Міністерство транспорту та зв'язку України
Київський електромеханічний технікум ім. М.Островського

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА НА ТЕМУ

«Дослідження функції та побудова її графіка»

Затверджено цикловою комісією
Протокол №
Від
Голова ЦК Дуднік С.І.

Виконав
викладач математики Балякіна В.Н.

План

1. **Деякі властивості функції.**
2. **Області визначення та значення функції заданої аналітично.**
3. **Основні елементарні функції.**
4. **Складні та елементарні функції.**

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ФУНКЦІЯ

Поняття функціональної залежності

Величина називається змінною (сталою), якщо в умовах даної задачі набуває різних (тільки одне) значень.

Розглянемо дві змінні величини $x \in D \subseteq R$ і $y \in E \subseteq R$..

Означення: Функцією *y = f(x)* називається така відповідність між множинами *D* і *E*, при якій кожному значенню змінної х відповідає одне й тільки одне значення змінної *y*.

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна або аргумент;

y — залежна змінна або функція;

f — символ закону відповідності;

D — область визначення функції;

E — множина значень функції.

Розрізняють три способи завдання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Означення: Функція *y = F(u)*, де $u = \varphi(x)$, називається складною функцією, або суперпозицією функцій *F(u)* та $\varphi(x)$ і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад: $y = f^{-1}(x)$. — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Означення: Нехай функція *y = f(x)* встановлює відповідність між множинами *D* та *E*. Якщо обернена відповідність між множинами *E* та *D* буде функцією, то вона називається оберненою до даної *y = f(x)* і її позначають $y = f^{-1}(x)$.

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

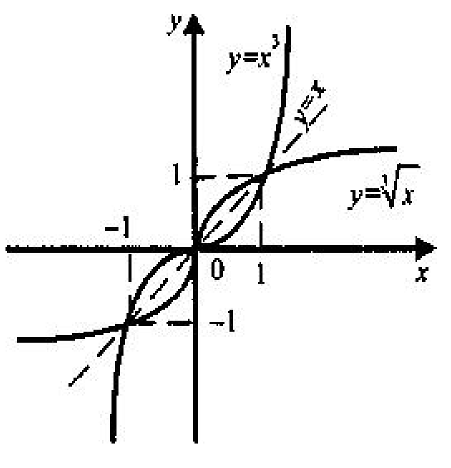

Рис. 3.1

Приклад: $f(x) = x^3, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ - взаємно обернені функції:

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 3.1).

Означення: Функція (функціональна залежність змінної у від змінної х) називається

неявною, якщо задана рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y.

Приклад: Рівняння $y+x+2^y=0$ визначає неявну функцію у від x.

Загальні властивості функцій

Означення: Множина всіх значень аргумента, для яких можна обчислити значення функції, називається природною областю визначення функції. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

Приклад: Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{1-x^2}}{\lg(1+x)}$$

$$D(y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \le 1 \\ 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 1 > 0 \\ \lg(x+1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x| \le 1 \\ x > -1 \\ x + 1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \le 1 \\ x \ne 0. \end{cases}$$

$D(y)=(-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$ - природна область визначення. Якщо за умовою задачі x — відстань, а це означає, що $x \ge 0$, тоді $D(y)==(0;\ 1]$ — задана область визначення.

Означення: Функція $y = f(x)$ називається парною (непарною), якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(-x) =f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для $x \in D, f(-x) \ne \pm f(x)$.

Приклад: $y = \cos x$ — парна функція (графік функції симетричний відносно осі ординат (рис. 3.2)), бо $y(x)=\cos(-x)=\cos x=y(x); y=\mathrm{arctg}\, x$ — непарна функція (графік функції симетричний відносно початку координат (рис. 3.3)), бо $y(-x)= =arctg(-x)= -arctgx = -y(x)$; $y = arccosx$ — ні парна, ні непарна (рис. 3.4), бо $y(-x)=arccos(-x)=\pi - arccosx \neq \pm y(x)$.

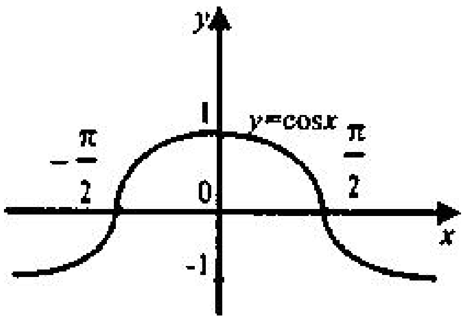

Рис. 3.2.

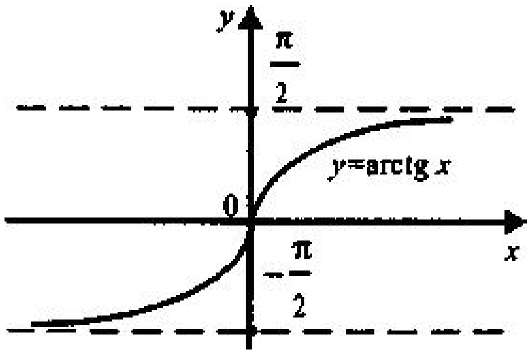

Рис. 3.3.

Означення: Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T — період функції.

Приклад: $y = tgx$ — періодична функція з мінімальним періодом $T = \pi$ (див. рис. 3.5), бо $tg(x+\pi) = tg(x-\pi) = tgx$.

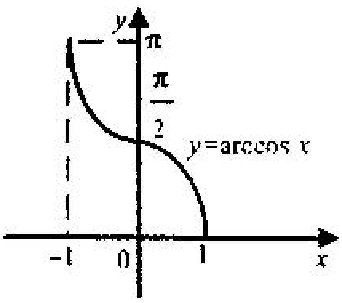

Рис. 3.4

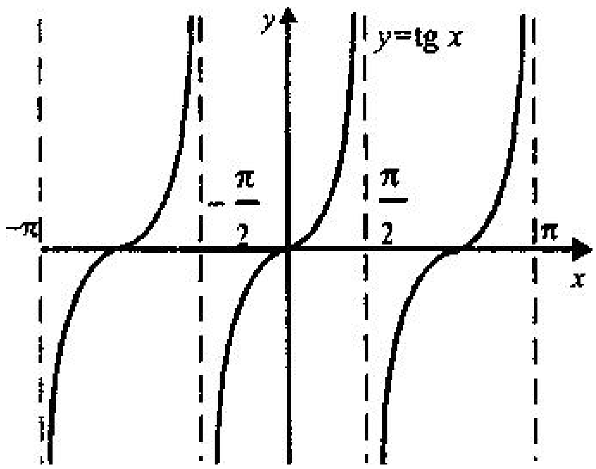

Рис. 3.5

Означення: Функція y - $f(x)$ називається обмеженою на множині D, якщо для всіх $x \in D$ виконується умова $|f(x)| \le M$, де $M > 0$ — деяке скінченне число.

Приклад: $y = arcsinx$ — обмежена функція для всіх $x \in [-1; 1]$ (рис. 3.6), бо $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$.

Означення: Функція y - $f(x)$ називається монотонно зростаючою (спадною) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргумента відповідає більше (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1)(f(x_2) < f(x_1))$.

Приклад: $y = log_a x$ — монотонно спадна функція при $0 < a < 1$, а при $a > 1$ — монотонно зростаюча (рис. 3.7).

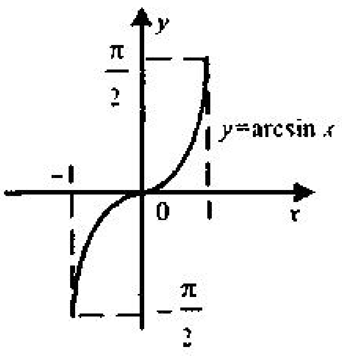

Рис. 3.6

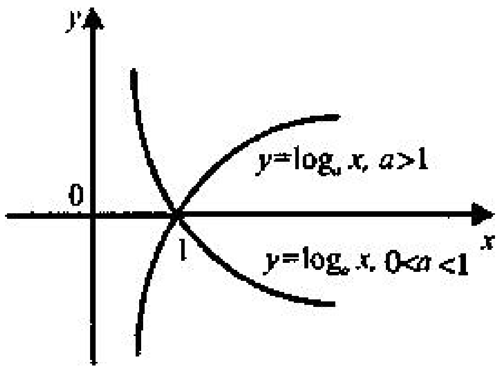

Рис. 3.7

3.1.3. Елементарні функції

Основні з них:

1) степенева $y = x^a$;

1) степенева $y = x^a$;

2) показникова $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ (рис. 3.8);

3) логарифмічна $y = log_a x, a > 0, a \neq 1$ (рис. 3.7);

4) тригонометричні: $y = cosx$ (рис. 3.2); $y = sinx$ (рис. 3.9); $y = tgx$ (рис. 3.5); $y = ctgx$ (рис. 3.10);

5) обернені тригонометричні: $y = arcsinx$ (рис. 3.6); $y = arccosx$ (рис. 3.4); $y = arctgx$ (рис. 3.5); $y = arcctgx$ (рис. 3.11).

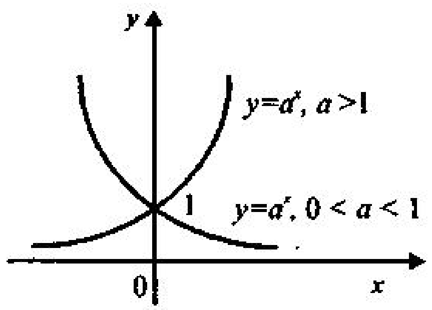

Рис. 3.8

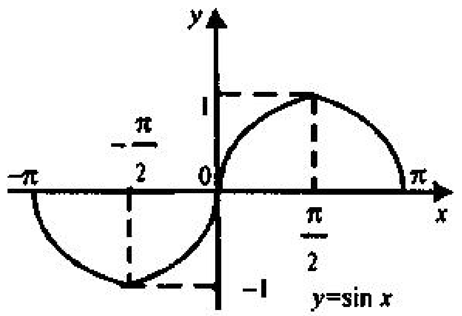

Рис. 3.9

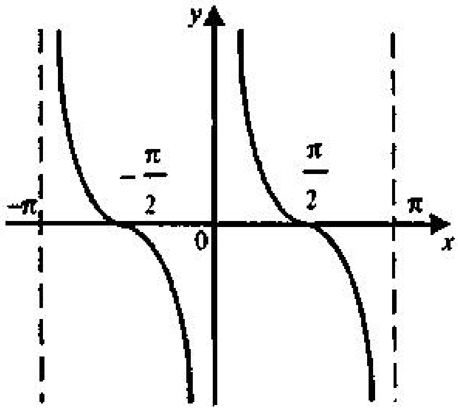

Рис. 3.10

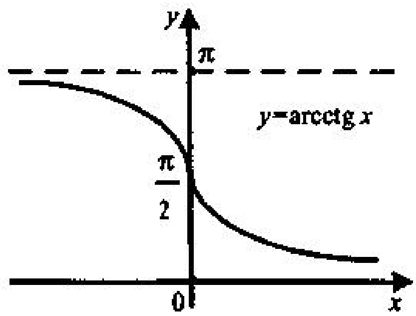

Рис. 3.11

Функція вважається елементарною, якщо вона може бути побудована з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій та суперпозицій, наприклад

$$y = 2^{xtg^3(x^2+\arcsin\sqrt{x})} + \cos^2\left(\log_2\left(arctgx - \frac{1}{x}\right)\right)$$ - елементарна функція.

Означення: Функція $y=y(x)$ називається алгебраїчною, якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + ... + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

де $P_i(x)$, $i = (O,n)$ — многочлени.

Приклад: Функція $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x-1}}$ буде алгебраїчною, бо вона є розв'язком рівняння

$$y^3(x-1)-(x^2+1)=0$$

Усі неалгебраїчні функції називаються трансцендентними.

Алгебраїчні функції поділяються на раціональні (цілі й дробові) та ірраціональні.

Цілою раціональною функцією буде упорядкований многочлен

$$y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n, a_i\in R$$

Дробово-раціональною функцією буде відношення многочленів

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \text{або } y=R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}$$

План практичних занять

1. Функції, їх властивості та області визначення.

Термінологічний словник ключових понять:

Функція — це така відповідність між множинами D та E, при якій кожному значенню змінної $x\notin D$ відповідає одне й тільки одне значення.

Область визначення функції — це множина всіх значень аргумента, для яких можна обчислити значення функції.

Навчальні завдання

1. **Приклад**: Знайти область визначення функції $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$

Функція визначена, якщо x - 1 $\neq 1$ та 1+x > 0. Таким чином, областю визначення функції є: $(-1;1)\cup(1,\infty)$..

2. **Приклад**: Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}..$$

Перший доданок $\sqrt{1-2x}$ приймає дійсні значення при $1-2x\geq 0$, а другий при $-1\leq\dfrac{3x-1}{2}\leq 1$. Розв'язавши одержану систему нерівностей, знайдемо область означення функції: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

3. **Приклад**: Визначити, яка з заданих функцій парна чи непарна: а) ; б) $y = 2^x + 2^{-x}$ $y = x^2\sqrt[3]{x + 2\sin x}$; в) $y = x^2 + 5x$.

а) Так як $f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = (x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x)$, то функція непарна.

б) Маємо $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$.

Функція парна

в) Тут $f(-x) = (-x^2) + 5(-x) = x^2 - 5x \neq \pm f(x)$. Таким чином, функція не є ні парною, ні непарною.