3,531.$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2 - 36t + 22}{4!}\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{5!}\Delta^5 y_0\right];$$

$$f''(0,9) \approx \frac{1}{(0,34)^2}\left[-0,2962 + (2,647 - 1)(0,7116) + \right.$$
$$+ \frac{12 \cdot (2,647)^2 - 36 \cdot (2,267) + 22}{4!}(-0,2662) +$$
$$\left. + \frac{20 \cdot (2,647)^3 - 120 \cdot (2,647)^2 + 210 \cdot (2,674) - 100}{5!}(0,081)\right] = 6,459.$$

Для визначення похідних використовуємо другу інтерполяційну формулу Ньютона (8.6). При

$$t = \frac{x - x_5}{h} = \frac{-0,8}{0,34} = -2,343,$$

будемо мати:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_4 + \frac{2t+1}{2}\Delta^2 y_3 + \frac{3t^2+6t+2}{3!}\Delta^3 y_2 + \frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!}\Delta^4 y_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{5t^4+40t^3+105t^2+100t+24}{5!}\Delta^5 y_0\right];$$

$$f'(0{,}9) \approx \frac{1}{0{,}34}\left[0{,}694 + \frac{2\cdot(-2{,}343)+1}{2}(1{,}121) + \right.$$
$$+ \frac{3\cdot(-2{,}343)^2+6\cdot(-2{,}343)+2}{3!}(0{,}2602) +$$
$$+ \frac{4\cdot(-2{,}343)^3+18\cdot(-2{,}343)^2+22\cdot(-2{,}343)+6}{4!}(-0{,}1852) +$$
$$+ \frac{5\cdot(-2{,}343)^4+40\cdot(-2{,}343)^3+105\cdot(-2{,}343)^2+100\cdot(-2{,}343)+24}{5!}\times$$
$$\times(0{,}081)] = -3{,}538;$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (t+1)\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2+36t+22}{4!}\Delta^4 y_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{20t^3+120t^2+210t+100}{5!}\Delta^5 y_0\right];$$

$$f''(0{,}9) \approx \frac{1}{(0{,}34)^2}[1{,}121 + (-2{,}343+1)(0{,}2602) +$$
$$+ \frac{12\cdot(-2{,}343)^2+36\cdot(-2{,}343)+22}{4!}\cdot(-0{,}1852) +$$
$$\left. + \frac{20\cdot(-2{,}343)^3+120\cdot(-2{,}343)^2+210\cdot(-2{,}343)+100}{5!}0{,}081\right] = 6{,}449.$$

Наближене обчислення похідних виконуємо шляхом використання інтерполяційних формул Лагранжа (8.20) – (8.22).

$$f'(x) \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{h}; \qquad f'(x) \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}; \qquad f''(x) \approx \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{y^2};$$

$$f'(0{,}9) \approx \frac{3{,}602-4{,}8898}{0{,}34} = -3{,}7876; \quad f'(0{,}9) \approx \frac{3{,}602-6{,}593}{0{,}68} = -4{,}399;$$

$$f'(0{,}9) \approx \frac{3{,}175-4{,}8898}{0{,}68} = -2{,}5218; \; f''(0{,}9) \approx \frac{6{,}593-2\cdot(4{,}8898)+3{,}602}{(0{,}34)^2} = 3{,}593;$$

$$f''(0{,}9) \approx \frac{4{,}8898-2\cdot(3{,}602)+3{,}175}{(0{,}34)^2} = 7{,}4464.$$

Для оцінювання результатів чисельного диференціювання функції виконаємо аналітичне обчислення похідних.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 - \frac{8x}{(1+x^3)^{3/2}}; \; f'(0{,}9) = 3\cdot(0{,}9)^2 - 3 - \frac{8\cdot(0{,}9)}{(1+0{,}9^3)^{3/2}} = -3{,}5268;$$

$$f''(x) = 6x - 8\frac{\sqrt{(1+x^2)^3} - 3x^2\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3};$$

$$f''(0{,}9) = 6\cdot(0{,}9) - 8\frac{\sqrt{(1+(0{,}9)^2)^3} - 3\cdot(0{,}9)^2\sqrt{1+(0{,}9)^2}}{(1+(0{,}9)^2)^3} = 6{,}525.$$

Відповідь. Отримано такі наближені значення першої та другої похідних функції $f(x)$ в точці $x = 0{,}9$ з використанням:

– першої інтерполяційної формули Ньютона: $f'(0{,}9) \approx -3{,}531$; $f''(0{,}9) \approx 6{,}459$;

– другої інтерполяційної формули Ньютона: $f'(0{,}9) \approx -3{,}538$; $f''(0{,}9) \approx 6{,}449$;

– формул Лагранжа $f'(0{,}9) \approx -3{,}7876$; $f''(0{,}9) \approx 7{,}4464$;

В результаті порівняння результатів чисельного і аналітичного методів визначення похідних функції в довільній точці встановлено, що використання інтерполяційних формул Ньютона і Лагранжа дозволяє розв'язати поставлену задачу з високою точністю.

8.2. Чисельне інтегрування функцій

При вирішенні багатьох інженерних задач доводиться обчислювати визначені інтеграли від функцій. З курсу математичного аналізу відомо, що для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$, і визначений інтеграл від цієї функції можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніця

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Однак первісна $F(x)$ не завжди є елементарно функцією. В додатках доводиться також обчислювати визначені інтеграли, якщо підінтегральна функція $f(x)$ не є елементарною, задається та табличною або графічно. Тоді формула Ньютона–Лейбніця не може бути застосована. Крім того, вираз для $F(x)$ може виявитися досить складним, що вимагає громіздких обчислень. У таких випадках застосовують формули наближеного інтегрування, що називаються квадратурними.

Ідея чисельних методів інтегрування полягає в заміні підінтегральної функції $f(x)$ деякою апроксимуючою функцією $\varphi(x)$, інтеграл від якої обчислюється просто. Зокрема якщо замінити функцію $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ інтерполяційним многочленом $P_k(x)$ з вузлами інтерполяції $x_i \in [a;b]$, то квадратурна формула набуде вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{k} A_i f(x_i). \tag{8.28}$$

Числа A_i називають вагами, а x_i – вузлами квадратурної формули. Ваги A_i не залежать від функції $f(x)$, а залежать тільки від вибору вузлів. Якщо вузли рівновіддалені з кроком $h = \dfrac{b-a}{k}$, то квадратурні формули (8.28) називають формулами Ньютона–Котеса при різних k.

Для підвищення точності квадратурної формули відрізок інтегрування розбивають на ряд часткових інтервалів, на кожному з яких підінтегральні функції замінюють інтерполяційним многочленом.

Якщо кінці відрізка $[a;b]$ і часткових інтервалів інтегрування вибираються в якості вузлів інтерполяції, то формулу називають квадратурної формулою замкнутого типу, в іншому випадку – відкритого типу.

Квадратурна формула називається точною для многочленів в степені k, якщо при заміні функції $f(x)$ довільним многочленом $P_k(x)$ степені k наближена рівність (8.39) стає точною.

Розглянемо найбільш часто застосовувані квадратурні формули, які є окремими випадками формул Ньютона-Котеса при $k = 0, 1, 2$.

Досить просто ці формули можна отримати із геометричного змісту визначеного інтегралу: якщо $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx -$ площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком $[a;b]$ осі OX, кривій $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$. При наближеному обчисленні криволінійну трапецію замінюють фігурою, обмеженою тим же відрізком $[a;b]$, площа S якої обчислюється значно простіше. Звідси отримують наближену формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S \quad ,$$

яку використовують для обчислення лише тоді, коли можна оцінити її похибку. Надалі розглядається функція $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, але отримані результати будуть вірні для будь-якої інтегрованої на $[a;b]$ функції.

Формула прямокутників. Ідея формули прямокутників полягає в тому, що на малому відрізку $[x_0; x_0+h]$ площа криволінійної трапеції приблизно дорівнює площі прямокутника з основою $[x_0; x_0+h]$ і висотою, що дорівнює ординаті в якійсь точці $\xi \in [x_0; x_0+h]$, тобто:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx f(\xi) \cdot h.$$

Залежно від того, яку точку відрізку $[x_0; x_0+h]$ обирають в якості $\xi,$ і отримують різновиди формули прямокутників.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками

$$a = x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h, ..., x_i = x_{i-1} + h, x_n = x_{n-1} + h = b,$$

де $h = \dfrac{b-a}{n}$.

На кожному частковому відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ замінимо відповідну криволінійну трапецію на прямокутник, висоту якого можна визначити по-різному.

Формула «лівих» прямокутників. Якщо вибрати в якості висоти прямокутника на кожному з відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ ординату в лівій границі часткового відрізка, тобто $y_{i-1} = f(x_{i-1}),$ то криволінійна трапеція заміниться на ступінчасту фігуру, площа S_i якій можна прийняти за площу прямокутника (рис. 8.1).

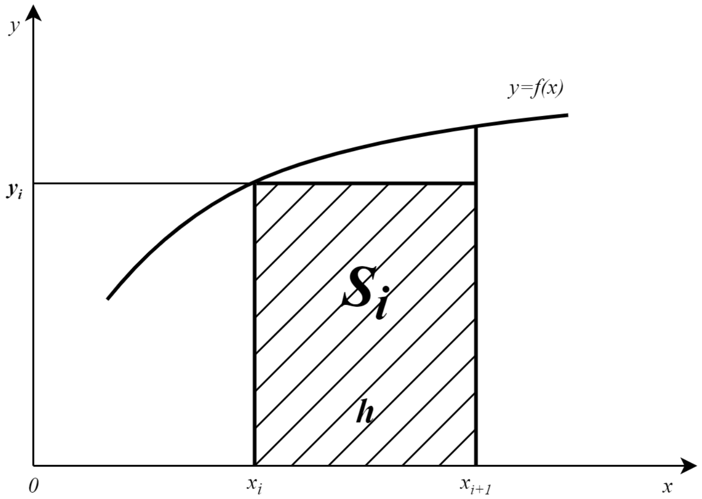


Рис. 8.1. Схема методу лівих прямокутників

Отже:

$$S_n = y_0 h + y_1 h + ... + y_{i-1} h + ... + y_{n-1} h = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}). \tag{8.29}$$

Отриману формулу називають формулою «лівих» прямокутників (рис. 8.2).

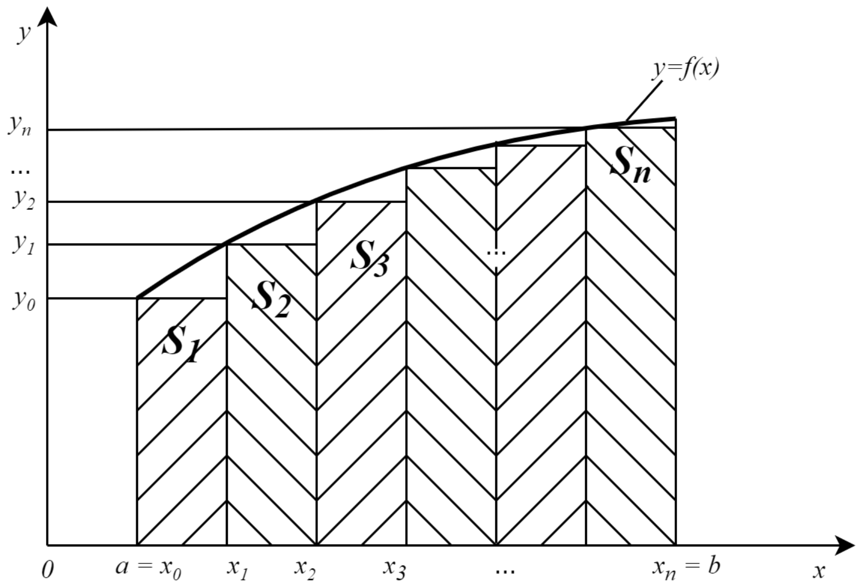


Рис. 8.2. Геометричне представлення методу лівих прямокутників

Формула «правих» прямокутників Якщо висотою прямокутника вибрати ординату правого кінця часткового відрізку (рис. 8.3), тобто висота прямокутника на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ дорівнює $y_i = f(x_i)$ при $(i = 1, 2, ..., n)$, то для наближеного обчислення інтеграла отримаємо формулу «правих» прямокутників (рис. 8.4):

$$S_n = y_1 h + y_2 h + \ldots + y_i h + \ldots + y_n h = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{8.30}$$

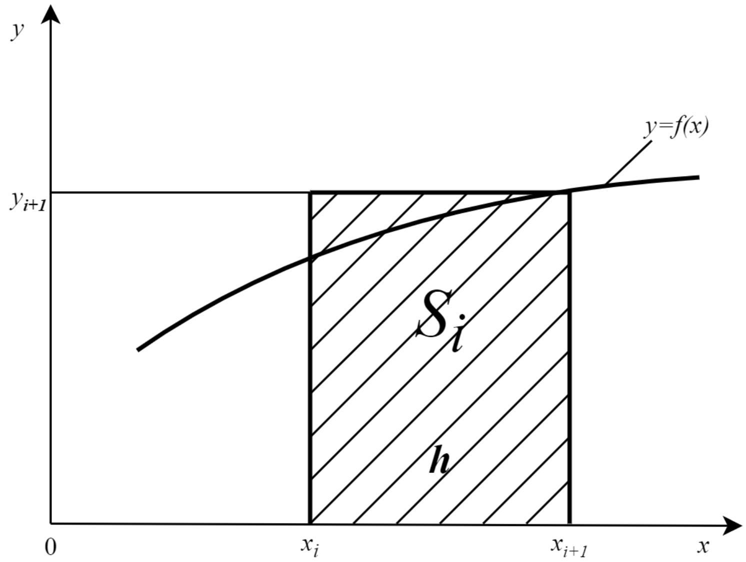


Рис. 8.3. Схема методу правих прямокутників

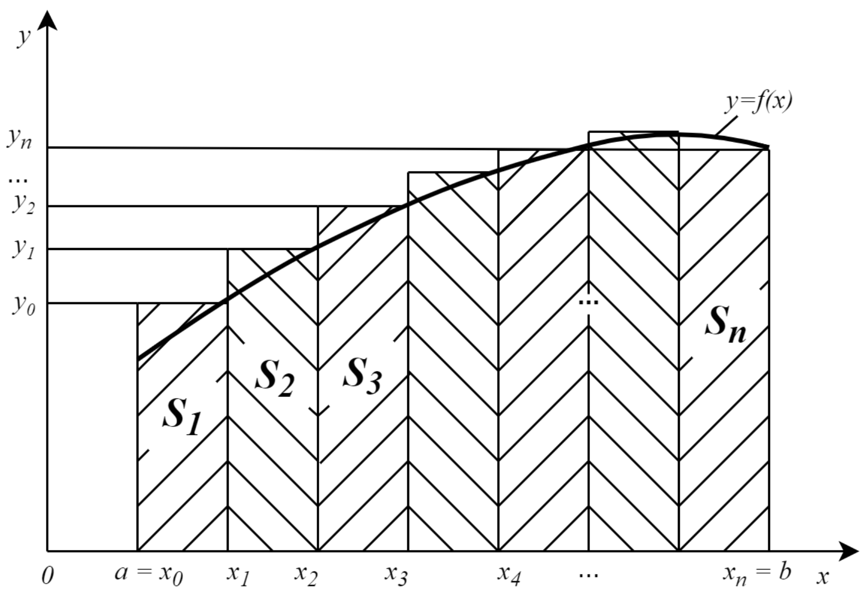


Рис. 8.4. Геометричне представлення методу правих прямокутників

Формула «середніх» прямокутників. Існує ще так звана формула «середніх» прямокутників або просто формула прямокутників. Висотою прямокутника, побудованого на частковому відрізку, вважають ординату, узяту в середній точці відрізку (рис. 8.5), тобто

$$f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)=f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)=y_{i-\frac{1}{2}},\ i=1,2,...,n.$$

Тоді

$$S_n=y_{\frac{1}{2}}h+y_{2-\frac{1}{2}}h+...+y_{i-\frac{1}{2}}h+...+y_{n-\frac{1}{2}}h=h\sum_{i=1}^{n}y_{i-\frac{1}{2}}$$
$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}S_i=h\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-\frac{1}{2}}), \qquad (8.31)$$

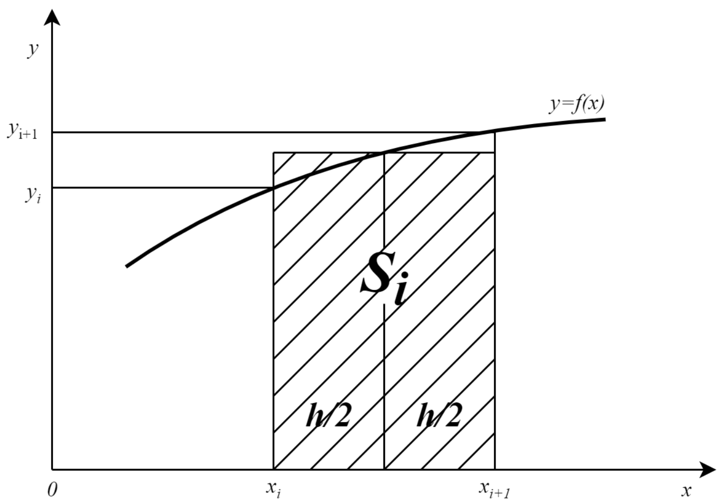


Рис. 8.5. Схема методу середніх прямокутників

Формули (8.29) – (8.31) можна використати при аналітичному або графічному способах завдання функції $y=f(x)$, а формули (8.29) і (8.30) – і при завданні функції у вигляді таблиці з рівновіддаленими вузлами.

Випадок нерівновіддалених вузлів. Розглянемо використання методу прямокутників у разі, коли функція задана таблицею з нерівновіддаленими вузлами.

i	0	1	2	…	I	…	n
x_i	$a=x_0$	x_1	x_2		x_i		$x_n=b$
y_i	y_0	y_1	y_2		y_i		y_n

Позначимо $h_1 = x_1 - x_0,\ h_2 = x_2 - x_1, \ldots,\ h_n = x_n - x_{n-1}$, причому не всі ($h_i\ (i = \overline{1,n})$) рівні між собою. Для обчислення визначеного інтеграла за методом прямокутників в цьому випадку легко отримати формули, аналогічні формулам (8.29), (8.30) :

– формула «лівих» прямокутників:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = y_0 h_1 + y_1 h_2 + \ldots + y_{i-1} h_i + \ldots + y_{n-1} h_n = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} h_i$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}); \qquad (8.32)$$

– формула «правих» прямокутників:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = y_1 h_1 + y_2 h_2 + \ldots + y_i h_i + \ldots + y_n h_n = h\sum_{i=1}^{n} y_i h_i$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (8.33)$$

Формула трапецій. Формула трапецій базується на тому, що на відрізку $[x_0; x_0 + h]$ дугу кривої $y = f(x)$ замінюють хордою, що стягує кінці цієї дуги, тобто роблять лінійну інтерполяцію функції $y = f(x)$. При цьому площу криволінійної трапеції замінюють площею трапеції з основами $f(x_0)$ і $f(x_0 + h)$ висотою h (рис. 8.6), отже:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_0 + h)}{2} \cdot h. \qquad (8.34)$$

Звідси, щоб вичислити $\int_a^b f(x)dx$, розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних часткових відрізків, так що крок $h = \dfrac{b-a}{n}$. Проведемо через точки ділення ординати і замінимо цю криву ламаною, відрізки якої замінюють кінці двох сусідніх ординат. Криволінійна трапеція при цьому заміниться на фігуру, що складається з n трапецій, висоти яких h, а основи – ординати $y_i = f(x_i), (i = 1, 2, \ldots, n)$ в точках поділу. Площа цієї фігури (рис. 8.7) виражається формулою:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \ldots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h = h \cdot \left(\frac{y_0 - y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right), \qquad (8.35)$$

а для обчислення інтеграла маємо формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \tag{8.36}$$

яку називають формулою трапецій.

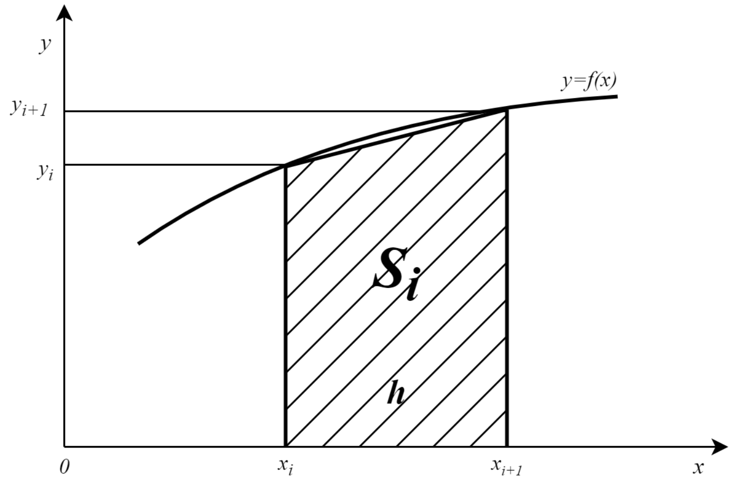


Рис. 8.6. Схема методу трапецій

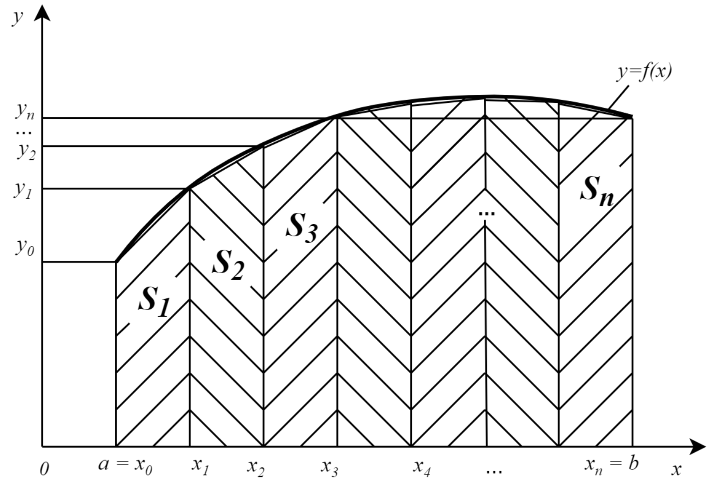


Рис. 8.7. Геометричне представлення методу трапецій

Оцінка похибок формул прямокутників і трапецій. Наближений результат треба використати лише тоді, коли відома його оцінка. З теорії наближених методів обчислень відома оцінка абсолютних похибок формул прямокутників Δ_{np} і трапецій Δ_{mp}:

$$\Delta_{np} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 = \frac{h^2 M_2}{24}(b-a) \ , \tag{8.37}$$

$$\Delta_{mp} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{h^2 M_2}{12}(b-a), \qquad (8.38)$$

де $M_2 = \max|f''(x)|$, $a \le x \le b$; $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a;b]$ – відрізок інтегрування; h – крок інтегрування ($h = \dfrac{b-a}{n}$).

Таким чином, якщо на $[a;b]$ можна знайти M_2, то при заданому n (або h) за формулою (8.37) або (8.38) визначаємо абсолютну похибку відповідних наближених результатів. Крім того, якщо задано число $\varepsilon > 0$ – точність необхідного результату обчислення, то з формули (8.37) або (8.38) можна визначити величину кроку n (або h), при якому отримано наближене значення інтеграла із заданою точністю. Проте оцінити $|f''(x)|$ не завжди зручно (також не можливо). У такій ситуації для оцінки значення інтеграла $S(h)$, отриманого з кроком h, повторюють обчислення з кроком $2h$ (визначають $S(2h)$). Збільшення похибки кроку в 2 рази в формулах (8.37) і (8.38) призводить до збільшення похибки в 4 рази, тобто, якщо Δ_h- похибка значення $S(h)$, то $\Delta_{2h} = 4\Delta_h$. Тоді $|S(h) - S(2h)| \le 3\Delta_h$. Звідси, якщо в результатах $S(h)$ і $S(2h)$ співпадають до десяткових знаків, то всі вони вірні, оскільки в цьому випадку $|S(h) - S(2h)| \le 3\Delta_h < 10^{-k}$ і $\Delta_h < \frac{1}{3}10^{-k}$.

На практиці за абсолютну похибку Δ_h інтеграла $S(h)$, що отриманий за формулами прямокутників або трапецій, приймають число:

$$\Delta h = \frac{|S(h) - S(2h)|}{3}.$$

Зазвичай спочатку обчислюють $S(2h)$, а потім подвоюють і обчислюють $S(h)$.

Порівнюючи формули (8.29) – (8.31) і (8.36) і формули похибок (8.37) і (8.38) можна зробити висновок, що вони однаково трудомісткі і дають приблизно однаковій точності результат (похибку порядку h^2). Тому ні у одного з цих методів немає переваги перед іншим.

Якщо функція $f(x)$ задана таблицею, то у формулах $f''(x)$ (8.38) і (8.38) можна замінити на кінцеву різницю $\Delta^2 y$.Тоді:

$$\Delta_{np} = \frac{b-a}{24}\max|\Delta^2 y|, \quad \Delta_{mp} = \frac{b-a}{12}\max|\Delta^2 y|.$$

Формула трапецій (8.38) є квадратурною формулою замкнутого типу, вона є точною для многочленів першої степені.

Похибка двічі диференційованої функції $f(x)$ на $[a;b]$ дорівнює $O(h^2)$.

Приклад. Виконати чисельне визначення інтегралу $\int_2^3 \frac{x}{\ln x}dx$ за формулами лівих, правих і середніх прямокутників та трапецій шляхом розбиття інтервалу інтегрування на 10 рівних відрізків ($n=10$).

Розв'язок. При $n=10$; $h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{10}=0{,}1$; Визначимо точки поділу відрізку інтегрування на часткові та значення підінтегральної функції в точках поділу. Результати обчислення представлено в таблиці 8.4.

Метод лівих прямокутників.

$$\int_2^3 \frac{x}{\ln x}dx \approx \sum_{i=1}^{10} S_i = h\sum_{i=0}^{9} y_i; \qquad S_h = h\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1\cdot 27{,}623 = 2{,}7623;$$

$$S_{2h} = \sum_{i=1}^{5} S_i = 2h\cdot(y_0+y_2+y_4+y_6+y_8) = 0{,}2\cdot 13{,}865 = 2{,}773\,.$$

Таблиця 8.4. **Розрахункові значення підінтегральної функції в точках поділу відрізку інтегрування**

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i + \frac{h}{2})$
0	2,0	2,885	2,05	2,856
1	2,1	2,83	2,15	2,8
2	2,2	2,8	2,25	2,77
3	2,3	2,76	2,35	2,75
4	2,4	2,74	2,45	2,73
5	2,5	2,728	2,55	2,74
6	2,6	2,72	2,65	2,72
7	2,7	2,72	2,75	2,72
8	2,8	2,72	2,85	7,72
9	2,9	2.72	2.95	2,73
10	3,0	2,73		

Похибка обчислення визначеного інтегралу за методом лівих прямокутників

$$\Delta_{лп} = \frac{|S_h - S_{2h}|}{3} = \frac{|2{,}7623 - 2{,}773|}{3} = 0{,}00357.$$

Метод правих прямокутників.

$$\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx \sum_{i=1}^{10} S_i = h\sum_{i=1}^{10} y_i; \quad S_h = h\sum_{i=1}^{10} y_i = 0{,}1\sum_{i=1}^{10} y_i = 0{,}1 \cdot 27{,}468 = 2{,}747;$$

$$S_{2h} = \sum_{i=1}^{5} S_i = 2h \cdot (y_2 + y_2 + y_6 + y_8 + y_{10}) = 0{,}2 \cdot 13{,}71 = 2{,}742.$$

Похибка обчислення визначеного інтегралу за методом правих прямокутників

$$\Delta_{nn} = \frac{|S_h - S_{2h}|}{3} = \frac{|2{,}747 - 2{,}742|}{3} = 0{,}00167.$$

Метод середніх прямокутників.

$$\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx \sum_{i=1}^{10} S_i = h\sum_{i=0}^{9} f(x_i + \frac{h}{2}); \quad S_h = 0{,}1\sum_{i=0}^{9}(y_i + \frac{h}{2}) = 0{,}1 \cdot 27{,}52 = 2{,}752;$$

$$S_{2h} = \sum_{i=1}^{5} S_i = 2h \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 0{,}2 \cdot 13{,}796 = 2{,}7592.$$

Похибка обчислення визначеного інтегралу за методом середніх прямокутників

$$\Delta_{cn} = \frac{|S_h - S_{2h}|}{3} = \frac{|2{,}752 - 2{,}7592|}{3} = 0{,}0024.$$

Метод трапецій.

$$\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx \sum_{i=1}^{10} S_i = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_{10})}{2} + \sum_{i=1}^{9} f(x_i) \right) = 0{,}1 \cdot (27{,}5455) = 2{,}75455;$$

$$S_{2h} = \sum_{i=1}^{5} S_i = 2h \cdot (\frac{y_0 + y_{10})}{2} + y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 0{,}2 \cdot 13{,}7875 = 2{,}7575.$$

Похибка обчислення визначеного інтегралу за методом трапецій

$$\Delta_{mp} = \frac{|S_h - S_{2h}|}{3} = \frac{|2{,}75455 - 2{,}7575|}{3} = 0{,}000983.$$

Відповідь. Отримано наближене значення інтегралу за:

– методом лівих прямокутників $\int\limits_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx 2{,}7623;$

– методом правих прямокутників $\int\limits_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx 2{,}747;$

– методом середніх прямокутників $\int\limits_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx 2{,}752;$

– методом трапецій $\int\limits_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx 2{,}75455.$

Формула Сімпсона (криволінійних трапецій). Спосіб наближеного обчислення визначеного інтегралу за формулою Сімпсона базується на тому, що на відрізку $[x_0; x_0 + h]$ дугу кривої $y = f(x)$ замінюють дугою квадратичної параболи, що проходить через точки $A(x_0, f(x_0)),\ B(x_0 + h_1, f(x_0 + h_1),\ C(x_0 + 2h_1), f(x_0 + 2h_1))$, тобто виконують квадратичну інтерполяцію функції $y = f(x)$, де $h_1 = \frac{h}{2}$. Тоді за наближене значення площі приймають площу параболічної трапеції, яка має ту ж основу $[x_0; x_0 + 2h_1]$ і обмеження зверху дугою параболи. Для того, щоб отримати рівняння цієї параболи, скористаємося першою інтерпорляційною формулою Ньютона. Многочлен другої степені за трьома вузлами інтерполяції: $x_0, x_0 + h_1, x_0 + 2h_1$ має такий вигляд:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h_1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h_1^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Представимо цей вираз по іншому. Оскільки $x_1 = x_0 + h_1$, то

$$(x - x_0)(x - x_1) = (x - x_0)((x - x_1) + h_1) = (x - x_0)^2 - (x - x_0)h_1,$$

і

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h_1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h_1^2}((x - x_0)^2 - (x - x_0) \cdot h_1).$$

Площа параболічної трапеції (рис. 8.8) має такий вигляд:

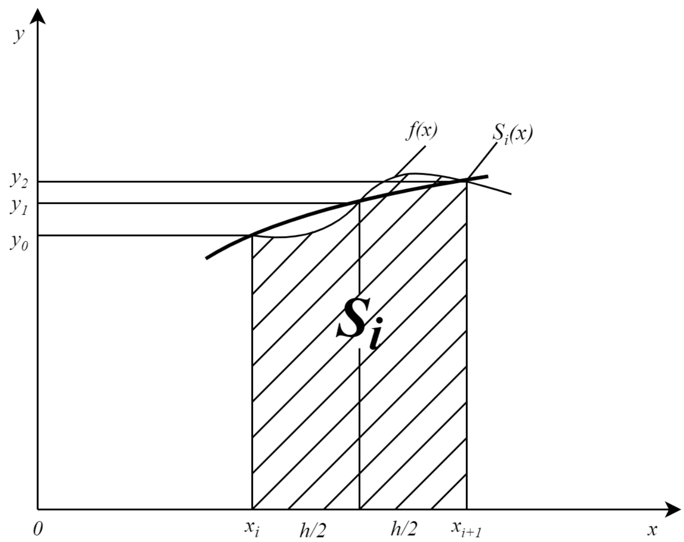


Рис. 8.8. Схема методу криволінійних трапецій Сімпсона

Якщо ввести позначення $y_0 = y_н$ – ордината початку відрізку, $y_2 = y_к$ – ордината кінця відрізку і $y_1 = y_{ср}$ – ордината середини відрізку, то отримана формула набере вигляду:

$$S_{птр} = \frac{h_1}{3}(y_н + 4y_{ср} + y_к), \text{ де } x_к - x_н 2h_1 . \tag{8.39}$$

Поділимо тепер відрізок $[a;b]$ на n рівних частин, причому вважаємо, що n – число парне, тобто $n = 2m$, тоді . $h_1 = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$

Нехай $x_0 = a, x_1 = x_0 + h_1, \ldots, x_n = x_{n\text{-}2} + 2h_1 = b$ – точки поділу відрізка $[a;b]$ на n рівних частин з кроком $2h_1$ Проведемо ординати в цих точках:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

З'єднаємо кінці кожних трьох сусідніх ординат дугами парабол, тобто замінимо на відрізках $[x_0, x_2], [x_2, x_4], ., [x_{n\text{-}2}, x_n]$ криву дугами парабол. Застосуємо до кожного з цих відрізків формулу (8.39). Тоді:

$$S_n = \frac{h_1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h_1}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h_1}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \tag{8.40}$$

або отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h_1}{3}(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})). \tag{8.41}$$

Формула (8.41) називається параболічною формулою або просто формулою Сімпсона. На рисунку 8.9 приведено геометричну інтерпретацію методу криволінійних трапецій (Сімпсона).

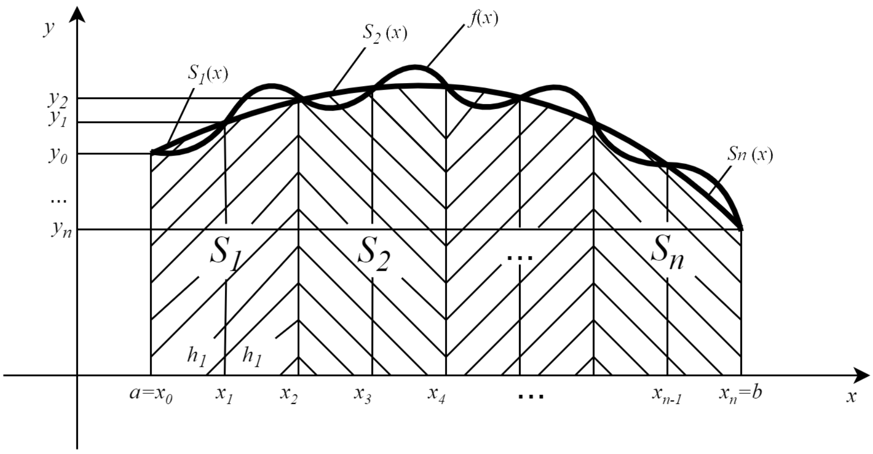


Рис. 8.9. Геометричне представлення методу Сімпсона

Оцінка похибки формули Сімпсона. Формула Сімпсона (8.41) за своєю простотою не поступається отриманим раніше формулам прямокутників (8.29) – (8.31) і трапецій (8.36), але дає більш високу точність. З теорії обчислювальних методів відома оцінка абсолютної похибки формули Сімпсона:

$$\Delta_{пар} = \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4} = \frac{h^4 M_4}{180}(b-a), \tag{8.42}$$

де $M_4 = \max|f^{IV}(x)|$, $a \le x \le b$; $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a;b]$ – відрізок інтегрування; h – крок інтегрування. Проте користуватися формулою (7.42) незручно, оскільки необхідно визначити четверту похідну, яку не завжди можна легко знайти.

Визначення похибки інтегрування за формулою Сімпсона виконаємо на основі аналізу формули (8.42). З цієї формули видно, що $\Delta_{пар}$ має порядок малості h^4 (або $\frac{1}{n^4}$) і при збільшенні кроку h удвічі похибка збільшується в 16 разів: $\Delta_{2h} = 16\Delta_h$. Тому на практиці для оцінки отриманого наближення $S(h)$ можна повторити обчислення за тією ж формулою (8.41), але з кроком $2h$. Число $\Delta h = \frac{|S(h) - S(2h)|}{15}$ приймають за оцінку похибки наближення $S(h)$ згідно з методом Рунге. Треба відзначити, що зазвичай спочатку обчислюють $S(2h)$, а потім подвоюють n і обчислюють $S(h)$ (це гарантує ймовірність застосування формули Сімпсона). Якщо функція

$f(x)$ задана таблицею, то формула (8.42) набере вигляду:

$$\Delta_{пар} = \frac{(b-a)}{180}\max\left|\Delta^4 y\right|.$$

Приклад. Визначити $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x_i}\,dx$ за формулою криволінійних трапецій (Сімпсона) шляхом поділу інтервалу інтегрування на 10 рівних частин $(n=10)$.

Розв'язок. При $n=10$; $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{10} = \dfrac{\pi}{20}$, $h_1 = \dfrac{h}{2} = \dfrac{\pi}{40}$; $n_1 = 2n = 20$.

Визначимо точки поділу інтервалу на часткові інтервали та значення підінтегральної функції в точках поділу. Результати обчислення надано в таблиці 8.5.

Таблиця 8.5. **Розрахункові значення підінтегральної функції в точках поділу інтервалу інтегрування**

i	x_i	$y_i = f(x_i) = e^{\sin x_i}$		
		y_i при $i=0$, $i=20$	y_i при i-непарне	y_i при i-парне
0	0	1		
1	$\pi/40$		1,08162	
2	$\pi/20$			1,16933
3	$3\pi/40$		1.26294	
4	$\pi/10$			1,36209
5	$\pi/8$		1,466221	
6	$3\pi/20$			1,57458
7	$7\pi/40$		1,68624	
8	$\pi/5$			1,8
9	$9\pi/40$		1,91448	
10	$\pi/4$			2,02811
11	$11\pi/40$		2,13914	
12	$3\pi/40$			2,2457
13	$13\pi/40$		2,34583	
14	$7\pi/20$			2,43758
15	$3\pi/8$		2,51904	
16	$2\pi/5$			2,58844
17	$17\pi/40$		2,6442	
18	$9\pi/20$			2,68502
19	$19\pi/40$		2,70992	
20	$\pi/2$	2,71828		
$\sum$		$y_0 + y_{20} = 3{,}71828$	$\sum\limits_{k=1}^{m} y_{2k-1} = 19{,}76962$	$\sum\limits_{k=1}^{m} y_{2k} = 17{,}8907$

Тоді

$$V_0 = y_0 + y_{20} = 3{,}71828;$$
$$V_1 = \sum_{k=1}^{m} y_{2k-1} = 19{,}76962;$$
$$V_2 = \sum_{k=1}^{m-1} y_{2k} = 17{,}8907.$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x_i} dx = \sum_{i=1}^{n} S_n = \frac{h_1}{3}(V_0 + 4V_1 + 2V_2) = \frac{\pi/40}{3} \cdot (3{,}71828 + 4 \cdot 19{,}76962 +$$
$$+ 2 \cdot 17{,}8907) = 3{,}10437$$
$$S_h = 3{,}10437;$$

$$S_{2h} = \frac{2h_1}{3}(f(x_0) + f(x_{20}) + 4(f(x_2) + f(x_6) + f(x_{10}) + f(x_{14}) + f(x_{18})) +$$
$$+ 2(f(x_4) + f(x_8) + f(x_{12}) + f(x_{16})) = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{40}}{3} \cdot (1 + 2{,}71828 + 4(1{,}16933 +$$
$$+ 1{,}57458 + 2{,}02811 + 2{,}43758 + 2{,}8502) + 2 \cdot (1{,}36209 + 1{,}8 + 2{,}2457 +$$
$$+ 2{,}58844)) = 3{,}10438.$$

Похибка обчислення визначеного інтегралу за методом криволінійних трапецій – Сімпсона

$$\Delta h = \frac{|S(h) - S(2h)|}{15} = \frac{|3{,}10437 - 3{,}10438|}{15} = 6{,}67 \cdot 10^{-7}.$$

Відповідь: $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x_i} dx \approx 3{,}10438.$

Формула Ньютона–Котеса. Розглянуті раніше формули прямокутників, трапецій і Сімпсона є окремими випадками більш загальних формул Ньютона–Котеса. Вони отримані в результаті заміни підінтегральної функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом $P_n(x)$ степені n, причому відрізок інтегрування розбивається на n рівних частин

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx.$$

На практиці часто використовують формули, коли відрізок $[a;b]$ розбивається на l підінтервалів $[x_{i-1};x_i]$, $i=1,2,...,l$ довжиною $H=\frac{b-a}{l}$ і на кожному із них застосовують формулу Ньютона–Котеса:

$$S_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = rh\sum_{m=1}^{n+1} P_m y_m, \tag{8.43}$$

де $h=\frac{H}{n}$ – відстань між вузлами інтерполяції на частковому відрізку; r – множник при h; $y_m = f(x_{i-1}+h(m-1))$ – значення підінтегральної функції в вузлі з номером m. Для визначення інтеграла на всьому відрізку $[a;b]$ отримані результати підсумовуються $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i$.

В таблиці 8.6 наведено коефіцієнти P_m формул Ньютона–Котеса та похибки чисельного інтегрування функцій за допомогою відповідних формул.

Таблиця 8.6. **Коефіцієнти формул Ньютона–Котеса та похибки використання цих формул.**

n	r	P_m, $m=1,2,...n+1$	$\Delta_{нк}$
1	$\frac{1}{2}$	$P_1=1$, $P_2=1$ (формула трапецій)	$\frac{h^3}{12} f^{(2)}(x)$, $x_k \le x \le x_k + mh$
2	$\frac{1}{3}$	$P_1=1$, $P_2=4$, $P_3=1$ (формула Сімпсона)	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(x)$
3	$\frac{3}{8}$	$P_1=1$, $P_2=3$, $P_3=3$, $P_3=1$ (формула трьох восьмих)	$\frac{3h^6}{80} f^{(4)}(x)$
4	$\frac{2}{45}$	$P_1=7$, $P_2=32$, $P_3=12$, $P_4=32$, $P_5=7$	$\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(x)$
5	$\frac{5}{288}$	$P_1=19$, $P_2=75$, $P_3=50$, $P_4=50$, $P_5=75$, $P_6=19$	$\frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(x)$
6	$\frac{1}{140}$	$P_1=41$, $P_2=216$, $P_3=27$, $P_4=272$, $P_5=27$, $P_6=216$, $P_7=41$	$\frac{9h^9}{1400} f^{(8)}(x)$
7	$\frac{7}{17280}$	$P_1=751$, $P_2=3577$, $P_3=1323$, $P_4=2989$, $P_5=2989$, $P_6=1323$, $P_7=3577$, $P_8=751$	$\frac{8183h^9}{518400} f^{(8)}(x)$
8	$\frac{8}{28350}$	$P_1=989$, $P_2=5888$, $P_3=-928$, $P_4=10496$, $P_5=-4540$, $P_6=10496$, $P_7=-928$, $P_8=5888$, $P_9=989$	$\frac{2368h^{11}}{467775} f^{(10)}(x)$

Контрольні запитання

1. В чому полягає необхідність чисельного диференціювання функцій?

2. Що покладено в основу чисельного диференціювання функцій?

3. Як використовуються інтерполяційні формули Ньютона для визначення похідних функцій?

4. Як визначити похибки чисельного диференціювання функцій за допомогою інтерполяційних формул Ньютона?

5. Як визначити похідну функції за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа?

6. Який вигляд мають формули похідних функцій в вузлах інтерполяції?

7. Формули для обчислення похідних функцій для будь-якого внутрішнього вузла інтерполяції.

8. Формули для обчислення похідних функцій, використовуючи два та три вузла інтерполяції.

9. Як оцінити похибку чисельного диференціювання функцій?

10. Що покладено в основу чисельного обчислення визначених інтегралів?

11. Формули прямокутників для обчислення інтегралів, їх геометричне розуміння.

12. Який вигляд мають формули прямокутників при нерівно віддалених вузлах?

13. Формули для визначення похибок чисельного обчислення визначених інтегралів методами прямокутників.

14. Формули трапецій та їх геометричне представлення.

15. Формули для визначення похибок чисельного обчислення визначених інтегралів методами трапецій.

16. Обчислення похибок чисельного інтегрування функцій за методом Рунге.

17. Суть методу криволінійних трапецій (формула Сімпсона).

18. У чому геометричне представлення методу Сімпсона?

19. Як визначити похибки чисельного інтегрування функцій формулою Сімпсона?

20. Яка сутність формули Ньютона–Котеса?

21. Як пов’язані формули прямокутників, трапецій і Сімпсона з формулою Ньютона–Котеса?

22. Які похибки мають формули Ньютона–Котеса при чисельному інтегруванні функцій?

Задачі для самоконтролю

1. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 0{,}6044$, $y_1 = 0{,}6351$; $y_2 = 0{,}6640$; $y_3 = 0{,}6911$; $y_4 = 0{,}7163$; $y_5 = 0{,}7398$; $y_6 = 0{,}7616$; $y_7 = 0{,}7932$ з кроком $h = 0{,}05$ на інтервалі $[0{,}7; 1{,}05]$, в точці $x = 0{,}83$, використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона.

2. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 1{,}1052$; $y_1 = 1{,}1618$; $y_2 = 1{,}2214$; $y_3 = 1{,}2840$; $y_4 = 1{,}3499$; $y_5 = 1{,}4191$; $y_6 = 1{,}4918$; $y_7 = 1{,}5282$ з кроком $h = 0{,}05$ на інтервалі $[0{,}1; 0{,}45]$, в точці $x = 0{,}31$, використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона.

3. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями y_0 = 0,1511; y_1 = 0,2027; y_2 = 0,2553; y_3 = 0,3093; y_4 = 0,3650; y_5 = 0,4228; y_6 = 0,4830; y_7 = 0,5264 з кроком $h = 0{,}05$ на інтервалі $[0{,}15; 0{,}50]$, в точці $x = 0{,}32$, використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона.

4. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 27{,}113$; $y_1 = 27{,}85$; $y_2 = 27{,}660$; $y_3 = 27{,}938$; $y_4 = 28{,}219$; $y_5 = 28{,}219$; $y_6 = 28{,}621$; $y_7 = 28{,}961$ з кроком $h = 0{,}1$ на інтервалі $[3{,}30; 3{,}37]$, в точці $x = 3{,}3292$, використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона.

5. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 7{,}8850$; $y_1 = 8{,}2316$; $y_2 = 8{,}5142$; $y_3 = 8{,}8425$; $y_4 = 9{,}1423$; $y_5 = 9{,}4563$; $y_6 = 9{,}7758$; $y_7 = 9{,}9832$ з кроком $h = 0{,}1$ на інтервалі $[2{,}5; 3{,}2]$ в точці $x = 2{,}834$ використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона.

6. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 1{,}7674$; $y_1 = 2{,}0112$; $y_2 = 2{,}2745$; $y_3 = 2{,}6511$; $y_4 = 2{,}8363$; $y_5 = 3{,}1428$; $y_6 = 3{,}4646$; $y_7 = 3{,}7932$ з кроком $h = 0{,}1$ на інтервалі $[1{,}5; 2{,}1]$, в точці $x = 1{,}83$ використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона.

7. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 1{,}58$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	2,2	2,1	2,0	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
y	1,3	1,7	1,9	2,5	3,7	4,1	5,8	7,5

Для диференціювання використовувати інтерполяційну формулу Ньютона.

8. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 1{,}33$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	1,2	1,4	1,7	1,8	2.0	2,1	2,2	2,4
y	1,61	1,32	1,05	1,27	1,48	1,55	1,64	1,82

Для диференціювання використовувати інтерполяційну формулу Ньютона.

9. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 3{,}93$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	4,3	4,2	4,1	4,0	3,8	3,7	3,6	3,4
y	0,26	0,34	0,58	0,83	1,25	1,04	0,75	0,51

Для диференціювання використовувати інтерполяційну формулу Ньютона.

10. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 1{,}83$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	2,2	2,1	2,0	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
y	1,3	1,7	1,9	2,5	3,7	4,1	5,8	7,5

Для диференціювання використовувати інтерполяційну формулу Лагранжа.

11. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 1{,}57$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	2,2	2,1	2,0	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4
y	3,3	3,1	2,9	3,5	4,0	4,1	4,3	4,5

Для диференціювання використовувати інтерполяційну формулу Лагранжа.

12. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 3{,}63$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	4,3	4,2	4,1	4,0	3,8	3,7	3,6	3,4
y	0,26	0,34	0,58	0,83	1,25	1,04	0,75	0,51

Для диференціювання викорис$f(x)$товувати інтерполяційну формулу Лагранжа.

13. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 1{,}0296$; $y_1 = 1{,}5574$; $y_2 = 2{,}5722$; $y_3 = 3{,}6021$; $y_4 = 4{,}8363$ з

кроком $h = 0{,}2$ на інтервалі $[0{,}8; 1{,}6]$, в точці $x = 1{,}15$, використовуючи кубічні сплайн-функції.

14. Визначити першу і другу похідні функції $f(x)$, що задана своїми значеннями $y_0 = 1{,}7674$; $y_1 = 2{,}2712$; $y_2 = 3{,}1445$; $y_3 = 3{,}4641$; $y_4 = 4{,}8363$ з кроком $h = 0{,}2$ на інтервалі $[1{,}5; 2{,}3]$, в точці $x = 1{,}93$, використовуючи кубічні сплайн-функції.

15. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 1{,}63$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	1,1	1,3	1,5	1,8	2,1
y	0,5471	0,6975	0,8533	1,5020	1,0086

Для розв'язання задачі використовувати кубічні сплайн-функції.

16. Визначити першу і другу похідні в точці $x = 1{,}63$ функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в точках:

x	1,3	1,0	0,8	0,5	0,3
y	5,7804	5,0992	4,5331	6,8475	5,3984

Для диференціювання використовувати кубічні сплайн-функції.

17. Визначити першу та другу похідні в точці $x = 1{,}74$ функції

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + 0{,}25\sqrt{x}}$$

аналітично та за допомогою інтерполяційної формули Ньютона на інтервалі $[1{,}1; 3{,}1]$ з кроком $h = 0{,}2$. Визначити похибку чисельного диференціювання функції.

18. Визначити першу та другу похідні в точці $x = 0{,}63$ функції

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{\sqrt{1 + e^x}}$$

аналітично та за допомогою інтерполяційної формули Ньютона на інтервалі $[-0{,}2; 0{,}8]$ з кроком 0,1. Визначити похибку чисельного диференціювання функції.

19. Визначити першу та другу похідні в точці $x = 4{,}16$ функції

$$f(x) = \frac{1 + e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

аналітично та за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа на інтервалі [3; 5] з кроком 0,2. Визначити похибку чисельного диференціювання функції.

20. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ з кроком 0,1 методом лівих прямокутників. Визначити похибку обчислення інтегралу даним методом.

21. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx$ з кроком 0,1 методом правих прямокутників. Визначити похибку обчислення інтегралу вказаним методом.

22. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_2^3 \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+9)^3}} dx$ з кроком 0,1 методом правих прямокутників. Визначити похибку обчислення інтегралу даним методом.

23. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{(x^2+4)^3}} dx$ з кроком 0,1 методом середніх прямокутників. Визначити похибку обчислення інтегралу даним методом.

24. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{125-x^3}} dx$ з кроком 0,3 методом трапецій. Визначити похибку обчислення інтегралу вказаним методом.

25. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_1^2 \sqrt{1+\ln x} dx$ з кроком 0,1 методом Сімпсона. Визначити похибку обчислення інтегралу даним методом.

26. Виконати обчислення визначеного інтегралу $\int_{-1}^0 e^{-x^2} dx$ з кроком 0,1 за допомогою формули Ньютона–Котеса при $n=2$. Визначити похибку обчислення інтегралу даним методом.

9. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Постановка задачі

Диференціальні рівняння покладено в основу багатьох математичних моделей, що описують закони природи. Необхідність чисельного розв'язання диференціальних рівнянь полягає в тому, що класичні методи неможливо реалізувати на комп'ютері і в той же час важко вирішити диференціальні рівняння в елементарних функціях.

Чисельні методи дозволяють за допомогою комп'ютера одержати розв'язання диференціального рівняння будь-якої функції в необхідних точках.

Розглянемо чисельне диференціювання першого порядку виду:

$$y' = f(x, y). \tag{9.1}$$

Загальним розв'язанням даного диференціального рівняння буде сімейство функцій $y = \varphi(x, c)$, що залежать від деякої константи c. Для того, щоб визначити значення функції в якійсь конкретній точці x, треба виділити з цього сімейства часткове рішення за допомогою початкової умови:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{9.2}$$

Знаходження рішення диференціального рівняння (9.1), що задовольняє умові (9.2), називається *задачею Коші*.

Оскільки точне розв'язання задачі Коші можливе лише в виняткових випадках, то для знаходження часткового рішення в основному використовують чисельні методи. В області D на вибраній послідовності точок $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, $x_1 \in [x_0; x_0 + h]$ зі змінним в загальному випадку кроком h визначаються наближені значення $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ шуканого розв'язання задачі Коші.

Таким чином, задача чисельного розв'язання диференціального рівняння полягає у визначенні таблиці значень функції $y = \varphi(x)$, що задовольняє рівнянню (9.1) та умові (9.2) в точках із кроком h на відрізку $[a; b]$. При цьому вважають, що

$$x_0 = a,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, ...,\ b = x_n = x_0 + nh.$$

Більшість чисельних методів можна представити в вигляді залежності $y_{i+1} = \varphi(y_{i-r}, y_{i-r+1}, ..., y_i, y_{i+1}, ..., y_{i+s})$.

Функція $\varphi(x)$, визначає обчислювальну схему методу. Якщо $r = 0$ і $0 \le s \le 1$, то чисельний метод є однокроковим, а якщо $r \ge 1$ або $s > 1$, то багатокроковими, тобто методами з забіганням вперед.

9.2. Метод Ейлера

Метод Ейлера (або метод ломаних) найбільш простий однокроковий метод розв’язання задачі Коші. Він використовується для приблизних розрахунків, але ідея, що закладена в ньому, є вихідною для широкого класу чисельних методів розв’язання диференціальних рівнянь.

Цей метод базується на заміні шуканої функції многочленом першого порядку, тобто на лінійній її інтерполяції, точніше екстраполяції, тому що знаходяться значення функції в наступних вузлах, а не між ними.

Виберемо деякий крок h, що є інтервалом, на який розбивається відрізок $[a;b]$. Нехай крок h достатньо малий, такий що значення функції $y = f(x)$ на частковому відрізку $\left[x_0, x_{0+h}\right]$ мало відрізняється від лінійної функції. Тоді на вказаному інтервалі:

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 = y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0),$$

де $y'_0 = f(x_0, y_0)$ – значення похідної y' в точці $x = x_0$. Таким чином крива на цьому відрізку замінюється відрізком прямої (дотичною до кривої на початку відрізку). Для точки $x_1 = x_0 + h$ отримаємо:

$$y\big|_{x=x_1} = y_1 = y_0 + h \cdot y'_0.$$

Для точки $x_2 = x_1 + h$ можна записати:

$$y_2 = y_1 + h \cdot y'_1 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1).$$

Продовжуючи таким способом отримувати подальші значення функції, встановлено, що метод Ейлера можна представити в вигляді послідовного використання формул:

$$\begin{aligned} &\Delta y_k = h \cdot y'_k = h \cdot f(x_k, y_k); \\ &y_{k+1} = y_k + \Delta y_k,\ k = 0, 1, 2, ..., k-1. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Тобто, розпочинаючи з точки (x_0, y_0), визначаємо наступну точку як:

$$x_1 = x_0 + h; \qquad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h;$$
$$x_2 = x_1 + h; \qquad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h;$$
$$\ldots$$
$$x_{k+1} = x_k + h; \qquad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h;$$
$$\ldots$$
$$x_n = x_0 + h; \qquad y_n = y_{n\text{-}1} + f(x_{n\text{-}1}, y_{n\text{-}1})h;$$
$$x_0 = a; \quad x_n = b.$$

Таким чином отримаємо чисельне розв'язання диференціального рівняння за методом Ейлера, яке зручно представити в вигляді таблиці 9.1:

Таблиця 9.1 **Результати розв'язання диференціального рівняння**

x_0	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Геометричне розв'язання задачі Коші за методом Ейлера показано рисунку 9.1:

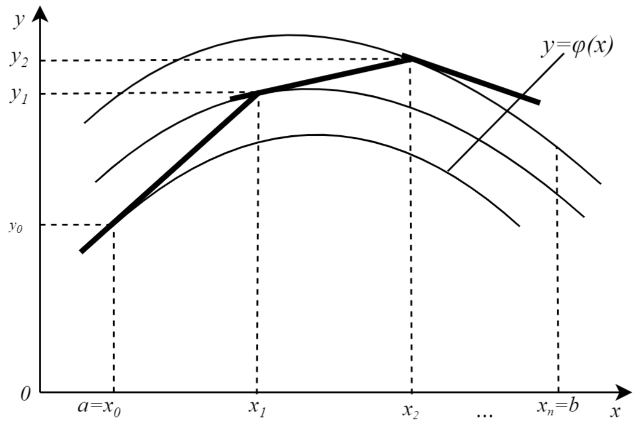


Рис.9.1. Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Тут інтегральна крива замінюється ламаною, ланки якої мають горизонтальну проекцію h. Перша ланка ламаної дотикається шуканої інтегральної кривої в точці (x_0, y_0). Ламана Ейлера – це кусково-розділена функція, яка є наближеним розв'язанням задачі на відрізку.

Зменшення кроку інтегрування є ефективним методом підвищення точності. Таким чином, можна отримати досить добру точність. Але існують більш точні методи.

Величину h часто називають кроком інтегрування (або просто кроком). Наближені значення шуканої функції $y = \varphi(x)$ визначаються в точках поділу:

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h.$$

В теорії диференціального числення доведено, що якщо функція $f(x, y)$, тобто права частина рівняння (9.1) задовольняє умовам Коші, то послідовність ламаних Ейлера при необмеженому збільшенні кількості вузлів (при $n \to \infty$, а $h \to 0$) наближається до визначеної границі $y = \varphi(x)$, яка є єдиним розв’язанням задачі Коші (9.1), (9.2).

Похибка заміни $y(x)$ ламаною Ейлера, що визначається в точці x_n, має перший порядок точності відносно h. Тому чим менше крок інтегрування, тим краще наближене рішення представляє його точне значення. Зазвичай для оцінки точності наближеного рішення y_n в точці x_n, що отримане с кроком h, повторюють обчислення с подвоєним кроком $2h$ і абсолютну похибку $\Delta(y_n)$ визначають за формулою:

$$\Delta(y_n) = |y_n - \widehat{y}_n|,$$

де $\widehat{y}_n$ – наближене рішення в точці x_n з кроком $2h$.

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння $y' = y^2 + x^2$ на інтервалі $[0;1]$ при початковій умові $y(0) = 1$ методом Ейлера при поділі інтервалу розрахунків на 10 рівних частин $(n = 10)$.

Розв’язок. Обчислення виконуються згідно з формулами Ейлера (9.3):

$$\begin{aligned}&\Delta y_k = h \cdot y_k' = h \cdot f(x_k, y_k)\\ &y_{k+1} = y_k + \Delta y_k.\end{aligned}, \qquad k = 0,.1,...,9, \quad h = \frac{b-a}{10} = \frac{(0{,}1-0)}{10} = 0{,}01.$$

Результати розв’язання диференціального рівняння представлено в вигляді таблиці 9.2.

Для оцінки точності наближеного рішення, що отримане з кроком h, повторимо обчислення з кроком $2h$. Результати розрахунків надано в таблиці 9.3.

Таблиця 9.2. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера з кроком 0,01**

k	x_k	y_k
0	0	$y_0 = 1$
1	0,01	$y_1 = y_0 + (x_0^2 + y_0^2)h$ $y_1 = 1 + (0^2 + 1^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}01$
2	0,02	$y_2 = y_1 + (x_1^2 + y_1^2)h$ $y_2 = 1{,}01 + (0{,}01^2 + 1{,}01^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}0202$
3	0,03	$y_3 = y_2 + (x_2^2 + y_2^2)h$ $y_3 = 1{,}0202 + (0{,}02^2 + 1{,}0202^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}0306$
4	0,04	$y_4 = y_3 + (x_3^2 + y_3^2)h$ $y_4 = 1{,}0306 + (0{,}03^2 + 1{,}0306^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}0412$
5	0,05	$y_5 = y_4 + (x_4^2 + y_4^2)h$ $y_5 = 1{,}0412 + (0{,}04^2 + 1{,}0412^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}052$
6	0,06	$y_6 = y_5 + (x_5^2 + y_5^2)h$ $y_6 = 1{,}052 + (0{,}05^2 + 1{,}052^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}0631$
7	0,07	$y_7 = y_6 + (x_6^2 + y_6^2)h$ $y_7 = 1{,}0631 + (0{,}06^2 + 1{,}0631^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}0744$
8	0,08	$y_8 = y_7 + (x_7^2 + y_7^2)h$ $y_8 = 1{,}0744 + (0{,}07^2 + 1{,}0744^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}086$
9	0,09	$y_9 = y_8 + (x_8^2 + y_8^2)h$ $y_9 = 1{,}086 + (0{,}08^2 + 1{,}086^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}0979$
10	0,1	$y_{10} = y_9 + (x_9^2 + y_9^2)h$ $y_{10} = 1{,}0979 + (0{,}09^2 + 1{,}0979^2) \cdot 0{,}01 = 1{,}11$

Таблиця 9.3. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера з кроком 0,02**

k	x_k	y_k
0	0	$y_0 = 1$
1	0,02	$y_1 = y_0 + (x_0^2 + y_0^2) \cdot 2h$ $y_1 = 1 + (0^2 + 1^2) \cdot 0{,}02 = 1{,}02$
2	0,04	$y_2 = y_1 + (x_1^2 + y_1^2) \cdot 2h$ $y_2 = 1{,}02 + (0{,}02^2 + 1{,}02^2) \cdot 0{,}02 = 1{,}04082$

Закінчення табл. 9.3.

k	x_k	y_k
3	0,06	$y_3 = y_2 + (x_2^2 + y_2^2) \cdot 2h$ $y_3 = 1{,}04082 + (0{,}04^2 + 1{,}04082^2) \cdot 0{,}02 = 1{,}06252$
4	0,08	$y_4 = y_3 + (x_3^2 + y_3^2) \cdot 2h$ $y_4 = 1{,}06252 + (0{,}06^2 + 1{,}06252^2) \cdot 0{,}02 = 1{,}08517$
5	0,1	$y_5 = y_4 + (x_4^2 + y_4^2) \cdot 2h$ $y_5 = 1{,}08517 + (0{,}08^2 + 1{,}08517^2) \cdot 0{,}02 = 1{,}10885$

Виконаємо оцінку похибки обчислення, що досягає найбільшого значення в точці $x = 0{,}1$.

Тоді $\Delta = \left| y_{10,h} - y_{5,h} \right| = \left| 1{,}11 - 1{,}10885 \right| = 0{,}00115$.

9.3. Розв’язання системи диференціальних рівнянь першого порядку

Нехай необхідно розв’язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t, x, y), \end{cases} \tag{9.4}$$

при початкових умовах:

$$x(t_0) = x_0, \;\; y(t_0) = y_0. \tag{9.5}$$

Визначення функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$, що є розв’язком системи (9.4) при умовах (9.5), покажемо на прикладі застосування методу Ейлера.

Для знаходження її наближеного чисельного розв’язання системи рівнянь на відрізку $[a = t_0,\ b = t_n]$ за методом Ейлера реалізується такий алгоритм обчислення:

– за заданим n (кількості точок поділу відрізку) визначають крок h, вважаючи відомими x_0, y_0, t_0 та $k = 0$;

– за відомими x_k, y_k, t_k і, підставляючи їх значення в праву частину рівнянь системи (9.4), отримують $f_1(x_k, y_k,\ t_k)$ і $f_2(x_k, y_k, t_k)$ та визначають

$$x_{k+1} = x_k + f_1(t_k, x_k, y_k) \cdot h,$$
$$y_{k+1} = y_k + f_2(t_k, x_k, y_k) \cdot h,$$
$$t_{k+1} = t_k + h.$$

Вказані дії повторюють, збільшуючи номер точки поділу відрізка на одиницю, до тих пір, доки $k+1$ не стане дорівнювати n, тобто $t_{k+1} = t_k + h$.

Таким чином, для знаходження розв'язку цієї системи можна використовувати метод Ейлера та і інші методи, що і для розв'язання одного диференціального рівняння.

Таким чином, розв'язання системи диференціальних рівнянь представляється в вигляді таблиці 9.4.

Таблиці 9.4. **Результати розв'язання системи диференціальних рівнянь**

t	t_0	t_1	t_2	…	t_n
x_k	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_k	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y-1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x-t}; \end{cases}$$

при початковій умові $x(0) = -1$; $y(0) = 1$ на інтервалі $t \in [0; 0{,}5]$; з кроком $h = 0{,}1$.

Розв'язок. В даній системі диференціальних рівнянь маємо $f_1(t,x,y) = \dfrac{y-1}{y}$; $f_2(t,x,y) = \dfrac{1}{x-t}$ і для її розв'язанні при початковій умові $x(0) = -1$; $y(0) = 1$ використовуємо розрахункові формули методом Ейлера:

$$x_{k+1} = x_k + f_1(t_k, x_k, y_k) \cdot h,$$
$$y_{k+1} = y_k + f_2(t_k, x_k, y_k) \cdot h,$$
$$t_{k+1} = t_k + h$$

де $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Відповідь. Результати розв'язання системи диференціальних рівнянь методом Ейлера наведено в таблиці 9.5.

Таблиця 9.5. **Результати розв’язання системи диференціальних рівнянь за методом Ейлера**

k	0	1	2	3	4	5
t_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x_n	-1	-1	-1,0111	-1,0347	-1,0723	-1,1258
y_n	1	0,9	0,8091	0,7265	0,6516	0,5837

9.4. Розв’язання диференціальних рівнянь вищих порядків

Нехай необхідно розв’язати диференціальне рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{9.6}$$

при початкових умовах:

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0. \tag{9.7}$$

Шляхом заміни змінної $z = y^1$ в рівнянні (9.6) отримаємо вигляді систему двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = Z \\ Z' = f(x, y, Z) \end{cases}, \tag{9.8}$$

де початкові умови (9.7) переходять в умови:

$$y(x_0) = y_0;\ Z(x_0) = Z_0. \tag{9.9}$$

Таким чином розв’язання диференціального рівняння другого порядку (9.6), (9.7) зведено до системи диференціальних рівнянь першого порядку тобто до розв’язання задачі (9.8), (9.9) при $f_1 = Z$, $f_2 = f(x, y, Z)$ буде за раніш описаним алгоритмом.

Розв’язання даної задачі виконується будь-яким із відомих методів, наприклад, методом Ейлера, що був описаний раніше.

Таким чином, розв’язання диференціальних рівнянь вищих порядків виконується шляхом їхнього представлення (заміни) системою диференціальних рівнянь.

9.5. Модифікований метод Ейлера

Модифікований метод при практично тому же об'ємі обчислень дозволяє отримати похибку порядку h^2 в порівнянні з точністю порядку h в звичайному методі Ейлера. Це досягається використанням уточненого кута нахилу ламаної на відрізку дослідження.

Суть методу полягає в тому, що на малому відрізку $[x;\ x+h]$ інтегральна крива $y = y(x)$ рівняння (9.1) замінюється відрізком прямої лінії, що проходить через точку $(x, y(x))$, але з кутовим коефіцієнтом, що визначається дещо інакше, ніж в методі Ейлера.

Нехай відрізок $[a; b]$ поділено на n рівних частин з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$ точками $x_0, x_1, ..., x_n$ і визначено в точках $x_0, x_1, ..., x_k$ наближені значення інтегральної кривої $y_0, y_1, ..., y_k$. Розглянемо частковий відрізок $[x_k;\ x_{k+1}]$ і для визначення застосовано y_{k+1} використано такі геометричні побудови.

Проведемо в точці $M_k(x_k, y_k)$ дотичну до інтегральної кривої, що проходить через точку M_k, тобто пряму лінію (відрізок $M_k M^1{}_{k+1}$), рівняння якої $y - y_k = f(x_k, y_k)(x - x_k)$. Визначимо координату точки N_k, що є точкою перетину цієї прямої і прямої $x = x_к + \dfrac{h}{2}$. Тоді:

$$x_{N_k} = x_k + \frac{h}{2} = x_{k+\frac{1}{2}},\ y_{N_k} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{h}{2} = y_{k+\frac{1}{2}}.$$

Кут нахилу дотичної до інтегральної кривої в цій точці має значення $y'(x_{k+\frac{1}{2}}) = f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) = \alpha_k$. Проведемо з точки $M_k(x_k, y_k)$ пряму з отриманим кутовим коефіцієнтом α_k, тобто $y - y_k = \alpha_k(x - x_k)$.

Наступним значенням y_{k+1} є координата точки M_{k+1}, що розташована на перетину прямої з кутом нахилу α_k і прямої $x = x + h$, тобто

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_k \cdot h,\ x_{k+1} = x_k + h,$$

де

$$\alpha_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{h}{2}\right). \tag{9.10}$$

Таким чином, ітераційна формула розв'язання диференціального рівняння (9.1), (9.2) за модифікованим методом Ейлера має вигляд:

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_k \cdot h,\ x_{k+1} = x_k + h.$$

Алгоритм модифікованого методу Ейлера розв'язання диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ при початковій умові $y(x_0) = y_0$ на відрізку $[a; b]$ включає етапи:

– задається кількість n точок поділу відрізку $[a; b]$ і визначається крок інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$, розпочинаючи з першого відрізка $[x_0, x_1]$, тобто $k = 0$;

– підставляючи відомі значення x_k і y_k. в праву частину рівняння (9.1), визначають $f(x_k, y_k)$ та обчислюють наступне значення y_{k+1} за формулами (9.10);

в) перевіряється умова завершення процесу розв'язання диференціального рівняння. Якщо $k < n$, то обчислення повторюються шляхом переходу до попереднього етапу визначення y_{k+1}, інакше процес розв'язання диференціального рівняння завершено. Числа $y_0, y_1, .y_3, .., y_n$ приблизно представляють значення шуканого рівняння (9.1) в точках поділу $x_0, x_1, ..., x_n$.

Геометрична побудова розв'язання диференціального рівняння за модифікованим методом Ейлера наведена на рисунку 9.2.

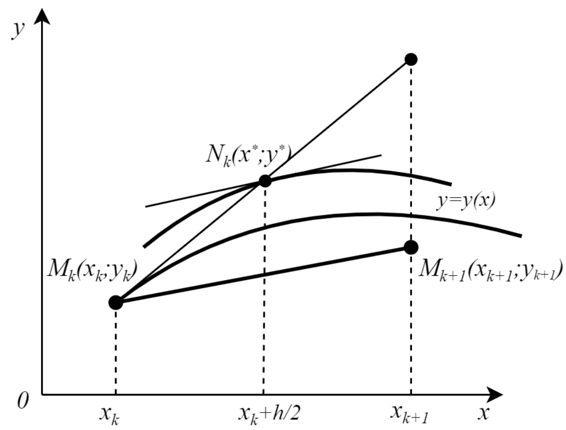


Рис. 9.2. Геометрична інтерпретація методу модифікованого методу Ейлера

Наближене розв'язання диференціального рівняння (9.1) при початковій умові (9.2) модифікованим методом Ейлера на кожному кроці виконує уточнення кутових коефіцієнтів ланок ламаної лінії, що дозволяє отримати більш точне розв'язання, ніж методом Ейлера.

Із теорії наближених методів відомо, що різниці між наближеним значенням y_k в точці x_k и точним значенням $y(x_k)$ оцінюється нерівністю:

$$|\, y_k - y(x_k)\,| \le C \cdot h^3 .$$

Оскільки $h = \dfrac{b-a}{n}$, то ця похибка має порядок $\dfrac{1}{h^3}$ на кожному кроці (тобто переході від y_k до y_{k+1}). Але з кожним кроком здійснюється накопичення похибки і в точці $x_n = b$ ця похибка вже буде мати порядок $\dfrac{1}{h^2}$ (що все ж буде точніше, ніж в методі Ейлера, де похибка порядку $\dfrac{1}{h}$).

Для оцінки похибки наближеного розв'язання y_n в точці $x_n = b$, що отримане з кроком h, повторюють обчислення с кроком $2h$, и абсолютну похибку $\Delta(y_n)$ вважають такою, що дорівнює:

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{3}\left| y_n - \widehat{y}_n \right|,$$

де $\widehat{y}_n$ – наближене розв'язання в точці x_n при виконанні обчислень з кроком $2h$.

Ця похибка є оцінкою методів, вона не враховує похибку, що отримана за рахунок округлення при обчисленнях.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = y^2 + x^2$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, на відрізку $[0; 0{,}1]$ з кроком $h = 0{,}01$ модифікованим методом Ейлера.

Розв'язок Обчислення виконуються при поділі відрізку на 10 рівних частин $(n = 10)$ за наступними формулами:

$$x_{k+1} = x_k + h; \;\; \alpha_k = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{h}{2}, \;\; \mathrm{y}_{\mathrm{k+1}} = y_k + \alpha_k \cdot h..,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Результати розв'язання диференціального рівняння модифікованим методом Ейлера надано в таблиці 9.6.

Для визначення похибки розв'язання диференціального рівнянні за модифікованим методом Ейлера виконаємо обчислення з подвійним кроком, тобто кроком $2h$. Результати розв'язання диференціального рівняння модифікованим методом Ейлера представлено в таблиці 9.7.

Таблиця 9.6. **Результати розв’язання диференціального рівняння модифікованим методом Ейлера з кроком 0,01**

k	x_k	α_k	y_k
1	2	3	4
0	0		$y_0 = 1$
1	0,01	$\alpha_0 = \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_0 + (x_0^2 + y_0^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_0 = (0 + 0,005)^2 + (1 + (0^2 + 1^2)\cdot 0,005)^2 = 1,01005$	$y_1 = y_0 + \alpha_0 \cdot h =$ $= 1 + 1,01005 \cdot 0,01 =$ $= 1,0101$
2	0,02	$\alpha_1 = \left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_1 + (x_1^2 + y_1^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_1 = (0,01 + 0,005)^2 + (1,0101 +$ $+(0,01^2 + 1,0101^2)\cdot 0,005)^2 = 1,03086$	$y_2 = y_1 + \alpha_1 \cdot h =$ $= 1,0101 + 1,03086 \cdot 0,01 =$ $= 1,0204$
3	0,03	$\alpha_2 = \left(x_2 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_2 + (x_2^2 + y_2^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_2 = (0,02 + 0,005)^2 + (1,0204 +$ $+(0,02^2 + 1,0204^2)\cdot 0,005)^2 = 1,0525$	$y_3 = y_2 + \alpha_2 \cdot h =$ $= 1,0204 + 1,0525 \cdot 0,01 =$ $= 1,0309$
4	0,04	$\alpha_3 = \left(x_3 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_3 + (x_3^2 + y_3^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_3 = (0,03 + 0,005)^2 + (1,0309 +$ $+(0,03^2 + 1,0309^2)\cdot 0,005)^2 = 1,075$	$y_4 = y_3 + \alpha_3 \cdot h =$ $= 1,0309 + 1,075 \cdot 0,01 =$ $= 1,04165$
5	0,05	$\alpha_4 = \left(x_4 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_4 + (x_4^2 + y_4^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_4 = (0,04 + 0,005)^2 + (1,04165 +$ $+(0,04^2 + 1,04165^2)\cdot 0,005)^2 = 1,0984$	$y_5 = y_4 + \alpha_4 \cdot h =$ $= 1,04165 + +1,0984 \cdot 0,01 =$ $= 1,05263$
6	0,06	$\alpha_5 = \left(x_5 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_5 + (x_5^2 + y_5^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_5 = (0,05 + 0,005)^2 + (1,05263 +$ $+(0,05^2 + 1,05263^2)\cdot 0,005)^2 = 1,12278$	$y_6 = y_5 + \alpha_5 \cdot h =$ $= 1,05263 + 1,12278 \cdot 0,01 =$ $= 1,06386$
7	0,07	$\alpha_6 = \left(x_6 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_6 + (x_6^2 + y_6^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_6 = (0,06 + 0,005)^2 + (1,06386 +$ $+(0,06^2 + 1,06386^2)\cdot 0,005)^2 = 1,148813$	$y_7 = y_6 + \alpha_6 \cdot h =$ $= 1,06386 + 1,14813 \cdot 0,01 =$ $= 1,07534$

Закінчення табл. 9.6

1	2	3	4
8	0,08	$\alpha_7=\left(x_7+\frac{h}{2}\right)^2+\left(y_7+(x_7^2+y_7^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_7=(0,07+0,005)^2+(1,07534+$ $+(0,07^2+1,07534^2)\cdot 0,005)^2=1,1745$	$y_8=y_7+\alpha_7\cdot h=$ $=1,07534+1,1745\cdot 0,01=$ $=1,08709$
9	0,09	$\alpha_8=\left(x_8+\frac{h}{2}\right)^2+\left(y_8+(x_8^2+y_8^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_8=(0,08+0,005)^2+(1,08709+$ $+(0,08^2+1,08709^2)\cdot 0,005)^2=1,20194$	$y_9=y_8+\alpha_8\cdot h=$ $=1,08709+1,20194\cdot 0,01=$ $=1,0991$
10	0,1	$\alpha_9=\left(x_9+\frac{h}{2}\right)^2+\left(y_9+(x_9^2+y_9^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_9=(0,09+0,005)^2+(1,0991+$ $+(0,09^2+1,0991^2)\cdot 0,005)^2=1,23045$	$y_{10}=y_9+\alpha_9\cdot h=$ $=1,0991+1,23045\cdot 0,01=$ $=1,1114$

Таблиця 9.7. **Результати розв'язання диференціального рівняння модифікованим методом Ейлера з кроком 0,02**

k	x_k	α_k	y_k
0	0		$y_0=1$
1	0,02	$\alpha_0=\left(x_0+\frac{2h}{2}\right)^2+\left(y_0+(x_0^2+y_0^2)\cdot\frac{2h}{2}\right)^2$ $\alpha_0=(0+0,01)^2+(1+(0^2+1^2)\cdot 0,01)^2=1,0202$	$y_1=y_0+\alpha_0\cdot 2h=$ $=1+1,0202\cdot 0,02=$ $=1,0204$
2	0,04	$\alpha_1=\left(x_1+\frac{2h}{2}\right)^2+\left(y_1+(x_1^2+y_1^2)\cdot\frac{2h}{2}\right)^2$ $\alpha_1=(0,02+0,01)^2+(1,02041+$ $+(0,02^2+1,0204^2)\cdot 0,01)^2=1,0635$	$y_2=y_1+\alpha_1\cdot 2h=$ $=1,0204+1,0635\cdot 0,02=$ $=1,04167$
3	0,06	$\alpha_2=\left(x_2+\frac{2h}{2}\right)^2+\left(y_2+(x_2^2+y_2^2)\cdot\frac{2h}{2}\right)^2$ $\alpha_2=(0,04+0,01)^2+(1,04167+$ $+(0,02^2+1,04167^2)\cdot 0,01)^2=1,11033$	$y_3=y_2+\alpha_2\cdot 2h=$ $=1,11033+1,11033\cdot 0,02=$ $=1,06388$
4	0,08	$\alpha_3=\left(x_3+\frac{2h}{2}\right)^2+\left(y_3+(x_3^2+y_3^2)\cdot\frac{2h}{2}\right)^2$ $\alpha_3=(0,06+0,01)^2+(1,06388+$ $+(0,06^2+1,06388^2)\cdot 0,01)^2=1,16103$	$y_4=y_3+\alpha_3\cdot 2h=$ $=1,06388+1,16103\cdot 0,02=$ $=1,0871$
5	0,1	$\alpha_4=\left(x_4+\frac{h}{2}\right)^2+\left(y_4+(x_4^2+y_4^2)\cdot\frac{h}{2}\right)^2$ $\alpha_4=(0,08+0,01)^2+(1,0871+$ $+(0,08^2+1,0871^2)\cdot 0,01)^2=1,21586$	$y_5=y_4+\alpha_4\cdot 2h=$ $=1,0871+1,21586\cdot 0,02=$ $=1,11417$

Обчислимо абсолютну похибку розв’язання диференціального рівняння модифікованим методом Ейлера.

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{3}\left|y_n - \hat{y}_n\right|$$

$$\Delta y = \frac{1}{3}\left|y_{10,\ h} - y_{5,\ 2h}\right| = \frac{1}{3}\left|1{,}1114 - 1{,}111417\right| = 5{,}67 \cdot 10^{-6}.$$

9.6. Метод Ейлера−Коші

Суть методу полягає в тому, що для розв’язання диференціального рівняння (9.1) при початковій умові (9.2) на інтервалі дослідження $[a; b]$ обчислення на $(i+1)$ – тому кроці спочатку виконують як й в звичайному методі Ейлера $\overset{*}{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ та в найденій точці визначають напрямок зміни інтегральної функції $f(x_{i+1}, \overset{*}{y}_{i+1})$, а далі - обчислення виконують за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overset{*}{y}_{i+1})}{2} \tag{9.11}$$

Тоді розв’язання диференціального рівняння даним методом виконують за таким алгоритмом:

– інтервал дослідження поділяють на n рівних відрізків та визначають крок інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$, $k = 0$;

– визначають кут нахилу дотичної в початковій точці M_k з координатами (x_k, y_k):

$$\alpha_{k1} = f(x_k, y_k);$$

– визначають точку перетину дотичної в точці M_k з прямою $x_k + h$

$$y^1_{k=11} = y_k + f(x_k, y_k)h,$$

отримуючи точку $M^1_{k+1}(x_k, y^1_{k+1})$;

– визначають α_{k2} у точці $M^1_{k=1}$, де

$$\alpha_{k2} = f\left(x_{k+1}, y^1_{k=11}\right), \qquad x_{k+1} = x_k + h\ ;$$

– знаходять середній кут нахилу ламаної лінії α_k

$$\alpha_k = \frac{\alpha_{k1} + \alpha_{k2}}{2};$$

– визначають точка M_{k+1} з координатами $x_{k+1} = x_k + h,\ y_{k+1} = y_k + \alpha_k h$;

– обчислюють координату точки на наступному частковому інтервалі, $k = k + 1$. Наведений циклічний процес продовжуються до виконання умови $k > n$.

Таким чином, метод Ейлера–Коші для розв'язання диференціального рівняння використовує такі рекурентні формули обчислення точок ламаної, що є наближеним представленням інтегральної кривої:

$$y_{k+1}^{(1)} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h; \alpha_k = \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(1)})}{2}; y_{k+1} = y_k + \alpha_k \cdot h,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Геометрична інтерпретація методу Ейлера–Коші наведена на рисунку 9.3.

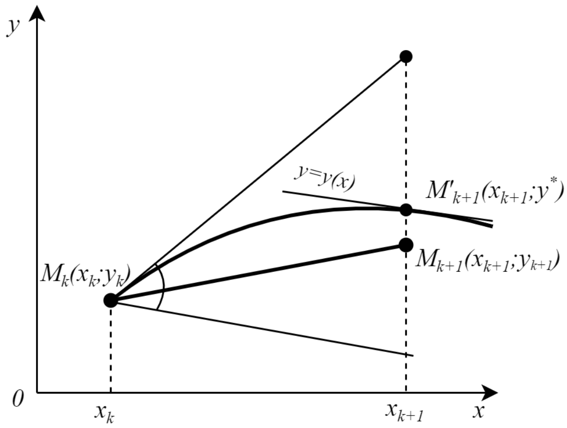


Рис. 9.3. Геометрична інтерпретація методу Ейлера–Коші

Для оцінки похибки наближеного розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера–Коші y_n в точці x_n, що отримане з кроком h, повторюють обчислення с кроком $2h$ і абсолютну похибку $\Delta(y_n)$ визначають, як і в модифікованому методі Ейлера, за формулою:

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{3}|y_n - \hat{y}_n|,$$

де $\hat{y}_n$ – наближене розв'язання в точці x_n при виконанні обчислень з кроком $2h$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = y^2 + x^2$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, на відрізку $[0; 0{,}1]$ з кроком $h = 0{,}01$ методом Ейлера–Коші.

Розв'язок Для розв'язання даної задачі з кроком $h = 0{,}01$ відрізок $[0; 0{,}1]$ поділяється на 10 рівних частин. Обчислення виконуються згідно за формулами Ейлера–Коші (9.11) та наданим алгоритмом методу:

$$\alpha_{1k} = f(x_k; y_k), \ \alpha_{2k} = f((x_k + h), \ y_k + \alpha_1 \cdot h);$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\alpha_{1k} + \alpha_{2k}}{2} \cdot h; \ x_{k+1} = x_k + h, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1.$$

Результати розрахунків представляються в таблиці 9.8.

Для визначення похибки методу Ейлера–Коші виконаємо обчислення з подвійним кроком $2h.$ Результати розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера–Коші з кроком $2h.$ надано в таблиці 9.9.

Таблиця 9.8. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера–Коші з кроком 0,01**

k	x_k	α_{1k}	α_{2k}	y_k
1	2	3	4	4
0	0			$y_0 = 1$
1	0,01	$\alpha_{10} = f(x_0; y_0) =$ $= x_0^2 + y_0^2 = 0^2$ $+ 1^2 = 1$	$\alpha_{20} = (x_0 + h)^2 + (y_0 + \alpha_{10} h)^2 =$ $= (0 + 0{,}01)^2 + (1 + 1 \cdot 0{,}01)^2 =$ $= 1{,}0202$	$y_1 = y_0 + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{20}}{2} \cdot h =$ $= 1 + \frac{1 + 1{,}0202}{2} \cdot 0{,}01 = 1{,}0101$
2	0,02	$\alpha_{11} = x_1^2 + y_1^2 =$ $= 0{,}01^2 + 1{,}0101^2$ $= 1{,}0204$	$\alpha_{21} = (x_1 + h)^2 + (y_1 + \alpha_{11} h)^2 =$ $= (0{,}01 + 0{,}01)^2 + (1{,}0101 +$ $1{,}0204 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}04142$	$y_2 = y_1 + \frac{\alpha_{11} + \alpha_{21}}{2} \cdot h =$ $= 1{,}0101 + \frac{1{,}0204 + 1{,}04142}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}0204$
3	0,03	$\alpha_{12} = x_2^2 + y_2^2 =$ $= 0{,}02^2 + 1{,}0204^2$ $= 1{,}04162$	$\alpha_{22} = (x_2 + h)^2 + (y_2 + \alpha_{12} h)^2 =$ $= (0{,}02 + 0{,}01)^2 + (1{,}0204 +$ $1{,}04162 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}0635$	$y_3 = y_2 + \frac{\alpha_{12} + \alpha_{22}}{2} \cdot h =$ $= 1{,}0204 + \frac{1{,}04162 + 1{,}0635}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}03093$

Закінчення табл. 9.8

1	2	3	4	4
4	0,04	$\alpha_{13} = x_3^2 + y_3^2 =$ $= 0{,}03^2 + 1{,}03093^2$ $= 1{,}06372$	$\alpha_{23} = (x_3 + h)^2 + (y_3 + \alpha_{13} h)^2 =$ $= (0{,}03 + 0{,}01)^2 + (1{,}03093 +$ $1{,}06312 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}08646$	$y_4 = y_3 + \dfrac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{2} \cdot h =$ $= 1{,}03093 + \dfrac{1{,}06372 + 1{,}08646}{2}$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}04168$
5	0,05	$\alpha_{14} = x_4^2 + y_4^2 =$ $= 0{,}04^2 + 1{,}04168^2$ $= 1{,}0867$	$\alpha_{24} = (x_4 + h)^2 + (y_4 + \alpha_{14} h)^2 =$ $= (0{,}04 + 0{,}01)^2 + (1{,}04168 +$ $1{,}0867 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}11036$	$y_5 = y_4 + \dfrac{\alpha_{14} + \alpha_{24}}{2} \cdot h =$ $= 1{,}04168 + \dfrac{1{,}0867 + 1{,}11036}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}05267$
6	0,06	$\alpha_{15} = x_5^2 + y_5^2 =$ $= 0{,}05^2 + 1{,}05267^2$ $= 1{,}11061$	$\alpha_{25} = (x_5 + h)^2 + (y_5 + \alpha_{15} h)^2 =$ $= (0{,}05 + 0{,}01)^2 + (1{,}05267 +$ $1{,}11061 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}13522$	$y_6 = y_5 + \dfrac{\alpha_{15} + \alpha_{25}}{2} \cdot h =$ $= 1{,}05267 + \dfrac{1{,}11061 + 1{,}13522}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}0639$
7	0,07	$\alpha_{16} = x_6^2 + y_6^2 =$ $= 0{,}06^2 + 1{,}0639^2$ $= 1{,}13548$	$\alpha_{26} = (x_6 + h)^2 + (y_6 + \alpha_{16} h)^2 =$ $= (0{,}06 + 0{,}01)^2 + (1{,}0639 +$ $1{,}13548 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}16107$	$y_7 = y_6 + \dfrac{\alpha_{16} + \alpha_{26}}{2} \cdot h =$ $= 1{,}0639 + \dfrac{1{,}13548 + 1{,}16107}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}07538$
8	0,08	$\alpha_{17} = x_7^2 + y_7^2 =$ $= 0{,}07^2 + 1{,}07538^2$ $= 1{,}16134$	$\alpha_{27} = (x_7 + h)^2 + (y_7 + \alpha_{17} h)^2 =$ $= (0{,}07 + 0{,}01)^2 + (1{,}07538 +$ $1{,}16134 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}18795$	$y_8 = y_7 + \dfrac{\alpha_{17} + \alpha_{27}}{2} \cdot h =$ $1{,}07538 + \dfrac{1{,}16134 + 1{,}18795}{2}$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}08713$
9	0,09	$\alpha_{18} = x_8^2 + y_8^2 =$ $= 0{,}08^2 + 1{,}08713^2$ $= 1{,}18825$	$\alpha_{28} = (x_8 + h)^2 + (y_8 + \alpha_{18} h)^2 =$ $= (0{,}08 + 0{,}01)^2 + (1{,}08713 +$ $1{,}18825 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}21593$	$y_9 = y_8 + \dfrac{\alpha_{18} + \alpha_{28}}{2} \cdot h =$ $1{,}08713 + \dfrac{1{,}18825 + 1{,}21593}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}09915$
10	0,1	$\alpha_{19} = x_9^2 + y_9^2 =$ $= 0{,}09^2 + 1{,}09915^2$ $= 1{,}21623$	$\alpha_{29} = (x_9 + h)^2 + (y_9 + \alpha_{19} h)^2 =$ $= (0{,}09 + 0{,}01)^2 + (1{,}09915 +$ $1{,}21623 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}24502$	$y_{10} = y_9 + \dfrac{\alpha_{19} + \alpha_{29}}{2} \cdot h =$ $1{,}09915 + \dfrac{1{,}21623 + 1{,}24502}{2} \cdot$ $\cdot 0{,}01 = 1{,}11146$

Таблиця 9.9. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера–Коші з кроком 0,02**

k	x_k	α_{1k}	α_{2k}	y_k
0	0			$y_0 = 1$
1	0,02	$\alpha_{10} = f(x_0; y_0) = x_0^2 + y_0^2 = 0^2 + 1^2 = 1$	$\alpha_{20} = (x_0 + 2h)^2 + (y_0 + \alpha_{10} 2h)^2 = (0 + 0,02)^2 + (1 + 1 \cdot 0,02)^2 = 1,0408$	$y_1 = y_0 + \frac{\alpha_{10} + \alpha_{20}}{2} \cdot 2h = 1 + \frac{1 + 1,0408}{2} \cdot 0,02 = 1,0204$
2	0,04	$\alpha_{11} = x_1^2 + y_1^2 = 0,02^2 + 1,0204^2 = 1,04162$	$\alpha_{21} = (x_1 + 2h)^2 + (y_1 + \alpha_{11} 2h)^2 = (0,02 + 0,02)^2 + (1,0204 + 1,04162 \cdot 0,02)^2 = 1,08576$	$y_2 = y_1 + \frac{\alpha_{11} + \alpha_{21}}{2} \cdot 2h = 1,0204 + \frac{1,04162 + 1,08576}{2} \cdot 0,02 = 1,04167$
3	0,06	$\alpha_{12} = x_2^2 + y_2^2 = 0,04^2 + 1,04167^2 = 1,08668$	$\alpha_{22} = (x_2 + 2h)^2 + (y_2 + \alpha_{12} 2h)^2 = (0,04 + 0,02)^2 + (1,04167 + 1,08668 \cdot 0,02)^2 = 1,13443$	$y_3 = y_2 + \frac{\alpha_{12} + \alpha_{22}}{2} \cdot 2h = 1,04167 + \frac{1,08668 + 1,13443}{2} \cdot 0,02 = 1,06388$
4	0,08	$\alpha_{13} = x_3^2 + y_3^2 = 0,06^2 + 1,06388^2 = 1,13544$	$\alpha_{23} = (x_3 + 2h)^2 + (y_3 + \alpha_{13} 2h)^2 = (0,06 + 0,02)^2 + (1,06388 + 1,13544 \cdot 0,02)^2 = 1,18708$	$y_4 = y_3 + \frac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{2} \cdot 2h = 1,06388 + \frac{1,13544 + 1,18708}{2} \cdot 0,02 = 1,08711$
5	0,1	$\alpha_{14} = x_4^2 + y_4^2 = 0,08^2 + 1,08711^2 = 1,18821$	$\alpha_{24} = (x_4 + 2h)^2 + (y_4 + \alpha_{14} 2h)^2 = (0,08 + 0,02)^2 + (1,08711 + 1,18821 \cdot 0,02)^2 = 1,24404$	$y_5 = y_4 + \frac{\alpha_{14} + \alpha_{24}}{2} \cdot 2h = 1,08711 + \frac{1,18821 + 1,24404}{2} \cdot 0,02 = 1,111433$

Визначимо абсолютну похибку розв'язання диференціального рівняння за методом Ейлера–Коші.

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{3}\left|y_n - \hat{y}_n\right|$$

$$\Delta y = \frac{1}{3}\left|y_{10,\ h} - y_{5,\ 2h}\right| = \frac{1}{3}\left|1,11146 - 1,111433\right| = 9 \cdot 10^{-6}.$$

9.7. Метод Рунге–Кутта

Це найбільше часто використовуваний метод при чисельному розв'язанні задачі Коші, тому що дозволяє одержати наближене розв'язання з великою точністю.

Геометрично цей метод для розв'язання задачі (9.1), (9.2) полягає в тому, що на малому відрізку $[x; x+h]$ інтегральна крива $y = y(x)$ рівняння (9.1) замінюється прямою лінією , яка проходить через точку $(x, y(x))$. Але в основу методу покладено більш точний, ніж а методах Ейлера, підхід визначення напряму цього відрізка прямої.

Для реалізації методу Рунге–Кутта відрізок розвязання задачі $[a; b]$ поділяють на n рівних частин з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$ точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ і визначають $y_1, y_2, ..., y_k$ – наближені значення в точках $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Після цього переходять до наступного відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ і отримують y_{k+1}, визначають $\alpha_{ik} = f(x_k, y_k)$ – напрямок дотичної до інтегральної кривої в точці $M_k(x_k, y_k)$ і точку перетину прямих $y - y_k = \alpha_k(x - x_k)$ і $x = x_k + \dfrac{h}{2}$, тобто точку $N_k'(x_k + \dfrac{h}{2}; y_k + \dfrac{h}{2})$.

Визначають напрямок дотичної в точці N_k':

$$\alpha_{2k} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \alpha_{1k}\frac{h}{2})$$

і із точки M_k проводять пряму з кутовим коефіцієнтом α_{2k}: $y - y_k = \alpha_{2k}(x - x_k)$ до перетину з прямою $x = x_k + \dfrac{h}{2}$. Таким чином отримують точку $N_k''(x_k + \dfrac{h}{2},\ y_k + \alpha_{2k}\dfrac{h}{2})$.

Визначають напрямок дотичної в точці N_k'':

$$\alpha_{3k} = f(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \alpha_{2k}\frac{h}{2})$$

і із точки M_k проводять пряму з кутовим коефіцієнтом α_{3k}: $y - y_k = \alpha_{3k}(x - x_k)$ до перетину з прямою $x = x_k + h$. Таким чином отримують точку

$M'_{k+1}(x_k + h; y_k + \alpha_{2k} \cdot h)$. Надалі визначають напрямок дотичної в точці M_{k+1}:

$$\alpha_{4k} = f(x_n + h, y_n + \alpha_{3k} \cdot h).$$

Узагальнений напрямок ламаної на відрізку $[x_k;\ x_{k+1}]$, що представляє наближене розв'язання задачі, визначають як:

$$\alpha_k = \frac{1}{6}(\alpha_{1k} + 2\alpha_{2k} + 2\alpha_{3k} + \alpha_{4k}),$$

і проводять із точки M_k пряму $y - y_k = \alpha_k(x - x_k)$ до перетину з прямою $x = x_k + h$ в точці $M_{k+1}(x_{k+1}; y_{k+1})$, де $y_{k+1} = y_k + \alpha_k \cdot h$. Визначають наближене значення в точці $x_{k+1} = x_k + h$.

Алгоритм методу розв'язання задачі (9.1), (9.2) методом Рунге–Кутта на відрізку $[a; b]$ складається з таких етапів:

а) задають кількість n точок поділу відрізка $[a;b]$ і визначають крок інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$. Нехай $k = 0$. Значення x_0, y_0 вважають відомими;

б) визначають наступне значення x_k, y_k за формулами:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1k} = f(x_k; y_k),\\
&\alpha_{2k} = f(x_k + \frac{h}{2}),\ y_k + \alpha_{1k} \cdot \frac{h}{2});\\
&\alpha_{3k} = f(x_k + \frac{h}{2}),\ y_k + \alpha_{2k} \cdot \frac{h}{2});\\
&\alpha_{4k} = f(x_k + h),\ y_k + \alpha_{3k} \cdot h);\\
&\alpha_k = \frac{1}{6}(\alpha_{1k} + 2\alpha_{2k} + 2\alpha_{3k} + \alpha_{4k});\\
&x_{k+1} = x_k + h;\ y_{k+1} = y_k + \alpha_k \cdot h,\\
&k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

в) перевіряють умова завершення ітераційного процесу розв'язання диференціального рівняння. Якщо $k + 1 = n$, тобто $x_n = b$, процес обчислень завершено. Числа $y_0, y_1, \ldots y_n$ представляють наближене значення шуканого розв'язання в точках $x_0, x_1, \ldots x_n$. Інакше $k = k + 1$ і здійснюють перехід до попереднього пункту б), вважаючи початковими x_{k-1}, y_{k-1}.

Геометрична інтерпретація методу Рунге–Кутта наведена на рисунку 9.4.

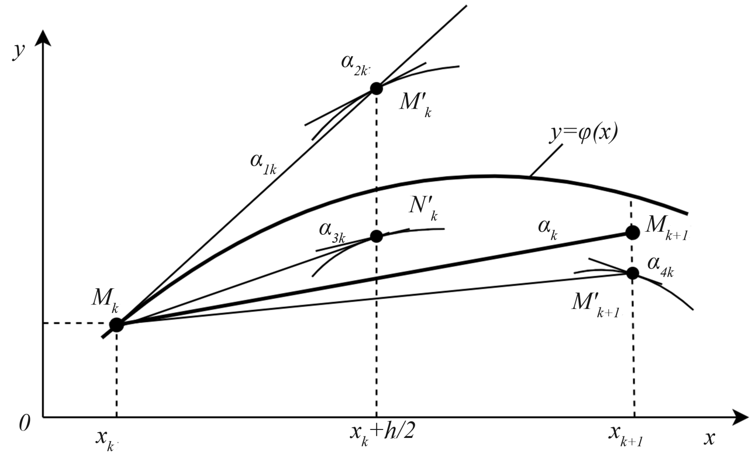


Рис. 9.4. Геометрична інтерпретація методу Рунге–Кутта

Обчислення за методом Рунге–Кутта значно ускладнено в порівнянні з методами Ейлера. Але за рахунок додаткових обчислень метод має меншу похибку при заміні точного розв'язання $y(x_k)$, $(k = 1, 2, 3, ..., n)$ його наближеним y_n.

Із теорії наближених методів відомо, що при кроці інтегрування h має місце така оцінка похибки обчислення:

$$| y_k - y(x_k) | \leq C \cdot h^5 .$$

Таким чином похибка одного кроку обчислень (визначення y_{k+1} при відомому y_k) має порядок h^5 (або $\frac{1}{n^5}$). Сумарна похибка за n кроків, тобто похибка наближеного рішення y_n в точці x_n буде мати порядок h^4 (або $\frac{1}{n^4}$). Звідси, якщо збільшити кількість n точок поділу відрізка в 2 рази, похибка зменшиться в 16 разів. Тому для оцінки наближеного розв'язання y_n, що отримане з кроком h, виконують обчислення з кроком $2h$ і за абсолютну похибку $\Delta\left(y_n\right)$ приймають похибку:

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{15}\left|y_n - \widehat{y}_n\right|, \tag{9.13}$$

де $\widehat{y}_n$ – наближене рішення в точці x_n з кроком $2h$.

Перевірку точності обчислень шляхом подвійного перерахування з подвоєним кроком достатньо через 4 – 5 кроків. За умовою

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{15}\left|y_n - \widehat{y}_n\right| < \varepsilon$$

в якості критерію вибору кроку h для отримання розв'язання задачі з заданою точністю ε можна розв'язати задачу Коші методом Рунге–Кутта з автоматичним вибором кроку.

Ця оцінка є оцінкою методу і не враховує похибку, що отримана при округленні.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = y^2 + x^2$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, на відрізку $[0; 0{,}1]$ з кроком $h = 0{,}01$ методом Рунге–Кутта.

Розв'язок. Чисельне розв'язання задачі Коші для даного диференціального рівняння на заданому інтервалі та вказаній початковій умові виконуємо згідно з раніш наведеним алгоритмом та формулами (9.12):

Наведемо результати обчислень y_k, $k = 0, 2, 3, \ldots, 9$ що повторюються з кроком $h = 0{,}01$.

$k = 0;$

$y_0 = 1;\quad x_0 = 0;$

$k = 1;$

$\alpha_{10} = x_0^2 + y_0^2 = 0^2 + 1^2 = 1;$

$\alpha_{20} = \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \alpha_{10} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0 + 0{,}005)^2 + (1 + 1 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}01005;$

$\alpha_{30} = \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \alpha_{20} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0 + 0{,}005)^2 + (1 + 1{,}01005 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}01015;$

$\alpha_{40} = (x_0 + h)^2 + (y_0 + \alpha_{30} \cdot h)^2 = (0 + 0{,}01)^2 + (1 + 1{,}01015 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}02041;$

$\alpha_0 = \frac{1}{6}(\alpha_{10} + 2\alpha_{20} + 2\alpha_{30} + \alpha_{40}) = \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1{,}01005 + 2 \cdot 1{,}01015 + 1{,}02041) = 1{,}010135;$

$y_1 = y_0 + \alpha_0 h = 1 + 1{,}010135 \cdot 0{,}01 = 1{,}01010135;$

$x_1 = x_0 + h;$

$k = 2;$

$x_2 = x_1 + h;$

$$\alpha_{11} = x_1^2 + y_1^2 = 0{,}01^2 + 1{,}01010135^2 = 1{,}0204;$$

$$\alpha_{21} = \left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_1 + \alpha_{11}\cdot\frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}01 + 0{,}005)^2 + (1{,}01010135 + 1{,}0204\cdot 0{,}005)^2 = 1{,}03086;$$

$$\alpha_{31} = \left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_1 + \alpha_{21}\cdot\frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}01 + 0{,}005)^2 + (1{,}01010135 + 1{,}03086\cdot 0{,}005)^2 = 1{,}03097;$$

$$\alpha_{41} = (x_1 + h)^2 + (y_1 + \alpha_{31}\cdot h)^2 = (0{,}01 + 0{,}01)^2 + (1{,}01010135 + 1{,}03097\cdot 0{,}01)^2 = 1{,}04164;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}(\alpha_{11} + 2\alpha_{21} + 2\alpha_{31} + \alpha_{41}) = \frac{1}{6}(1{,}0204 + 2\cdot 1{,}03086 + 2\cdot 1{,}03097 + 1{,}04164) = 1{,}03095;$$

$$y_2 = y_1 + \alpha_1 h = 1{,}01010135 + 1{,}03095\cdot 0{,}01 = 1{,}0204109;$$

$k = 3$;

$x_3 = x_2 + h$;

$$\alpha_{12} = x_2^2 + y_2^2 = 0{,}02^2 + 1{,}0204109^2 = 1{,}04164;$$

$$\alpha_{22} = \left(x_2 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_2 + \alpha_{12}\cdot\frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}02 + 0{,}005)^2 + (1{,}0204109 + 1{,}04164\cdot 0{,}005)^2 = 1{,}05252;$$

$$\alpha_{32} = \left(x_2 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_2 + \alpha_{22}\cdot\frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}02 + 0{,}005)^2 + (1{,}0204109 + 1{,}05252\cdot 0{,}005)^2 = 1{,}05263;$$

$$\alpha_{42} = (x_2 + h)^2 + (y_2 + \alpha_{32}\cdot h)^2 = (0{,}02 + 0{,}01)^2 + (1{,}0204109 + 1{,}05263\cdot 0{,}01)^2 = 1{,}06373;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6}(\alpha_{12} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{32} + \alpha_{42}) = \frac{1}{6}(1{,}04164 + 2\cdot 1{,}05252 + 2\cdot 1{,}05263 + 1{,}06373) = 1{,}05261;$$

$$y_3 = y_2 + \alpha_2 h = 1{,}0204109 + 1{,}05261\cdot 0{,}01 = 1{,}030937;$$

$k = 4$;

$x_4 = x_3 + h$;

$$\alpha_{13} = x_3^2 + y_3^2 = 0{,}03^2 + 1{,}030937^2 = 1{,}06373;$$

$$\alpha_{23} = \left(x_3 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_3 + \alpha_{13}\cdot\frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}03 + 0{,}005)^2 + (1{,}030937 + 1{,}06373\cdot 0{,}005)^2 = 1{,}07505;$$

$$\alpha_{33} = \left(x_3 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_3 + \alpha_{23}\cdot\frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}03 + 0{,}005)^2 + (1{,}030937 + 1{,}07507\cdot 0{,}005)^2 = 1{,}07517;$$

$$\alpha_{43} = (x_3 + h)^2 + (y_3 + \alpha_{33}\cdot h)^2 = (0{,}03 + 0{,}01)^2 + (1{,}030937 + 1{,}07517\cdot 0{,}01)^2 = 1{,}08672;$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{6}(\alpha_{13} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{33} + \alpha_{43}) = \frac{1}{6}(1{,}06373 + 2\cdot 1{,}07505 + 2\cdot 1{,}07517 + 1{,}08672) = 1{,}07515;$$

$$y_4 = y_3 + \alpha_3 h = 1{,}030937 + 1{,}07515\cdot 0{,}01 = 1{,}041689;$$

$k = 5$;

$x_5 = x_4 + h$;

$\alpha_{14} = x_4^2 + y_4^2 = 0{,}04^2 + 1{,}041689^2 = 1{,}08672;$

$\alpha_{24} = \left(x_4 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_4 + \alpha_{14} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}04 + 0{,}005)^2 + (1{,}041689 + 1{,}08672 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}09849;$

$\alpha_{34} = \left(x_4 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_4 + \alpha_{24} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}04 + 0{,}005)^2 + (1{,}041689 + 1{,}09849 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}09861;$

$\alpha_{44} = (x_4 + h)^2 + (y_4 + \alpha_{34} \cdot h)^2 = (0{,}04 + 0{,}01)^2 + (1{,}041689 + 1{,}09861 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}11062;$

$\alpha_4 = \frac{1}{6}(\alpha_{14} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{34} + \alpha_{44}) = \frac{1}{6}(1{,}08672 + 2 \cdot 1{,}09849 + 2 \cdot 1{,}09861 + 1{,}11062) = 1{,}09859;$

$y_5 = y_4 + \alpha_4 h = 1{,}041689 + 1{,}09859 \cdot 0{,}01 = 1{,}052675;$

$k = 6;$

$x_6 = x_5 + h;$

$\alpha_{15} = x_5^2 + y_5^2 = 0{,}05^2 + 1{,}052675^2 = 1{,}11062;$

$\alpha_{25} = \left(x_5 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_5 + \alpha_{15} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}05 + 0{,}005)^2 + (1{,}052675 + 1{,}11062 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}12287;$

$\alpha_{35} = \left(x_5 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_5 + \alpha_{25} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}05 + 0{,}005)^2 + (1{,}052675 + 1{,}12287 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}123;$

$\alpha_{45} = \left(x_5 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_5 + \alpha_{35} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}05 + 0{,}01)^2 + (1{,}052675 + 1{,}123 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}13549;$

$\alpha_5 = \frac{1}{6}(\alpha_{15} + 2\alpha_{25} + 2\alpha_{35} + \alpha_{45}) = \frac{1}{6}(1{,}11062 + 2 \cdot 1{,}12287 + 2 \cdot 1{,}123 + 1{,}13549) = 1{,}122975;$

$y_6 = y_5 + \alpha_5 h = 1{,}052675 + 1{,}122975 \cdot 0{,}01 = 1{,}0639048;$

$k = 7;$

$x_7 = x_6 + h;$

$\alpha_{16} = x_6^2 + y_6^2 = 0{,}06^2 + 1{,}0639048^2 = 1{,}13549;$

$\alpha_{26} = \left(x_6 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_6 + \alpha_{16} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}06 + 0{,}005)^2 + (1{,}0639048 + 1{,}13549 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}14823;$

$\alpha_{36} = \left(x_6 + \frac{h}{2}\right)^2 + \left(y_6 + \alpha_{26} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = (0{,}06 + 0{,}005)^2 + (1{,}0639048 + 1{,}14823 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}14837;$

$\alpha_{46} = (x_6 + h)^2 + (y_6 + \alpha_{36} \cdot h)^2 = (0{,}06 + 0{,}01)^2 + (1{,}0639048 + 1{,}14837 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}16136;$

$\alpha_6 = \frac{1}{6}(\alpha_{16} + 2\alpha_{26} + 2\alpha_{36} + \alpha_{46}) = \frac{1}{6}(1{,}13549 + 2 \cdot 1{,}14823 + 2 \cdot 1{,}14837 + 1{,}16136) = 1{,}14834;$

$y_7 = y_6 + \alpha_6 h = 1{,}0639048 + 1{,}14834 \cdot 0{,}01 = 1{,}0753882;$

$k = 8;$

$x_8 = x_7 + h;$

$\alpha_{17} = x_7^2 + y_7^2 = 0{,}07^2 + 1{,}0753832^2 = 1{,}16136;$

$\alpha_{27} = \left(x_7 + \dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(y_7 + \alpha_{17} \cdot \dfrac{h}{2}\right)^2 = (0{,}07 + 0{,}005)^2 + (1{,}0753882 + 1{,}16136 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}17461;$

$\alpha_{37} = \left(x_7 + \dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(y_7 + \alpha_{27} \cdot \dfrac{h}{2}\right)^2 = (0{,}07 + 0{,}005)^2 + (1{,}0753882 + 1{,}17461 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}17475;$

$\alpha_{47} = (x_7 + h)^2 + (y_7 + \alpha_{37} \cdot h)^2 = (0{,}07 + 0{,}01)^2 + (1{,}0753882 + 1{,}17475 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}18826;$

$\alpha_7 = \dfrac{1}{6}(\alpha_{17} + 2\alpha_{27} + 2\alpha_{37} + \alpha_{47}) = \dfrac{1}{6}(1{,}16136 + 2 \cdot 1{,}17461 + 2 \cdot 1{,}17475 + 1{,}18826) = 1{,}17472;$

$y_8 = y_7 + \alpha_7 h = 1{,}0753882 + 1{,}17472 \cdot 0{,}01 = 1{,}0871354;$

$k = 9;$

$x_9 = x_8 + h;$

$\alpha_{18} = x_8^2 + y_8^2 = 0{,}08^2 + 1{,}08781354^2 = 1{,}18826;$

$\alpha_{28} = \left(x_8 + \dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(y_8 + \alpha_{18} \cdot \dfrac{h}{2}\right)^2 = (0{,}08 + 0{,}005)^2 + (1{,}0871354 + 1{,}18826 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}20204;$

$\alpha_{38} = \left(x_8 + \dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(y_8 + \alpha_{28} \cdot \dfrac{h}{2}\right)^2 = (0{,}08 + 0{,}005)^2 + (1{,}0871354 + 1{,}20204 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}20219;$

$\alpha_{48} = (x_8 + h)^2 + (y_8 + \alpha_{38} \cdot h)^2 = (0{,}08 + 0{,}01)^2 + (1{,}0871354 + 1{,}20219 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}21625;$

$\alpha_8 = \dfrac{1}{6}(\alpha_{18} + 2\alpha_{28} + 2\alpha_{38} + \alpha_{48}) = \dfrac{1}{6}(1{,}18826 + 2 \cdot 1{,}20204 + 2 \cdot 1{,}20219 + 1{,}21625) = 1{,}20216;$

$y_9 = y_8 + \alpha_8 h = 1{,}0871354 + 1{,}20216 \cdot 0{,}01 = 1{,}099157;$

$k = 10;$

$x_{10} = x_9 + h;$

$\alpha_{19} = x_9^2 + y_9^2 = 0{,}09^2 + 1{,}099157^2 = 1{,}21625;$

$\alpha_{29} = \left(x_9 + \dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(y_9 + \alpha_{19} \cdot \dfrac{h}{2}\right)^2 = (0{,}09 + 0{,}005)^2 + (1{,}099157 + 1{,}21625 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}23058;$

$\alpha_{39} = \left(x_9 + \dfrac{h}{2}\right)^2 + \left(y_9 + \alpha_{29} \cdot \dfrac{h}{2}\right)^2 = (0{,}09 + 0{,}005)^2 + (1{,}099157 + 1{,}23058 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}23073;$

$\alpha_{49} = (x_9 + h)^2 + (y_9 + \alpha_{39} \cdot h)^2 = (0{,}09 + 0{,}01)^2 + (1{,}099157 + 1{,}23073 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}24535;$

$\alpha_9 = \dfrac{1}{6}(\alpha_{19} + 2\alpha_{29} + 2\alpha_{39} + \alpha_{49}) = \dfrac{1}{6}(1{,}21625 + 2 \cdot 1{,}23058 + 2 \cdot 1{,}23073 + 1{,}24535) = 1{,}2307;$

$y_{10} = y_9 + \alpha_9 h = 1{,}099157 + 1{,}2307 \cdot 0{,}01 = 1{,}111464.$

Результати розв'язання задачі Коші за методом Рунге–Кутта можна представити в вигляді таблиці 9.10.

Таблиня 9.10. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Рунге–Кутта з кроком 0,01**

k	x_k	y_k
0	0	$y_0 = 1$
1	0,01	$y_1 = 1{,}01010135$
2	0,02	$y_2 = 1{,}0204109$
3	0,03	$y_3 = 1{,}030937$
4	0,04	$y_4 = 1{,}041689$
5	0,05	$y_5 = 1{,}052675$
6	0,06	$y_6 = 1{,}0639048$
7	0,07	$y_7 = 1{,}0753882$
8	0,08	$y_8 = 1{,}0871354$
9	0,09	$y_9 = 1{,}099157$
10	0,1	$y_{10} = 1{,}111464$

Для оцінки точності наближеного розв'язання диференціального рівняння методом Рунге–Кутта, що отримане з кроком h, повторимо обчислення з подвійним кроком $2h$.

$k = 0;$

$x_0 = 0; \quad y_0 = 1;$

$k = 1;$

$x_1 = x_0 + 2h = 0 + 2h = 0 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02;$

$\alpha_{10} = x_0^2 + y_0^2 = 0^2 + 1^2 = 1$

$$\alpha_{20} = \left(x_0 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \alpha_{10} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0 + 0{,}01)^2 + (1 + 1 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}0202;$$

$$\alpha_{30} = \left(x_0 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \alpha_{20} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0 + 0{,}01)^2 + (1 + 1{,}0202 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}02061;$$

$$\alpha_{40} = (x_0 + 2h)^2 + (y_0 + \alpha_{30} \cdot 2h)^2 = (0 + 0{,}02)^2 + (1 + 1{,}0202 \cdot 0{,}02)^2 = 1{,}04164;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{6}(\alpha_{10} + 2\alpha_{20} + 2\alpha_{30} + \alpha_{40}) = \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1{,}0202 + 2 \cdot 1{,}02061 + 1{,}04164) = 1{,}02054;$$

$y_1 = y_0 + \alpha_0 h = 1 + 1{,}02054 \cdot 0{,}02 = 1{,}0204108;$

$k = 2;$

$x_2 = x_1 + 2h = 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}04;$

$\alpha_{11} = x_1^2 + y_1^2 = 0{,}02^2 + 1{,}0204108^2 = 1{,}04164;$

$$\alpha_{21} = \left(x_1 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_1 + \alpha_{11} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}02 + 0{,}01)^2 + (1{,}0204108 + 1{,}04164 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}0635;$$

$$\alpha_{31} = \left(x_1 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_1 + \alpha_{21} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}02 + 0{,}01)^2 + (1{,}0204108 + 1{,}0635 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}06396;$$

$$\alpha_{41} = (x_1 + 2h)^2 + (y_1 + \alpha_{31} \cdot 2h)^2 = (0{,}02 + 0{,}02)^2 + (1{,}0204108 + 1{,}06396 \cdot 0{,}02)^2 = 1{,}08672;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}(\alpha_{11} + 2\alpha_{21} + 2\alpha_{31} + \alpha_{41}) = \frac{1}{6}(1{,}04164 + 2 \cdot 1{,}0635 + 2 \cdot 1{,}06396 + 1{,}08672) = 1{,}06388;$$

$y_2 = y_1 + \alpha_1 2h = 1{,}0204108 + 1{,}06388 \cdot 0{,}02 = 1{,}0416884;$

$k = 3;$

$x_3 = x_2 + 2h = 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}06;$

$\alpha_{12} = x_2^2 + y_2^2 = 0{,}04^2 + 1{,}0416884^2 = 1{,}08671;$

$$\alpha_{22} = \left(x_2 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_2 + \alpha_{12} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}04 + 0{,}01)^2 + (1{,}0416884 + 1{,}08671 \cdot 0{,}005)^2 = 1{,}11037;$$

$$\alpha_{32} = \left(x_2 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_2 + \alpha_{22} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}04 + 0{,}01)^2 + (1{,}0416884 + 1{,}11037 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}11087;$$

$$\alpha_{42} = (x_2 + 2h)^2 + (y_2 + \alpha_{32} \cdot 2h)^2 = (0{,}04 + 0{,}02)^2 + (1{,}0416884 + 1{,}11087 \cdot 0{,}02)^2 = 1{,}1355;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6}(\alpha_{12} + 2\alpha_{22} + 2\alpha_{32} + \alpha_{42}) = \frac{1}{6}(1{,}08671 + 2 \cdot 1{,}11037 + 2 \cdot 1{,}11087 + 1{,}1355) = 1{,}11078;$$

$y_3 = y_2 + \alpha_2 h = 1{,}0416884 + 1{,}11078 \cdot 0{,}02 = 1{,}063904;$

$k = 4;$

$x_4 = x_3 + 2h = 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}08;$

$\alpha_{13} = x_3^2 + y_3^2 = 0{,}06^2 + 1{,}063904^2 = 1{,}13549;$

$$\alpha_{23} = \left(x_3 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_3 + \alpha_{13} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}06 + 0{,}01)^2 + (1{,}063904 + 1{,}13549 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}16108;$$

$$\alpha_{33} = \left(x_3 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_3 + \alpha_{23} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}06 + 0{,}01)^2 + (1{,}063904 + 1{,}16108 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}16163;$$

$$\alpha_{43} = (x_3 + 2h)^2 + (y_3 + \alpha_{33} \cdot 2h)^2 = (0{,}06 + 0{,}02)^2 + (1{,}063904 + 1{,}16163 \cdot 0{,}02)^2 = 1{,}18827;$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{6}(\alpha_{13} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{33} + \alpha_{43}) = \frac{1}{6}(1{,}13549 + 2 \cdot 1{,}16108 + 2 \cdot 1{,}16163 + 1{,}18827) = 1{,}16153;$$

$y_4 = y_3 + \alpha_3 2h = 1{,}063904 + 1{,}16153 \cdot 0{,}02 = 1{,}0871346;$

$k = 5;$

$x_5 = x_4 + 2h = 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}1;$

$\alpha_{14} = x_4^2 + y_4^2 = 0{,}08^2 + 1{,}0871346^2 = 1{,}18826;$

$$\alpha_{24} = \left(x_4 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_4 + \alpha_{14} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}08 + 0{,}01)^2 + (1{,}0871346 + 1{,}18826 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}21594;$$

$$\alpha_{34} = \left(x_4 + \frac{2h}{2}\right)^2 + \left(y_4 + \alpha_{24} \cdot \frac{2h}{2}\right)^2 = (0{,}08 + 0{,}01)^2 + (1{,}0871346 + 1{,}21594 \cdot 0{,}01)^2 = 1{,}21655;$$

$$\alpha_{44} = (x_4 + 2h)^2 + (y_4 + \alpha_{34} \cdot 2h)^2 = (0{,}08 + 0{,}02)^2 + (1{,}0871346 + 1{,}21655 \cdot 0{,}02)^2 = 1{,}24536;$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{6}(\alpha_{14} + 2\alpha_{24} + 2\alpha_{34} + \alpha_{44}) = \frac{1}{6}(1{,}18826 + 2 \cdot 1{,}21594 + 2 \cdot 1{,}21655 + 1{,}24536) = 1{,}21643;$$

$y_5 = y_4 + \alpha_4 2h = 1{,}0871346 + 1{,}21643 \cdot 0{,}02 = 1{,}1114632.$

Результати розв'язання диференціального рівняння методом Рунге–Кутта з кроком $2h$ представлено в таблиці 9.11.

Таблиця 9.11. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Рунге–Кутта з кроком 0,02**

k	x_k	y_k
0	0	$y_0 = 1$
1	0,02	$y_1 = 1{,}0204108$
2	0,04	$y_2 = 1{,}0416884$
3	0,06	$y_3 = 1{,}063904$
4	0,08	$y_4 = 1{,}0871346$
5	0,1	$y_5 = 1{,}114632$

Виконаємо оцінку похибки обчислення, що досягає найбільшого значення в точці $x = 0{,}1$

$$\delta = \frac{|y_{10,h} - y_{5,h}|}{15} = \frac{|1{,}111464 - 1{,}1114632|}{15} = 5{,}33 \cdot 10^{-8}.$$

При розв'язанні задачу Коші можна використовувати змінний крок диференціювання.

Приклад. Визначити наближене розв'язання задачі Коші $y' = xy^2 + \dfrac{1}{1-x}$, $y(0) = 1$, на відрізку $[0; 0{,}4]$ методом Рунге–Кутта зі змінним кроком з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Вибрати початковий крок $h = 0{,}2$.

Розв'язок. Числові значення y_i, визначаємо зі змінним кроком h, зменшуючи його вдвічі.

Результати обчислень представлено в таблиці 9.12.

Таблиня 9.12. **Результати розв'язання диференціального рівняння методом Рунге–Кутта зі змінним кроком**

x_i	0	0,2	0,3	0,35	0,375	0,4
y_i	1	1,25	1,428572	1,538462	1,6	1,666667

Таким чином, зменшуючи крок диференціювання вдвічі можна за меншу кількість ітерацій можна отримати задану точність обчислення.

Метод Рунге–Кутта дає набір формул для розрахунку координат внутрішніх точок. Оскільки існує не один спосіб розміщення внутрішніх точок та вибору відносних вагів для знайдених похідних, то метод Рунге–Кутта об'єднує ціле сімейство методів, що представлено в таблиці 9.13 [15].

Таблиця 9.13. **Розрахункові формули однокрокових методів**

Метод	Порядок	Розрахункова формула
Ейлера	Перший	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
Неявний Ейлера	Перший	$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$
Модифікований Ейлера	Другий	$k_1 = \frac{h}{2} f(x_k, y_k);\quad y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1)$
Ейлера–Коші	Другий	$k_1 = hf(x_k, y_k);\quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + k_1))$
Трапецій	Другий	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$
Хойне	Третій	$k_1 = hf(x_k, y_k);\quad k_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2});$ $k_3 = hf(x_k + h, y_k - k_1 + 2k_2);\quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$
Рунге–Кутта третього порядку	Третій	$k_1 = hf(x_k, y_k);\quad k_2 = hf(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{k_1}{3});$ $k_3 = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}k_2);\quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3)$
Рунге–Кутта четвертого порядку	Четвертий	$k_1 = hf(x_k, y_k);\quad k_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2});$ $k_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2});\quad k_4 = hf(x_k + h, y_k + k_3);$ $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Закінчення табл. 9.13

Метод	Порядок	Розрахункова формула
Кутта–Мерсона	Четвертий	$k_1 = \frac{h}{3} f(x_k, y_k);\quad k_2 = \frac{h}{3} f(x_k + \frac{h}{3}, y_k + k_1);$ $k_3 = \frac{h}{3} f(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2});$ $k_4 = \frac{h}{3} f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{3}{8} k_1 + \frac{9}{8} k_3);$ $k_5 = \frac{h}{3} f(x_k + h, y_k + \frac{3}{2} k_1 - \frac{9}{2} k_3 + 6k_4);$ $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(k_1 + 4k_4 + k_5)$
Рунге–Кутта-Фельберга	Перший	$k_0 = hf(x_k, y_k);\quad k_1 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_0}{2});$ $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{256}(k_0 + 255k_1)$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{1}{2} xy$ при початковій умові $y(0) = 1$ на інтервалі $[0; 1]$ з кроком $h = 0,2$ різними методами.

Розв'язок. Для порівняння різних методів чисельного розв'язання Коші наведемо результати розв'язання диференціального рівняння з використанням методів Ейлера, модифікованого Ейлера та Рунге–Кутта, що представлено в таблиці 9.14.

Таблиця 9.14. **Результати розв'язання диференціального рівняння різними методами**

k	x_n	Метод Ейлера	Модифікований метод Ейлера	Метод Рунге–Кутта
1	0,2	1	1,01	1,0100502
2	0,4	1,02	1,040603	1,0408108
3	0,6	1,0608	1,0936738	1,0941743
4	0,8	1,124448	1,1725277	1,1735109
5	1	1,2144038	1,2822763	1,2840254

Розглянуті методи чисельного інтегрування диференціальних рівнянь є однокроковими тому, що використовують на кожному кроці обчислень інформацію про значення розв'язання тільки в одній попередній точці.

Наведемо загальну характеристику однокрокових методів:

– для обчислення значень невідомої функції $y = f(x)$ в наступній точці x_{k+1} використовують дані лише про одну попередню точку x_k.;

– в основі однокрокових методів покладено розкладання функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, які містять крок h в степені до n

включно, що є порядком методу. При цьому локальна похибка методу є $O(h^{n+1})$, а глобальна – $O(h^n)$;

– однокрокові методи не потребують обчислення похідних, обчислюються тільки лише значення функції $f(x)$, можливо, у декількох проміжних точках.

9.8. Багатокрокові методи розв'язання диференціальних рівнянь

Окрім раніше розглянутих однокрокових методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь існує ряд методів, що дозволяють одержати розв'язання задачі з великою точністю, використовуючи інформацію, що отримана раніш на кількох попередніх кроках. Ці методи називаються багатокроковими. Обчислювальні схеми багатокрокових методів будуються так, що отримана раніш інформація про рішення використовують повторно на декількох кроках.

Серед багатокрокових методів різноманітних порядків найбільше часто використовують методи Адамса [6]. Сутність цих методів полягає в наступному: нехай знайдено наближені значення $y(x)$ в $k+1$ точках $x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k}$ з постійним кроком h. Позначимо $y(x_i) = y_i$; $f(x_i, y_i) = f_i$. За даними вузлами будують інтерполяційний поліном $P_k(x)$ для функції $f(x, y(x))$. Вважаючи приблизно, що $y'(x) = P_k(x)$, проінтегруємо це рівняння на інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$:

$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_k(x)dx. \tag{9.14}$$

Поліном $P_k(x)$ можна представити через кінцеві різниці функції $f(x, y(x))$, використовуючи формулу Ньютона для інтерполяції назад (7.13). Наприклад, якщо обмежитись різницями третього порядку, то отримаємо таку екстраполяційну **формулу Адамса** [6]

$$y_{i+1} = y_i + F_i + \frac{1}{2}\Delta F_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{i-3}, \tag{9.15}$$

де $F_i = h \cdot f(x_i, y(x_i))$.

Формулу (9.15) зручно представити в іншому вигляді, записавши кінцеві різниці через значення функції

$$\Delta F_{i-1} = h(f_i - f_{i-1});$$
$$\Delta^2 F_{i-2} = h(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2});$$
$$\Delta^3 F_{i-3} = h(f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3})$$

і підставивши їх в (9.15). Тоді отримаємо екстраполяційну **формулу Адамса–Бошфорта**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \qquad (9.16)$$

Тут використовують значення функції f_i в точках $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}$, що передують відрізку інтегрування. Таке наближення називається екстраполяцією.

Після визначення величини y_{i+1} по (9.16), обчислюють $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$, а потім уточнюють y_{i+1} за такою інтерполяційною формулою Адамса–Мултона:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \qquad (9.17)$$

Ця формула може бути отримана аналогічно формулі (9.15) із (9.14), якщо замість $P_k(x)$ підставити поліном Ньютона для інтерполяції назад (7.13), що побудований за точками $x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, x_{i-2}$.

Формули (9.16) и (9.17) мають четвертий порядок точності. Для початку обчислень необхідно, окрім y_0, мати ще три значення шуканого рішення y_1, y_2, y_3. Зазвичай їх визначають будь-яким однокроковим методом того же порядку, наприклад, методом Рунге–Кутта. Величину кроку в методі Рунге–Кутта вибирають меншим, ніж в наступних обчисленнях, для досягнення більшої точності в початкових точках відрізку інтегрування.

Різниця між передбаченим значенням $y_{i+1}^{пр}$ та скорегованим $y_{i+1}^{кор}$, що отримані відповідно за формулами (9.16) та (9.17), можна прийняти приблизно як оцінку локальної похибки обчислень на даному кроці. При відповідному виборі кроку h її можна зробити менше наперед заданого ε.

Важливою перевагою багатокрокових методів є менший об'єм обчислень функції $f(x, y)$ на кожному кроці. Крім того, вони допускають економний автоматичний контроль кроку за різницею $\left| y_{i+1}^{кор} - y_{i+1}^{пр} \right|$. До недоліків методів треба віднести проблему отримання початкових значень таблиці.

Методи Адамса можна використовувати для наближеного розв'язання задачі Коші (9.4), (9.5) для системи диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь вищих порядків.

Метод Мілна є багатокроковим методом четвертого порядку точності типу «передбачення-корекція» [6]. Для початку його використання необхідно визначити будь-яким однокроковим методом чотири значення шуканого рішення y_0, y_1, y_2, y_3. Подальші обчислення проводять за такою схемою:

– за чотирма попередніми точками передбачають наступне значення y_{i+1}:

$$y_{i+1}^{поп} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \tag{9.18}$$

де $f_i = f(x_i, y_i)$; $(i = 3, 4, 5, ...)$

– обчислюють значення правої частини рівняння:

$$f_{i+1}^{поп} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{поп}).$$

– корегують значення y_{i+1}:

$$y_{i+1}^{кор} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{поп}),\ (i = 3,\ 4,\ 5,\ldots). \tag{9.19}$$

Гранична абсолютна похибка значення y_i в методі Адамса–Мултона дорівнює:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}\,|\,y_i^{поп} - y_i^{кор}\,|. \tag{9.20}$$

Контрольні запитання

1. В чому суть чисельного розв'язання задачі Коші?
2. Постановка задачі Коші.
3. Обчислення диференціальних рівнянь методом Ейлера.
4. В чому полягає геометричне розуміння методу Ейлера?
5. Чому дорівнює похибка вирішення диференціальних рівнянь методом Ейлера?
6. Який вигляд формули Ейлера для обчислення систем диференціальних рівнянь?
7. Як розв'язати диференціальйне рівняння вищого порядку?
8. Модифікований метод Ейлера, його геометричне розуміння.

9. Як визначити похибку модифікованого методу Ейлера?

10. Формула розв'язання диференціальних рівнянь методом Ейлера–Коші.

11. Як визначити похибку використання формули Ейлера–Коші?

12. Який вигляд має формула Рунге–Кутта?

13. Похибка використання формули Рунге–Кутта при обчисленні диференціальних рівнянь.

14. Рекомендації щодо використання різноманітних однокрокових методів розв'язання диференціальних рівнянь.

15. Сутність багатокрокових методів розв'язання диференціальних рівнянь?

16. Які переваги і недоліки використання багатокрокових методів розв'язання диференціальних рівнянь?

17. Який вигляд має формула Адамса розв'язання диференціальних рівнянь?

18. Яким чином отримана формула Адамса–Башфорта, який вигляд вона має?

19. В чому полягає формула Адамса–Мултона розв'язання диференціальних рівнянь, як визначається похибка обчислення даним методом?

20. Яка сутність формули Мілна розв'язання диференціальних рівнянь, як визначити похибку її використання?

Задачі для самоконтролю

1. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' + 2xy = 2xy^2$ на відрізку $[0; 2]$ з кроком $h = 0{,}4$ при початковій умові $y(0) = 0{,}5$ методом Ейлера. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

2. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$ на відрізку $[1, 2]$ з кроком $h = 0{,}2$ при початковій умові $y(0) = 0{,}5$ модифікованим методом Ейлера. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

3. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$ на відрізку $[0; 0{,}9]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початковій умові

$y(0)=1$ методом Ейлера–Коші. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

4. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$ на відрізку $[0; 6]$ з кроком $h = 0{,}8$ при початковій умові $y(0)=1$ методом Рунге–Кутта. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

5. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1; \\ z' = z + y \end{cases}$ на відрізку $[0; 4]$ з кроком $h = 0{,}4$ при початкових умовах $y(0) = 0$ та $z(0) = 0$ методом Ейлера.

6. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1; \\ z' = z + y \end{cases}$ на відрізку $[0; 4]$ з кроком $h = 0{,}4$ при початкових умовах $y(0) = 0$ та $z(0) = 0$ модифікованим методом Ейлера.

7. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2y\text{-}z}; \\ z' = \dfrac{z}{2y - z} \end{cases}$ на відрізку $[0; 4]$ з кроком $h = 0{,}4$ при початкових умовах $y(0) = 0$ та $z(0) = 2$ методом Ейлера–Коші.

8. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} y' = 3y - 2z; \\ z' = z + y \end{cases}$ на відрізку $[0; 2]$ з кроком $h = 0{,}2$ при початкових умовах $y(0) = 1$ та $z(0) = 1$ методом Рунге–Кутта.

9. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ на відрізку $[0; 6]$ з кроком $h = 0{,}6$ при початкових умовах $y'(0) = 0$ та $y(0) = 0$ методом Ейлера.

10. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку $y'' + y = 4\sin x$ на відрізку $[0; 6]$ з кроком $h = 0{,}6$ при початкових умовах $y'(0) = 0$ та $y(0) = 0$ модифікованим методом Ейлера.

11. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку $y'' - 4y' + 5y = 3x$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початкових умовах $y'(0) = 3{,}6$ та $y(0) = 1{,}48$ методом Ейлера–Коші.

12. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку $y'' + y = 1 + e^x$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початкових умовах $y'(0) = 1{,}5$ та $y(0) = 2{,}5$ методом Рунге–Кутта.

13. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' = e^x + y^2$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початковій умові $y(0) = 0$ багатокроковим методом Адамса. Для визначення початкових значень y_1, y_2, y_3 використати будь-який однокроковий метод Ейлера, модифікований Ейлера, Ейлера–Коші або Рунге–Кутта. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

14. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' = e^x + y^2$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початковій умові $y(0) = 0$ багатокроковим методом Адамса–Башфорта. Для визначення початкових значень y_1, y_2, y_3 використати будь-який однокроковий метод Ейлера, модифікований Ейлера, Ейлера–Коші або Рунге–Кутта. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

15. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' = e^x + y^2$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початковій умові $y(0) = 0$ багатокроковим методом Адамса-Мултона. Для визначення початкових значень y_1, y_2, y_3 використати будь-який однокроковий метод Ейлера, модифікований Ейлера, Ейлера-Коші або Рунге–Кутта. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

16. Виконати чисельне розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння $y' = e^x + y^2$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ при початковій умові $y(0) = 0$ багатокроковим методом Мілна. Для визначення початкових значень y_1, y_2, y_3 використати будь-який однокроковий метод Ейлера, модифікований Ейлера, Ейлера–Коші або Рунге–Кутта. Визначити похибку розв'язання диференціального рівняння.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абакумова О. О. Чисельні методи. Комп'ютерний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», спеціалізації «Інформаційні технології в біології та медицині» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. О. Абакумова. – Електронні текстові данні (1 файл: 2,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 69 с.

2. Авдєєва Т. В. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків: Практикум / Т. В. Авдєєва, О. Б. Качаєнко. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 67 с. – Бібліогр.: с. 66.

3. Андруник В. А. Чисельні методи в комп'ютерних науках:навчальний посібник / В. А. Андруник, В. А.Висоцька, В. В.Пасічник, Л. Б. Чирун Л. Б., Л. В. Чирун – Львів: Видавництво «Новий світ -2000», 2017. – 470с. ISBN 978-617-7519-06-4.

4. Андруник В. А. Чисельні методи в комп'ютерних науках:навчальний посібник Том 2 за ред. В. В. Пасічника / В. А. Андруник, В. А.Висоцька, В. В.Пасічник, Л. Б. Чирун, Л. В. Чирун. – Львів: Видавництво «Новий світ -2000», 2020. – 536 с. ISBN 978-617-7519-12-5.

5. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее применение. / Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. – М.: Мир, 1972. –316 с. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/AlbergNilsonUolsh1972ru.pdf.

6. Барановская Г. Г Микрокалькуляторы в курсе высшей математики: Практикум. / Г. Г.Барановская, И. Н.Любченко – Киев, Выща школа, 1987. – 288с. https://ua1lib.org/book/2930267/59b4a2?regionChanged=&redirect=196005310.

7. Бахвалов Н. С. Численные методы: учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков – 4- е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.

8. Березин М. С. Методы вычислений: в 2 т. Т. 1. / М. С. Березин, Н. П. Жидков – М.: Наука, 1966. – 464 с. https://studizba.com/files/show/djvu/3255-1-tom-2.html.

9. Березин М. С. Методы вычислений: в 2 т. Т. 2. / М. С. Березин, Н. П. Жидков – М.: Наука, 1966. – 620 с.

10. Богач І. В. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь засобами MathCAD : навчальний посібник / І. В. Богач, О. Ю. Краковецький, Л. В. Крилик. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 106 с. ISBN 978-966-641-802-2.

11. Богданський Ю. В. Математичний аналіз 1 Диференціальне числення функцій дійсної змінної: Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс] : навчальний. посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В.Богданський, В. Г. Бондаренко, А. Ю.Мальцев, Г. Б. Подколзін.– Електронні текстові дані (1 файл: 3,32 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 59 с.

12. Бойцова І. А. Чисельні методи: конспект лекцій. / І. А. Бойцова – Одеса: Вид-во ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2015. – 126 с.

13. Бурова И. Г. Минимальные сплайны и их приложения / И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович: -СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. – 364 с. ISBN 978-5-288-04978-1.

14. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. / Н. П Бусленко – М.: Наука, 1978. – 400 с. https://www.twirpx.com/file/1655389/

15. Верлань А. Ф.Числові методи розв’язання диференціальних рівнянь: навч. посіб. / А. Ф. Верлань, С. О. Лук’яненко. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 172 с. . ISBN 9789666226207.

16. Волков В. Л. Моделирование процессов и систем в приборостроении. Учебное пособие для студентов технических специальностей дневной, вечерней и заочной форм обучения / В. Л. Волков - Арзамас, АПИ НГТУ, 2008.- 143 с.

17. Гончаров О. А. Чисельні методи розв’язання прикладних задач : навч. посіб. / О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва, А. М. Юнда. – Суми : Сумський державний університет, 2020. – 142 с. ISBN 978-966-657-828-3.

18. Гутер Р. С. Программирование и вычислительная математика / Р. С. Гутер, П. Л. Резниковский: вып. 2. – М.: Наука, 1971. – 264с. https://www.twirpx.com/file/1402012/.

19. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон – М.: Наука, 1966. – 664 с. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/DemidovichMaron1966ru.pdf.

20. Дичка І. А. Чисельні методи. Розв’язання задач лінійної алгебри та нелінійних рівнянь: лабораторний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення», спеціалізації «Програмне забезпечення комп’ютерних та інформаційно-пошукових систем» / І. А. Дичка, М. В. Онай, Р. А. Гадиняк ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,85 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 95с.

21. Дубовой В. М. Моделювання та оптимізація систем: підручник/ В. М. Дубовой, Р. Н. Квєтний, О. І.Михальов, А. В. Усов – Вінниця: ПП «ТДЕдельвейс», 2017. – 804. с. ISBN 978-617-7237-23-4.

22. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика / В. П Дьяконов– М.: Нолидж, 2001. – 1296 с. http://www.libex.ru/detail/book533274.html.

23. Елизаров И. А. Моделирование систем: учебное пособие / И. А. Елизаров, Ю. Ф. Мартемьянов, А. Г. Схиртладзе, А. А. Третьяков. – Тамбов: Из-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 96 с.

24. Задачин В. М. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с. ISBN 978-966-676-547-6.

25. Замятина О. М. Моделирование систем: учебное пособие. / О. М. Замятина– Томск:, Из-во ТГУ, 2009, – 204 с.

26. Карамайкин А. С. Моделирование процессов и систем. Текст лекций. / А. С. Карамайкин – СПб.: СПбГУАП, 2005, –108 с.

27. Копченова Н.В. Вычимслительная математика в примерах и задачах. / Н. В. Копченова, И. А. Марон – М.: Наука, 1972. – 367 с. https://edu-lib.com/matematika-2/dlya-studentov/kopchyonova-n-v-maron-i-a-vyichislitelnaya-matematika-v-primerah-i-zadachah-onlayn-2.

28. Квєтний Р. Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1. Навчальний посібник / Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софина, О. М. Шушура за заг. ред. Р. Н. Квєтного. – Вінниця :ВНТУ, 2012. – 193 с.

29. Квєтний Р. Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 2 : навчальний посібник / [Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та інші]; за заг. ред. Р. Н. Квєтного. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 235 с. ISBN 978-966-641-521-2 (частина 2).

30. Кук Д. Компьютерная математика. / Д. Кук, Г. Бейз – М.: Наука, 1990. – 383с. https://edu-lib.com/matematika-2/dlya-studentov/kuk-d-beyz-g-kompyuternaya-matematika-onlayn.

31. Лазарєв Ю.Ф. Моделювання на ЕОМ. Навчальний посібник./ Ю.Ф. Лазарєв – К: Політехніка, 2007. – 290 с.

32. Лисицын Б. М. Решение инженерных и экономических задач на ЭВМ. / Б. М. Лисицын и др. – Киев: Выща школа, 1984. – 248с. https://www.twirpx.com/file/1709582/.

33. Лук'яненко С. О. Числові методи в інформатиці [Текст]: навч. посіб. / С.О. Лук'яненко. – Вид. 2-ге, доп. та випр.. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 160 с.

34. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н.Моисеев – М.: Наука, 1981. – 487с. http://www.library.fa.ru/files/Moiseev.pdf

35. Третиник В. В. Методи обчислень: Частина 1. Чисельні методи алгебри [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Наука про дані (DataScience) та математичне моделювання» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. В. Третиник, Н. Д. Любашенко. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,94 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 138 с.

36. Мусіяка В. Г. Основи числових методів [Текст] підручник / В. Г. Мусіяка. – Дніпро : ЛІРА, 2017. – 256 с.

37. Павленко П. М. Основи математичного моделювання систем і процесів: навч. посіб. / П. М. Павленко – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2013. − 201 с.

38. Петренко А. І. Обчислювальна математика. / А. І. Петренко – Суми: ВМУРоЛ «Україна», 2002. – 212 с.

39. Півторак Д. О. Комп'ютерне моделювання процесів і систем. Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Д. О. Півторак, Ю. Ф. Лазарєв, С. Л. Лакоза ; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 207 с.

40. Попов В. В. Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету / В. В. Попов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 303 с.

41. Поршнев С. В. Вычислительная математика. / С. В. Поршнев– СПб: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с. https://www.twirpx.com/file/108170/

42. Прокопенко Ю. В. Обчислювальна математика [текст]: навч. посіб. / Ю. В. Прокопенко, Д. Д. Татарчук, В. А. Казміренко – К.: «Політехніка», 2013. – 224 с. ISBN 978-966-622-590-3.

43. Рибачук Л. В. Навчальний посібник з дисципліни «Спеціальні розділи математики-2 Чисельні методи» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» освітньо-професійної програми «Інформаційні управляючі системи та технології» / Л. В. Рибачук – Київ: КПІ, 2020. – 74 с.

44. Самарский А. А. Численные методы./ А. А. Самарский, А. В. Гулин – М.: Наука, 1989. – 430 с. http://samarskii.ru/books/book1989.pdf

45. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. / В. П. Сигорский – К.: Техніка, 1977. – 768 с. https://ru.pdfdrive.com/Математический-аппарат-инженера-d165622157.html

46. Советов Б.Я. Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М.: Высшая школа, 2001.– 343 с. http://simulation.su/uploads/files/default/2001-uchebnik-sovetov-yakovlev-1.pdf

47. Советов Б. Я. Моделирование систем. Практикум: Уч. Пособие для бакалавров ./ Б. Я. Советов –М.: Из-воЮрайт, 2014. –295 с. https://static.my-shop.ru/product/pdf/183/1823761.pdf

48. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике. / С. Б. Стечкин, Ю. Н.Субботин – М.: Наука, 1976. – 248 с. https://ua1lib.org/book/2418163/ca40ac?regionChanged=&redirect=196034478

49. Сулима И. М. Основные численные методы и их реализация на микрокалькуляторах. / Сулима И. М. и др. – Киев, Вища школа, 1987. – 310с. https://ua1lib.org/book/2580564/cc48bb?regionChanged=&redirect=196035712

50. Третиник В. В. Методи обчислень: Частина 1. Чисельні методи алгебри [Електронний ресурс: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика»], спеціалізація «Наука про дані (Data Science) та математичне моделювання»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського уклад.: В.В. Третиник, Н.Д. Любашенко.- Електронні текстові дані (1 файл: 2,94 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 138с.

51. Шаповаленко В. А. Чисельне обчислення функцій, характеристик матриць і розв'язування нелінійних рівнянь та систем рівнянь: Навч. посібник / Шаповаленко В. А., Буката Л. М., Трофименко О. Г. – Одеса: ВЦ ОНАЗ, 2010. – Ч.1. – 88 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Вислоух Сергій Петрович
Волошко Оксана Вячеславівна
Тимчик Григорій Семенович
Філіппова Марина В'ячеславівна

Комп'ютерне моделювання процесів та систем. Чисельні методи

Підручник

В авторській редакції

Комп'ютерне верстання *А. Мушницького*

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056

Підп. до друку 17.05.2021. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 13,25. Обл.-вид. арк. 20,49.
Поз. 21-1-1-004. Наклад 20 пр. Зам. № 21-055.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15
03056, м. Київ
тел. (044) 204-81-78

Розглянуто найбільш поширені чисельні методи, що трапляються в типових інженерних і наукових задачах у галузі комп'ютеризованих систем управління та комп'ютерної інженерії. Подано методологію комп'ютерного моделювання, похибки комп'ютерних обчислень, методи й алгоритми обчислення та наближення функцій, розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь, чисельного інтегрування та диференціювання функцій і вирішення диференціальних рівнянь. Наведено широкий спектр прикладів та задач.

Для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» під час вивчення дисципліни «Комп'ютерне моделювання систем та процесів», може бути використаний під час вивчення дисциплін, які пов'язані з комп'ютерними обчисленнями та обробкою даних, а також для наукової роботи студентів, аспірантів, інженерів і вчених.